# *MAGNETOSTATIQUE*
# *DANS LE VIDE*

## *-I- Introduction*

### *1- Expérience d'Oersted*

La première expérience décisive, mettant en évidence l'existence du champ magnétique, fut réalisée par le physicien danois Oersted en 1819 : une boussole (petite aiguille aimantée), placée au voisinage immédiat d'un fil conducteur parcouru par un courant électrique, dévie. Donc, au voisinage d'un fil parcouru par un courant électrique, il y a de nouvelles propriétés de l'espace.

### *2- Définition du champ d'induction magnétique*

Au voisinage de toute particule ou ensemble de particules chargées et en mouvement on peut définir un champ de vecteurs $\vec{B}$ appelé champ d'induction magnétique.

Le courant électrique est une source d'un champ d'induction *magnétique*, au même titre que la *charge* électrique est la source d'un champ *électrique*. Si les courants électriques sont stationnaires (c'est-à-dire indépendants du temps), le champ d'induction magnétique créé par ces courants est également indépendant du temps, il est alors qualifié de magnétostatique

Remarque : l'aimant est aussi une source du champ $\vec{B}$. Il crée un champ d'induction magnétique autour de lui. Tout aimant possède 2 pôles: pôle Nord (N) et pôle Sud (S)


Figure 1 : aimants permanents

Exemple : au voisinage de la terre il existe un champ magnétique terrestre dont le module $/\vec{B}/ \approx 0.5$ Tesla.
Dans le système unité internationale, B est exprimé en Tesla (T).
Dans le système CGS, B est exprimé en Gauss, avec $1T = 10^4$ Gauss = $1 Weber/m^2$

## *-II- Champ d'induction magnétique créé par un courant filiforme stationnaire : Loi de Biot et Savart*

- Modèle du circuit filiforme : un circuit filiforme est un circuit dont les dimensions transversales (section) sont négligeables devant sa longueur. On parle aussi de distribution linéique de courant.
- Biot et Savart sont deux physiciens Français qui ont établi l'expression du champ magnétique créé par un circuit filiforme.

On admettra *la loi de Biot et Savart* qui donne l'expression du champ magnétostatique créé par une distribution de courants stationnaires. C'est une loi empirique basée sur des expériences.

## 1- *Champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé par une distribution linéique de courant*

On considère, figure 2,Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant constant d'intensité I. Soit $d\ell$, un élément de longueur du circuit filiforme, centré en un point P (figure2). Le vecteur $\overrightarrow{d\ell}$ est orienté dans le même sens que le courant d'intensité I.

$I\overrightarrow{d\ell}$ est appelé élément de courant et sa norme $I\,d\ell$ s'exprime en Am si I est exprimé en ampère et $d\ell$ en mètre.

Enoncé de **la loi de Biot et Savart :** le champ magnétostatique élémentaire $d\vec{B}$(M) créé en un point M de l'espace vide par l'élément de courant filiforme $I\overrightarrow{d\ell}$ s'exprime par la relation :

$$d\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{d\ell}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

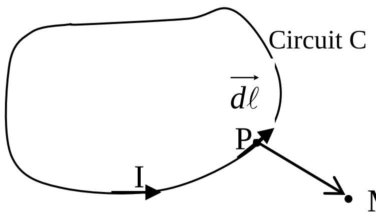


Figure2

$\mu_0$ est la perméabilité magnétique du vide

Cette loi est souvent utilisée pour le calcul des champs créés par des circuits en régime stationnaire.

→ module $d\vec{B}(\mathrm{M})$ : $\left\|d\vec{B}(M)\right\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\left\|\overrightarrow{d\ell}\right\|\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}{PM^3}\left|\sin(\overrightarrow{d\ell},\overrightarrow{PM})\right|$

→ direction de $d\vec{B}(\mathrm{M})$ : $d\vec{B}(\mathrm{M})$ est normal au plan formé par $I\overrightarrow{d\ell}$ et $\overrightarrow{PM}$ .

→ sens de $d\vec{B}(\mathrm{M})$ est tel que le trièdre ( $d\vec{B}(\mathrm{M})$, $I\overrightarrow{d\ell}$ , $\overrightarrow{PM}$ ) soit direct. Le sens de $d\vec{B}(\mathrm{M})$ peut être défini soit par le bonhomme d'Ampère, soit par les trois doigts de la main droite, la règle du tire bouchon…

- bonhomme d'Ampère : un observateur couché le long du fil et regardant le point M, le courant le traverse des pieds vers la tête, le sens de $d\vec{B}$ est donné par le sens de la main gauche (figure 3a) .
- les trois doigts de la main droite : le pouce dans le sens de $I\overrightarrow{d\ell}$, l'index dans le sens de $\overrightarrow{PM}$ , le majeur donne le sens de $d\vec{B}$(M) (figure 3b)

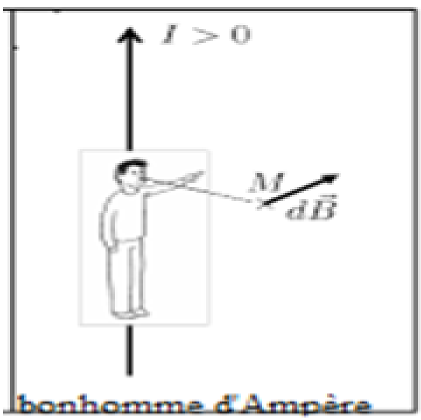


Figure 3a

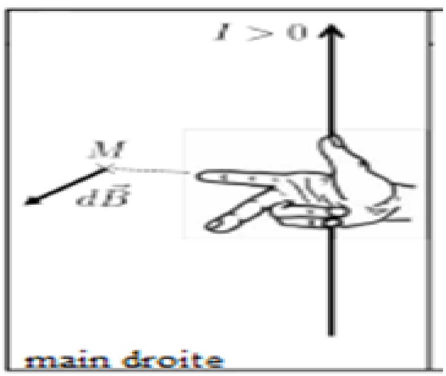


Figure 3b

L'expression du champ magnétique $\vec{B}$ (M) résultant créé par toute la distribution de courant filiforme est obtenue en sommant sur les champs élémentaires $d\vec{B}$(M) :

$$\vec{B}\,(\mathrm{M}) = \int_{distr} d\vec{B}(M) = \int_{distr} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Le champ d'induction magnétique n'est pas défini en un point d'une distribution linéique
<u>Remarque</u> : la loi de Biot et Savart est généralisée aux circuits non filiformes.

*2- <u>Lignes et tubes de champ d'induction magnétique</u>*

- Une ligne de champ est une courbe orientée par le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ telle qu'en tout point M de cette ligne, le **vecteur champ magnétique est tangent**.

L'équation d'une ligne de champ se déduit de $\vec{B}(M)\wedge d\overrightarrow{M} = \vec{0}$

Deux lignes de champ ne peuvent pas se croiser, sauf si le vecteur $\vec{B}$ est nul au point d'intersection.

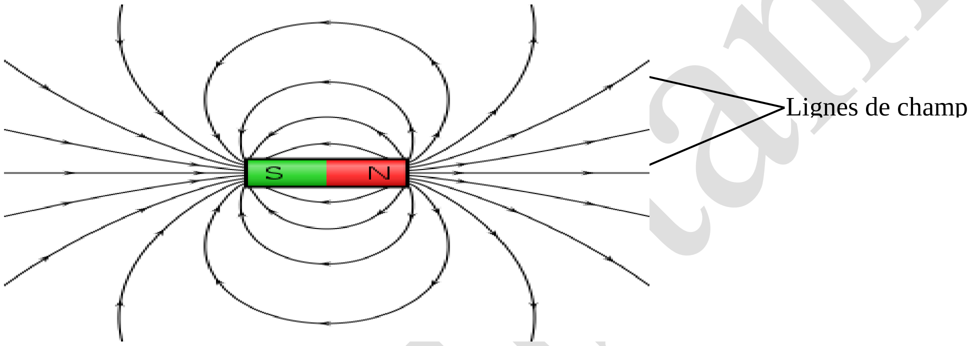



Figure 3a : lignes de champ créé par un aimant

- Tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

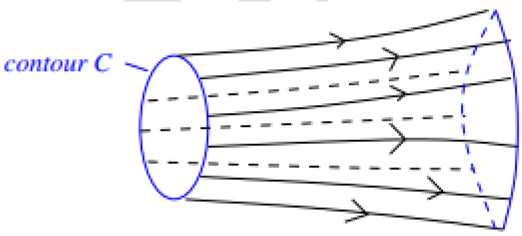



Figure 4b : tube de lignes de champ créé

## -III- *Symétrie plane d'une distribution de courant et invariances*

1) Plan de symétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant Ɗ possède un plan de symétrie magnétostatique π si pour tout point P Є D il existe un point P'Є D symétrique de P par rapport à π et si les éléments de courants aux points P et P' sont aussi symétriques par rapport plan π .

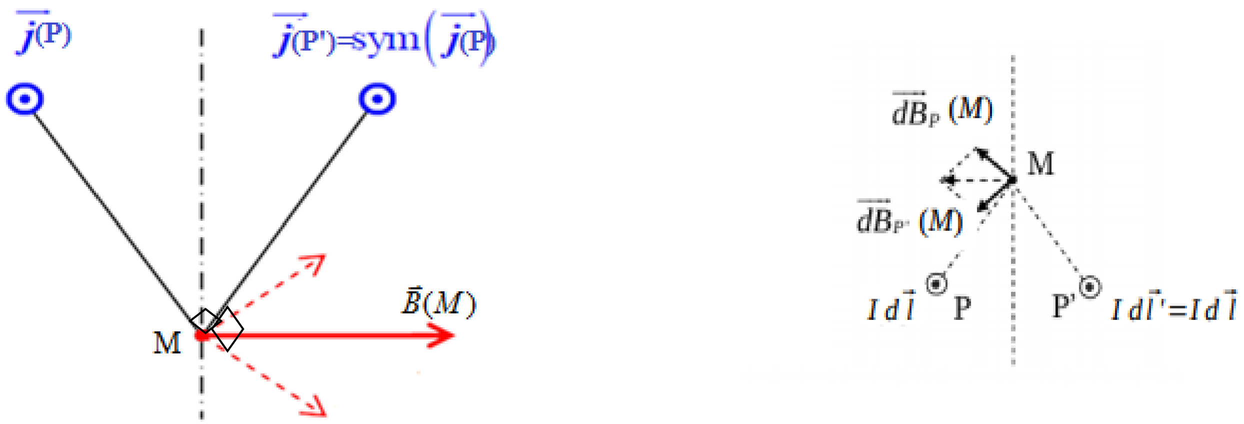
Pour une distribution filiforme de courant : $I\,\vec{dl}(P') = sym_\pi\, I\,\vec{dl}(P)$

Pour une distribution surfacique de courant : $\vec{j}_s(P')\,d\tau = sym_\pi\, \vec{j}_s(P)\,d\tau$

Pour une distribution volumique de courant : $\vec{j}(P')\,d\Sigma = sym_\pi\, \vec{j}(P)\;d\Sigma$

| |
|---|
| Pour tout point $M \in \pi$, le champ $\vec{B}(M)$ créé en M par la distribution de courant est orthogonal au plan π |

Exemple :




Figures 5

| |
|---|
| Remarque : pour deux points M et M' symétriques par rapport au plan de symétrie magnétostatique π de la distribution de courant: $\vec{B}(M')$ est l'opposé au symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à π. |

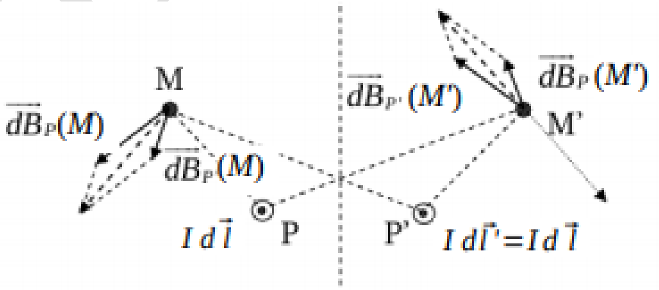



Figure6

2) Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant Ɗ possède un plan d'antisymétrie magnétostatique π' si pour tout point P Є D il existe un point P'Є D symétrique de P par rapport à π' et si les éléments de courants aux points P et P' sont antisymétriques rapport plan π .

Pour une distribution filiforme de courant : $Id\vec{l}\,(P') = -\, sym/_{\pi'}\, I\, \vec{dl}(P)$

Pour une distribution surfacique de courant : $\vec{j}_s(P')\,d\Sigma = -sym/_{\pi'}\ \vec{j}_s(P)\,d\Sigma$

Pour une distribution volumique de courant : $\vec{j}(P')\,d\tau = -sym/_{\pi'}\ \vec{j}(P)\,d\tau$ ,

Pour tout point $M \in \pi'$, le champ $\vec{B}(M)$ créé en M par la distribution de courant appartient à ce plan π'.
Le champ $\vec{B}$ appartient au plan d'antisymétrie π'de la distribution de courant en tout point de ce plan.

Exemple (figure7) :

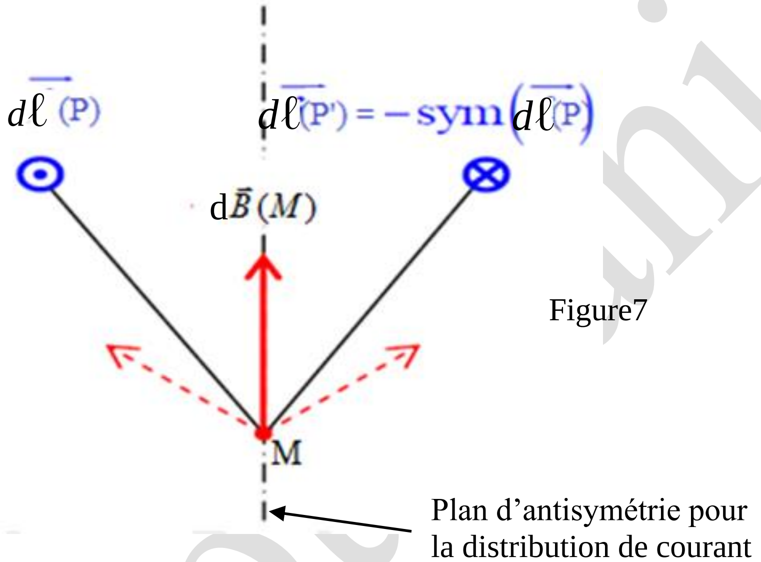



Figure7

Remarque : deux points M et M' symétriques par rapport au plan d'antisymétrie magnétostatique π' de la distribution de courant: $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à π' .

3) Invariances

- Invariance par translation

Une distribution de courants est invariante par translation selon un axe Δ si elle reste inchangée par toute translation le long de cet axe.

Si la distribution de courant est invariante dans toute translation le long d'un axe alors le module du champ $\vec{B}$ ne dépend pas de la coordonnée du point M selon cet axe (principe de Marie curie).

Exemple : un fil rectiligne supposé infini parcouru par un courant d'intensité I est invariant dans toute translation le long de l'axe du fil.

- Invariance par rotation

Une distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe Δ si elle reste globalement inchangée par une rotation quelconque autour de cet axe

| |
|---|
| Si la distribution de courant est invariante dans toute rotation autour d'un axe alors le module du champ $\vec{B}$ créé par cette distribution ne dépend pas de l'angle de rotation autour de cet axe (principe de Marie curie) |

Exemple : cas d'une distribution D cylindrique. En utilisant les coordonnées cylindriques $\rho, \varphi et\, z$ d'un point M de l'espace vide, la distribution est invariante dans toute rotation d'angle φ autour de l'axe de la distribution cylindrique et le module du champ $\vec{B}$ créé par D au point M ne dépend pas de la coordonnée φ du point M.

## -IV- ***Théorème d'Ampère***

### 1- *Enoncé du théorème d'Ampère*

Considérons, dans le vide, une distribution de courant continu créant en un point M de l'espace un champ d'induction $\vec{B}$

Enoncé **:** **«**Dans le vide, la circulation du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ sur un contour fermé et orienté Γ, est égale au produit de $\mu_0$ par la somme algébrique des courants enlacés qui traversent toute surface S orientée s'appuyant sur le contour Γ**»**.

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}(M)\,.\,\overrightarrow{dM} = \mu_0 \sum I_{enlacé}}$$

* $d\overrightarrow{M}$ est le déplacement élémentaire de M sur le contour d'Ampère Γ.

* On oriente le contour Γ et la surface *S* qui s'appuie sur Γ.
La surface S, est orientée conformément à l'orientation du contour (on utilise la règle du tire-bouchon).
Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est normal à S.

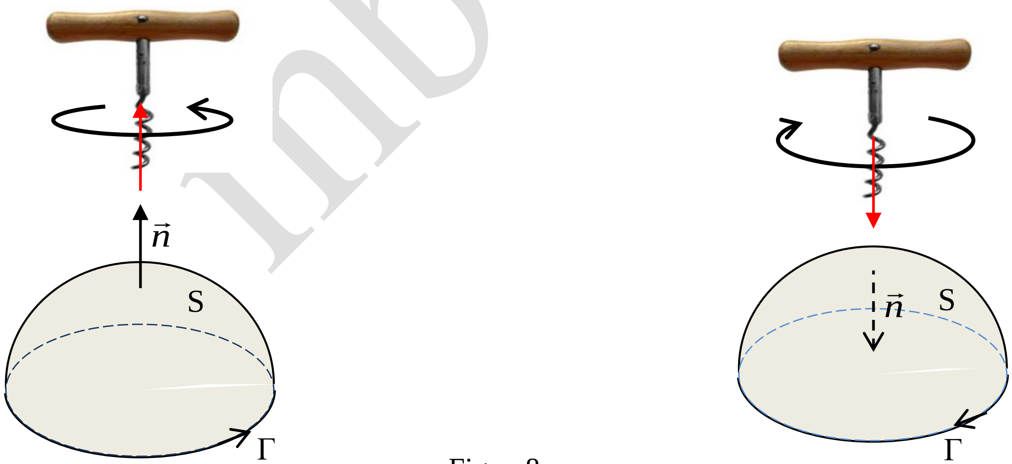



Figure8

*($I_{enlacé}$) est compté positif si le courant traverse la surface S dans le sens de $\vec{n}$ (selon la règle du tire bouchon)

($I_{enlacé}$) est compté négatif si le courant traverse la surface dans le sens opposé à $\vec{n}$ (selon la règle du tire bouchon)

Exemple : circuits filiformes (figure 9)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \,.\, d\overrightarrow{M} = \mu_0 [+I_2 - I_3 + I_4 - I_4] = \mu_0 [+I_2 - I_3].$$

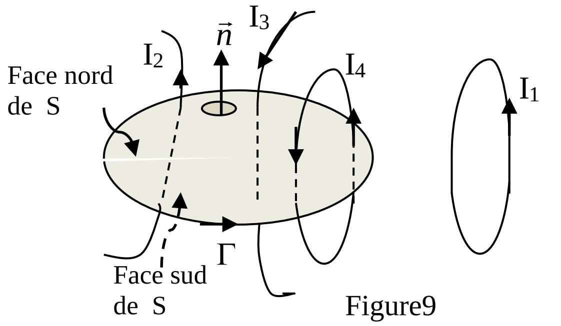


Figure9

• On ne considère que les courants qui traversent la surface s'appuyant sur le contour d'Ampère Γ.

• Le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ d'induction magnétique lorsque des symétries de la distribution de courant facilitent le calcul de la circulation de $\vec{B}$ pour cela on suit les étapes suivantes :

* on choisit le système de coordonnées adéquat ( le point M de l'espace où est créé $\vec{B}$ est repéré soit par ses coordonnées cartésiennes soit par ses coordonnées cylindriques soit par ses coordonnées sphériques selon la géométrie de la distribution de courant)

* on fait une étude de la symétrie magnétostatique plane : l'étude de la symétrie permet de déterminer la direction du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ :

- Si la distribution de courant possède un plan de symétrie magnétostatique et si M appartient à ce plan, le champ $\vec{B}$ (M) créé par la distribution de courant est orthogonal au plan de symétrie.
- Si la distribution de courant possède un plan d'antisymétrie magnétostatique et si M appartient à ce plan, le champ $\vec{B}$ (M) créé par la distribution de courant appartient à ce plan d'antisymétrie.

* on fait une étude des invariances : elle permet de déterminer de quelle coordonnée du point M dépend le module B(M) du champ $\vec{B}$

* Le choix du contour d'Ampère Γ: Γ est choisi de façon à ce que le calcul du terme $\oint_{\Gamma} \vec{B}(M).\, \overrightarrow{dM}$ soit le plus facile possible.

Le contour d'Ampère Γ passe par le point M où on cherche à déterminer le champ $\vec{B}(M)$ : on exprime la circulation du champ $\vec{B}(M)$ sur une courbe fermée Γ définie soit par une seule ligne de champ ( $\vec{B}(M)$ sera tangent en tout point de Γ), soit par des portions de lignes de champ complétées par des lignes orthogonales à $\vec{B}(M)$.

En notant L la longueur de la ligne de champ considérée, si Γ est une ligne de champ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M).\, \overrightarrow{dM} = B \oint_{\Gamma} d\ell = \text{B L}$$

Le module de $\vec{B}$ doit être constant en chaque point du contour Γ.

*Application du théorème d'Ampère et détermination du champ $\vec{B}(M)$.

Remarques :

- Dans le cas général où les courants sont répartis en volume :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\, d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\,.\, d\vec{S}$$

Exemple d'un cylindre plein infini parcouru par un courant d'intensité I de densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme

- Le théorème d'Ampère est une forme intégrale d'une loi fondamentale. Cette loi peut également être écrite sous forme différentielle : $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

En effet : d'une part on a $\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_S \mu_0 \, \vec{j}.d\vec{S}$

D'autre part le théorème de stokes permet d'écrire : $\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\, \vec{B}.d\vec{S}$

On déduit que : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ c'est l'équation locale du théorème d'Ampère valable uniquement en courant continu et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

## -V- Conservation du flux du champ magnétique - Loi fondamentale de $\vec{B}$

En magnétostatique, la propriété fondamentale du champ $\vec{B}$ est: $\boxed{\text{div}\, \vec{B} = 0}$

Le théorème de divergence permet de déduire :

$\iiint_V div\vec{B}\, dv = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \;\Rightarrow$ Le flux du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul, on dit que le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif.

Démonstration :

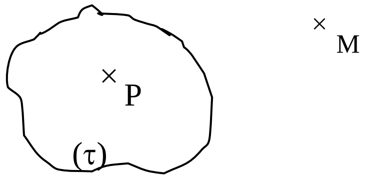
Soit M un point de l'espace et P un point d'une distribution volumique de courant

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{PM} = (x - x_p)\vec{e}_x + (y - y_p)\vec{e}_y + (z - z_p)\vec{e}_z$

Et $\overrightarrow{grad}\dfrac{1}{PM} = -\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

On va utiliser les relations : $div_M\,(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.\,\overrightarrow{rot}_M\,\vec{a} - \vec{a}.\overrightarrow{rot}_M\,\vec{b}$

$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$




$$div_M \vec{B}(M) = div_M\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint(\vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3})d\tau\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint div_M\,(\vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3})d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\cdot \underbrace{\overrightarrow{rot}_M\;\vec{j}(P)}_{=\vec{0}} - \vec{j}(P)\cdot \overrightarrow{rot}_M\,\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)d\tau$$

$\overrightarrow{rot}_M\;\vec{j}(P) = \vec{0}$ *car* $\vec{j}(P)$ *ne dépend pas de la position du point* $M$

$$div_M \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{j}(P)\cdot(-\overrightarrow{rot}_M\,\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3})\; d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{j}(P)\cdot \underbrace{\overrightarrow{rot}_M\,(\overrightarrow{grad}_M\;\frac{1}{PM})}_{=\vec{0}}\; d\tau = 0$$

Ce qui donne une loi fondamentale de la magnétostatique : div $\vec{B} = 0$ Cette formule est valable aussi hors magnétostatique.

Pour trouver la forme intégrale de cette relation locale, on considère un volume V limité par une surface fermée S.

On peut appliquer le théorème de Green-Ostrodgradsky :

$$\iiint_V div\vec{B}\, dv = \oiint_S \vec{B}.\,d\vec{S}$$

Or div $\vec{B} = 0$ donc $\iiint_V div\vec{B}\, dv = \oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ pour toute surface fermée.

$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ est la forme intégrale de la conservation du flux magnétique : le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul.

Ainsi, les lignes du champ $\vec{B}$ ne peuvent pas diverger à partir d'un point ; elles n'ont « ni début ni fin ».

## -VI- ***Potentiel vecteur***

### *1- Définitions*

*Le champ magnétique ne dérive pas d'un potentiel scalaire car la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé est non nulle d'après le théorème d'Ampère.

Mais, L'équation locale div $\vec{B}=0$ permet d'écrire que $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ (car $\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\mathrm{A}})=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{A}})=0$).

Il existe donc un champ de vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

On dit que $\vec{\mathrm{B}}$ dérive d'un potentiel vecteur $\bar{\mathrm{A}}$, exprimé en Tesla par mètre

Le champ $\vec{A}$ est le potentiel vecteur du champ d'induction magnétique $\vec{B}$.

*Sachant que le rotationnel d'un champ de gradient est nul, la relation $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$ ne permet de déterminer le vecteur $\vec{A}$ qu'au gradient d'une fonction f différentiable prés.

On écrira :

$$\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}=\overrightarrow{rot}\,(\vec{A}'+\overrightarrow{grad}\,f)=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}'+\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,f)=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}'$$

### *2- Expression de $\vec{A}$*

On a : $\vec{B}(M)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\vec{j}(P)\wedge\underbrace{\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}}_{=-\overrightarrow{grad}_M\frac{1}{PM}}d\tau=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\overrightarrow{grad}_M\frac{1}{PM}\wedge\vec{j}(P)d\tau$

Or, $\overrightarrow{grad}_M\frac{1}{PM}\wedge\vec{j}(P)=\overrightarrow{rot}_M\frac{\vec{j}(P)}{PM}-\frac{1}{PM}\underbrace{\overrightarrow{rot}_M\vec{j}(P)}_{=\vec{0}}$

Car de façon générale, $\overrightarrow{rot}(f\,\vec{v})=f.\overrightarrow{rot}\vec{v}+\overrightarrow{grad}f\wedge\vec{v})$

Et donc $\vec{B}(M)=\overrightarrow{rot}_M\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau\frac{\vec{j}(P)}{PM}d\tau\right)$

On peut donc poser $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau\frac{\vec{j}(P)}{PM}d\tau$

- *Distribution volumique de courant*

Soit dτ, un élément de volume d'un conducteur de volume τ, centré autour d'un point P. Le potentiel vecteur créé en un point M par l'élément de courant $\vec{j}$ (P) dτ est :

$$d\vec{A}(M)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}}{PM}d\tau$$

Le potentiel vecteur créé par le conducteur au point M : $\vec{A}(M)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau\frac{\vec{j}(P)}{PM}d\tau$

Remarque : Des relations $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$, on peut déduire une relation reliant le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}$. En effet on peut écrire :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\vec{A}=\mu_0\vec{j}$$

- ***Distribution linéique de courant***

Le potentiel vecteur élémentaire créé en un point M par un élément de courant I $d\vec{l}$ s'écrit :

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_0\, I\, d\vec{l}}{4\pi\, PM}$$

Ce qui donne pour le potentiel total créé en M par la distribution : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{circuit}\frac{I\ d\vec{l}}{PM}$

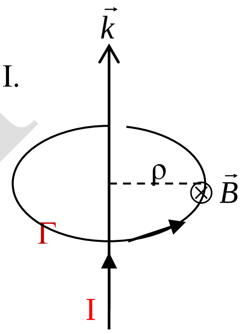
### 3- Symétrie plane de $\vec{A}$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est un vrai vecteur.

Si π est un plan de symétrie de la distribution de courant, pour $M \in \pi$, on a alors $\vec{A}$(M) appartient à π.

Si π'est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, pour $M \in \pi'$,on a alors $\vec{A}$(M) orthogonal à π'.

### 4- Application




Déterminer le potentiel créé par un fil infini parcouru par un courant continu d'intensité I.

Méthode 1 :

* Calcul de $\vec{A}$ à partir de la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Il faut de plus connaître le rotationnel dans le système de coordonnées considéré.

Méthode 2 :

* On considère le système de coordonnées cylindriques et la base cylindrique.

L'axe Oz est confondu avec le fil

Tout plan orthogonal à Oz est un plan d'antisymétrie pour le courant donc pour $\vec{A}$ aussi.

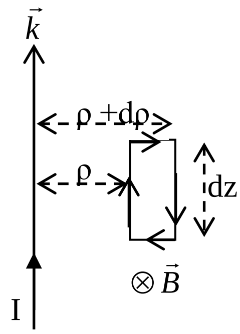
Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie pour le courant donc aussi pour $\vec{A}$.

La distribution de courant est invariante dans toute rotation autour de Oz et dans toute translation le long de Oz. Donc $\vec{A} = A(\rho)\ \vec{k}$

On a alors d'après le théorème de Stockes : $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\overrightarrow{rot}\vec{A})\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

On calcule la circulation de $\vec{A}$ sur un contour de longueur dz et de largeur dρ :

On oriente le contour dans le sens de $\vec{e}_\varphi$




Ainsi, $A(\rho)dz - A(\rho + d\rho)dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, \rho}\, d\rho.dz$ où $\frac{\mu_0 I}{2\pi.\rho} d\rho.dz$ est le flux de $\vec{B}$ à travers la surface (drdz) orientée par le contour C conformément à la règle du tire bouchon. Ainsi $\frac{d(A(r))}{d\rho} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi\, \rho}$

Et donc $A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho\ +\ cons\tan te$

## -VII - dipôle magnétique

### 1- Définition

On appelle dipôle magnétique toute boucle de courant dont les dimensions sont très petites devant la distance où sont calculés le champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ créés par la boucle de courant.

### 2- Moment dipolaire magnétique

On appelle moment magnétique d'une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité I le vecteur :

$$\vec{m} = I\,\vec{S} = \mathrm{I\ S}\ \vec{n}$$

S : la surface de la boucle de courant et $\vec{n}$ le vecteur unitaire orienté par le courant d'intensité I selon la règle du tire bouchon

L'unité du moment est : $A.m^2$ si I est en ampère et S en mètre au carré.

$\vec{m}$ est généralement exprimé en Joule/ Tesla.

Exemple :

L'expression du champ d'induction magnétique créé par une boucle de courant filiforme circulaire en un point M de son axe Oz de vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\vec{e}_z$$

Ce champ est axial, il est maximal au centre de la boucle de courant et il décroît comme le cube du sinus de l'angle $\alpha$ sous lequel est vu le rayon de la boucle de courant.

À très grande distance sur l'axe, le champ a une forme équivalente plus simple : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I R^3}{2R\,|z|^3}\vec{e}_z$

Pour la boucle de courant circulaire, $\vec{S} = \pi R^2\,\vec{e}_z$ et donc $\vec{m} = I\,\pi R^2\,\vec{e}_z$

Le champ magnétique à une grande distance sur l'axe de la spire prend alors la forme suivante :

$$\vec{B}(M) \approx \vec{B}_{dip}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\,\vec{m}}{|z|^3}$$

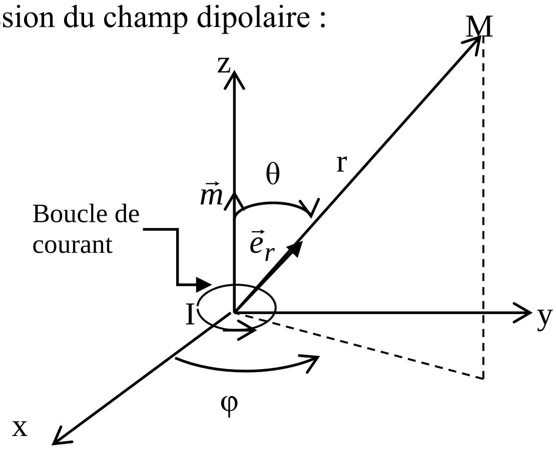
### 3 - Expression du champ $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ créés par un dipôle magnétique

En coordonnées sphériques : $\vec{A}_{dip} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\Lambda\,\vec{r}}{r^3}$ et $\vec{B}_{dip} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^3}\left[2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right]$

Le champ d'induction magnétique d'un dipôle magnétique dérive du potentiel vecteur dipolaire par la relation $\vec{B}_{dip} = \overrightarrow{rot}\vec{A}_{dip}$. Nous admettrons sans démonstration l'expression du champ dipolaire :

$$\overline{B_{dip}}\ \left|\ \begin{array}{l} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m\cos\theta}{r^3} \\[2mm] B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m\sin\theta}{r^3} \\[2mm] B_\varphi = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left[2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right]$$



## -VIII- ***Action d'une induction magnétique***

### *1- Force magnétique appliquée à une charge électrique ponctuelle*

Une charge ponctuelle q animée d'une vitesse $\vec{v}$ , dans un référentiel galiléen, dans une région où règne un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ , est soumise à une force magnétique $\vec{F}$ :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Cette force magnétique ne travaille pas. En effet au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$ de la charge électrique, le travail élémentaire dW de $\vec{F}$ est : dW = $\vec{F} \,.\, d\vec{r} = \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}\, dt = 0$

### *2- Force de Laplace*

C'est la force magnétique appliquée à un circuit parcouru par un courant électrique.

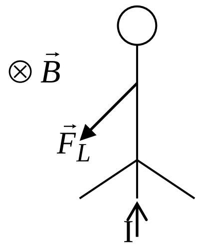
Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant constant d'intensité I situé dans une région où règne un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ .
La force magnétique appliquée au milieu de chaque élément de longueur dl du circuit est :

$$d\vec{F}_L = I(d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

Où $\left\|d\vec{F}_L\right\|$ = I $dl$ $\left\|\vec{B}\right\|$| sin (I $d\vec{l}$ , $\vec{B}$ )| .

$d\vec{F}_L$ est appelée force de la Place.

Direction de $d\vec{F}_L$ : $d\vec{F}_L$ est perpendiculaire au plan formé par I $d\vec{l}$ et $\vec{B}$
Sens de $d\vec{F}_L$ : on peut utiliser l'une des règles suivantes :




- la règle du bonhomme

Le bonhomme d'Ampère traversé par le courant des pieds vers la tête, regarde dans la direction de $\vec{B}$ . Le sens de $\vec{F}$ est vers sa gauche

- La règle des 3 doigts de la main droite

Le pouce dans la direction de I. L'index dans la direction de $\vec{B}$ . Le majeur donne la direction de la force

La résultante des forces de Laplace appliquée au circuit : $\vec{F}_L = \int_{circuit} d\vec{F}_L = I\int_{circuit}(d\vec{l} \wedge \vec{B})$

<u>Remarque :</u> $\vec{B}$ est la somme d'un champ propre créé par le circuit lui même et d'un champ extérieur. Dans la suite on néglige le champ propre et on ne tient compte que du champ extérieur.

## 3- *Travail des forces de Laplace en fonction du flux - Théorème de Maxwell*

### a- *Flux coupé*

Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant constant d'intensité I, placé dans une région où règne un champ d'induction magnétique $\vec{B}$. Un élément de longueur $dl$ du circuit parcouru par un courant d'intensité I subit la force de Laplace : $d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$

Le travail de la force $d\vec{F}_L$, au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ de l'élément $d\vec{l}$ :

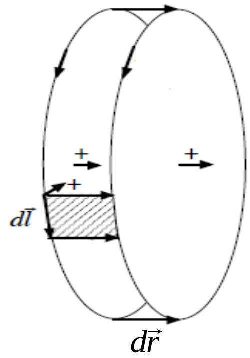
$$\delta^2 W = d\vec{F}_L . d\vec{r} = I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) . d\vec{r} = I\ \vec{B}\,(d\vec{r} \wedge d\vec{l})$$

avec $d\vec{r} \wedge d\vec{l} = d^2\vec{S}$ tel que $(d\vec{r}, d\vec{l}, d^2\vec{S})$ est un trièdre direct.

$$\delta^2 W = I\,\vec{B} . d^2\vec{S} = I\,\delta^2\phi_c$$

$\delta^2\phi_c$ est le flux coupé de $\vec{B}$ à travers la surface $d^2\vec{S}$ balayée par $d\vec{l}$ au cours de son déplacement élémentaire $d\vec{r}$.

Comme le courant est constant, on déduit le travail des forces de Laplace au cours du déplacement $d\vec{r}$ de l'ensemble du circuit : $\boxed{\delta W = I\,\delta\phi_c}$




Où $\delta\phi_c$ est le flux coupé du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface dS balayée pa l'ensemble du circuit au cours de son déplacement élémentaire $d\vec{r}$.

Le travail des forces de Laplace appliquées au circuit au cours d'un déplacement fini

$$\boxed{W_L = I\,\phi_c}$$

$\phi_c$ est le flux coupé du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface balayée par l'ensemble du circuit au cours de son déplacement fini.
L'unité du flux est le Weber (Wb) en unités du système international.

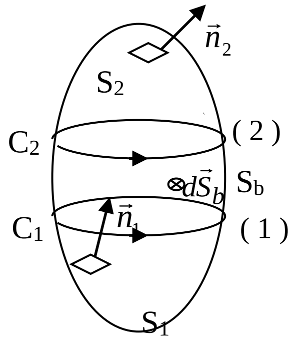
### b- *Théorème de Maxwell*

Considérons un circuit, parcouru par un courant constant d'intensité I. Le circuit se déplace d'une position (1) à une position (2), dans une région où règne un champ d'induction magnétique stationnaire (indépendant du temps) $\vec{B}$.
Evaluons le flux de $\vec{B}$ qui sort à travers la surface fermée S constituée par :

- la surface $S_b$ balayée par le circuit au cours de son déplacement de (1) à (2)
- une surface $S_1$ qui s'appuie sur $C_1$ (contour qui coïncide avec le circuit en position 1)
- une surface $S_2$ qui s'appuie sur $C_2$ (contour qui coïncide avec le circuit en position 2)

On note $\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B}.d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} \vec{B}.\vec{n}_1\ dS_1$

Et $\phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B}.d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} \vec{B}.\vec{n}_2\ dS_2$




Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orientés conformément à l'orientation des courants, parcourant $C_1$ et $C_2$ ( d'après la règle du tire-bouchon).

Le flux sortant de $\vec{B}$ à travers la surface fermée S est :

$$\phi_{sortant} = \phi_2 - \phi_1 - \phi_c = 0 \ \text{ car } \vec{B} \text{ est à flux conservatif } \left( \oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0 \right).$$

d'où $\phi_c = \phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$

Ainsi le travail élémentaire des forces de Laplace s'écrit : $\boxed{\delta W = I\, d\phi_C = I\, d\phi}$ c'est le théorème de Maxwell

*Enoncé du théorème de Maxwell :*

« Le travail des forces de Laplace, appliquées à un circuit parcouru par un courant d'intensité constante I et se déplaçant dans une région où règne un champ d'induction magnétique stationnaire $\vec{B}$, est égal au produit par I de la variation du flux de $\vec{B}$ à travers toute surface s'appuyant sur le circuit »

$$\boxed{W_L = I\, \Delta\phi}$$

Ce théorème est utile lorsqu'on néglige le champ propre créé par le circuit. Dans ce cas on ne tient compte que du flux du champ appliqué c'est à dire du champ extérieur.

Remarque :

La relation $W_L = I\Delta\phi = I(\phi_2 - \phi_1)$ indique que le travail est indépendant du chemin suivi.

La force de Laplace peut donc être décrite comme dérivant d'une énergie potentielle et son travail pendant un déplacement d'une position 1 à une position 2 peut s'écrire : $W_L = -\Delta E_P = E_{P1} - E_{P2}$.

Ainsi le travail élémentaire de la résultante des forces de Laplace $\vec{F}_L$ : $dW_L = d(-I\,\phi)$

$\vec{F}_L = \overrightarrow{grad}\,(-I\,\phi)$ et l'énergie potentielle $\mathbf{E_p = -\, I\, \phi + C^{te}}$

*Calcul des actions de Laplace à partir du flux*

l'expression $W_L = I\,\Delta\phi$ permet de déduire les expressions de la résultante $\vec{F}$ et du moment résultant $\Gamma$ des forces de Laplace appliquées à un circuit.

- Cas d'une translation : lorsqu'un circuit indéformable subit une translation d'ensemble $d\vec{r}$

Le travail des forces de Laplace dû au champ appliqué :

$$\left.\begin{aligned} dW_L &= \vec{F}_L \cdot d\vec{r} \\ dW_L &= I\, d\Phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = I\, d\Phi$$ ce qui permet de déduire l'expression de $\vec{F}_L$.

Exemple : si $\vec{F}_L = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

on écrit $F_x = I\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ ; $F_y = I\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ ; $F_z = I\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

La résolution de ces équations donne les composantes de $\vec{F}_L$

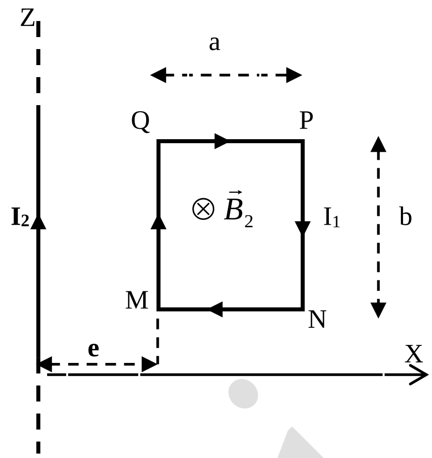
- Cas d'une rotation autour d'un axe: le moment $\Gamma$ des actions magnétiques qui s'exercent sur un circuit en rotation autour d'un axe $\Delta$, peut être évalué en exprimant le travail des forces de Laplace lors d'une rotation $d\theta$ autour de l'axe.

$$dW_L = \Gamma_{/\Delta}\, d\theta = I\, d\phi \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{/\Delta} = I\,\frac{d\phi}{d\theta}$$

Applications

1- Un circuit rectangulaire indéformable MNPQ, avec MN = PQ = a et NP = QM = b, parcouru par un courant constant d'intensité $I_1$, se déplace dans son plan. Un fil rectiligne, infini, parcouru par un courant constant d'intensité $I_2$ est placé dans le plan du circuit tel que le côté MN est parallèle au fil.

Ce circuit évolue librement sous l'action du champ $\vec{B}_2$ créé par le fil rectiligne.
En appliquant le théorème de Maxwell, évaluer la force magnétique appliquée au circuit MNPQ.




Solution : on sait que $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\vec{j}$

$$\phi_{B_2} = \int \vec{B}.\vec{n}_2 dS = \int_e^{e+a} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\vec{j}.bdx\vec{j}$$

$$\phi_{B_2} = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\ln\frac{e+a}{e}$$

$$F_x = I_1\frac{d\phi}{dx_0} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{x_0+\frac{a}{2}} - \frac{1}{x_0-\frac{a}{2}}\right)$$

Le cadre se rapproche du fil ( $F_x < 0$ ) si $I_1 I_2 > 0$ ; ce qui a pour effet d'augmenter le flux.

2- Une spire circulaire, parcourue par un courant stationnaire I et pouvant tourner autour de l'un de ses diamètres. Evaluons le couple des forces Γ auquel est soumise la spire, en utilisant le théorème de Maxwell.

Solution : la spire est placée dans un champ $\vec{B}$ uniforme. Elle subit une rotation, autour d'un de ses diamètre, par rapport à la direction de $\vec{B}$. Le flux ϕ de $\vec{B}$ traversant la surface S de la spire varie de dϕ.
A un instant t donné $\phi = BS\cos\theta$
Pour une rotation de dθ le flux varie de $d\phi = -B\,S\sin\theta\,d\theta$
Le théorème de Maxwell permet d'écrire : $d\tau = \Gamma d\theta = I d\phi = -B\,I\,S\sin\theta\,d\theta$
On en déduit $\Gamma = -\,B\,I\,S\sin\theta$