

یافتن مختصات قرینه یک نقطه نسبت به یک خط راست (هندسه ۲)

نویسنده: علی حمیدی

منطقه سردرود

استان همدان

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

یک نقطه می تواند روی خط راست و یا با فاصله ای مشخص از خط راست قرار گیرد. در صورتی که نقطه روی خط راست قرار گیرد به وضوح قرینه^۱ آن نقطه نسبت به آن خط همان نقطه است. در غیر این صورت قرینه یا بازتاب نقطه نسبت به خط راست در طرف دیگر خط و به همان فاصله از خط می باشد. (مانند وضعیت یک شیء نسبت به یک آینه) حال این سوال مطرح می شود که اگر مختصات^۲ یک نقطه را داشته باشیم و معادله^۳ خط مشخصی موجود باشد آیا بدون این که از رسم شکل کمک بگیریم می توانیم مختصات قرینه نقطه مشخص را نسبت به خط مشخصی بدست آوریم؟ برای پاسخ به این سوال در زیر به بررسی حالات مختلف می پردازیم.

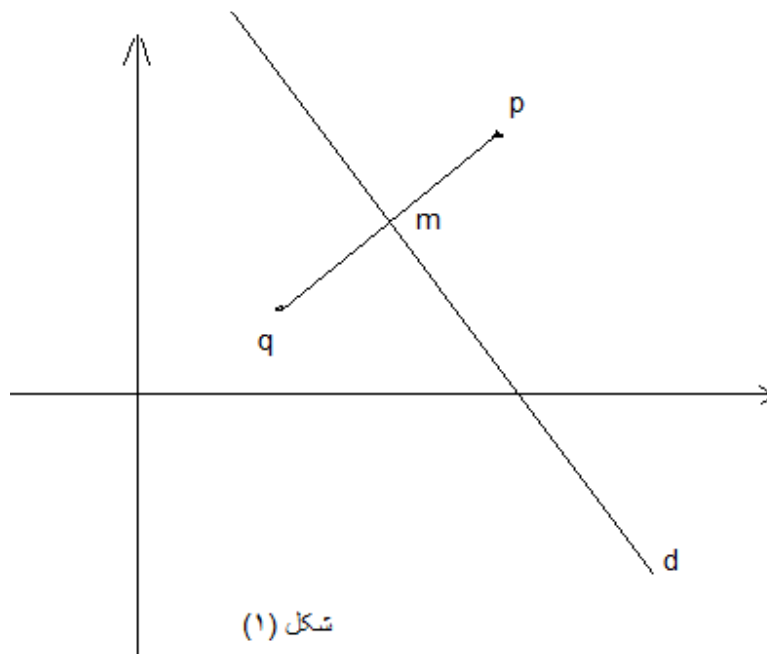
حالت اول : قرینه (بازتاب) نسبت به خط d به معادله $y = ax + b$:

فرض کنیم نقطه p به مختصات (x_0, y_0) را داشته باشیم و بخواهیم مختصات قرینه آن را نسبت به خط d به معادله $y = ax + b$ به دست آوریم. حال فرض می کنیم مختصات قرینه نقطه p نقطه $q(x_1, y_1)$ باشد. اگر x_1, y_1 را بر حسب x_0, y_0, a, b که معلوم هستند، به دست آوریم در این صورت مساله حل می شود.

با توجه به شکل (۱) چون نقطه m وسط پاره خط pq است لذا داریم: $m = (\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2})$ و چون نقطه m روی خط d قرار دارد لذا مختصات این نقطه در معادله خط d باید صدق کند. بنابراین :

$$\frac{y_1+y_0}{2} = a \frac{x_1+x_0}{2} + b \Rightarrow y_1 + y_0 = a(x_1 + x_0) + 2b \Rightarrow y_1 = ax_1 + ax_0 + 2b - y_0 \quad (۱)$$

^۱. Symmetry
^۲. Coordinate
^۳. equation



قرینه نقطه p نسبت به خط d به معادله $y = ax + b$

چون پاره خط pq بر خط d عمود است لذا شیب پاره خط pq برابر با قرینه معکوس شیب خط d است پس داریم:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{1}{a} \Rightarrow ay_1 - ay_0 = -x_1 + x_0 \quad (2)$$

با جای گذاری مقدار y_1 از رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$a(ax_1 + ax_0 + 2b - y_0) - ay_0 = -x_1 + x_0 \Rightarrow$$

$$a^2 x_1 + a^2 x_0 + 2ba - y_0 a - ay_0 = -x_1 + x_0 \Rightarrow$$

$$a^2 x_0 + 2ba - y_0 a - ay_0 - x_0 = -x_1 - a^2 x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-a^2 x_0 - 2ba + 2y_0 a + x_0}{a^2 + 1} = \frac{x_0(1 - a^2) + 2a(y_0 - b)}{a^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x_0(1 - a^2) + 2a(y_0 - b)}{a^2 + 1} \quad (3)$$

حال با قرار دادن مقدار به دست آمده برای x_1 در رابطه (۱)، مقدار y_1 را به دست می آوریم :

$$y_1 = a \frac{x_0(1-a^2)+2a(y_0-b)}{a^2+1} + ax_0 + 2b - y_0$$

پس از محاسبه و ساده کردن عبارت اخیر داریم:

$$y_1 = \frac{2(ax_0+b)-y_0(1-a^2)}{a^2+1} \quad (4)$$

بنابر این با توجه به روابط (۳) و (۴) قرینه نقطه p به مختصات (x_0, y_0) نسبت به خط d به معادله

$y = ax + b$ نقطه q به مختصات $\left(\frac{x_0(1-a^2)+2a(y_0-b)}{a^2+1}, \frac{2(ax_0+b)-y_0(1-a^2)}{a^2+1}\right)$ می باشد.

مثال: مختصات قرینه (بازتاب) نقطه $p(1, -3)$ را نسبت به خط به معادله $y - 2x = 5$ به دست آورید.

$$y - 2x = 5 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow a = 2, b = 5$$

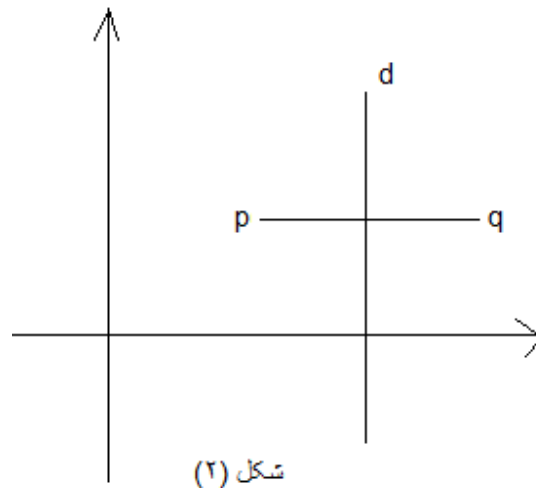
$$q = \left(\frac{x_0(1-a^2)+2a(y_0-b)}{a^2+1}, \frac{2(ax_0+b)-y_0(1-a^2)}{a^2+1} \right) =$$

$$\left(\frac{1(1-2^2)+2 \times 2(-3-5)}{2^2+1}, \frac{2(2 \times 1+5)-(-3)(1-2^2)}{2^2+1} \right) = \left(\frac{-35}{5}, \frac{5}{5} \right) \Rightarrow q = (-7, 1)$$

در نتیجه مختصات قرینه نقطه $p(1, -3)$ شنسبت به خط به معادله $y - 2x = 5$ نقطه $q = (-7, 1)$ است.

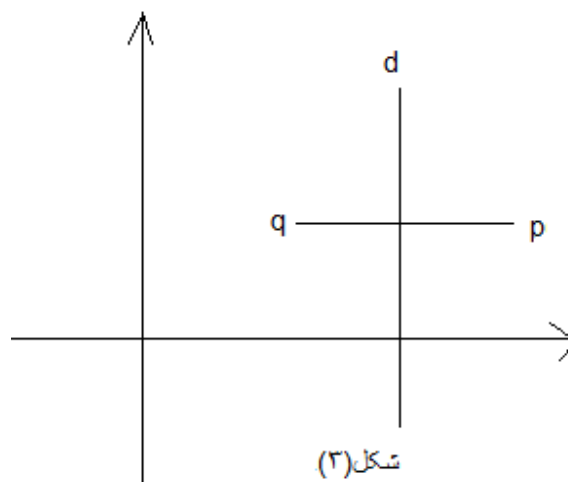
حالت دوم: قرینه نسبت به خط d به معادله $x = k$:

الف- اگر معادله خط به صورت $x = k$ باشد که در آن k مقدار معلوم و ثابتی باشد و نقطه p به مختصات (x_0, y_0) به طوری که $x_0 < k$ یعنی نقطه p در طرف چپ خط $x = k$ قرار داشته باشد در این صورت بازتاب نقطه p نسبت به خط $x = k$ نقطه q به مختصات $(x_0 + 2(k - x_0), y_0) = (2k - x_0, y_0)$



قرینه نقطه p نسبت به خط d به معادله $x = k$ با شرط $x_0 < k$

ب- اگر معادله خط به صورت $x = k$ باشد که در آن k مقدار معلوم و ثابتی باشد و نقطه p به مختصات (x_0, y_0) به طوری که $x_0 > k$ یعنی نقطه p در طرف راست خط $x = k$ قرار داشته باشد در این صورت بازتاب نقطه p نسبت به خط $x = k$ نقطه q به مختصات $(x_0 - 2(x_0 - k), y_0) = (2k - x_0, y_0)$



قرینه نقطه p نسبت به خط d به معادله $x = k$ با شرط $x_0 > k$

باتوجه به الف و ب از حالت دوم، می بینیم که در هر دو صورت قرینه نقطه p به مختصات (x_0, y_0) نسبت به خط $x = k$ نقطه q به مختصات $(2k - x_0, y_0)$ می باشد.



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir