

Coefficients d'induction / Phénomènes d'induction

I- Coefficients d'induction

1- Coefficient d'auto-induction - Inductance propre d'un circuit filiforme

Un circuit (C) parcouru par un courant d'intensité I crée en tout point de l'espace un champ d'induction magnétique \vec{B} . Le circuit est traversé par un flux ϕ de son propre champ \vec{B} .

Le champ $\vec{B}(M)$ créé par le circuit en un point M : $\vec{B}(M) = I \left[\int_c \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \right]$

Etant donné que le champ \vec{B} est proportionnel au courant d'intensité I , il en est de même pour le flux ϕ de \vec{B} à travers le circuit (C) : $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Où (S) est une surface qui s'appuie sur (C)

On peut écrire : $\phi = LI$

Le coefficient de proportionnalité noté L est appelé inductance propre du circuit : $L \equiv \frac{\phi}{I}$

Le coefficient L ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit.

Le coefficient L est positif et s'exprime en Henry (H) ou en Weber par Ampère (Wb/A) si le flux est en weber et l'intensité de courant en ampère.

Exemple d'une spire circulaire (O,R) d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I (figure1)

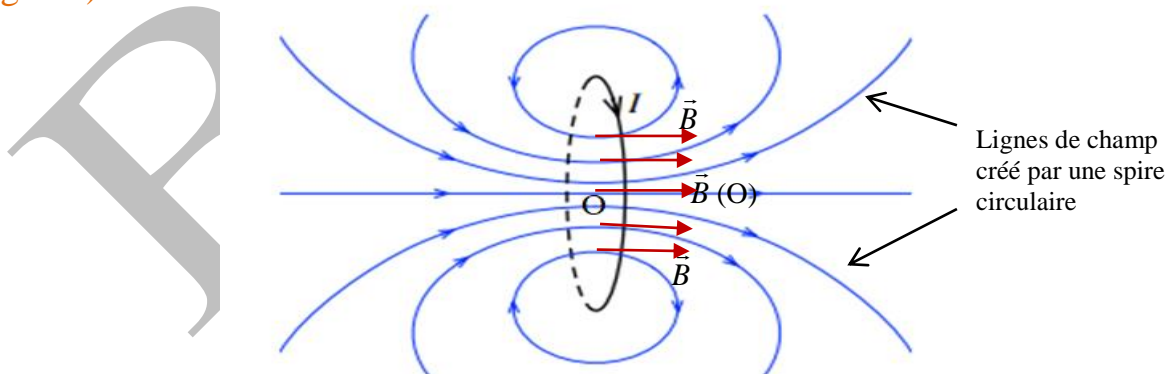


Figure 1 : lignes de champ à travers une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I

Le champ créé par la spire en son centre O ; $\vec{B}(O) = I \frac{\mu_0}{2R} \vec{e}_z$ (voir exercice 2 TD1)

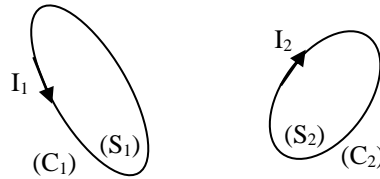
$$\phi = \iint_S \vec{B}(M \in S) \cdot d\vec{S} \approx \iint_S \vec{B}(O) \cdot d\vec{S} = I \iint_S \frac{\mu_0}{2R} \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = I \frac{\mu_0}{2R} \pi R^2$$

Où S est la surface du disque limité par la spire circulaire (O,R) , orientée par le courant conformément à la règle du tire-bouchon.

$$\phi = LI \Rightarrow L \equiv \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi R}{2}$$

2- Inductance mutuelle de deux circuits filiformes

Soit deux circuits (C_1) et (C_2) parcourus respectivement par des courants d'intensités I_1 et I_2 . Chacun de ces circuits crée un champ d'induction magnétique dont les lignes de champ traversent plus ou moins l'autre circuit. Chacun des circuits est donc traversé par un flux magnétique.



On note \vec{B}_1 le champ d'induction magnétique créé par (C_1)

On note ϕ_{12} le flux du champ \vec{B}_1 à travers le circuit (C_2) :

$$\phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

où S_2 est une surface qui s'appuie sur (C_2) et qui est orientée par le courant d'intensité I_2 conformément à la règle du tire-bouchon

Le champ d'induction magnétique \vec{B}_1 créé par le circuit (C_1) , est proportionnel à I_1 . Le flux ϕ_{12} est aussi proportionnel à I_1 .

On peut écrire $\phi_{12} = M_{12} I_1$ où M_{12} est le coefficient de proportionnalité.

De même :

On note \vec{B}_2 le champ d'induction magnétique créé par (C_2)

On note ϕ_{21} le flux du champ \vec{B}_2 à travers le circuit (C_1)

$$\phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

où S_1 est une surface qui s'appuie sur (C_1) et qui est orientée par le courant d'intensité I_1 conformément à la règle du tire-bouchon

Le champ d'induction magnétique \vec{B}_2 créé par le circuit (C_2) est proportionnel à I_2 .

Le flux ϕ_{21} est aussi proportionnel à I_2 .

On peut écrire $\phi_{21} = M_{21} I_2$ où M_{21} le coefficient de proportionnalité.

Les coefficients M_{12} et M_{21} dépendent de la géométrie des circuits (C_1) et (C_2) , de la disposition des circuits (C_1) et (C_2) l'un par rapport à l'autre et de leur orientation.

Le signe du coefficient d'induction mutuelle dépend du choix de l'orientation des deux circuits (C_1) et (C_2) .

On admet que : $M_{12} = M_{21} = M$.

M est le **coefficient d'induction mutuelle** des deux circuits.

Il s'exprime en Henry si le flux est en weber et l'intensité de courant en ampère.

Le coefficient d'induction mutuelle peut être déterminé à partir de la relation :

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{\phi_{21}}{I_2}$$

Exemple 1 : cas de deux spires circulaires ayant le même axe $z'z$ (figure2)

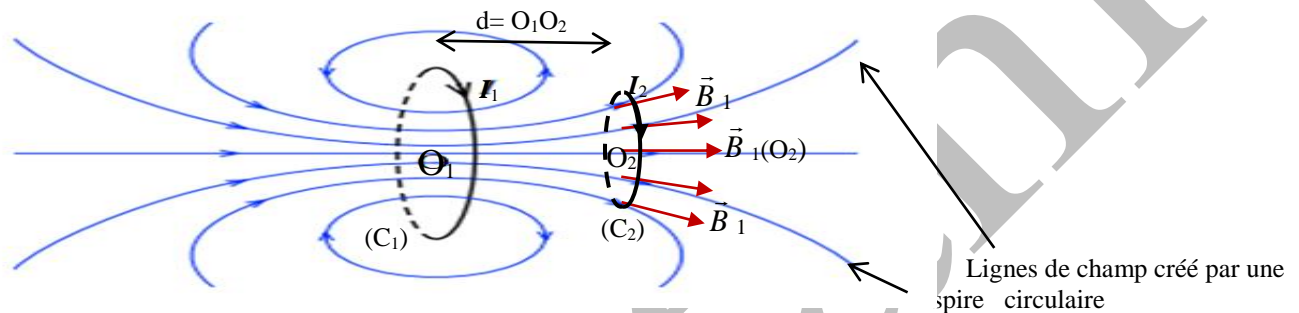


Figure 2 : lignes de champ à travers une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I_2

$$\phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1(M \in S_2) \cdot \vec{n}_2 dS_2 \approx \iint_{S_2} \vec{B}_1(O_2) \cdot \vec{n}_2 dS_2 = I_1 \frac{\mu_0 R_1^2}{2(d^2 + R_1^2)^{3/2}} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \iint_{S_2} dS_2 = I_1 \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2(d^2 + R_1^2)^{3/2}}$$

Où S_2 est la surface du disque limité par la spire (C_2) , orientée par le courant d'intensité I_2 conformément à la règle du tire-bouchon.

$$\phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2(M \in S_1) \cdot \vec{n}_1 dS_1 \approx \iint_{S_1} \vec{B}_2(O_1) \cdot \vec{n}_1 dS_1$$

$$\phi_{21} = I_2 \frac{\mu_0 R_2^2}{2(d^2 + R_2^2)^{3/2}} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \iint_{S_1} dS_1 = I_2 \frac{\mu_0 R_2^2 \pi R_1^2}{2(d^2 + R_2^2)^{3/2}}$$

Où S_1 est la surface du disque limité par la spire (C_1) , orientée par le courant d'intensité I_1 conformément à la règle du tire-bouchon.

On suppose que $d \gg R_1$ et $d \gg R_2$: $(d^2 + R_1^2) \approx (d^2 + R_2^2) \approx d^2$

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2d^3} \text{ si on change le sens de } I_1 \text{ ou de } I_2, M \approx - \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2d^3} < 0$$

Remarque :

Le flux total à travers le circuit (C_1) : $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2$

Le flux total à travers le circuit (C_2) : $\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} = L_2 I_2 + M I_1$

Exemple2 : inductance mutuelle d'une bobine plate et d'un solénoïde supposé de longueur infinie:

On considère un solénoïde de longueur ℓ , de N_1 spires jointives de rayon R_1 parcourue chacune d'un courant d'intensité I_1 . Le solénoïde entoure une bobine plate constituée par N_2 spires de rayon R_2 parcourue chacune d'un courant d'intensité I_2 . Le solénoïde et la bobine sont de même axe Ox

1) Calculons le flux créé par le solénoïde, supposé infini, à travers la bobine plate.

2) En déduire le coefficient d'induction mutuelle entre les deux circuits

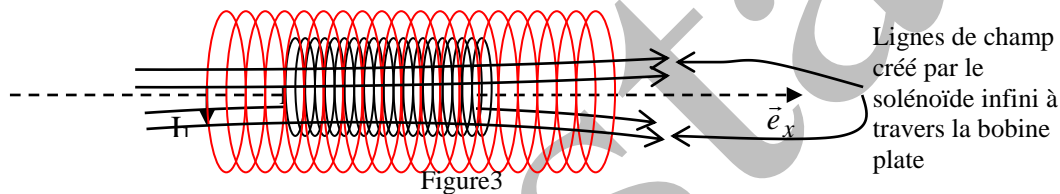
Corrigé :

1) Si on néglige les effets de bords, le champ à l'intérieur du solénoïde supposé infini ;

$$\vec{B}_1 = I_1 \mu_0 \frac{N_1}{\ell} \vec{e}_x$$

Le flux à travers les N_2 spires de rayon R_2 de la bobine plate: $\Phi_{12} = I_1 \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi R_2^2}{\ell}$.

2) Le coefficient d'induction mutuelle entre les deux circuits : $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi R_2^2}{\ell}$



II- Phénomènes d'inductions

Les phénomènes d'induction ont été découverts en 1831 par le physicien anglais M.Faraday. Ces phénomènes sont régis par les lois de l'induction qui se manifestent par des courants induits, des forces électromotrices (f.e.m) induites...

On va, tout d'abord, donner un bref aperçu sur quelques observations expérimentales mettant en évidence les phénomènes d'induction, ensuite donner les lois de l'induction...

1- Observation expérimentale

Le but est de faire varier, par un procédé quelconque, le flux de l'induction magnétique qui traverse un circuit conducteur fermé. Dans toutes les expériences, un galvanomètre est intercalé dans le circuit (dépourvu de générateur). Sa déviation permet d'observer l'existence du courant dans le circuit et d'indiquer son sens.

1-1- Circuit fixe de surface constante dans un champ d'induction magnétique non uniforme

On considère un barreau aimanté (un aimant) placé à proximité d'une bobine fermée sur un galvanomètre. Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a pas de courant mesurable dans le galvanomètre.

Par contre lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, on constate que l'aiguille du galvanomètre dévie dans un sens qui s'inverse quand on éloigne l'aimant (figure ci-dessous). L'expérience montre qu'un courant traverse le circuit. Ce courant est d'autant plus important que le déplacement est rapide.

L'existence du courant dans la bobine est donc liée à la variation temporelle du flux du champ \vec{B} de l'aimant à travers la bobine. La durée de ce courant est celle de la variation du flux : on dit que la bobine est le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique. La bobine se comporte comme un générateur

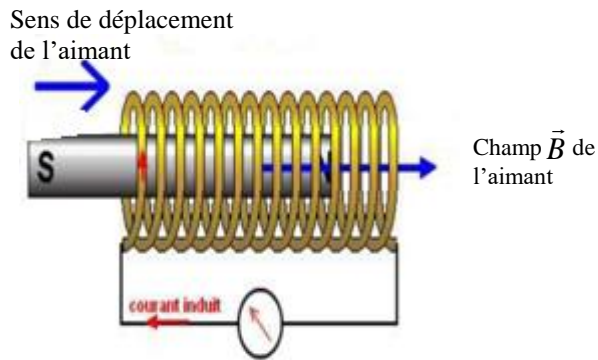


Figure4 :L'aimant s'approchant de la bobine

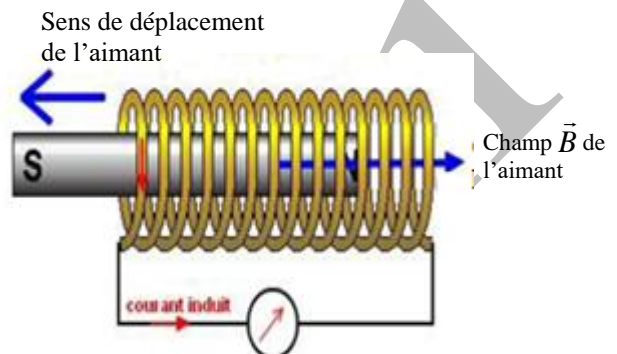


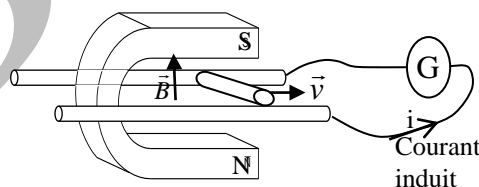
Figure5 :L'aimant s'éloignant de la bobine

Remarque : il est possible également de laisser l'aimant (inducteur) immobile et de déplacer le circuit (induit) : on observe le même phénomène

1-2- Circuit de surface variable dans un champ d'induction magnétique uniforme et constant

Considérons l'exemple des rails de Laplace : une barre conductrice peut glisser sur des rails conducteurs (figure ci-dessous). La barre est mobile dans un champ constant \vec{B} créé dans l'entrefer d'un aimant en U.

L'expérience montre l'apparition d'un courant induit dans le circuit quand on fait glisser la barre sur les rails. Le sens du courant dépend du sens de déplacement de la barre.



Conclusions

Ces types d'expériences ont amené Faraday à déduire : « quand le flux d'un champ magnétique à travers un circuit fermé varie au cours du temps, il apparaît un courant électrique induit dans le circuit »

- Le circuit, siège du courant induit i , est appelé l'induit.
- L'inducteur est le système qui produit le champ d'induction \vec{B} .

Des expériences réalisées avec des circuits ouverts montrent qu'il apparaît une différence de potentiel entre les bornes du circuit soumis à la variation temporelle du flux de \vec{B}

2- Lois de l'induction.

2-1- Loi de Faraday.

- ♦ « La variation temporelle du flux magnétique ϕ , à travers un circuit, d'un champ d'induction magnétique \vec{B} , entraîne l'apparition dans le circuit d'une force électromotrice induite e pendant toute la durée de la variation du flux » $e = - \frac{d\phi}{dt}$

D'une façon générale, quand un circuit filiforme C est soumis à une **variation de flux** d'induction magnétique \vec{B} au **cours du temps** et dont l'origine peut être due à:

- un déplacement de C dans un champ non uniforme
- une variation de la surface du circuit C
- une variation de B au cours du temps
- ...

D'après la loi de Faraday, il y a apparition d'une force électromotrice d'induction $e = - \frac{d\phi}{dt}$

La loi de Faraday est une loi empirique

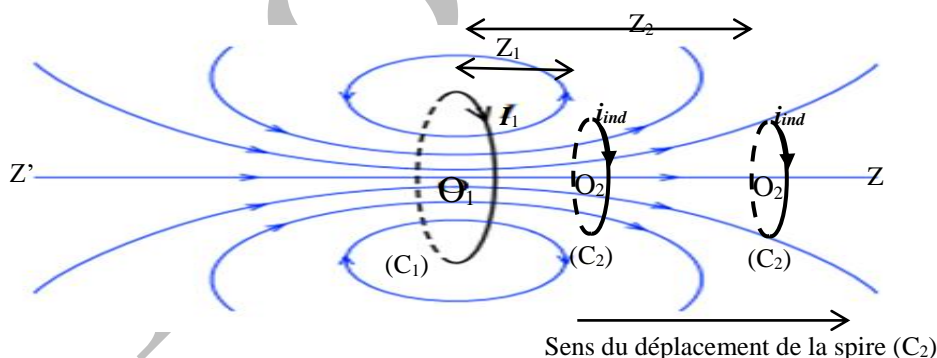


Figure 6 : (C₂) se déplace de la position $Z=Z_1$ à la position $Z=Z_2$ dans un champ non uniforme

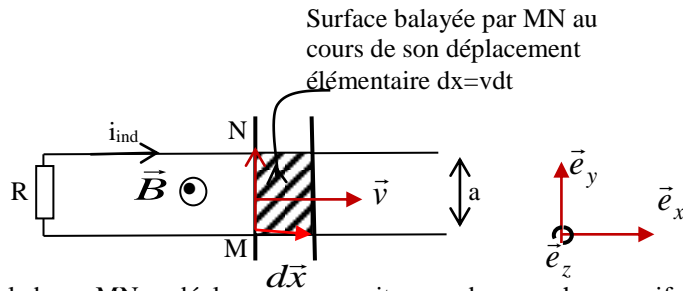


Figure 7 : la barre MN se déplace avec une vitesse v dans un champ uniforme (TD2)

- Faraday a établi expérimentalement que le courant induit, dans un circuit fermé, est inversement proportionnel à la résistance totale R du circuit. La quantité Ri_{ind} ne dépend que de la géométrie du circuit induit et de la variation du flux de \vec{B} . On peut écrire $i_{ind} = \frac{|e|}{R}$ où e est la force électromotrice induite dans le circuit.
- La f.e.m induite e s'exprime en Volt ou en Weber par seconde si i_{ind} est en ampère et R en Ohm.

Remarque : si le circuit (l'induit) contient un générateur classique, la f.e.m induite (e) se superpose à la f.e.m de ce générateur.

2-2- Loi de Lenz.

La loi de Lenz traduit le signe (-) de la loi de Faraday. Le sens du courant induit dans un circuit fermé est donné par la loi de Lenz

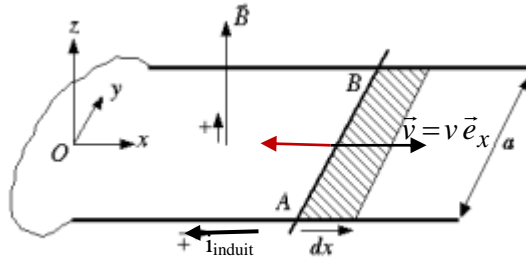
« La force induite (e) tend à produire un courant induit (i_{ind}) dont le sens est tel que le flux qu'il envoie à travers le circuit induit s'oppose à la variation du flux qui lui a donné naissance »

La loi de Lenz est une loi de modération :

$$\Phi_{B_{ext}} \text{ varie dans le temps} \rightarrow \text{apparition d'un courant induit } i_{ind} = \frac{|e_{ind}|}{R} \rightarrow \vec{B}_{ind} \rightarrow \Phi_{ind}$$

$\Phi_{ind} \text{ s'oppose (modère) à la variation de } \Phi_{ext}$

Application : les rails de Laplace



Lorsqu'on déplace la barre mobile AB (figure ci-dessus) avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ ($v > 0$), le flux ϕ de \vec{B}_{ext} à travers le circuit augmente, donc la force électromotrice induite $e = -\frac{d\phi}{dt} < 0$, et le sens du courant induit i_{ind} est celui indiqué sur la figure.

Le courant induit i_{ind} crée un champ propre \vec{B}_{ind} dont le flux à travers le circuit s'oppose à la variation au cours du temps du flux ϕ de \vec{B}_{ext} .

La force de Laplace induite sur la tige : $\vec{F}_L = i_{ind} \cdot \vec{\ell} \wedge \vec{B} = i_{ind} a (-\vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_z = -i_{ind} a B \vec{e}_x$ s'oppose au déplacement de la barre (elle vérifie donc la loi de Lenz).

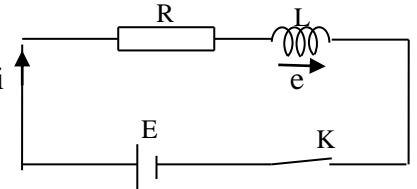
La loi de Lenz est une loi de modération, qui traduit la stabilité du système.

III- Energie magnétique

Une bobine réelle peut être modélisée par son inductance propre L en série avec une résistance R.

Considérons une bobine réelle placée dans circuit contenant un générateur de f.e.m E et un interrupteur k, (figure ci-contre).

A l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur, on constate que le courant i initialement nul n'atteint pas immédiatement la valeur $I = \frac{E}{R}$



La variation du courant i entre la valeur zéro et la valeur finale $I = \frac{E}{R}$ entraîne une variation du flux à travers la bobine, du champ magnétique créé par la bobine.

D'après la loi de Faraday, une f.e.m induite $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$ apparaît alors aux bornes de la bobine qui s'oppose à l'augmentation brutale du courant.

Le circuit étant indéformable, l'inductance propre L est constante et on écrit : $e = -L \frac{di}{dt}$

La loi d'Ohm, pour le circuit, s'écrit : $E + e = Ri$ soit $E = L \frac{di}{dt} + Ri$

En multipliant les membres de l'égalité par $i dt$, on obtient : $E i dt = L i di + R i^2 dt$

Avec : $E i dt$ = énergie fournie par le générateur pendant le temps dt .

$R i^2 dt$ = énergie dissipée par effet Joule dans le circuit.

$L i di$ = énergie emmagasinée par la bobine pendant le temps dt .

On appelle énergie magnétique l'énergie emmagasinée par la bobine :

$$W_m = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

où $\Phi = LI$ est le flux propre à travers la bobine

IV- Densité volumique d'énergie magnétique

Considérons un solénoïde cylindrique, supposé infini, de section S et de longueur ℓ , comportant N spires parcourue chacune par un courant d'intensité I .

On admet que : $B_{\text{ext}} = 0$ (le champ à l'extérieur du solénoïde est nul) et que le champ d'induction magnétique à l'intérieur du solénoïde est $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$ (voir exercice 3 TD1)

Le flux total Φ de \vec{B} dans les $N(=n\ell)$ spires de section S du solénoïde est :

$$\Phi = N \Phi_{\text{spire}} = N (B S) = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I S$$

D'autre part le flux propre à travers le solénoïde peut s'écrire : $\Phi = LI$

On en déduit l'inductance propre du solénoïde de longueur ℓ : $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$

L'énergie magnétique du solénoïde comportant N spires: $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

On remplace le coefficient L par son expression et on obtient :

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} I^2 \ell S = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 \frac{N^2}{\ell^2} I^2 \ell S = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} v$$

Avec $v = \ell S$ le volume du solénoïde où règne le champ \vec{B} .

La densité volumique d'énergie magnétique dans le solénoïde où règne un champ \vec{B} est :

$$\frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Ce résultat établi pour la densité volumique d'énergie magnétique, dans le cas particulier d'un solénoïde illimité (infini), est valable pour n'importe quel circuit plongé dans un champ d'induction magnétique \vec{B} .

La densité volumique d'énergie magnétique ou l'énergie magnétique par unité de volume

dans un champ d'induction \vec{B} est : $\frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

$$\frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \Rightarrow W_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dv \quad \text{est l'énergie magnétique localisée partout où se}$$

trouve un champ d'induction \vec{B}