CHAPITRE 3

A-EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

Introduction

Les équations de Maxwell peuvent être considérées comme les postulats de base de l'électromagnétisme.

Le couplage entre les phénomènes électriques et magnétiques qui apparait, en régimes variables, dans ces équations permet d'expliquer la propagation des ondes électromagnétiques.

I- Rappels

En régimes stationnaires les grandeurs ne dépendent pas du temps, ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Il en résulte donc que les champs électrostatique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont séparés.

	Equations locales	Fomes Intégrales
	Relations champs- sources	
Théorème de Gauss	$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$	$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$
Théorème d'Ampère	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_o \vec{J}$	$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o \iint_S \vec{j}\,.d\vec{S}$
	Relations de structures	
$\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$	$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = 0$
Conservation du Flux magnétique	$\text{div}\,\vec{B} = 0$	$\Phi = \oiint_S \vec{B}.\vec{dS} = 0$

où ε_0 représente la permittivité électrique du vide, μ_0 représente la perméabilité magnétique du vide, ρ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

La permittivité et la perméabilité du vide sont reliées par l'équation: $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

(Permittivité du vide : $\varepsilon_0=1/36\pi 10^9$ SI, la perméabilité du vide $\mu_0=4\pi 10^{-7}$ SI MKSA)

L'équation de conservation de la charge en régime stationnaire est: $div\,\vec{j}=0$

Remarque : il est plus commode d'introduire les potentiels V et $\vec{A}$ dont dérivent respectivement le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ d'induction magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad\,V} \quad \text{et} \quad \vec{B}=\overrightarrow{rot\vec{A}}$$

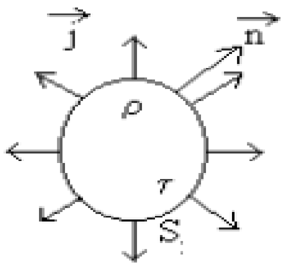
$$\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \qquad \text{Équation de Poisson}$$

$$\Delta\vec{A}+\mu_0\,\vec{j}=0 \qquad \text{avec à priori } div\vec{A}=0 \text{ (jauge de Coulomb)}$$

II- Equation de conservation de la charge électrique en régime variable

L'équation de conservation de la charge (appelée aussi équation de continuité) s'écrit :

$$div\,\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$



En effet, considérons un volume fixe (τ) de surface fermée (S) contenant une charge électrique Q .

La charge électrique totale Q contenue dans le volume (τ) à l'instant t, est :

$$Q=\iiint_\tau \rho\, d\tau$$

Pendant l'intervalle de temps dt, la charge varie dans le volume (τ) de dQ = Q(t+dt) - Q(t)

et le taux de variation de charge s'écrit : $\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\iiint_\tau \rho\, d\tau\right]$

D'autre part la charge qui sort de la surface S pendant le temps dt vaut dq = $dt\,(\oiint_S \vec{j}\,.\overrightarrow{dS})$

d'où $\frac{dq}{dt}=\oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ qui représente la charge totale sortant de la surface (S) par unité de temps ou le courant qui sort à travers la surface S (compté positif).

Par conservation de la charge :dq = - dQ d'où $\oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\left[\iiint_\tau \rho\, d\tau\right]$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a :

$$\oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = -\left[\iiint_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\tau\right]$$

Et en utilisant le théorème d'Ostrogradski : $\left[\iiint_\tau div\,\vec{j}\,d\tau\right] = -\left[\iiint_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau\right]$

D'où $\left[\iiint_\tau (div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t})d\tau\right] = 0$

Ceci est valable pour tout volume τ d'où $div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Cette équation dite aussi équation de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans c'est le cas en régime stationnaire.

Remarque : on peut vérifier que le théorème d'Ampère qui est valable uniquement dans le cas des régimes stationnaires ne peut plus être utilisé dans le cas des régimes variables car il serait en contradiction avec la relation de conservation de la charge électrique qui exprime un principe fondamental de la physique (qui est le principe de conservation de la charge électrique).

III- Equations de Maxwell en régimes variables

Pour aborder les régimes variables, on ne peut plus conserver $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$ comme c'est le cas des régimes stationnaires. On écrit alors: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell – Faraday) et

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

1- Notion de courant de déplacement

A partir de l'équation de M-G $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et de l'équation de conservation de la charge électrique ($div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$) on déduit la relation: $div\left[\vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}\right] = 0$

où $\left[\vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}\right]$ est un vecteur à flux conservatif appelé « courant total »

$\left[\frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}\right]$: est appelé « courant de déplacement », il est homogène à un courant volumique et joue au même titre que $\vec{j}$ une source du champ $\vec{B}$

On admet que $\left[\frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}\right]$ possède toutes les propriétés électromagnétiques d'un courant réel.

Et l'équation Maxwell-Ampère s'écrira: $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\, \vec{j}_{total}$ où $\vec{j}_{total} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2- Equations de Maxwell

Maxwell a admis que les lois des régimes variables s'expriment correctement à condition de remplacer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ dans le théorème d'Ampère par $\left[\vec{j} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}\right]$ qui est un vecteur à flux conservatif (c'est à dire un vecteur dont la divergence est nulle).

Le théorème d'Ampère-Maxwell qui prend en compte le courant de déplacement satisfait pleinement la relation de continuité.

Les équations de base de l'électromagnétisme dans un milieu continu parfait (défini comme ayant les propriétés diélectriques et magnétiques du vide) isotrope, linéaire et homogène sont les quatre équations de Maxwell.

Un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ satisfont les équations différentielles de Maxwell :

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell – Faraday)

$div\vec{B} = 0$ (Maxwell-Conservation du flux magnétique)

$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Maxwell – Gauss)

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\, \vec{j} + \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell– Ampère)

C'est un système d'équations différentielles qui permet de déterminer le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans tout l'espace à chaque instant.

3- Formes intégrales des équations de Maxwell

Si l'on utilise les théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes, les équations de Maxwell peuvent s'exprimer sous forme d'intégrales.

- Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss :

L'équation qui traduit le théorème de Gauss se généralise au cas des régimes variables car le flux du champ électrique à travers une surface fermée ne dépend pas de l'état du mouvement des charges.

On admet sa validité : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ qui donne alors la forme intégrale :

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_\tau div\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_\tau \rho\, d\tau$$

- Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

Expérimentalement, la force électromotrice induite dans un circuit placé dans un champ variable $\vec{B}(M,t)$, est d'après la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $\Phi = \iint_S \vec{B}(M,t).d\vec{S}$

(S est une surface limitée par le circuit fermé C)

De plus d'après la théorie: $e = \oint_C \vec{E}_m.\, d\vec{\ell}$ où $\vec{E}_m$ est le champ électromoteur induit dans le circuit.

Dans le cas général, on peut écrire: $\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_s$ où $\vec{E}_s$ est un champ électrostatique à circulation nulle sur un contour fermé (car il dérive d'un potentiel scalaire). Par conséquent on aura :

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{E}_m + \vec{E}_s).d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E}_m.d\vec{\ell}$$

La f.e.m induite s'écrira alors : $e = \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$

D'après le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{E}.\, d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}.\, d\vec{S}$

On obtient alors : $\iint_S (\overrightarrow{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}).d\vec{S} = 0$ valable pour toute surface S d'où $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

On déduit qu'un champ magnétique variable (dans le temps) engendre un champ électrique à circulation non conservative.

<u>Remarque :</u> on peut écrire, dans le cas général, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, où $\vec{E}_1$ serait le champ produit par des charges et $\vec{E}_2$ par $\vec{B}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_1 = \vec{0}$; on retrouve bien un champ électrostatique

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2 = 0$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; on trouve un champ qui a une structure magnétique.

- <u>Forme intégrale de l'équation de Maxwell- flux conservatif</u> :

On considère l'équation de Maxwell- Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow div(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = div(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t} div\vec{B} = 0$

puisque $div(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = 0$

$div\vec{B}$ ne dépend pas du temps donc elle garde la même valeur qu'en magnétostatique :

$div\vec{B} = 0$ donne la forme intégrale : $\oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$

Le champ magnétique est à flux conservatif sur n'importe qu'elle surface fermée.

- <u>Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère</u>

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{B}.\, d\vec{S} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{dt}).d\vec{S}$$

Un champ électrique variable et une densité de courant engendrent un champ magnétique à circulation non conservative.

Remarque : A partir de l'équation de Maxwell–Ampère, on peut retrouver l'équation de conservation de la charge électrique:

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Ainsi, en passant à la divergence :

$$0 = div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{\partial t}\right)$$

Mais $\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$, donc l'équation devient $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0}$

Ainsi, les équations de Maxwell sont compatibles avec le postulat de conservation de la charge électrique.

Tableau récapitulatif :

	Equations locales	Formes intégrales
Maxwell-Gauss	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau \rho\, d\tau$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0\iint_S(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{dt}).d\vec{S}$
Maxwell – Faraday	$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{E}.\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$
Conservation du flux magnétique	$div\vec{B} = 0$	$\oiint_S \vec{B}.\,d\vec{S} = 0$

<u>Remarques</u> :

Dans le vide, loin des sources en l'absence de toute charge électrique (ρ=0) et de tout courant électrique ($j = 0$), les équations de Maxwell s'écrivent:

- $div\vec{E} = 0$
- $div\vec{B} = 0$
- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

IV- Le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur $\vec{A}$

Equations définissant les potentiels V et $\vec{A}$

* $div\vec{B} = 0$ entraine qu'il existe un vecteur $\vec{A}$ appelé potentiel vecteur tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$

Le vecteur $\vec{A}$ n'est pas unique. En effet, tout vecteur $\vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\Psi$ où Ψ est une fonction scalaire arbitraire est une solution. Soit $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\Psi$ et on vérifie $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}\vec{A}' = \vec{B}$

* $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'où $\overrightarrow{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$

Ce qui implique que : $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V$ La fonction scalaire V (M, t) est un potentiel scalaire.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\left(V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$$

D'où : $$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V')$$

Avec : $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\Psi$ et $V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ et où Ψ est une fonction arbitraire continument dérivable, fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

On conclue qu'il existe une infinité de couples (V, $\vec{A}$) possibles associés à un même champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

Pour un couple de potentiels (V, $\vec{A}$) donné, on peut déduire les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ par les relations :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

Cette détermination dans le choix des potentiels permet d'imposer à ceux-ci un choix de jauge. On choisit de travailler en jauge de Lorenz appelée aussi équation de Lorenz :

$$\left[\, div\vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \,\right] = 0$$

B- PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

I – Introduction

Une onde électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$) est composée d'un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et d'un champ d'induction magnétique $\vec{B}(M,t)$, reliés par les équations de Maxwell, qui se propagent tous deux à la même vitesse. Ces ondes varient donc en fonction du point M d'observation et du temps t.

Une Onde est effectivement générée par des charges et des courants mais peut se propager loin de l'endroit où elle est née (comme les ronds dans l'eau s'éloignant du caillou qu'on a jeté dans l'eau)

Cette partie est consacrée à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide(en l'absence de charges (ρ = 0) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$)).

II- Equations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Dans le vide, en l'absence de charges (ρ = 0) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$), les équations de Maxwell s'écrivent :

Maxwell - Gauss : $div\vec{E} = 0$

Maxwell - Faraday: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell - flux : $div\vec{B} = 0$

Maxwell – Ampère: $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Dans ce cas on peut trouver l'équation de propagation du champ $\vec{E}$, en éliminant $\vec{B}$.

Prenons la dérivée par rapport au temps de l'équation de Maxwell- Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Exprimons la dérivée par rapport au temps à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\ ) = -\ (\overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}\ )$$

Or en l'absence de charges la divergence du champ électrique est nulle. L'équation de propagation du champ électrique est une équation d'Alembert qui décrit la propagation d'ondes :

$$\Delta\vec{E}\ -\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\ = \vec{0}$$

De même, pour trouver l'équation de propagation du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ on élimine le champ électrique.

$$\Delta\vec{B}\ -\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\ = \vec{0}$$

Si l'espace est rapporté à un repère cartésien orthonormé direct $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$

$$\Delta\vec{E} = \Delta E_x\vec{e}_x + \Delta E_y\vec{e}_y + \Delta E_z\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\vec{e}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\vec{e}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{E}\ -\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\ = \vec{0}\quad \text{donne} \left|\begin{array}{l} \Delta E_x\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\ = 0 \\ \Delta E_y\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\ = 0 \\ \Delta E_z\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\ = 0 \end{array}\right.$$

De même pour $\vec{B}$: $\Delta\vec{B}\ -\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\ = \vec{0}$ donne

$$\left|\begin{array}{l} \Delta B_x\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}\ = 0 \\ \Delta B_y\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}\ = 0 \\ \Delta B_z\ -\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}\ = 0 \end{array}\right.$$

Les composantes E_x , E_y et E_z de $\vec{E}$ et les composantes B_x , B_y et B_z de $\vec{B}$ satisfont à la même équation différentielle de la forme: $\Delta S - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$

Cette équation est appelée équation de propagation des ondes électromagnétiques (OEM) dans le vide ou équation de D'Alembert où S(x,y,z,t) est une fonction des cordonnées cartésiennes x, y, z et du temps t. Elle représente les composantes de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.

III- Solution de l'équation de propagation des ondes- Onde plane

1. Onde plane

Une onde plane est une solution de l'équation de propagation des ondes (équation de D'Alembert) qui ne dépend que d'une seule variable spatiale et du temps t.

Considérons la fonction scalaire S(z,t) ne dépendant que de la seule variable cartésienne z et de t. La fonction scalaire S(z,t) vérifie l'équation de propagation des ondes à une seule dimension :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale de l'équation de D'Alembert, à variable liées, pour S(z,t) est de la forme :

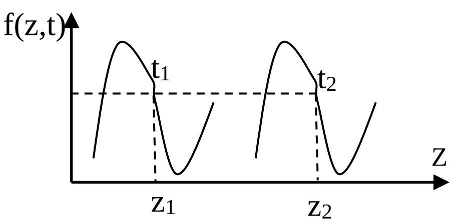
$$S(z,t) = f(t-\frac{z}{c}) + g(t-\frac{z}{c})$$

f et g sont deux fonctions quelconques continues et dérivables

La fonction $f(t-\frac{z}{c})$ représente une onde qui se propage, sans se déformer, dans la direction des z croissants avec la vitesse c.

En effet, on peut écrire à une abscisse quelconque :

$$f(t-\frac{z}{c}) = f\left((t+\frac{\Delta z}{c}) - \frac{(z+\Delta z)}{c}\right)$$



On remarque que la fonction f reprend à l'abscisse $(z+\Delta z)$ et à l'instant $(t+\frac{\Delta z}{c})$ la valeur qu'elle avait à l'abscisse z et à l'instant t.

Pour $\Delta z = z_2 - z_1 = c(t_2 - t_1) > 0$ pour $t_2 > t_1$: $f(t_1 - \frac{z_1}{c}) = f(t_2 - \frac{z_2}{c})$

A tout instant, dans un plan z = constante, la fonction f(z , t) a la même valeur, c'est une onde plane. La fonction f(z, t) est dite progressive.

De la même façon, la fonction $g(t+\frac{z}{c})$ représente une onde plane qui se propage dans la direction des z décroissants avec la vitesse c. $g(t+\frac{z}{c})$ est dite régressive

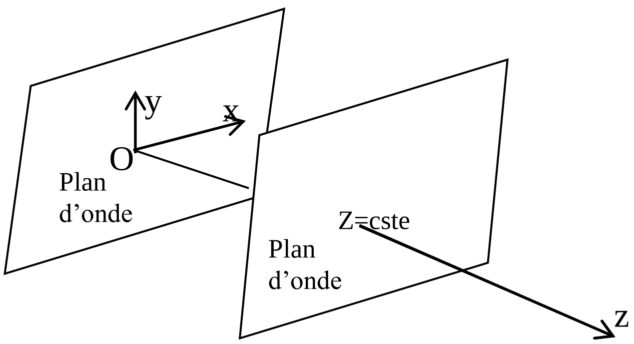
On dit qu'il y a un phénomène de propagation de l'onde dès que z et *t* sont couplés.

2. Onde électromagnétique plane progressive (OEMPP)

Une onde électromagnétique est qualifiée de plane lorsque les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ associés à l'onde ne varient que dans une seule direction appelée direction de propagation..

Par exemple, soit l'axe Oz sur la figure ci-dessous la direction de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ associés à l'onde. On aura alors deux champs $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(z,t)$ fonctions d'une seule coordonnée spatiale cartésienne z et du temps t.

Pour un z donné et à t donné, le champ $\vec{E}(z,t)$ a la même valeur en tout point du plan z=constante, de même pour le champ $\vec{B}(z,t)$. Ces plans sont appelés plans d'onde.



Les équations différentielles décrivant l'évolution des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Appliquées à une onde plane ne dépendant que de la variable cartésienne z, par exemple, et du temps t , ces équations deviennent :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

dont la solution générale à variables liées est de la forme:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(t-\frac{z}{c}) + \vec{E}_2(t+\frac{z}{c}) \quad \text{ou bien} \quad \vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(z-ct) + \vec{E}_2(z+ct)$$

$$\text{et } \vec{B}(z,t) = \vec{B}_1(t-\frac{z}{c}) + \vec{B}_2(t+\frac{z}{c}) \quad \text{ou bien} \quad \vec{B}(z,t) = \vec{B}_1(z-ct) + \vec{B}_2(z+ct)$$

$(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ représente une onde électromagnétique plane qui se propage, sans se déformer, dans la direction des z croissants avec la vitesse c . Elle est dite progressive

$(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ représente une onde électromagnétique plane qui se propage, sans se déformer, dans la direction des z décroissants avec la vitesse de la lumière c. Elle est dite régressive

a- Propriétés d'une onde électromagnétique plane progressive

1-Transversalité des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde.

Considérons, par exemple, $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde électromagnétique plane progressive associée au champ électromagnétique.
Les champs $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(z,t)$ dépendent, alors, de la coordonnée cartésienne z et du temps t.
Remarquons dès à présent que dans ce problème toute dérivation partielle par rapport à x ou y sera nulle et que, en notant u la variable tel que $u = (t-\frac{z}{c})$ on aura :

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{d}{du} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{du} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{E}(z,t)\left|\begin{array}{l} E_x(t-\frac{z}{c}) = E_x(u) \\ E_y(t-\frac{z}{c}) = E_y(u) \\ E_z(t-\frac{z}{c}) = E_z(u) \end{array}\right. \qquad et \qquad \vec{B}(z,t)\left|\begin{array}{l} B_x(t-\frac{z}{c}) = B_x(u) \\ B_y(t-\frac{z}{c}) = B_y(u) \\ B_z(t-\frac{z}{c}) = B_z(u) \end{array}\right.$$

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell – Flux donnent :

$$div\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{dE_z}{du} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_Z(z, t) = \text{constante}$$

$$div\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{dB_z}{du} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_Z(z, t) = \text{constante}$$

Toute solution constante est exclue car elle ne se propage pas. On prend $E_Z(z, t) = 0$ et $B_Z(z, t)=0$

Les champs $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(z,t)$ sont alors perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde : on dit que l'onde est transverse électrique et magnétique (TEM).

On généralise ce résultat pour une direction de propagation quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$: $\vec{E}(M,t) \perp \vec{u}$ et $\vec{B}(M,t) \perp \vec{u}$.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'une onde électromagnétique plane progressive dans le vide sont transverses, c'est à dire $\vec{E}$ et $\vec{B}$ orthogonaux à la direction de propagation

2- Orthogonalité des champs ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux)

Utilisons l'équation de Maxwell–Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Sachant que : $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{d}{du}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{du} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial u} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial u} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{c}\dfrac{dE_y}{du} = -\dfrac{dB_x}{du}$; $-\dfrac{1}{c}\dfrac{dE_x}{du} = -\dfrac{dB_y}{du}$; $0 = 0$

Comme on ne s'intéresse qu'à des champs variables (tout champ statique obéissant évidemment aussi à l'équation de D'Alembert est une solution triviale qui ne correspond pas à une propagation), On ne retient que la partie variable des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, il vient :

$E_y = -cB_x$ et $E_x = cB_y \Rightarrow E_x.B_x + E_y B_y = 0 \Rightarrow \vec{E} \bullet \vec{B} = 0$ donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires

$$\vec{E}(z,t) = E_x\,\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y = c(B_y\,\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z + B_x\,\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z) = c\,\vec{B}(z,t) \wedge \vec{e}_z$$

On obtient finalement : $\vec{E}(z,t) = c\,\vec{B}(z,t) \wedge \vec{e}_z$ c'est la relation de structure de l'onde

De même : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow -\dfrac{1}{c}\dfrac{dB_y}{du} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{dE_x}{du}$; $\dfrac{1}{c}\dfrac{dB_x}{du} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{dE_y}{du}$; $0 = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{dE_z}{du}$

Ce qui permet de trouver : $\vec{B}(z,t) = \dfrac{1}{c}\,\vec{e}_z \wedge \vec{E}(z,t)$ c'est la relation de structure de l'onde

Les vecteurs $\vec{E}(z,t)$, $\vec{B}(z,t)$ et $\vec{e}_z$, forment un trièdre direct et $\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|$

Conclusion :

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'une onde électromagnétique plane, se propageant suivant une direction de propagation de vecteur unitaire $\vec{u}$, vérifient les propriétés suivantes :

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde ($\vec{E} \perp \vec{u}$ et $\vec{B} \perp \vec{u}$) : l'onde est dite transverse
- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux ($\vec{E} \perp \vec{B}$)
- Les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ forment un trièdre direct : $\vec{E} = c\,\vec{B} \wedge \vec{u}$
- Le rapport des modules des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est constant et égal à la vitesse c ($\dfrac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = c$).

3. Onde électromagnétique plane progressive monochromatique (OPPM)

a- Définition

Une onde plane progressive dépendant sinusoïdalement du temps est appelée onde plane progressive monochromatique ou harmonique (OPPM ou OPPH). Par exemple : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$

b- Caractéristiques d'une OPPM

Une OPPM se propageant à la célérité c dans une direction spatiale fixe définie par le vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est caractérisée par :

- sa fréquence f ou sa pulsation ω ($\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$; T est la période temporelle)

- sa longueur d'onde $\lambda = \dfrac{c}{f} = cT$ est la période spatiale de l'onde. La longueur d'onde λ est égale à la distance parcourue par l'onde pendant la durée T d'une période.

- son vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_u = \dfrac{\omega}{c}\vec{e}_u$ ($k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ est appelée relation de dispersion)

Une OPPM présente une double périodicité : temporelle de période T et spatiale de période λ.

<u>Exemple</u>: considérons une OPPM de longueur d'onde λ et de pulsation ω se propageant dans le vide, à la vitesse c dans la direction des z croissants. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Le champ électrique associé à cette onde peut s'écrire: $\vec{E}(z,t) = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$

$$\vec{E}(z,t) : \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\dfrac{2\pi}{\lambda}c\,(t - \dfrac{z}{c})) = E_{0x}\cos(\omega(t - \dfrac{z}{c})) \\ E_y = E_{0y}\cos(\dfrac{2\pi}{\lambda}c\,(t - \dfrac{z}{c})) = E_{0y}\cos(\omega(t - \dfrac{z}{c})) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont des constantes.

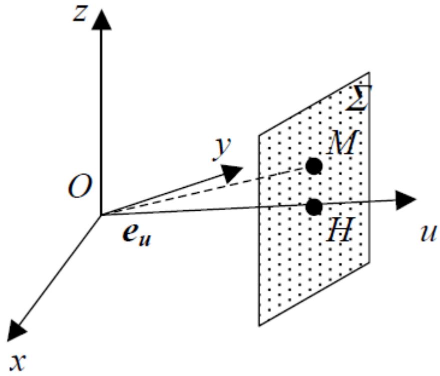
On introduit le vecteur d'onde $\vec{k}$ donnant la direction de propagation de l'onde électromagnétique plane monochromatique défini par : $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c}\vec{e}_z$

D'où $\vec{E}(z,t) : \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - k z) \\ E_z = 0 \end{cases}$

<u>Remarque</u> : cas de propagation dans une direction quelconque

Considérons une OPPM se propageant dans une direction spatiale fixe de vecteur unitaire $\vec{e}_u$, de cosinus directeurs α, β, γ : $\vec{e}_u = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$ avec

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$



Un point M est repéré par son rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Le vecteur d'onde s'écrit : $\vec{k} = k_x\,\vec{e}_x + k_y\,\vec{e}_y + k_z\,\vec{e}_z = k\,\vec{e}_u$

Le champ électrique associé à cette onde plane progressive monochromatique peut être écrit :

$$\vec{E} : \begin{cases} E_x(x,y,z,t) = E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ E_y(x,y,z,t) = E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ E_z(x,y,z,t) = E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \end{cases}$$

c- Propriétés d'une OPPM

Les relations établies pour une OPP sont valables pour les OPPM qui sont un cas particulier des OPP

- Les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *sont perpendiculaires à* $\vec{k}$. L'onde est transverse
- Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct
- Relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$:

♦ $\vec{B}$ *est perpendiculaire à* $\vec{E}$

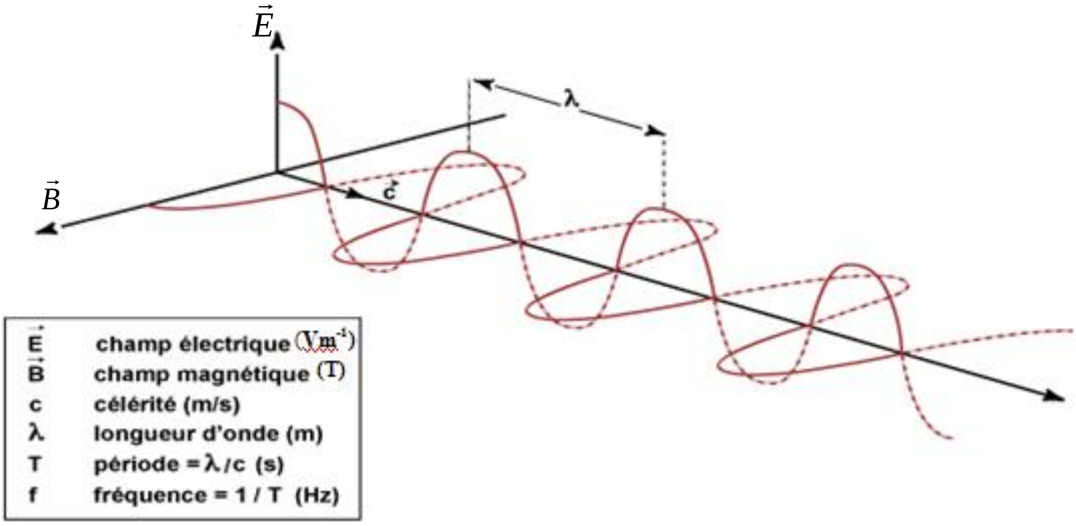
♦ $\vec{B}$ *est perpendiculaire au plan formé par* $\vec{E}$ *et* $\vec{k}$

♦ Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct

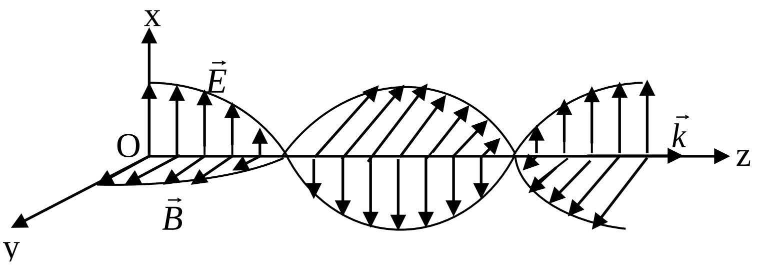
♦ $\|\vec{B}\| = \dfrac{1}{\omega}\|\vec{k}\|\|\vec{E}\|\left|\sin(\vec{k}, \vec{E})\right| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$

♦ Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase

•La relation $K^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ est appelée relation de dispersion des OPPM dans le vide.



Exemple : $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$; $\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$; $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{e}_z$



d- Notations complexes :

Les ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques sont plus aisément manipulables lorsque l'on utilise la notation complexe. Les champs peuvent être écrits en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ et $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ où j est le nombre complexe $j^2 = -1$.

Les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ représentent la partie réelle des expressions complexes.

$$\vec{E} : \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \end{cases} \quad \text{et } \vec{B} : \begin{cases} B_x = B_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ B_y = B_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ B_z = B_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \end{cases}$$

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\,\vec{e}_x + E_{0y}\,\vec{e}_y + E_{0z}\,\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_0 = B_{0x}\,\vec{e}_x + B_{0y}\,\vec{e}_y + B_{0z}\,\vec{e}_z$$

$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ et $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$\vec{k}.\vec{r} = k_x\ x + k_y\ y + k_z\ z$

Les dérivées par rapport au temps et par rapport à l'espace s'expriment alors aisément :

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \to -jk_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \to -jk_y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \to -jk_z$$

d'où $\quad div \to -j\vec{k}. \quad ; \quad \overrightarrow{rot} \to -j\vec{k}\,\Lambda \quad ; \quad \vec{\Delta} \to -k^2$

Les équations de Maxwell se simplifient alors (dans le vide en l'absence de charges et de courants) de la façon suivante :

$$Equation\, de\, Maxwell - Gauss : \quad -j\,\vec{k}.\vec{E} = 0$$

$$Equation\, du\ flux\, conservatif : \quad -j\vec{k}.\vec{B} = 0$$

$$Equation\, de\, Maxwell - Fraday : \quad -j\,\vec{k}\,\Lambda\vec{E} = -j\,\omega\vec{B}$$

$$Equation\, de\, Maxwell - Ampère : \quad -j\ \vec{k}\,\Lambda\vec{B} = j\frac{\omega}{c^2}\ \vec{E}$$

IV- Energie électromagnétique- Vecteur de Poynting

Dans le vide, les ondes électromagnétiques se propagent à la célérité de la lumière c=3.10^{8} m.s^{-1}. Les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de support matériel pour se propager. L'onde électromagnétique ne transporte que de l'énergie électromagnétique : un point M atteint par une onde reproduit l'état de la source avec un retard dû à la durée nécessaire à l'onde pour parcourir la distance qui le sépare de la source S.

1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde est exprimée, dans le vide, par :

$$w_{em} = \frac{dW_{em}}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$ (w_{em} s'exprime en joule m^{-3})

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ est la densité d'énergie électrique localisée en un point où le champ électrique est $\vec{E}$

$\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ est la densité d'énergie magnétique localisée en un point où le champ magnétique est $\vec{B}$

2. Vecteur de Poynting

On définit le *vecteur de Poynting* : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

3. Cas d'une onde plane progressive

a-Considérons une onde électromagnétique plane se propageant dans une direction de vecteur unitaire $\vec{e}_u$. On a $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \dfrac{1}{2\pi f}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_u \wedge \vec{E}\right) = \dfrac{\vec{e}_u \wedge \vec{E}}{c}$ (avec c = λf)

L'intensité de $\vec{B}$ s'écrit : $B = \dfrac{E}{c}$ et la densité électromagnétique :

$$w_{em} = \frac{dW_{em}}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Pour une onde plane la densité volumique d'énergie électromagnétique se répartit également entre densité volumique d'énergie électrique et densité volumique d'énergie magnétique.
On peut trouver une relation entre le vecteur de Poynting $\vec{P}$ et la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em} : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\vec{E} \wedge (\vec{e}_u \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{e}_u$ et $w_{em} = \varepsilon_0 E^2$

Par conséquent : $\vec{P} = (c\, w_{em})\, \vec{e}_u$ soit $\left|\vec{P}\right| = c\, w_{em} = c\, \dfrac{dW_{em}}{d\tau}$

Il s'exprime en watts m^{-2}

D'où $dW_{em} = \dfrac{1}{C}\left|\vec{P}\right| d\tau$

On peut déduire que la puissance électromagnétique traversant une surface S est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface S.

En effet, si on considère un volume dτ de section dS et de génératrices de longueur cdt, on peut écrire : $dW_{em} = \dfrac{1}{c}\left|\vec{P}\right| d\tau = \dfrac{1}{c}\left|\vec{P}\right| \vec{c}\, dt . d\vec{S} = \dfrac{1}{c}\left|\vec{P}\right| c\, \vec{e}_u . d\vec{S}\, dt$ où $\vec{e}_u$ est le vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde plane.

$$dW_{em} = = \left|\vec{P}\right| \vec{e}_u . d\vec{S}\, dt = \vec{P} . d\vec{S}\ dt \Rightarrow \frac{dW_{em}}{dt} = \vec{P} . d\vec{S}$$

Le terme ($\vec{P} \cdot d\vec{S}$) est l'énergie électromagnétique transportée à travers dS par unité de temps.

Finalement : la puissance électromagnétique transportée à travers une surface S : $p = \iint_S \vec{P}\,.\,d\vec{S}$

Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ est un vecteur qui représente la densité de courant de puissance. Il a la direction et le sens de propagation de l'onde. Il décrit la propagation de l'énergie dans l'espace.

b- Considérons le cas d'une onde plane progressive monochromatique qui se propage dans le sens des z croissants. Supposons que les champs électrique et magnétique ont les expressions vectorielles suivantes :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x \qquad et \qquad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_y$$

On a : E = c B , et par conséquent $E_0 = c\,B_0$

La densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$w_{em} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right) = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2 + \frac{1}{2}\frac{{B_0}^2}{\mu_0}\right)\cos^2(\omega t - kz) = \varepsilon_0\, {E_0}^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

dont la moyenne calculée sur une période T est : $\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w_{em}\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E_0^2$

Le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}\wedge(\vec{e}_u\wedge\vec{E})}{\mu_0\, c} = \varepsilon_0\, c E^2\ \vec{e}_u = \varepsilon_0\, c E_0^2 \cos^2(\omega t - k z)\vec{e}_u = \frac{\varepsilon_0\, c^2}{\omega}\ E_0^2 \cos^2(\omega t - k z)\ \vec{k}$$

La relation, dans ce cas, entre la moyenne du module P du vecteur de Poynting $\vec{P}$ et la moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em} calculées sur une période T:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, c\, E_0^2 = c\langle w_{em}\rangle$$

4. Cas général - Relation de la conservation de l'énergie électromagnétique

Reprenons les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$\text{M-F : } \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{M-A : } \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\ \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On multiplie scalairement l'équation M-F par $\vec{B}$ et l'équation M-A par $\vec{E}$:

$$\vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{E}.\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{E}.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On soustrait membre à membre les deux relations :

$$\vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\vec{B} = -\mu_0\,\vec{E}.\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\,\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Compte tenu de la relation : $div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\vec{B}$

On obtient $$div(\vec{E}\wedge\vec{B}) + \mu_0\varepsilon_0\,\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\,\vec{E}.\vec{j}$$

On divise par μ_0 : $$div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right] = -\mu_0\,\vec{E}.\vec{j}$$

En introduisant le *vecteur de Poynting* : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

et la densité volumique d'énergie électromagnétique : $\dfrac{dW}{d\tau} = w_{em} = \left[\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right]$

On obtient : $div(\vec{P}) + \dfrac{\partial w_{em}}{\partial t} = -\mu_0\,\vec{E}.\vec{j}$ c'est la relation de conservation locale de l'énergie électromagnétique.

L'intégration de cette équation sur un volume τ conduit à la forme intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique.

$$\iiint_\tau div(\vec{P})\,d\tau + \iiint_\tau \frac{\partial w_{em}}{\partial t}\,d\tau = -\iiint_\tau \vec{E}.\vec{j}\;d\tau$$

En appelant S la surface fermée limitant le volume τ, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à dS, orienté vers l'extérieur, on obtient: $\oiint_S \vec{P}.\vec{n}\,ds = -\iiint_\tau \dfrac{\partial w_{em}}{\partial t}\,d\tau - P_j = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_\tau w_{em}\,d\tau\right] - P_j$

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \oiint_S \vec{P}.\vec{n}\,ds \;-\; P_j$$

où W_{em} est l'énergie contenue à l'intérieur de la surface S et P_J la puissance joule consommée dans le volume *V*.

ANNEXE

Solution de l'équation de D'Alembert à une dimension

1) Considérons une fonction S(z,t) qui obéit à l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$

Montrons que $f(t-\frac{z}{c})$ et $g(t+\frac{z}{c})$ sont solutions de cette équation. On pose u = $t-\frac{z}{c}$

$$F(u) = f(t-\frac{z}{c}) \quad \text{et} \quad F'(u) = \frac{\partial F}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(t-\frac{z}{c})) = F' \qquad \frac{\partial}{\partial z}(f(t-\frac{z}{c})) = -\frac{1}{c}F' \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

De même on pose: $v = t-\frac{z}{c}$; $G(v) = g(t+\frac{z}{c})$ et $G'(v) = \frac{\partial G}{\partial v}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t+\frac{z}{c})) = G' \qquad \frac{\partial}{\partial z}(g(t+\frac{z}{c})) = \frac{1}{c}G' \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(t-\frac{z}{c})) = F'' \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(f(t-\frac{z}{c})) = \frac{1}{c^2}F'' \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(g(t+\frac{z}{c})) = G'' \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(g(t+\frac{z}{c})) = \frac{1}{c^2}G''$$

D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ les fonctions $f(t-\frac{z}{c})$ et $g(t+\frac{z}{c})$ vérifient bien l'équation de D'Alembert à une dimension.

2) Une fonction S(z,t) obéit à l'équation $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ soit

$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)S = 0$. Trouvons les solutions à variables liées de cette équation.

On effectue le changement de variable : u = t – $\frac{z}{c}$ et v = t + $\frac{z}{c}$

On a alors :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial u} + \frac{\partial S}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial S}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u}\right]$$

On en déduit : $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\right]$

et $$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}$$

(u et v étant deux variables indépendantes, on peut permuter l'ordre de dérivation)

et l'équation $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ devient $\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\right] = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\right]$

On obtient : $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$

En intégrant successivement par rapport aux variables u et v, on obtient la solution :

$S = f(u) + g(v)$ c'est à dire $S = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$

f et g sont deux fonctions arbitraires (pourvu qu'elles soient continues et deux fois dérivables).