Université Cadi Ayyad — **Département de matthématiques**
Faculté des Sciences Semlalia — **Année 2020-2021**

T.D. de probabilités pour SMI (S3)
Une liste d'exercices

Exercice 1
Proposer des espaces fondamentaux (ou univers) que l'on peut faire correspondre aux problèmes suivants :
✓Etudier le comportement d'apparition des faces lorsqu'on lance un dé
✓Etudier le comportement simultané d'une pièce de monnaie et d'un dé
✓Etudier la hauteur de la masse d'eau d'un barrage, que l'on mesure périodiquement (enfin de chaque mois par exemple).
✓Etudier la taille en cm et le poids en kg des individus d'une grande population
✓Etudier la température moyenne à Marrakech durant une année
✓Etudier le comportement d'apparition de Pile, d'une pièces, pour la première fois
✓Etudier le comportement d'apparition de Face pendant n lancés d'une pièce de monnaie.

Exercice 2
Construire des exemples simples de tribus d'événements qu'on peut associer aux espaces fondamentaux suivants :
✓$\Omega_1 = \{1, 2, 3, a, b\}$ où $Card(\Omega) = 5$
✓$\Omega_2 = \{a\}$ (que signfie d'abord un espace fondamental de cardinal 1)
✓$\Omega_3 = [0, 1]$
✓$\omega_4 = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$
✓$\Omega_5 = \mathbb{N}$
✓$\Omega_6 = \mathbb{Z}$

Exercice 3
Produire une probabilité (un cas simple) sur chacun des espaces probabilisables $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i)), i = 1, 2, \dots, 6$ de l'exercice précédent.

Exercice 4.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer en même temps un dé et une pièce de monnaie équilibrés. Si Ω est l'espace fondamental de cette expérience, on rappelle que les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont tous des événements.
1^o) Expliciter Ω.
2^o) Expliciter, en fonction des événements élémentaires, les événements correspondants aux formulations suivantes :
A : $\langle$*réalisation de Pile*$\rangle$
B : $\langle$*réalisation de la face portant le numéro 3 du dé*$\rangle$
C : $\langle$*non réalisation de (Pile et 3)*$\rangle$
D : $\langle$*non réalisation de (Face ou 3)*$\rangle$

3^o) Soit E l'événement correspondant à la formulation suivante :
$\langle$*réalisation de Pile avec une face paire du dé ou Face avec une face impaire inférieure strictement à 4*$\rangle$.
Expliciter l'événement E et calculer sa probabilité.

4^o) Calculer les probabilités des événements $A \cap B$, $A \backslash B$.
A-t-on $P(A\backslash B) = P(A) - P(B)$? Pourquoi ?

Exercice 5.

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un espace fondamental d'une expérience aléatoire ($Card(\Omega) = 3$). Trouver, quand cela est possible, la loi ou les lois de probabilités, chargeant tous les points de Ω sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dans chacun des cas suivants :

(1) $P(\{a, b\}) = 1/4$
(2) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = 1/4$
(3) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = 3/4$

Exercice 6.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux éléments de $\mathcal{T}$ tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cup B) = 23/60$.
Calculer $P(A/B)$; $P(\bar{A}/B)$; $P(A \cap B/B)$; $P(A \cap \bar{B}/B)$; $P[(A \cup B)/(A \cap \bar{B})]$ et $P[(\bar{A} \cap B)/(\bar{A} \cup B)]$.

Exercice 7.

Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1^o) Rappeler les quantités de dénombrement suivantes :
✓le nombre de façons de choisir *successivement* p éléments de E, avec la possibilité de répéter les éléments choisis
✓le nombre A_n^p de façons de choisir p éléments *distincts* de E
✓le nombre de façons d'arranger les p éléments d'une partie A de E ($1 \leq p \leq n$).
✓le nombre C_n^p de parties de E, à p, ($1 \leq p \leq n$) éléments.

2^o) Donner la relation entre A_n^p et C_n^p.

3^o) Interpréter les équations suivantes :

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad \text{et} \qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Exercice 8.

1^o) Dans un jeu à 32 cartes, on tire trois cartes au hasard l'une après l'autre et sans remise. Quelle est la probabilité que la troisième carte tirée soit un As.

2^o) On refait la même expérience qu'en 1^o) mais cette fois on remet la carte tirée avant le tirage suivant. Quelle est la probabilité d'obtenir un seul Roi et un seul As.

3^o) Maintenant on tire un paquet de 8 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir seulement deux Rois et un As (les cinq autres cartes ne comprennent ni Roi ni As)

Les 32 *cartes sont composées de quatre groupes (pique, treffle, coeur et carreau), chaque groupe contient* 8 *cartes nommées As, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame et Rois.*

Exercice 9.

Une population est étudiée suivant deux caractères : le poids et la taille. La ventilation des individus est effectuée selon trois classes de tailles T_1, T_2 et T_3 et deux classes de poids P_1 et P_2. On donne $P(T_1) = 0.2$ et $P(T_2) = 0.5$.
A l'intérieur de chaque classe de taille, la probabilité, pour un individu, d'appartenir à la classe de poids P_1 est la suivante : $P(P_1/T_1) = 0.6;\ P(P_1/T_2) = 0.45$ et $P(P_1/T_3) = 0.35$.

1^o) Donner les probabilités d'appartenance à chaque classe de taille.

2^o) Calculer les probabilités d'appartenance à chaque classe de poids.
En déduire les probabilités d'appartenance à chaque classe de taille à l'intérieur de la classe de poids P_1.

Exercice 10.

Considérons deux urnes, U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules blanches et l'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules blanches. On choisit au hasard l'une des deux urnes et on effectue, dans l'urne choisie, 2 tirages successifs sans remise.
Calculer les probabilités des événements suivants :
$E1 = \langle \textit{Obtenir deux boules blanches} \rangle$, $\quad E2 = \langle \textit{Obtenir au moins une boule rouge} \rangle$,
$E3 = \langle \textit{Obtenir une boule blanche et une boule rouge} \rangle$.

Exercice 11.

On tire, avec remise, une boule dans une urne contenant n_1 boules blanches et n_2 boules rouges.

1^o) Soit X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

1.a) Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X.

1.b) Calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$ et sa variance $\sigma^2(X)$.

2^o) Soit maintenant Y le nombre de boules blanches obtenues durant n tirages successifs ($n \geq 1$).

2.a) Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Y.

2.b) Calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et sa variance $\sigma^2(Y)$.

2.c) Que représente la variable aléatoire $Z = n - Y$? Déterminer sa loi de probabilités et ses moments d'ordre un et deux.

Exercice 12. (loi de Pascal)

Soit X une variable alŕepertoire sur $\mathbb{N}$, de loi de probabilités $\pi(k) = \dfrac{\alpha a^{k-1}}{(1+a)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$ où $a \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre supposé connu.
Calculer le paramètre α, la moyenne $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\sigma^2(X)$.

Exercice 13.

Soit X une variable aléatoire réelle continue $f(x) = e^{-\lambda |x|}$, $x \in \mathbb{R}$

1^o) Calculer la constante λ,

2^o) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$,

3^o) Calculer la fonction de répartition F de X et représenter son allure de graphe,

4^o) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 < X < 1 \ ou \ X > 2)$,

5^o) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

5.1) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(X^2 < \alpha)$ en fonction de F et α ,

5.2) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(|X| < \alpha \mid X > \beta)$ en fonction de F, α et β.

Exercice 14.

Soit X une variable aléatoire continue dont le graphe de la fonction densité de probabilité forme un triangle isocèle avec l'axe Ox et de base $[-1, 1]$.

1^o) Calculer la probabilité $P(X^2 < \frac{1}{4}, X < \frac{1}{4})$.

2^o) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Exercice 15

Considérons un couple aléatoire réel discret indépendant (X, Y) tel que X obéit à une loi binomiale $\mathcal{B}(3, p)$ et Y obéit à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, q)$, où p et q sont dans $]0, 1[$. Pour simplifier, on propose d'adopter les deux notions suivantes : $\bar{p} = 1 - p$ et $\bar{q} = 1 - q$.

1^o) Dresser le tableau qui résume la loi jointe et les lois marginales du couple (X, Y),

2^o) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$,

3^o) Soit S la variable aléatoire définie par $S = X + Y$.

3.1) Donner l'ensemble des valeurs possibles de S et dresser le tableau de la loi de S,

3.2) Calculer la variance $Var(S)$ et identifier la loi de S lorsque $p = q$.

Exercice 16

Considérons une pièce de monnaie telle que $P(Pile) = p$, $(0 < p < 1)$. On lance cette pièce trois fois de suite.

1^o) Donner l'espace fondamental, Ω, associé à cette expérience.

2^o) Considérons les deux variables aléatoires X et Y définies, pour $\omega \in \Omega$ par :

$X(\omega) =$ *nombre de séquences PileFace dans* ω,

$Y(\omega) =$ *nombre de séquences FacePile dans* ω.

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires de Bernoulli pour lesquelles on précise le paramètre de la loi.

3^o) Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires $Z = XY$ et $S = X + Y$.

4^o) Calculer la covariance entre X et Y notée $Cov(X, Y)$.

5^o) Déterminer la loi jointe du couple aléatoire (X, Y).

6^o) Chercher une condition nécessaire et suffisante sur p pour que le couple (X, Y) soit indépendant.

Exercice 17.

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles possédant une densité de probabilité f définie par :

$$f(x, y) \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-y} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0, x<y^2\}}$$

1.) Calculer la constante réelle c.

2.) Déterminer les loi marginales (celle de X et celle de Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

Exercices supplémentaires

Exercice 1.

Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilités est donnée dans le tableau suivant

x	0	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	0.30	0.20	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05

1^o) Determiner la fonction de répartition F de X et représenter la graphiquement
2^o) Calculer la probabilité que la machine ait plus de 3 pannes
3^o) Trouver l'ensemble des valeurs réelles x_0 tel que la probablité que X soit supérieur strictement à x_0, soit de 0.5
4^o) Trouver l'ensemble des valeurs réelles x_1 tel que la probabilité que X soit inférieur ou égal à x_1 soit entre 0.7 et 0.8
5^o) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2.
La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif est une variable aléatoire continue X qui admet pour densité de probabilité f définie sur $\mathbb{R}$ par :
si $t < 0$ $\quad f(t) = 0$
si $t \geq 0$ $\quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ où $\lambda > 0$
1^o) Calculer la moyenne et la variance de X.
2^o) On prend t en secondes et $\lambda = 0.2$.
2.i) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes.
2.ii) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes.
2.iii) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie inférieure à 3 secondes sachant que cette durée dépasse 1 seconde.

Exercice 3.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \frac{log(x)}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1^o) Déterminer le réel λ pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X.
2^o) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ si elle existe (justifiez votre réponse).

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \frac{5^{-t}}{2} & \text{si} \quad t > 0 \\ \frac{5^t}{2} & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

1.) Déterminer la fonction densité de probabilité de X, f_X

2.) Calculer la probabilité $P(1/2 < X < 2)$.

Exercice 5.

Soit m un entier strictement positif, et soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que

$$\pi(x) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{3}\right) \mathbb{1}_{\{1 \le x \le 3m\}}$$

1^o) Trouver la valeur de m pour que la suite de terme général $\pi(x)$ puisse être considérée comme loi de probabilité de X.

2^o) Déterminer la fonction de répartition $F(t)$ de X et dessiner son graphe.

3^o) Calculer la probabilité $P(m - \frac{1}{3} < \frac{X}{3} \le m)$

4^o) Déterminer l'ensemble des réels t tel que $F(t) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Notons Φ sa fonction de répartition. Soit Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calculer les probabilités $P(Y \le y)$ et $P(y - 2.5 \le Y \le y + 4.5)$ en fonction de Φ et y dans les deux cas suivants : $(\mu, \sigma^2) = (4, 2)$ et $(\mu, \sigma^2) = (0, 3)$.

Exercice 7.

Soient n un entier strictement supérieur à un et X une variable aléatoire réelle de fonction densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = ax^{n-1} \mathbb{1}_{\{0 \le x < 1\}}$$

1.) Déterminer la constante réelle a

2.) Calculer l'espérance de X

3.) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice 8.

Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$P(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0.2	0.2	α
$x = 0$	0.1	0.1	0.05
$x = 1$	0.2	0	0.1

1.) Déterminer la valeur de α

2.) Calculer les lois marginales (celle de X et celle de Y)

3.) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes

4.) Calculer l'espérance de XY et en déduire $Cov(X, Y)$

5.) On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z et calculer$\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$.

Exercice 9. *Notation utilisée : $\mathcal{N}$(moyenne,écart-type).*

Des ingénieurs estiment que le poids W (en tonnes) qui peut être supporté par la stucture d'un pont géant sans subir de dommages suit une loi normale $\mathcal{N}(\nu_w, \gamma_w)$.

1^o) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}(\nu, \gamma)$$

1.a) Exprimer la fonction de répartition G_Z de la variable aléatoire $Z = -Y$ en fonction de celle de Y notée F_Y.

1.b) En déduire la densité de probabilité g de Z en fonction de celle de Y notée f.

1.c) Identifier la loi de probabilité de Z.

1.d) Donner la loi de la variable aléatoire $D = X - Y$.

2^o) Supposons qu'à un instant t, n véhicules se trouvent sur ce pont géant. On note $K_1, \ldots, K_n$, les variables aléatoires représentant les poids respectifs de ces n véhicules. On suppose que les variables aléatoires K_i sont indépendantes et que $K_i \sim \mathcal{N}(\nu_i, \gamma_i)$. On désigne par S_n le poids total (en tonnes) de ces n véhicules.

2.a) Donner la loi de probabilité de S_n

2.b) Que représente la variable aléatoire $\Delta = W - S_n$?

2.c) Exprimer la fonction de répartition $H(t)$ de Δ en fonction de celle d'une loi nornale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, notée Φ.

Exercice 10.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant la même loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]$.

1.) On pose $Z = X + Y$.

1.a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z

1.b) Déterminer la fonction densité de probabilité g de Z

1.c) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, les vénements $(Z > 1)$ et $(1-x < Z \leq 1+x)$ sont indépendants

2.) On pose $T = max(X, Y)$

2.a) Déterminer la fonction densité g de T

2.b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$ de T

3.) On pose $U = |X - Y|$

3.a) Montrer que U est une combinaison linéaire de Z et T

3.b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(U)$, de U.

Exercice 11.

Soit λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. On considère le couple aléatoire réel (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi définie par :

$$P(X = n, Y = k) = \left(\frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) 1\!\!1_{\{0 \leq k \leq n\}}$$

1.) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2.) Déterminer la loi de X et celle de Y et dire si X et Y sont indépendantes.

3.) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$.

4.) Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.

5.) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

Exercice 12.

Pour une certaine race de mammifères, à chaque portée, le nombre X de petits suit une loi de Poisson de paramètre 5. La probabilité pour qu'un petit soit une femelle est 0.6. On note Y le nombre de femelles par portée.

1.) Identifier la loi de Y conditionnellement à $X = n$. En déduire la loi de (X, Y)

2.) Sachant qu'une portée est constituée de 7 petits, quelle est la probabilité qu'il y ait 4 mâles et 3 femelles ?

3.) Quelle est la probabilité pour qu'une mère donne naissance dans une même portée à 3 mâles exactement ?