Semaine du 23 novembre 2020

Corrigé de l'exercice 3/TD1

Le solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini de section circulaire, comportant n spires par unité de longueur parcourue chacune par un courant d'intensité I
Un solénoïde de section circulaire peut être considéré comme infini si $R << l$ où l est sa longueur et R le rayon de sa section. Soit N le nombre de spires jointives constituant le solénoïde.
Déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé en tout point M de l'espace par le solénoïde infini

Solution

* Système de coordonnées cylindrique (ρ, φ , z)
* Base cylindrique : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

1) Etude de symétrie : le plan $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant (solénoïde supposé de longueur infinie), le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) = B_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z$

2) Etude des invariances :
- la distribution étant cylindrique $\Rightarrow$ elle est invariante par rotation autour de l'axe Oz
- la distribution étant de longueur infinie $\Rightarrow$ elle est invariante par translation le long de Oz.

Donc le module de $\vec{B}(M)$ ne dépendrait que la coordonnée ρ du point M

Soit : $\vec{B}(M) = B_z(\rho)\vec{e}_z$.

Ceci permet de conclure que les lignes de champ sont des droites parallèles à l'axe Oz.

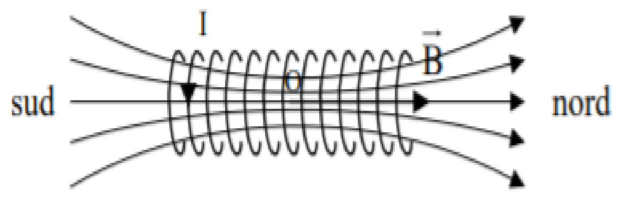

Figure1 : lignes de champ à l'intérieur d'un solénoïde

Choix du contour d'Ampère

Le contour d'Ampère choisi est un rectangle dont deux côtés sont parallèles à Oz (parties de lignes de champ) et les deux autres perpendiculaires à l'axe Oz.

3) Application du théorème d'Ampère :

On utilise 3 contours fermés (voir figure 2) : un à l'extérieur du solénoïde, un à l'intérieur et un à cheval sur l'intérieur et l'extérieur :

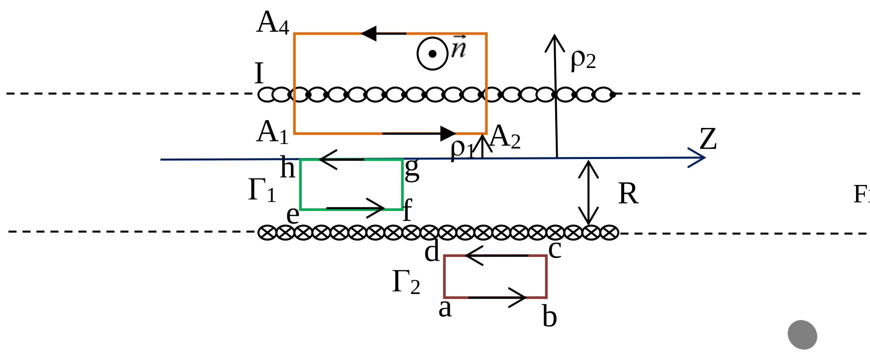

Figure2

- Pour M à l'extérieur du solénoïde ($\rho > R$) : $\oint_{\Gamma_2} \vec{B}_{ext} \,.\, d\overrightarrow{M} = (B_z(\rho_{ab}) - B_z(\rho_{cd}))\ \ell = 0$
car au aucun courant n'est enlacé par le contour $\Gamma_2 \Rightarrow \vec{B}_{ext}$ est uniforme
- Pour M à l'intérieur du solénoïde ($\rho < R$) : $\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_{\text{int}} \,.\, d\overrightarrow{M} = (B_z(\rho_{ef}) - B_z(\rho_{gh}))\ \ell = 0$
car au aucun courant n'est enlacé par le contour $\Gamma_1 \Rightarrow \vec{B}_{\text{int}}$ est uniforme
- On considère le contour orienté $\Gamma = A_1A_2A_3A_4$:

Sur A_1A_2 :

$\vec{B}(M) = B_z(\rho_M)\,\vec{e}_z = B_z(\rho_1)\vec{e}_z$ et $d\vec{M} = dz.\vec{e}_z$

$\int_{A_1A_2} \vec{B}(M).d\vec{M} = \int_{Z_{A_1}}^{Z_{A_2}} B_z(\rho_1)\ dz = B_z(\rho_1)\times(A_1A_2)$

Sur A_2A_3 :

$d\vec{M} = d\rho.\vec{e}_\rho \perp \vec{B}(M) = B_z(\rho)d\vec{z}$ Donc $\int_{A_2A_3} \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = 0$

Sur A_3A_4 :

$d\vec{M} = dz.\vec{e}_z,\ \vec{B}(M) = B_z(\rho_2)\vec{e}_z$. Donc $\int_{A_3A_4} \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = B_z(\rho_2)\times(-A_3A_4)$

Sur A_3A_1 :

on aura, de même que sur A_2A_3, $\int_{A_3A1} \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = 0$

Donc : $\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = [B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)]\times\ell$ où $\ell = A_1A_2 = A_3A_4$

D'après le théorème d'Ampère : $\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\overrightarrow{M} = \mu_0 \sum_i I_i$ avec $\sum I_i = \underbrace{n\times\ell}_{\text{nombre de spires}} \times I$

Donc : $[B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)]\times\ell = \mu_0\, n\times\ell\times\ I$

$B_z(\rho_1) = B_{\text{int}}$ est uniforme pour tout M intérieur au solénoïde. Or, pour $\rho = 0$ c'est à dire pour un point de l'axe (Oz) du solénoïde infini, on a $\vec{B} = \mu_0\, n I\ \vec{e}_z$ d'après le calcul direct par application de la loi de Biot et Savart.

Donc $B_z(\rho_1) = \mu_0 nI$ et $B_z(\rho_2) = B_{zext} = 0$

Ainsi, pour un solénoïde infini parcouru par un courant d'intensité I constitué par n spires par unité de longueur:

à l'intérieur du solénoïde : $B(M) = \mu_0 \, n \, I$

à l'extérieur du solénoïde : $\vec{B}(M) = \vec{0}$