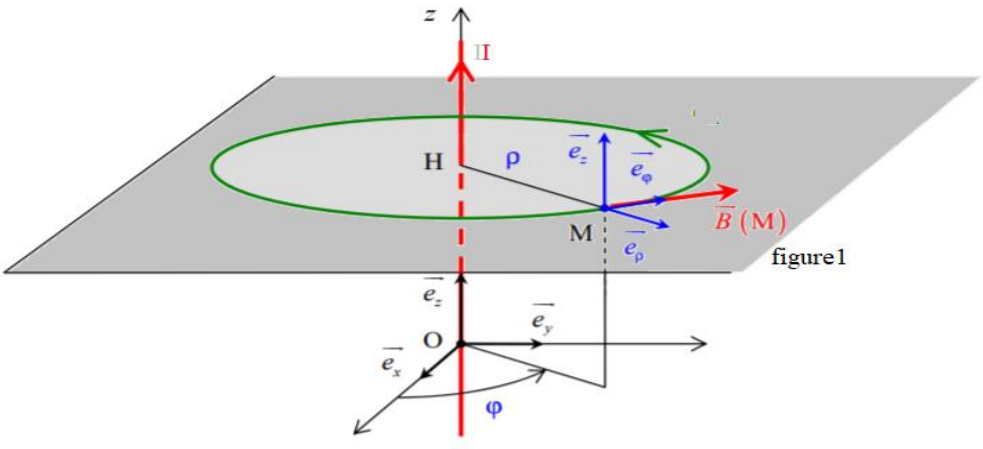
Corrigé des exercices 4 et 5/TD1

Fil de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I

Calcul du champ d'induction magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I.

• Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

On utilise la base cylindrique ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$)



• Symétrie de la distribution de courant :

Le plan (M, $\vec{e}_z$,$\vec{e}_\rho$) est un plan de symétrie magnétique pour la distribution de courant (c'est le plan qui contient le fil conducteur et le point M) ; le champ $\vec{B}$ (M) est perpendiculaire à ce plan de symétrie. Le champ $\vec{B}$ (M) est donc porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$:

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(M)\vec{e}_\varphi$$

• Les invariances :

La distribution de courant reste invariante dans toute translation le long de l'axe du fil et dans toute rotation autour de l'axe du fil conducteur ⇒ $B_\varphi(M)$ ne dépend ni de z ni de φ :

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi \ .$$

Les lignes de champ sont des cercles d'axe OZ (axe du fil) et de rayon ρ.

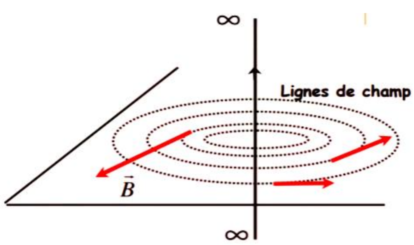


Figure2

• Choix du contour d'Ampère :

Le contour d'Ampère Γ choisi est un cercle d'axe OZ (axe du fil) et de rayon ρ.
Γ est orienté de façon à ce que $\vec{e}_z$ soit sa normale positive(la surface plane S qui s'appuie sur Γ est orientée par Γpar conformément à la règle du tire-bouchon)
Le vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{e}_z$ (figure 3)

$\vec{B}$ est tangent à Γ en tout point ; Γ est une ligne de champ
$\|\vec{B}\|$ est constant sur tout le contour d'Ampère Γ.

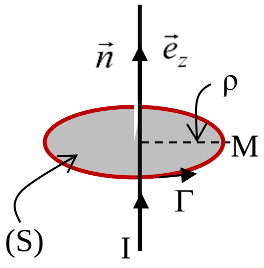


Figure3

• Application du théorème d'Ampère

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = \oint_\Gamma B(\rho)\vec{e}_\varphi.\rho\, d\varphi \vec{e}_\varphi = B(\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,\rho\, B(\rho)$$

$$2\pi\ \rho B(\rho) = \mu_0\, I_{enlacé}$$

Le courant $I_{enlacé}$ = I est compté positif car il traverse la surface (S) qui s'appuie sur le contour Γ dans le sens de $\vec{n}$ (conformément à la règle du tire-bouchon)

$$B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi\,\rho} I \quad \text{Soit} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi\,\rho} I\ \vec{e}_\varphi$$

Cylindre de longueur infinie parcouru par un courant volumique

Champ créé par un cylindre volumique de longueur infinie parcouru par un courant volumique de vecteur densité de courant $\vec{j}$ uniforme.

• Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

On utilise la base cylindrique ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$)

• Symétrie de la distribution de courant :

Le plan (M, $\vec{e}_z, \vec{e}_\rho$) est un plan de symétrie magnétique pour la distribution de courant (le plan qui contient l'axe du cylindre conducteur et le point M) figure 4 : le champ $\vec{B}$(M) est perpendiculaire à ce plan de symétrie (M, $\vec{e}_z, \vec{e}_\rho$). Le champ $\vec{B}$(M) est donc porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(M)\vec{e}_\varphi$$

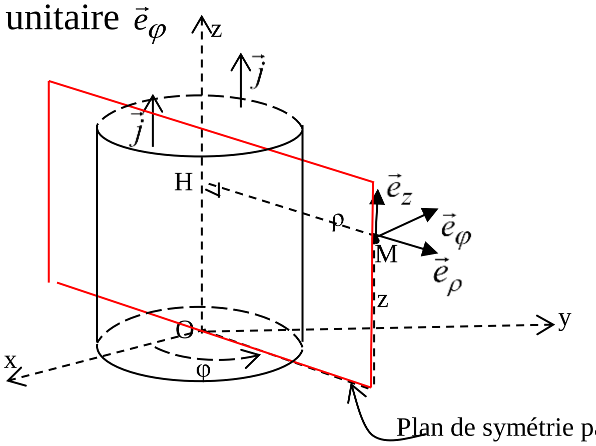


Figure4

• Les invariances :

La distribution de courant reste invariante dans toute translation le long de l'axe Oz de la distribution de courant (cylindre de longueur infinie) et dans toute rotation autour de l'axe du cylindre conducteur $\Rightarrow$ $B_\varphi(M)$ ne dépend ni de z ni de φ

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

• Les lignes de champ sont des cercles d'axe OZ et de rayon ρ.

• Choix du contour d'Ampère

Le contour d'Ampère Γ choisi est un cercle d'axe OZ et de rayon ρ.
Γ est orienté de façon à ce que $\vec{e}_z$ soit la normale positive à la surface plane (S) qui s'appuie sur Γ qui est orientée par Γ conformément à la règle du tire-bouchon.
Le vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{e}_z$
$\vec{B}$ est tangent à Γ en tout point ; Γ est une ligne de champ
$\|\vec{B}\|$ est constant sur tout le contour d'Ampère Γ.

• Application du théorème d'Ampère :

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = \oint_\Gamma B(\rho)\vec{e}_\varphi.\rho\, d\varphi\vec{e}_\varphi = B(\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,\rho\, B(\rho)$$

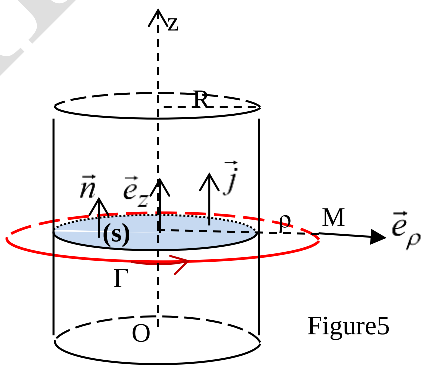


Figure5

Pour ρ > R :

$$I_{enlacé} = \iint_S \vec{j}\,.\,\overrightarrow{ds} = \iint_S j\,\vec{e}_z\,.\,\vec{e}_z\, ds = j\iint_S ds = j\pi R^2 = I$$

La surface qui s'appuie sur le contour d'Ampère Γest orientée selon la règle du tire-bouchon (figure5) :
$I_{enlacé}$ est compté positif

$$2\pi\,\rho\, B(\rho) = \mu_0\, I \quad \Rightarrow B(\rho) = \mu_0\,\frac{I}{2\pi\,\rho}$$

Pour ρ < R :

$$I_{enlacé} = \iint_S \vec{j}\,.\,\overrightarrow{dS} = \iint_S j\,\vec{e}_z\,.\,\vec{e}_z\, dS = j\iint_S dS = j\pi\rho^2$$

$I_{enlacé} = I\,\dfrac{\rho^2}{R^2}$ sachant que $I = j\,\pi\, R^2$

(S) est la surface du disque limité par le contour d'Ampère Γ orientée selon la règle du tire-bouchon (figure6)

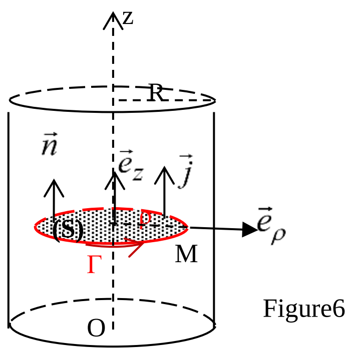
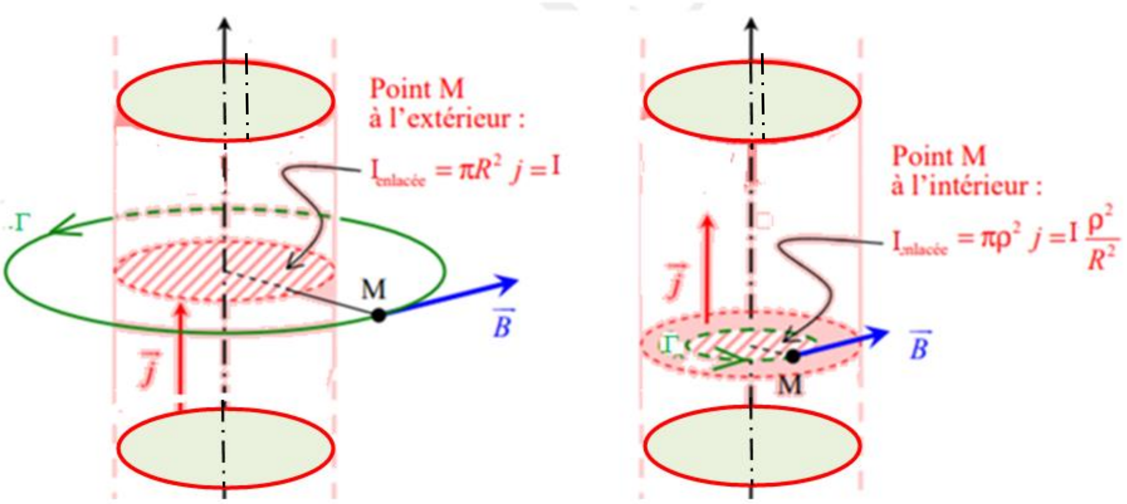
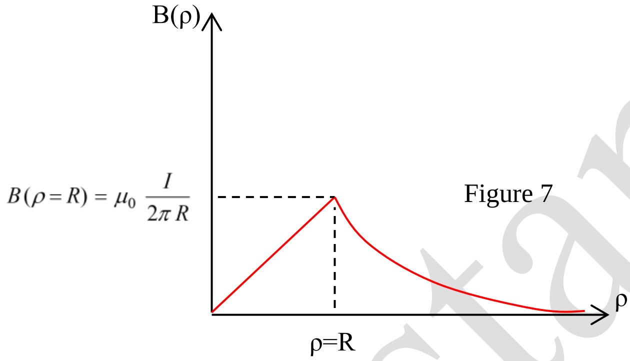


Figure6

$$2\pi\,\rho\, B(\rho) = \mu_0\, I\,\frac{\rho^2}{R^2} \quad \Rightarrow B(\rho) = \mu_0\, I\,\frac{\rho}{2\pi\, R^2}$$





Cylindre creux de longueur infinie parcouru par un courant volumique

• Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

On utilise la base cylindrique $(\vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\ \vec{e}_z)$

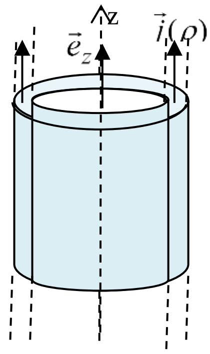


Figure8

$\vec{j}(\rho) = C\,\dfrac{e^{-\rho/a}}{\rho}\,\vec{e}_z$ où C et a sont des constantes positives

1) Vérifier que l'intensité de courant $I = 2\pi\, C\, a \left[e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a} \right]$

I= $\iint_S \vec{j}\ .\ \overrightarrow{dS}$ où (S) est la surface de la couronne comprise entre les rayons R_1 et R_2.

I= $\iint_S \vec{j}\ .\ \overrightarrow{dS} = \iint_S j(\rho)\,\vec{e}_z.\vec{e}_z\, dS = \iint_S j(\rho)\, d\rho\, \rho\, d\varphi = \int_{R_1}^{R_2} j(\rho)\,\rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi$

d'où : $I = 2\pi\, C\, a \left[e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a} \right]$

2) Déterminer la direction du champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la distribution de courant, en tout point M de l'espace. Justifiez votre réponse

• Symétrie de la distribution de courant :

Le plan (M, $\vec{e}_z, \vec{e}_\rho$) est un plan de symétrie magnétique pour la distribution de courant (le plan qui contient l'axe du cylindre conducteur et le point M) figure 9 : le champ $\vec{B}$ (M) est perpendiculaire à ce plan de symétrie (M, $\vec{e}_z, \vec{e}_\rho$).

Le champ $\vec{B}$ (M) est donc porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(M)\vec{e}_\varphi$$

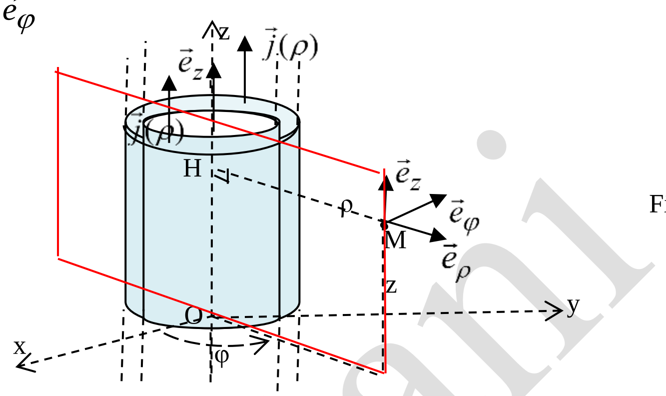


Figure9

3) Montrer que le module $B(M)$ du champ $\vec{B}(M)$ ne dépend que de la coordonnée cylindrique radiale ρ.

• Etude des invariances :

La distribution de courant reste invariante dans toute translation le long de l'axe Oz de la distribution de courant (cylindre infini) et dans toute rotation autour de l'axe du cylindre conducteur $\Rightarrow$ $B_\varphi(M)$ ne dépend ni de z ni de φ

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi$$

• Les lignes de champ sont des cercles d'axe OZ et de rayon ρ.

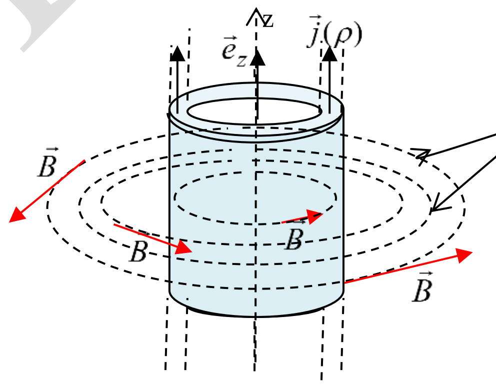


Figure10

4) Déterminer l'expression de $B(M)$ en tout point M de l'espace.

• Choix du contour d'Ampère

Le contour d'Ampère Γ choisi est un cercle d'axe OZ et de rayon ρ.
Γ est orienté de façon à ce que $\vec{e}_z$ soit la normale positive à la surface plane (S) qui s'appuie sur Γ et qui est orientée par Γ conformément à la règle du tire-bouchon.
Le vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{e}_z$

$\vec{B}$ est tangent à Γ en tout point ; Γ est une ligne de champ

$\|\vec{B}\|$ est constant sur tout le contour d'Ampère Γ.

• Application du théorème d'Ampère :

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = \oint_\Gamma B(\rho)\vec{e}_\varphi.\rho\, d\varphi \vec{e}_\varphi = B(\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,\rho\, B(\rho)$$

Pour $\rho < R_1$:

$I_{enlacé} = 0$ aucun courant n'est enlacé par le contour d'Ampère

Pour $R_1 < \rho < R_2$:

$I_{enlacé} = \iint_S \vec{j}\,.\,\overrightarrow{dS}$ où (S) est la surface de la couronne comprise entre les rayons R_1 et ρ.

$$I_{enlacé} = 2\pi\, C\, a \left[e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a} \right]$$

$$2\pi\,\rho\, B(\rho) = \mu_0\, I_{enlacé} \quad \Rightarrow B(\rho) = \mu_0 \frac{2\pi\, C\, a \left[e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a}\right]}{2\pi\,\rho}$$

Pour $\rho > R_2$

$I_{enlacé} = \iint_S \vec{j}\,.\,\overrightarrow{ds} = I$

où (s) est la surface de la couronne à travers laquelle passe le courant totale $I = I_{enlacé}$ compté positif (figure11)

$$2\pi\,\rho\, B(\rho) = \mu_0\, I \quad \Rightarrow B(\rho) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\,\rho}$$

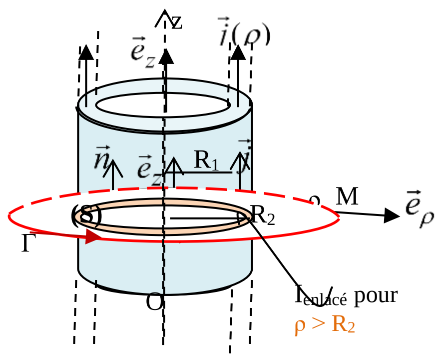


Figure11