LES PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

Maria ZRIKEM

Ensa de Marrakech

Définition du problème

En vue de réalisation d’un objectif ou d’un projet (construction d’une villa), un certain nombre de tâches ou d’opérations doit être effectuer.

Le problème d’ordonnancement consiste à déterminer la date de début de chaque tâche tout en minimisant la durée de réalisation totale du projet, sachant que toute une série de contraintes doit être satisfaite

Définition du problème

Étant donné un projet constitué de n tâche de durées d'exécution fixes et soumises à des contraintes de postériorité stricte, le problème consiste à déterminer un «calendrier d'exécution» qui minimise la durée totale d'exécution du projet.

Notation

1, 2, …, i, …., n l'ensemble des tâches

t(i) : la date de début de la tâche i

d(i) : la durée de la tâche i

Contraintes temporelles

- Contraintes de localisation temporelle

La tâche i doit débuter après la date a(i) :

$$t(i) \geq a(i)$$

- Contraintes de postériorité stricte

La tâche j ne peut débuter avant l'achèvement de la tâche i :

$$t(j) \geq t(i) + d(i)$$

-Contraintes de postériorité avec délai

Un délai minimum f(i,j) doit être respecté entre l'achèvement de i et le début de j :

$$t(j) \geq t(i) + d(i) + f(i,j)$$

- Contraintes de postériorité partielle

La tâche j ne peut commencer avant que la tâche ait atteint un degré d'avancement $\alpha(i,j)$ suffisant :

$$t(j) \geq t(i) + \alpha(i,j) * d(i) \quad \text{où } 0 \leq \alpha(i,j) \leq 1$$

-Contraintes de continuité

Pour que la tâche j puisse débuter, il faut que le temps écoulé depuis le début de la tâche i ne soit supérieur à t_{ij} :

$$t(j) - t(i) \leq t_{ij}$$

Remarque

Dans certains problème d'ordonnancement, les durées des tâches d(i) sont connues avec certitude, dans d'autres, ce sont des variables aléatoires.

Contraintes sur les moyens mis en oeuvre

Appelées aussi contraintes cumulatives, elles concernent les limitations de matériel , financement et main d'œuvre à un instant ou pendant une période donnée.

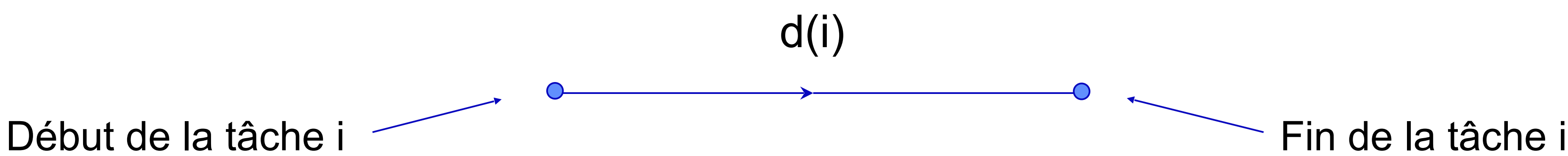
La méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique

Appelée aussi méthode du chemin critique, elle a été introduite aux états unis en 1958 pour la réalisation d'un programme de recherche et de construction des fusées Polaris. Cette méthode tient une place dominante par sa simplicité, son efficacité et la variété des extensions qui ont pu être développées.

La méthode PERT ne prend en compte que les contraintes temporelles et suppose les durées des tâches connues avec certitude. Elle consiste à ramener le problème de détermination du « timing » des opérations à la recherche des chemins extrémaux dans un graphe valué.

Représentation du problème par un graphe valué

- On considère un graphe contenant autant d'arcs qu'il y a de tâches à effectuer.
- Le sommet initial d'un arc représente le début de la tâche et le sommet terminal représente la fin de la tâche.
- Chaque arc est affecté d'un nombre représentant la durée de la tâche correspondante



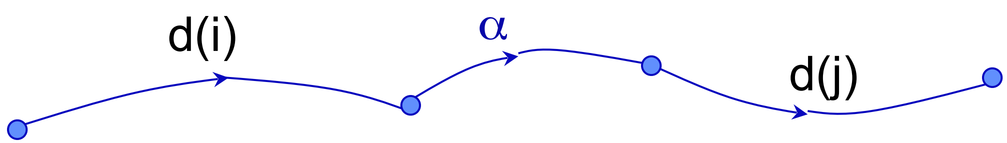
- On ajoute à ce graphe deux sommets supplémentaires représentant respectivement, le début et la fin des travaux.

Représentation du problème par un graphe valué

- Pour représenter les contraintes temporelles du problème, on les écrit sous la forme :

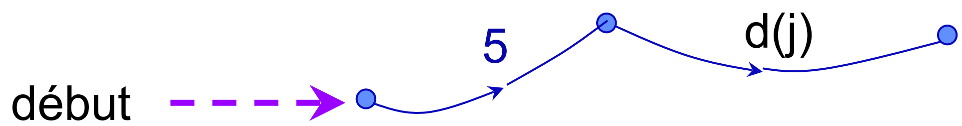
$$t(j) \geq [t(i) + d(i)] + \alpha \quad \text{où } \alpha \in \Re$$

et on trace un arc de valeur α depuis la fin de i jusqu'au début de j.

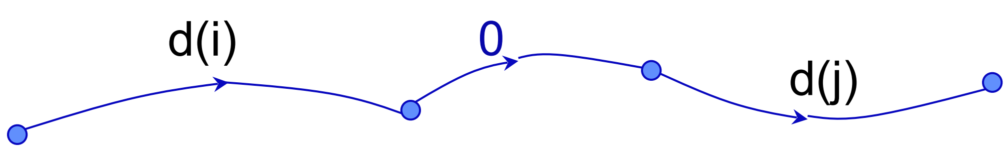


Exemple :

1) La tâche j doit débuter au moins 5 semaines après le début des travaux : $t(j) \geq (t_0 + 0) + 5$

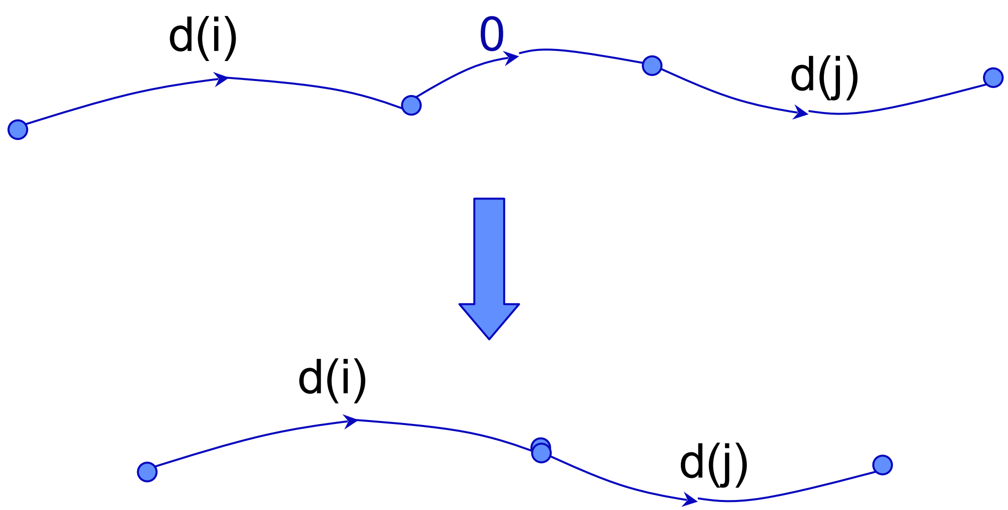


2) La tâche j ne peut commencer que lorsque la tâche i est achevée : $t(j) \geq [t(i) + d(i)] + 0$



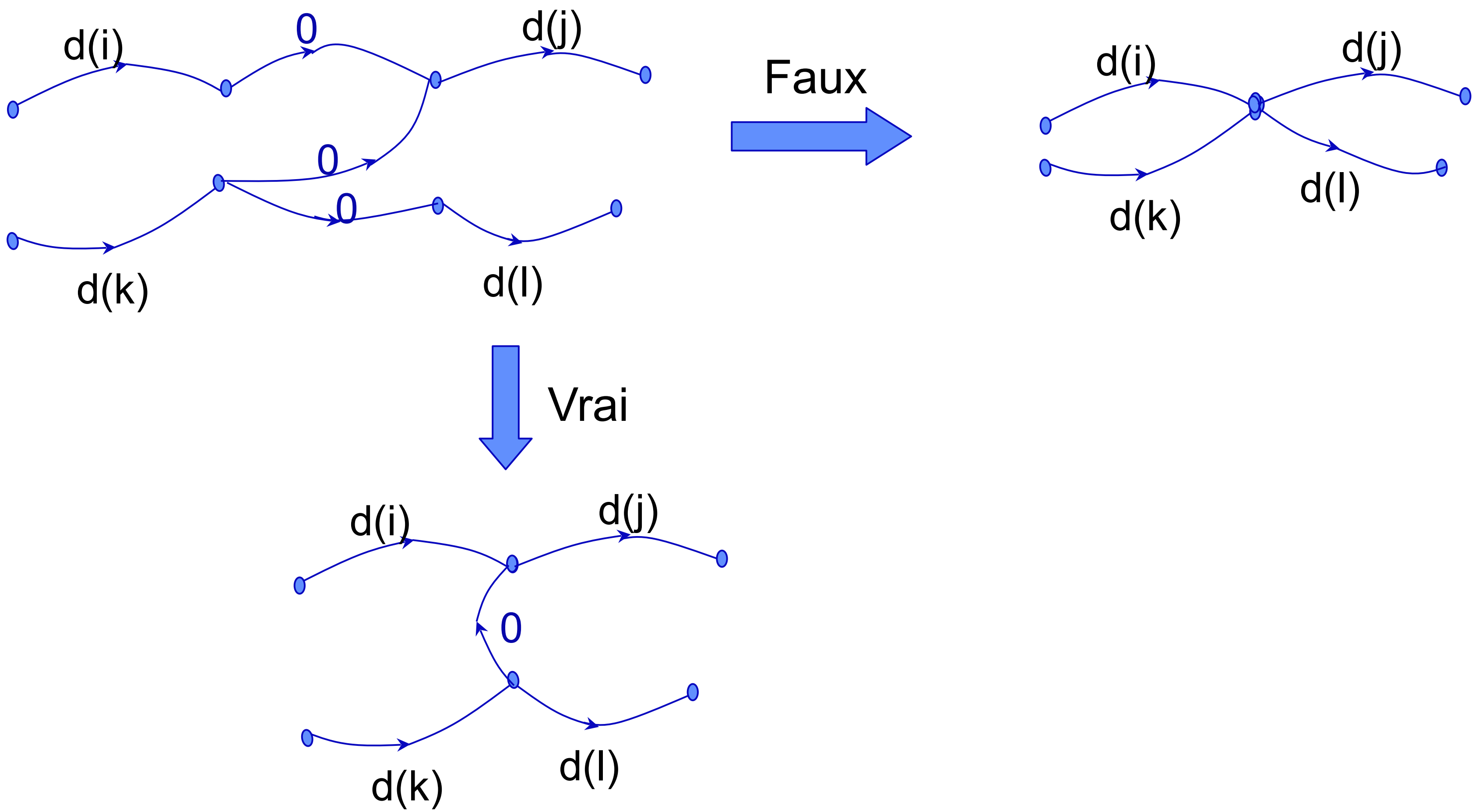
Simplification du graphe

Pour limiter le nombre d'arcs et de sommets, on essaye autant que possible de simplifier le graphe, ainsi, deux sommets joints par un arc de valeur 0 peuvent être confondus.



Simplification du graphe

Attention : ne pas introduire des contraintes qui n'existent pas dans le problème.



Il résulte de la mise en graphe que :

- La *date de début au plus tôt* de la tâche i notée ES(i) (Earlist start) sera donnée par le chemin de valeur maximum joignant le début des travaux au début de i

En réalisant ce calcul pour chaque tâche, on obtient l'ordonnancement au plus tôt et par la même occasion la durée totale minimale T des travaux.

- la *date de fin au plus tôt* de la tâche i : EF(i) = ES(i) + d(i)

- La *date de fin au plus tard* de la tâche i notée LF(i) est celle dont le dépassement provoquerait un prolongement de la durée totale des travaux. Elle s'obtient en retranchant de T la valeur du chemin maximum joignant la fin des travaux à la fin de i

- La *date de début au plus tard* de la tâche i : LS(i) = LF(i) - d(i)

On obtient ainsi les dates de début et de fin au plus tôt et au plus tard de chacune des tâches de manière à terminer les travaux au temps T.

Tâches critiques, marges libres et totales

- Une tâche i est *critique* si ES(i) = LS(i)

  Ce sont les tâches qui constituent les chemins de valeur maximum (T) entre le début et la fin des travaux. Tout retard sur ces tâches entraîne un retard équivalent sur la durée total de l'ordonnancement.

- La *marge totale* de la tâche i : MT(i) = LS(i) - ES(i)

  Elle représente le délai maximal de mise à exécution de la tâche i

- La *marge libre* de la tâche i : $ML(i) = \min_{j \text{ suit } i}[ES(j) - EF(i)]$

  Si {j/ j suit i} = ∅ alors ML(i) = MT(i)

  Elle représente le retard qu'on peut se permettre sur i sans perturber les dates au plus tôt des tâches qui la suivent

Exemple

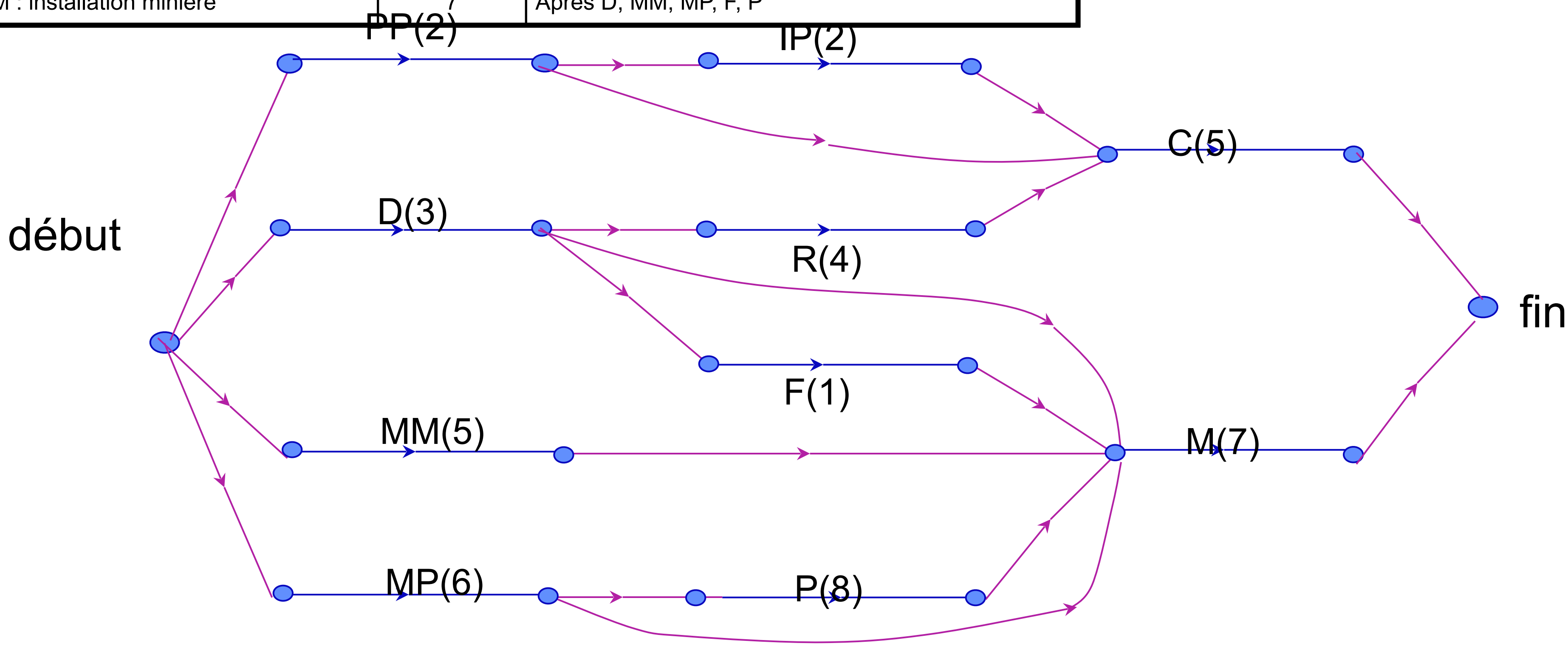
En vue de l'exploitation d'une mine, on désire construire :

- Un port sur le canal qui passe non loin de là
- Une route,
- Une voie de chemin de fer reliant la mine au port,
- Une cité ouvrière

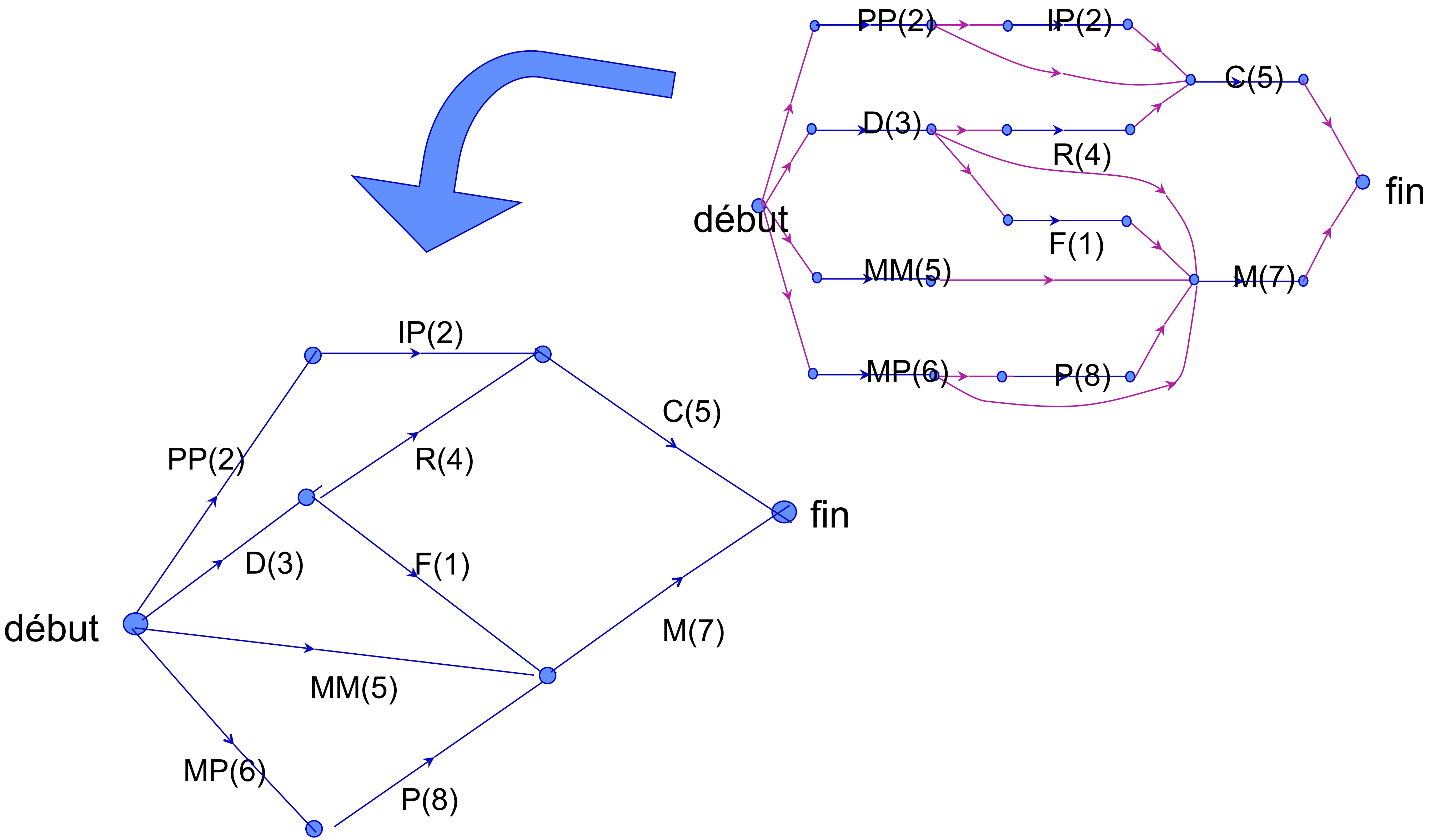
Tâches	durée	Contraintes
PP : installation d'un port provisoire	2	--
D : déblai route et chemin de fer	3	--
MM: commande du matériel minier	5	--
MP : commande du matériel portuaire	6	--
IP : installation du port	2	Après PP
R : construction de la route	4	Après D
F : pose de la voie ferrée	1	Après D
P : installation portuaire	8	Après MP
C : construction de la cité	5	Après PP, D, IP,R
M : installation minière	3	Après D, MM, MP, F, P

Graphe associé

Tâches	durée	Contraintes
PP : installation d'un port provisoire	2	--
D : déblai route et chemin de fer	3	--
MM: commande du matériel minier	5	--
MP : commande du matériel portuaire	6	--
IP : installation du port	2	Après PP
R : construction de la route	4	Après D
F : pose de la voie ferrée	1	Après D
P : installation portuaire	8	Après MP
C : construction de la cité	5	Après PP, D, IP,R
M : installation minière	7	Après D, MM, MP, F, P



Graphe simplifié

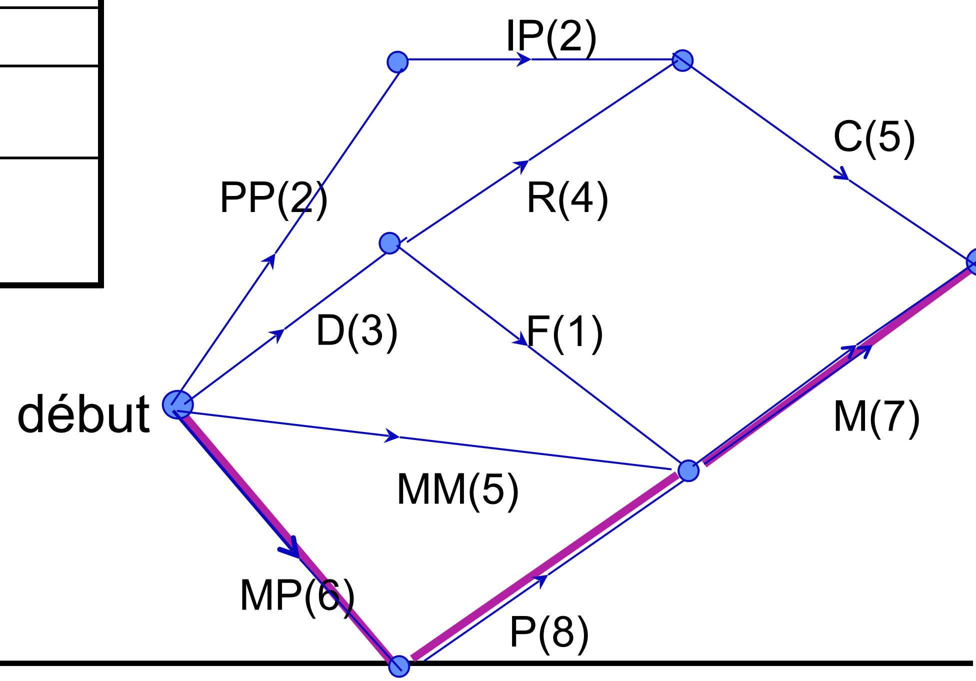


Solution du problème : ordonnancement

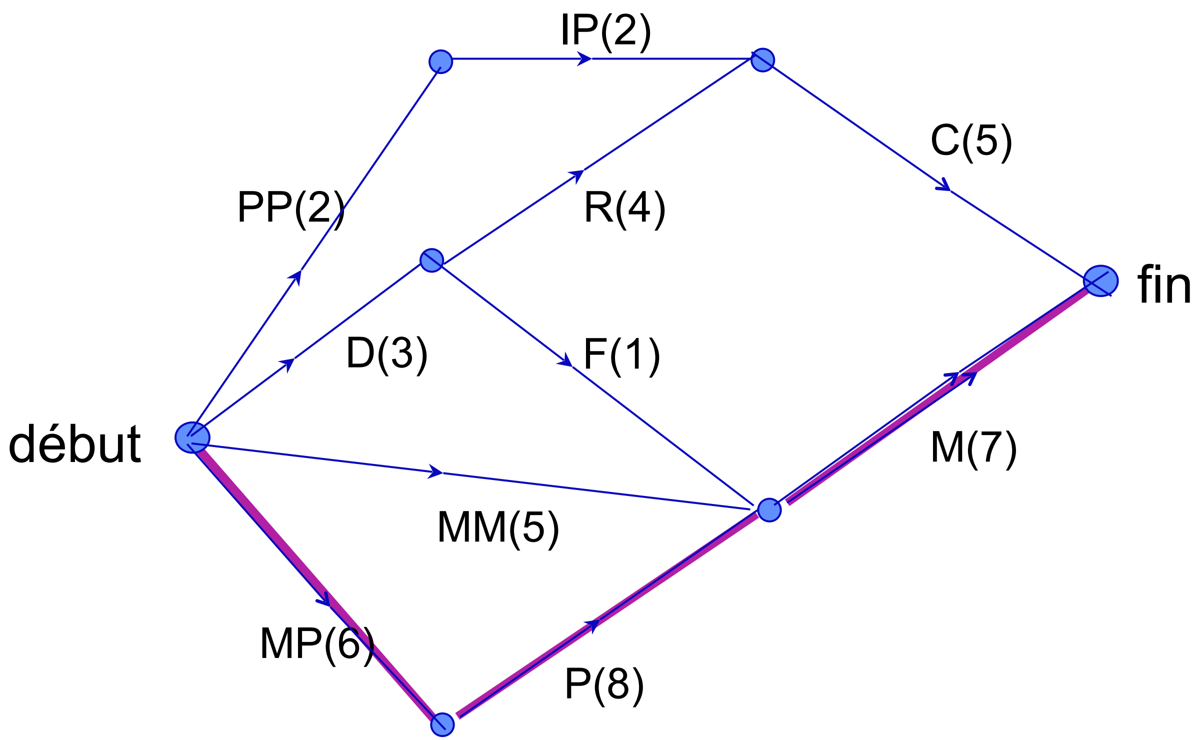
Tâches	durée	Contraintes	ES(i)	EF(i)	LF(i)	LS(i)	ML	MT	Tâches critiques
PP	2	--	0	2	14	12	0	12	
D	3	--	0	3	12	9	0	9	
MM	5	--	0	5	14	9	9	9	
MP	6	--	0	6	6	0	0	0	√
IP	2	Après PP	2	4	16	14	3	12	
R	4	Après D	3	7	16	12	0	9	
F	1	Après D	3	4	14	13	10	8	
P	8	Après MP	6	14	14	6	0	0	√
C	5	Après PP, D, IP,R	7	12	21	16	9	9	
M	7	Après D, MM, MP, F, P	14	21	21	14	0	0	√

Solution du problème : ordonnancement

Tâches	durée	Contraintes	ES(i)	EF(i)	LF(i)	LS(i)	ML	MT	Tâches critiques
PP	2	--	0	2	14	12	0	12	
D	3	--	0	3	12	9	0	9	
MM	5	--	0	5	14	9	9	9	
MP	6	--	0	6	6	0	0	0	√
IP	2	Après PP	2	4	16	14	3	12	
R	4	Après D	3	7	16	12	0	9	
F	1	Après D	3	4	14	13	10	8	
P	8	Après MP	6	14	14	6	0	0	√
C	5	Après PP, D, IP,R	7	12	21	16	9	9	
M	7	Après D, MM, MP, F, P	14	21	21	14	0	0	√



Solution du problème : ordonnancement



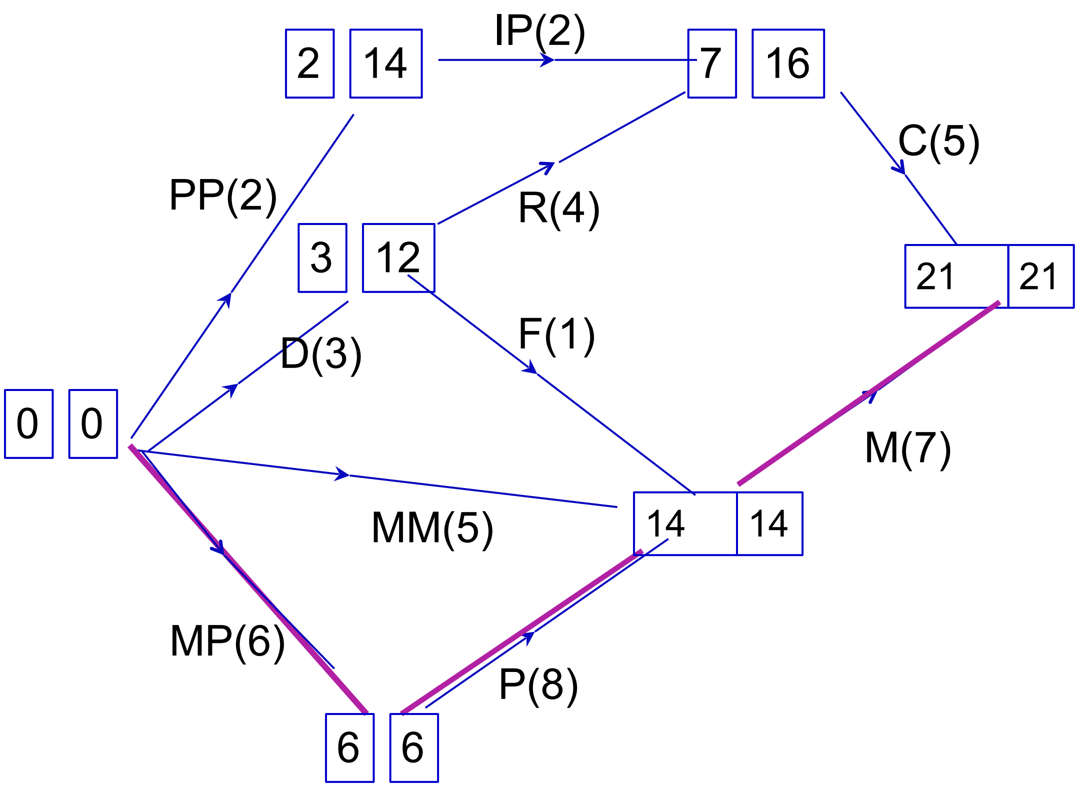
Représentation des résultats

On peut représenter les résultats au moyen d'un graphe simplifié, à chaque sommet on associe :

- la date de début au plus tôt à laquelle peuvent commencer les tâches dont ce sommet représente le début (case gauche).

- la date de fin au plus tard à laquelle doivent finir les tâches dont ce sommet représente la fin (case droite)

Représentation des résultats



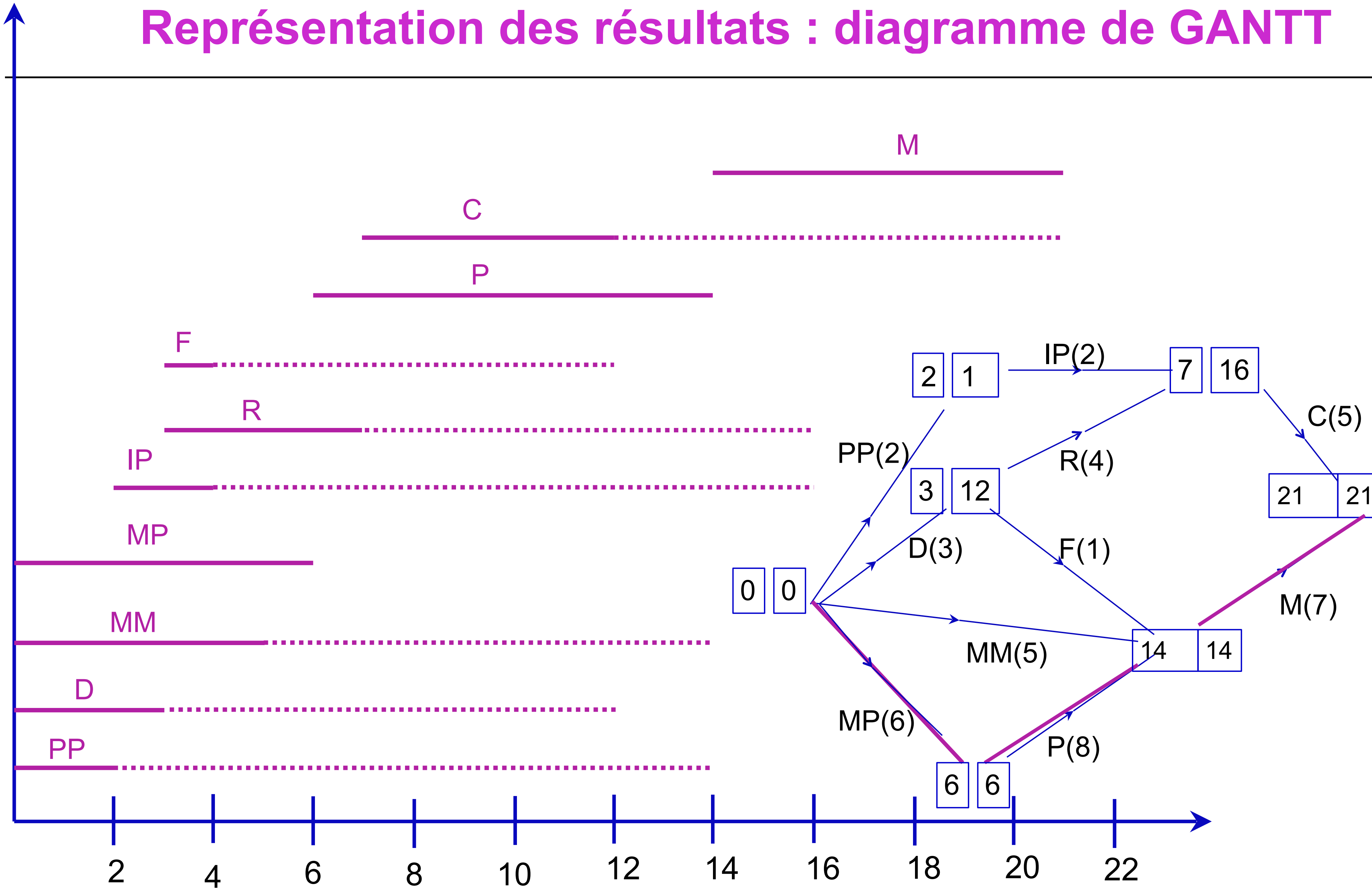
T	D	C	ES	EF	LF	LS	ML	MT	TC
PP	2	--	0	2	14	12	0	12	
D	3	--	0	3	12	9	0	9	
MM	5	--	0	5	14	9	9	9	
MP	6	--	0	6	6	0	0	0	√
IP	2	Après PP	2	4	16	14	3	12	
R	4	Après D	3	7	16	12	0	9	
F	1	Après D	3	4	14	13	10	8	
P	8	Après MP	6	14	14	6	0	0	√
C	5	Après PP, D, IP,R	7	12	21	16	9	9	
M	3	Après D, MM, MP, F, P	14	21	21	14	0	0	√

Ce graphe contient toutes les informations que nous avons dans le tableau précèdent

Représentation des résultats : diagramme de GANTT

On peut associer au problème un diagramme où chaque tâche est représentée par un segment, qui commence au plus tôt et qui est de longueur proportionnelle à la durée de la tâche. Sa lecture est aisée et permet de prendre en compte les contraintes cumulatives. Par contre, il ne contient pas toutes les informations du tableau; on prolonge par pointillé le segment de chaque tâche jusqu'à sa fin au plus tard.

Représentation des résultats : diagramme de GANTT



Méthode des potentiels

Méthode des potentiels : mise en graphe

- Les sommets représentent les tâches à effectuer.
- Les arcs sont associés aux contraintes de type :

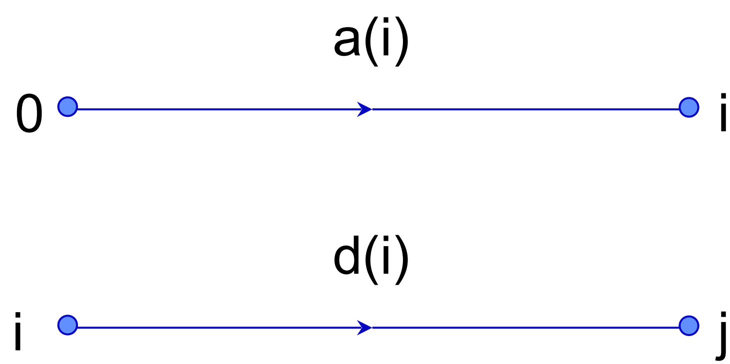
$$t(j) - t(i) \geq a(i,j).$$

- l'arc (i,j) est affecté de la valeur a(i,j).
- on ajoute 2 sommets : tâches début et fin des travaux.

Exemples :

$T(i) \geq a(i)$

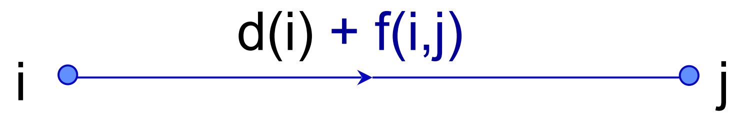
$T(j) \geq t(i) + d(i)$



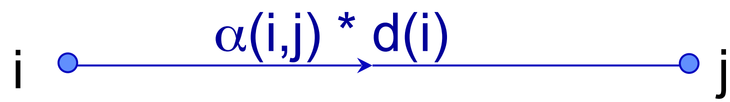
Méthode des potentiels : mise en graphe

Exemples :

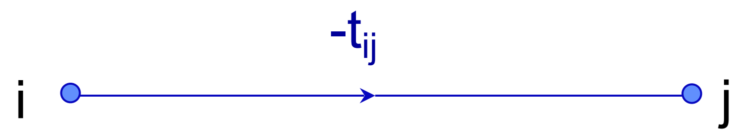
$T(j) \geq t(i) + d(i) + f(i,j)$



$T(j) \geq t(i) + \alpha(i,j) * d(i)$

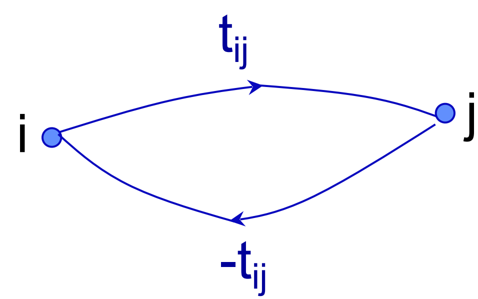


$t(j) - t(i) \leq t_{ij}$



$t(j) = t(i) + t_{ij}$

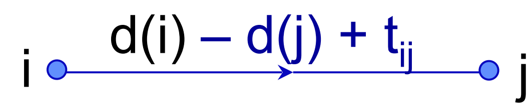
j commence exactement t_{ij} unités de temps après le début de i



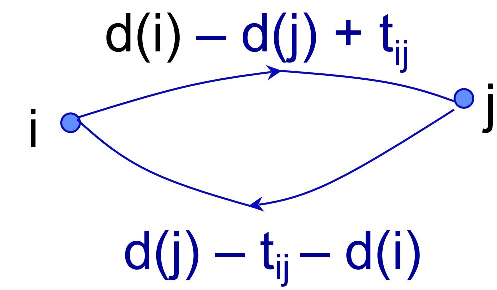
Méthode des potentiels : mise en graphe

Exemples :

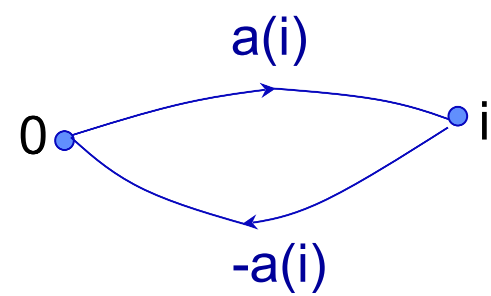
- la fin de j doit suivre la fin de i d'au moins t_{ij} unités de temps : $t(j) + d(j) \geq t(i) + d(i) + t_{ij}$



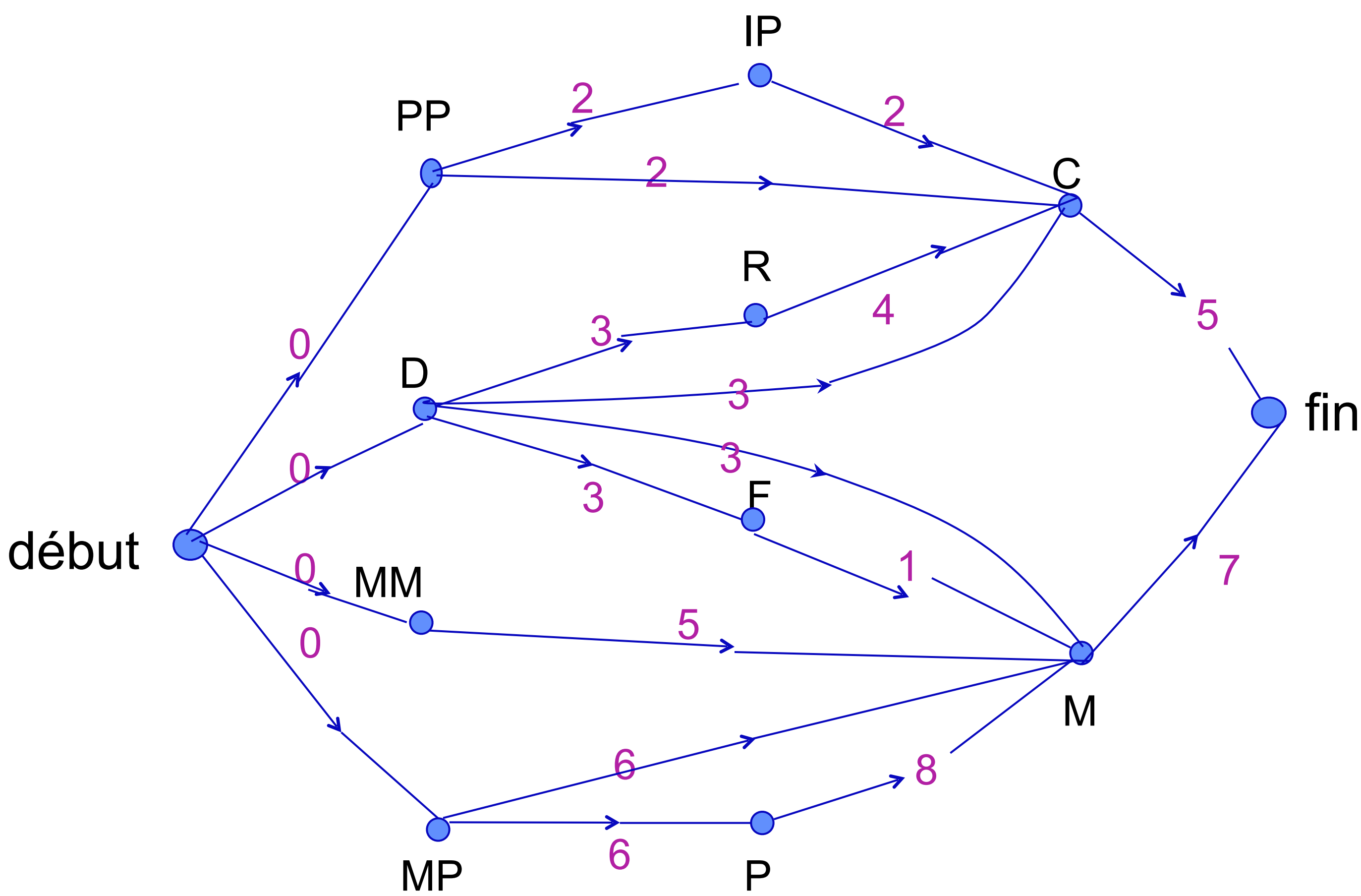
- la fin de j doit suivre exactement t_{ij} unités après la fin de i :



- la tâche i doit démarrer exactement à la date a(i) :



Méthode des potentiels : mise en graphe



T	d	Contraintes
PP	2	--
D	3	--
MM	5	--
MP	6	--
IP	2	Après PP
R	4	Après D
F	1	Après D
P	8	Après MP
C	5	Après PP, D, IP,R
M	3	Après D, MM, MP, F, P

Il résulte de la mise en graphe que :

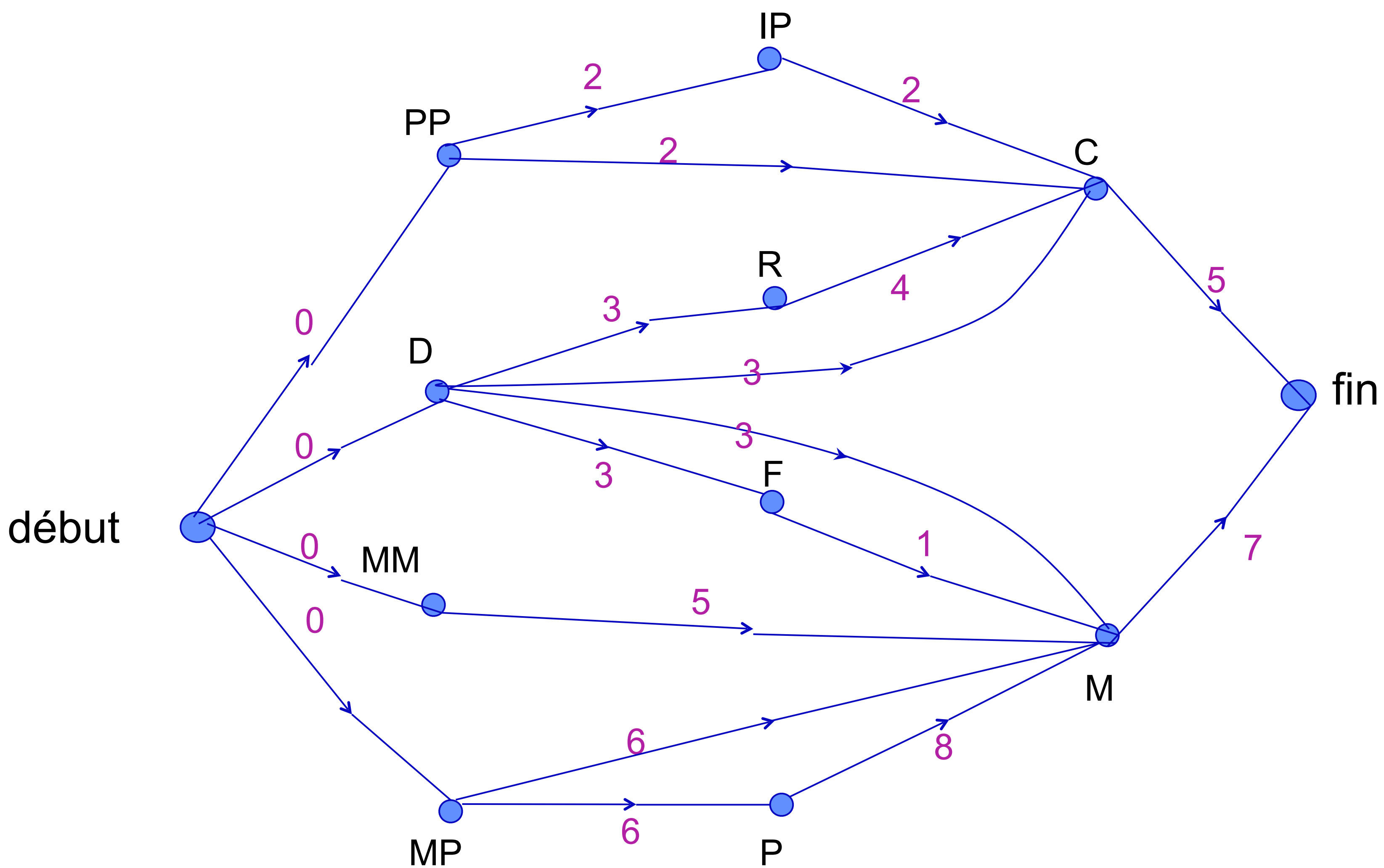
- La *date de début au plus tôt* de la tâche i est la valeur du chemin maximum joignant le sommet i au début des travaux.

- la *date de début au plus tard* de la tâche i est la valeur du chemin maximum joignant le sommet i à la fin des travaux.

- les autres dates ainsi que les marges libres et totales se déduisent comme pour la méthode PERT.

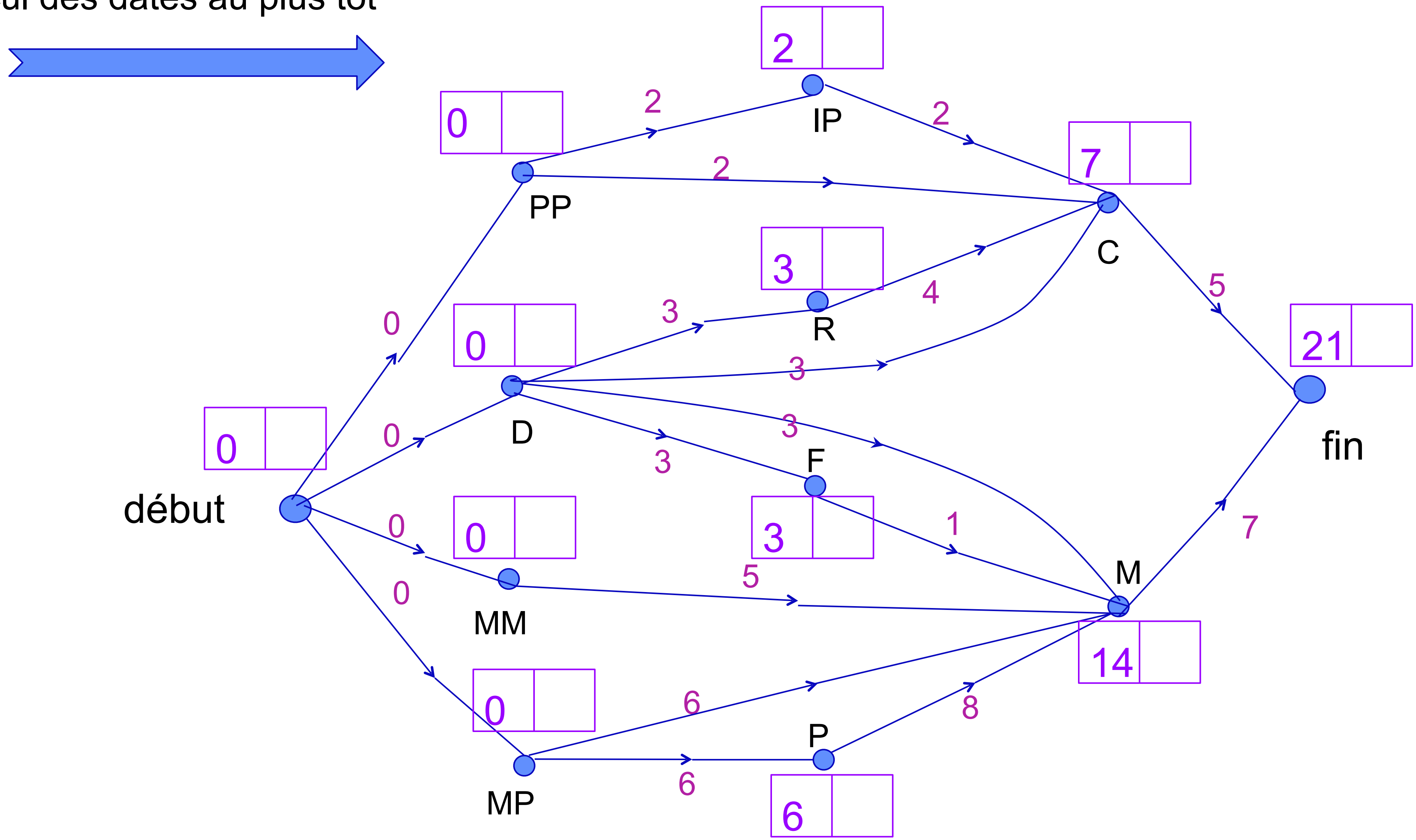
- les résultats se présentent de la même façon.

Méthode des potentiels : mise en graphe



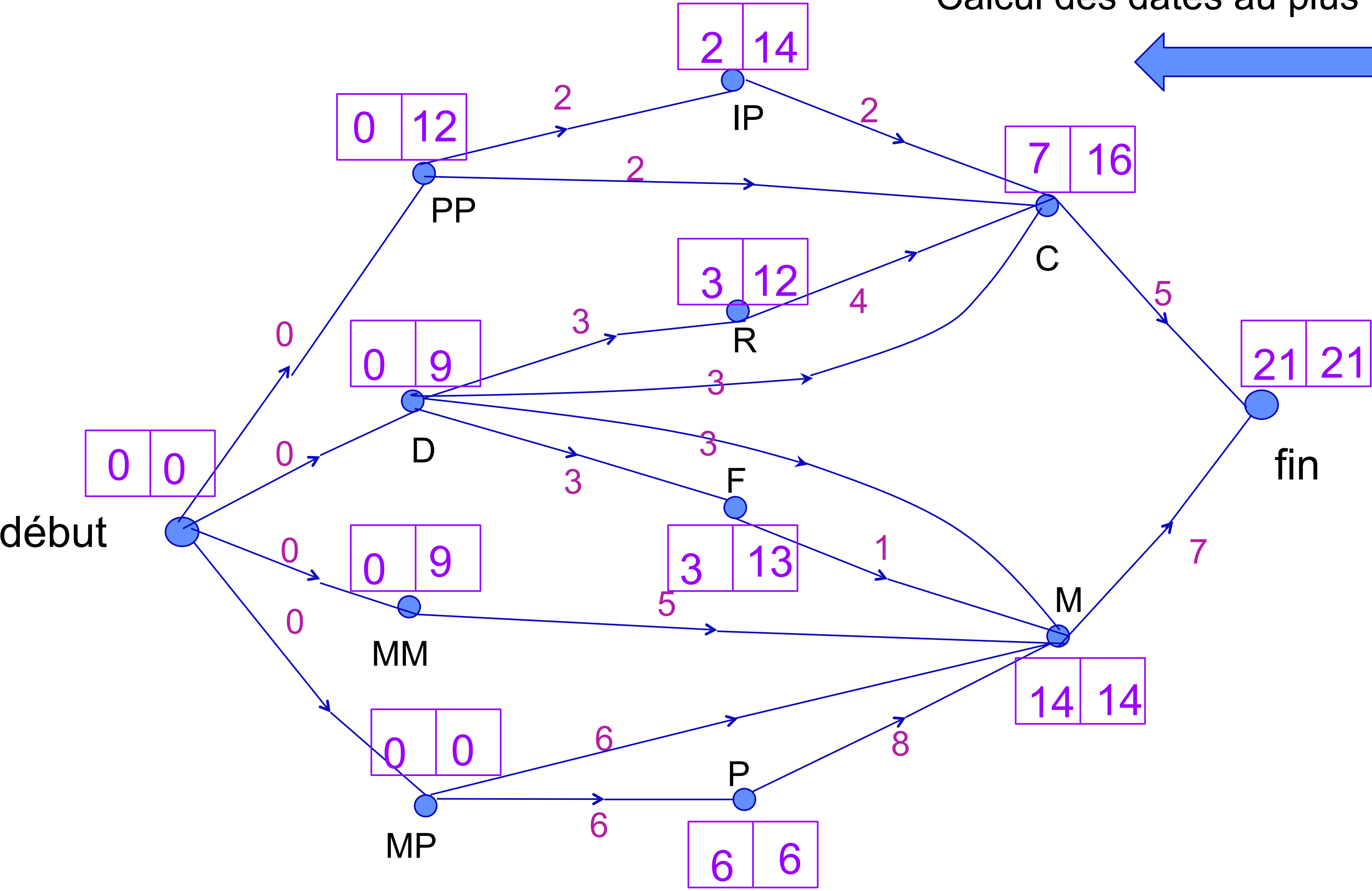
Méthode des potentiels : mise en graphe

Calcul des dates au plus tôt



Méthode des potentiels : mise en graphe

Calcul des dates au plus tard



Prise en compte des contraintes cumulatives

Les tâches à réaliser font appel en général à des moyens (outils, machines, hommes, …) qui ne sont disponibles qu'en quantités limitées.

On peut tenir compte de ces contraintes en jouant sur les intervalles de flottement associés aux tâches (ML, MT).

Prise en compte des contraintes cumulatives

Courbe de charge

Pour un ordonnancement donné, à chaque tâche est associé une courbe de charge représentant au cours du temps les quantités cumulées des moyens à mettre en œuvre pour réaliser les tâches en cours. Si ces quantités respectent les contraintes relatives à ce moyen, alors pas de problème. Sinon,on détermine les tâches responsables de surcharge que l’on déplace dans les limites de leurs marges totales.

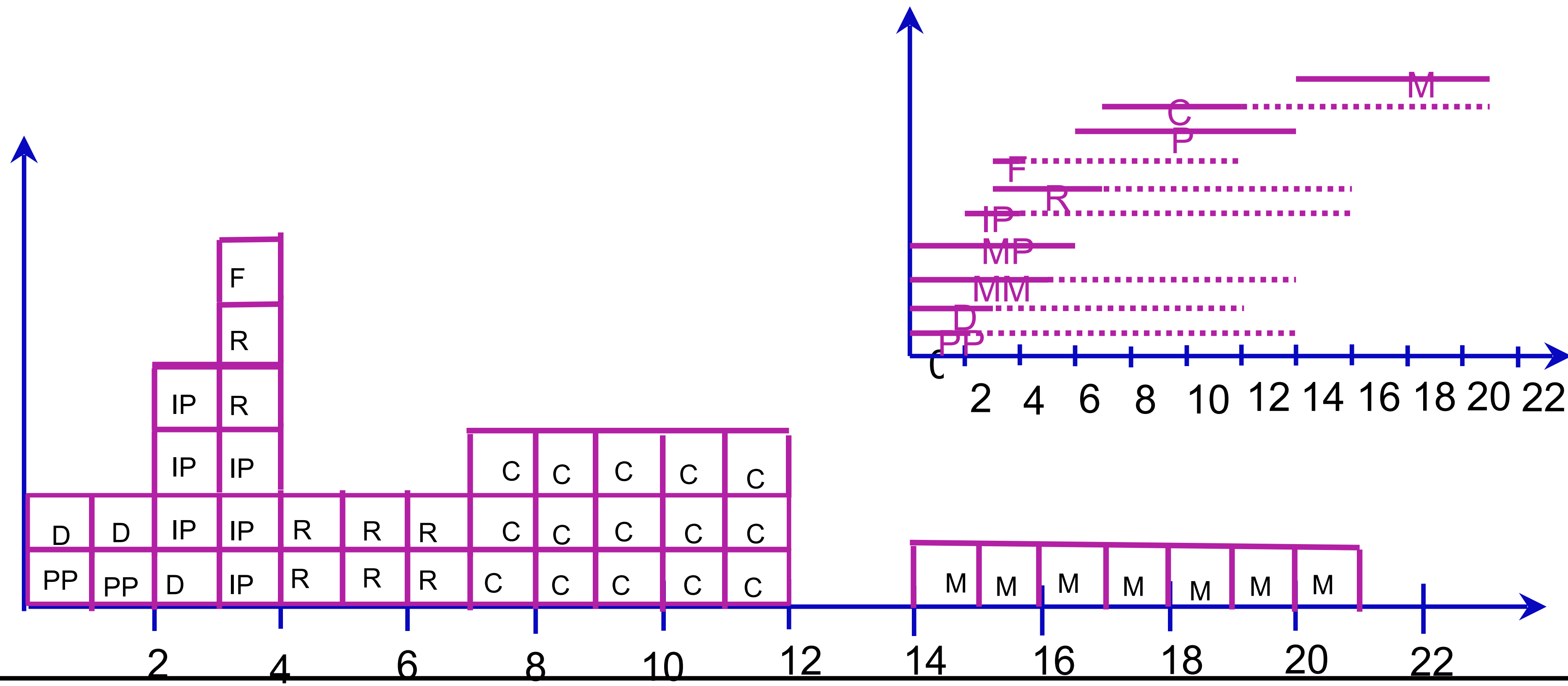
Si ces déplacements ne permettent pas de satisfaire les contraintes, alors, la durée totale du travaux doit être augmentée $\Longrightarrow$ heuristiques

Prise en compte des contraintes cumulatives

Courbe de charge

Supposons qu'au sein d'un ensemble d'ouvriers, chaque tâche nécessite un nombre d'équipes fixé comme suit :

PP	D	MM	MP	IP	R	F	P	C	M
1	1	0	0	3	2	1	0	3	1



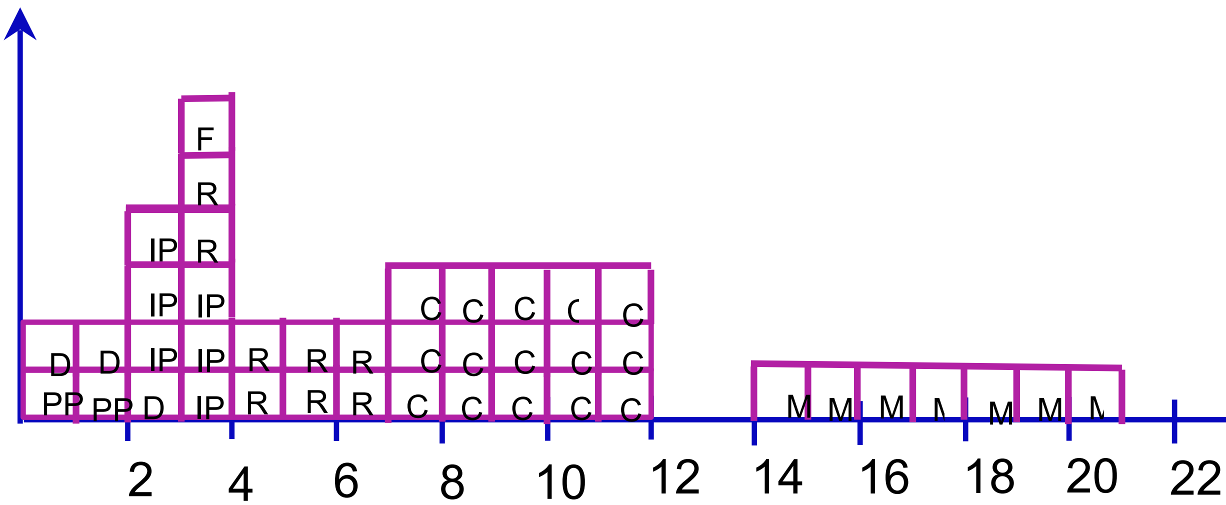
Prise en compte des contraintes cumulatives

Supposons qu'on dispose à chaque instant de 3 équipes.

Intuitivement :

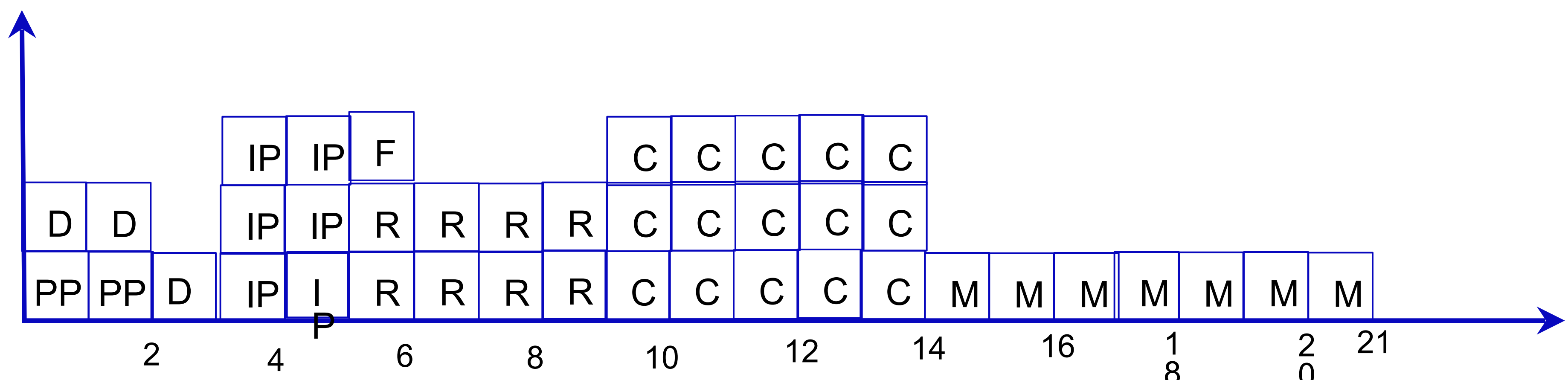
1- on recule C de 2 semaines (c'est permet voir ML)

2- on recule R de 2 Semaines (moyennant le recul de C)



3- on recule IP d'une semaines

4- on recule F de 2 semaines



Algorithme de MILORD

1- Ranger les tâches par ordre croissant de leurs dates de début au plus tard. En cas d’exæquo, on prend la tâche qui a la plus petite marge libre.

2- considérer les tâches dans l’ordre obtenu et les placer au plus tôt compte tenu de leur date début au plus tôt et des contraintes cumulatives.

Algorithme de MILORD : Application à l'exemple

1er étape :

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tâches	MP	P	D	MM	R	PP	F	M	IP	C
Début au plus tard	0	6	9	9	12	12	13	14	14	16
ML	0	0	0	9	0	0	10	0	3	9
Début au plus tôt	0	6	0	0	3	0	3	14	2	7
Contraintes cumulatives	0	0	1	0	2	1	1	1	3	3

Algorithme de MILORD : Application à l'exemple

2ième étape :

- MP : 0, PP : 0 (non pas besoin d'ouvriers)
- D commence en 0, durée 3, 1 équipe
- MM : 0
- R commence en 3, durée 4, 2 équipes
- PP commence en 0, durée 2, 1 équipe
- F commence en 3, durée 1, 1 équipe
- M commence en 14, durée 7, 1 équipe
- IP ne peut commencer avant 7, donc recule de semaines alors que ML=3, donc les tâches qui suivent doivent reculer de 2 ⇒ C commence à 9 au plus tôt au lieu de 7
- C commence en 9, durée 5, 3 équipes

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	MP	P	D	MM	R	PP	F	M	IP	C
LS	0	6	9	9	12	12	13	14	14	16
ML	0	0	0	9	0	0	10	0	3	9
ES	0	6	0	0	3	0	3	14	2	7
CC	0	0	1	0	2	1	1	1	3	3
D	6	8	3	5	4	2	1	7	2	5