Université Cadi Ayyad **Département de matthématiques**
Faculté des Sciences Semlalia **Année 2020-2021**

T.D. de probabilités pour SMI (S3)
Une liste d'exercices

Solution de l'exercice 1

✓Etudier le comportement d'apparition des faces lorsqu'on lance un dé
-Si on s'intéresse aux numéros des faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
-Si on s'intéresse à la partité des numéros des faces : $\Omega = \{Pair, Impair\}$
- Si ....

✓Etudier le comportement simultané d'une pièce de monnaie et d'un dé
Si on s'intéresse aux deux côtés de la pièce et aux 6 numéros des faces du dé :
$\Omega = \{(Pile, 1), (Pile, 2), (Pile, 3), (Pile, 4), (Pile, 5), (Pile, 6),$
$(Face, 1), (Face, 2), (Face, 3), (Face, 4), (Face, 5), (Face, 6)\}$

✓Etudier la hauteur de la masse d'eau d'un barrage, que l'on mesure périodiquement (enfin de chaque mois par exemple).
Si M est le niveau max du barrage : $\Omega = [0, M]$

✓Etudier la taille en cm et le poids en kg des individus d'une grande population
Si on suppose que la taille et le poids sont des quantités réelles continues : $\Omega = [150, 180] \times [45, 100]$ (c'est un exemple)

✓Etudier la température moyenne à Marrakech durant une année
$\Omega = [25, 35]$ (juste un exemple)

✓Etudier le comportement d'apparition de Pile, d'une pièce, pour la première fois
$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, \ldots\}$ (suites de Faces qui se terminent par un Pile)

✓Etudier le comportement d'apparition de Face pendant n lancés d'une pièce de monnaie.
$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ (nombre de faces obtenus durant n lancés)

Solution de l'exercice 2

Construire des exemples simples de tribus d'événements qu'on peut associer aux espaces fondamentaux suivants :
✓$\Omega_1 = \{1, 2, 3, a, b\}$ où $Card(\Omega) = 5$: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, a, b\}, \Omega_1\}$

✓$\Omega_2 = \{a\}$ (que signfie d'abord un espace fondamental de cardinal 1) : $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \Omega_2\}$

✓$\Omega_3 = [0, 1]$: $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, [0, 2/3[, [2/3, 1], \Omega_3\}$

$\checkmark\Omega_4 = \{1,2\} \times \{1,2\} : \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{(1,1),(1,2)\}, \{(2,1),(2,2)\}, \Omega_4\}$

$\checkmark\Omega_5 = I\!N : \mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{0\}, I\!N^*, \Omega_5\}$

$\checkmark\Omega_6 = Z\!\!Z : \mathcal{T}_6 = \{\emptyset, Z\!\!Z_*^-, I\!N, \}, \Omega_6\}$

Solution de l'exercice 3

Produire une probabilité (un cas simple) sur chacun des espaces probabilisables $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i)), i = 1,2,\ldots,6$ de l'exercice précédent.

$\checkmark$Sur $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$: $P_1(x) = 1/5,\ \forall\, x \in \Omega_1$ (équiprobabilité par exemple)

$\checkmark$Sur $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$: $P_2(a) = 1$ (la seule probabilité)

$\checkmark$Sur $(\Omega_3, \mathcal{P}(\Omega_3))$: $P_3([a,b]) = \frac{b-a}{1-0} = b-a$, pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$. Cela marche même si le segement est ouvert ou semi-ouvert.

$\checkmark$Sur $(\Omega_4, \mathcal{P}(\Omega_4))$: $P_4[(i,j)] = 1/4,\ \forall\,(i,j) \in \Omega_4$ (équiprobabilité par exemple).

$\checkmark$Sur $(\Omega_5, \mathcal{P}(\Omega_5))$: $P_5(k) = \frac{1}{2^{k+1}},\ \forall\, k \in I\!N$

$\checkmark$Sur $(\Omega_6, \mathcal{P}(\Omega_6))$: $P_6(0) = 1/2,\ P_6(k) = \frac{1}{2^{|k|+2}},\ \forall\, k \in Z\!\!Z^*$

Solution de l'exercice 4.

1^o)

$\Omega = \{(Pile,1),(Pile,2),(Pile,3),(Pile,4),(Pile,5),(Pile,6),$
$(Face,1),(Face,2),(Face,3),(Face,4),(Face,5),(Face,6)\}$

2^o)

$A = \{(Pile,1),(Pile,2),(Pile,3),(Pile,4),(Pile,5),(Pile,6)\}$
$B = \{(Pile,3),(Face,3)\}$
$C = \Omega - \{(Pile,3)\}$
$D = \{(Pile,1),(Pile,2),(Pile,4),(Pile,5),(Pile,6)\}$

3^o)

$E = \{(Pile,2),(Pile,4),(Pile,6),(Face,1),(Face,3)\}$ $P(E) = 5/12$ (il y a équiprobabilité dans Ω fini)

4^o)

$A \cap B = \{(Pile,3)\}$, donc $P(A \cap B) = 1/12$
$A \backslash B = \{(Pile,1),(Pile,2),(Pile,4),(Pile,5),(Pile,6)\}$, donc $P(A \backslash B) = 5/12$ Calculer les probabilités des événements $A \cap B$, $A \backslash B$.
$P(A \backslash B) \neq P(A) - P(B)$ car on n'a pas $A \subset B$.

Exercice 5.

Soit $\Omega = \{a,b,c\}$ un espace fondamental d'une expérience aléatoire $(Card(\Omega) = 3)$.

Trouver, quand cela est possible, la loi ou les lois de probabilités, chargeant tous les points de Ω sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dans chacun des cas suivants :

(1) $P(\{a, b\}) = 1/4$
(2) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = 1/4$
(3) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = 3/4$

Solution de l'exercice 5.

• (1) Nous avons $P(a) + P(b) = 1/4$. D'autre part $P(a) + P(b) + P(c) = 1$. Ceci nous donne $P(c) = 3/4$. En fixant $P(a) = p$, on a $P(b) = 1/4 - p$ qui doit être dans $]0, 1[$. Donc l'ensemble des solutions (de probabilités) vérifiant (1) est donné par : $P(a) = p \in]0, 1/4[$, $P(b) = 1/4 - p$ et $P(c) = 3/4$. Nous avons donc une infinité de solutions : pour chaque choix de $p \in]0, 1/4[$, nous avons une probabilité vérifiant (1).

• (2) Nous avons $P(a) + P(b) = 1/4$, $P(b) + P(c) = 1/4$ et $P(a) + P(b) + P(c) = 1$. Ces équations implique que $P(b) = -1/2$. Donc il n'existe pas de probabilité P vérifiant (2).

• (3) Nous avons $P(a) + P(b) = 3/4$, $P(b) + P(c) = 3/4$ et $P(a) + P(b) + P(c) = 1$. Ces équations nous donnent $P(a) = 1/4$, $P(b) = 1/2$ et $P(c) = 1/4$. Nous avons donc une solution unique P qui vérifie (3).

Exercice 6.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux éléments de $\mathcal{T}$ tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cup B) = 23/60$.
Calculer $P(A/B)$; $P(\bar{A}/B)$; $P(A \cap B/B)$; $P(A \cap \bar{B}/B)$; $P[(A \cup B)/(A \cap \bar{B})]$ et $P[(\bar{A} \cap B)/(\bar{A} \cup B)]$.

Solution de l'exercice 6.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{1/4 + 1/3 - 23/60}{1/3} = \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = \frac{3}{5}$$

Nous avons $P(A/B) = P(A \cap \Omega/B) = P(A \cap (B \cup \bar{B})/B) = P(A \cap B/B) + P(A \cap \bar{B}/B)$.
Donc $P(A \cap \bar{B}/B) = P(A/B) - P(A \cap B/B) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0$

$$P[(A \cup B)/(A \cap \bar{B})] = \frac{P[(A \cup B) \cap (A \cap \bar{B})]}{P(A \cap \bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A \cap \bar{B})} = 1$$

$$P[(\bar{A} \cap B)/(\bar{A} \cup B)] = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A} \cup B)} = \frac{P(B)P(\bar{A}/B)}{P(\bar{A} \cup B)} = \frac{(1/3)(2/5)}{P(\bar{A} \cup B)}$$

$$\begin{aligned}
P(\bar{A} \cup B) &= 1 - P(A \cap \bar{B}) \\
&= 1 - P(A)P(\bar{B}/A) \\
&= 1 - P(A)(1 - P(B/A)) \\
&= 1 - P(A)\left(1 - \tfrac{P(B)P(A/B)}{P(A)}\right) \\
&= 1 - P(A) + P(B)P(A/B) \\
&= 1 - (1/4) + (1/3)(3/5) \\
&= 19/20
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$P[(\bar{A} \cap B)/(\bar{A} \cup B)] = \frac{P(B)P(\bar{A}/B)}{P(A) - P(B)P(A/B)} = \frac{(1/3)(2/5)}{(19/20)} = \frac{8}{57}$$

Exercice 7.

Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) et soit $p \in I\!N^*$.

1^o) Rappeler les quantités de dénombrement suivantes :

- ✓le nombre de façons de choisir *successivement* p éléments de E, avec la possibilité de répéter les éléments choisis
- ✓le nombre A_n^p de façons de choisir p éléments *distincts* de E ($p \leq n$)
- ✓le nombre de façons d'arranger les p éléments d'une partie A de E ($1 \leq p \leq n$).
- ✓le nombre C_n^p de parties de E, à p, ($1 \leq p \leq n$) éléments.

2^o) Donner la relation entre A_n^p et C_n^p.

3^o) Interpréter les équations suivantes :

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad \text{et} \qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Solution de l'exercice 7.

1^o)

- ✓le nombre de façons de choisir *successivement* p éléments de E, avec la possibilité de répéter les éléments choisis est : n^p (chacune des p positions peut être occupée par tout élément de E)
- ✓le nombre A_n^p de façons de choisir p éléments *distincts* de E

La différence par rapport au cas précédent c'est que maintenant, nous n'avons pas le droit de répéter aucun des p éléments à choisir : la première position peut être occupée de n façons différentes, la second position de $(n-1)$ façons différentes, la troisième position de $(n-2)$ façons différentes, ..., la $p$ième position de $(n-(p-1))$ façons différentes. Donc au total, on peut construire $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-(p-1)))$ vecteurs de même taille p dont les composantes sont des éléments de E qui sont toutes distinctes. En conclusion, le nombre cherché est donc $A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-(p-1)))$ qui est le nombre de façons de choisir ou d'arranger p éléments parmi n éléments sans répétition. Il est clair ici qu'on doit avoir $p \leq n$. Ce nombre peut être écrit aussi

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

✓le nombre de façons d'arranger les p éléments d'une partie A de E $(1 \leq p \leq n)$. Nous avons p éléments distincts. La question est de sortir toutes les configurations (arrangements) possibles : le nombre de tels arragements est le nombre de permutations de p éléments, il est égal à $p!$.

2^o) Nous avons

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

3^o)
✓Interpretation de $C_n^p = C_n^{n-p}$: le cardinal de l'ensemble des parties p éléments est égale au cardinal des parties à $n-p$ éléments, puisque qu'à chaque partie à p éléments correspond la partie (son complémentaire) à $n-p$ éléments (il y a une bijection entre les deux familles de parties, les parties et leurs complémentaires).

✓Interpretation de $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$: ici il s'agit de fixer un élément e_k de E et s'intéresser aux parties à p éléments (qui sont en nombre de C_n^p) en les disposant en deux familles, celles contenant e_k qui sont en nombre de C_{n-1}^{p-1} et celles ne contenant pas e_k qui sont en nombre C_{n-1}^p. D'où le résultat $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Exercice 8.

1^o) Dans un jeu à 32 cartes, on tire trois cartes au hasard l'une après l'autre et sans remise. Quelle est la probabilité que la troisième carte tirée soit un As.

2^o) On refait la même expérience qu'en 1^o) mais cette fois on remet la carte tirée avant le tirage suivant. Quelle est la probabilité d'obtenir un seul Roi et un seul As.

3^o) Maintenant on tire un paquet de 8 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir seulement deux Rois et un As (les cinq autres cartes ne comprennent ni Roi ni As)

Les 32 cartes sont composées de quatre groupes (pique, treffle, coeur et carreau), chaque groupe contient 8 cartes nommées As, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame et Rois.

Solution de l'exercice 8.

Nous allons adopter les notations suivantes :

A : As au $i$ème tirage. $\bar{A}_i$: pas d'As au $i$ème tirage

R_i : Roi au $i$ème tirage. $\bar{R}_i$: pas de Roi au $i$ème tirage.

C_i : Carte différente de Roi et différente d'As au $i$ème tirage.

1^o) La probabilité demandée (la notation ABC désigne $A \cap B \cap C$) est :

$$p = P[A_1A_2A_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3],$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
p &= P(A_1A_2A_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) + P(A_1)P(\bar{A}_2/A_1)P(A_3/A_1\bar{A}_2)+ \\
&\quad +P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\bar{A}_2) \\
&= \frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30} + \frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30} + \frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30} + \frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30} \\
&= \frac{3720}{29760} = 0.125
\end{aligned}$$

En utilisant les notations de l'exercice 7, la probabilité p ainsi calculée peut s'écrire aussi

$$p = \frac{C_4^1C_3^1C_2^1 + C_4^1C_{28}^1C_3^1 + C_{28}^1C_4^1C_3^1 + C_{28}^1C_{27}^1C_4^1}{A_{32}^3} = \frac{3720}{29760} = 0.125$$

2^o) En utilisant les notations fixées au début, la probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}
q &= P[R_1A_2C_3 \cup R_1C_2A_3 \cup A_1R_2C_3 \cup A_1C_2R_3 \cup C_1R_2A_3 \cup C_1A_2R_3] \\
&= P(R_1A_2C_3) + P(R_1C_2A_3) + P(A_1R_2C_3) + P(A_1C_2R_3) + P(C_1R_2A_3) + P(C_1A_2R_3) \\
&= 6P(R_1A_2C_3) \quad \text{(car le tirage est avec remise)} \\
&= 6P(R_1)P(A_2)P(C_3) \quad \text{(independence, car tirage est avec remise)} \\
&= 6\frac{4}{32}\frac{4}{32}\frac{24}{32} \\
&= \frac{(3!)A_4^1A_4^1A_{24}^1}{32^3} \\
&= \frac{2304}{32768} = \frac{9}{128} \simeq 0.07
\end{aligned}$$

3^o) La probabilité demandée est :

$$r = \frac{C_4^2C_4^1C_{24}^5}{C_{32}^8} = \frac{1020096}{10518300} \simeq 0.097$$

Exercice 9.
Une population est étudiée suivant deux caractères : le poids et la taille. La ventilation des individus est effectuée selon trois classes de tailles T_1, T_2 et T_3 et deux classes de poids P_1 et P_2. On donne $P(T_1) = 0.2$ et $P(T_2) = 0.5$.
A l'intérieur de chaque classe de taille, la probabilité, pour un individu, d'appartenir à la classe de poids P_1 est la suivante : $P(P_1/T_1) = 0.6;\ P(P_1/T_2) = 0.45$ et $P(P_1/T_3) = 0.35$.

1^o) Donner les probabilités d'appartenance à chaque classe de taille.

2^o) Calculer les probabilités d'appartenance à chaque classe de poids.
En déduire les probabilités d'appartenance à chaque classe de taille à l'intérieur de la classe de poids P_1.

Solution de l'exercice 9.
1^o) $P(T_1) = 0.2$ et $P(T_2) = 0.5$, donc $P(T_3) = 1 - (P(T_1) + P(T_2)) = 0.3$
2^o) L'ensemble Ω de tous les événements possibles peut être vu de deux façons différentes. On peut le voir comme l'ensemble des individus groupés selon leurs tailles ou comme l'ensemble des individus groupés selon leurs poids. Nous avons donc

$$\Omega = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = P_1 \cup P_2$$

$$\begin{aligned}
P(P_1) &= P(P_1 \cap \Omega) \\
&= P[P_1 \cap (T_1 \cup T_2 \cup T_3)] \\
&= P[(P_1 \cap T_1) \cup (P_1 \cap T_2) \cup (P_1 \cap T_3)] \\
&= P(P_1 \cap T_1) + P(P_1 \cap T_2) + P(P_1 \cap T_3) \\
&= P(T_1)P(P_1/T1) + P(T_2)P(P_1/T2) + P(T_3)P(P_1/T3) \\
&= 0.2 \times 0.6 + 0.5 \times 0.45 + 0.3 \times 0.35 \\
&= 0.45
\end{aligned}$$

Donc $P(P_2) = 1 - P(P_1) = 1 - 0.45 = 0.55$.

$$\begin{aligned}
P(T_1/P_1) &= \frac{P(T_1)P(P_1/T_1)}{P(T_1)P(P_1/T_1) + P(T_2)P(P_1/T_2) + P(T_3)P(P_1/T_3)}, \quad \text{(Formule de Bayes)} \\
&= \tfrac{0.2 \times 0.6}{0.45} \simeq 0.27 \\
P(T_2/P_1) &= \frac{P(T_2)P(P_1/T_2)}{P(T_1)P(P_1/T_1) + P(T_2)P(P_1/T_2) + P(T_3)P(P_1/T_3)}, \quad \text{(Formule de Bayes)} \\
&= \frac{0.5 \times 0.45}{0.45} = 0.5 \\
P(T_3/P_1) &= \frac{P(T_3)P(P_1/T_3)}{P(T_1)P(P_1/T_1) + P(T_2)P(P_1/T_2) + P(T_3)P(P_1/T_3)}, \quad \text{(Formule de Bayes)} \\
&= \frac{0.3 \times 0.35}{0.45} \simeq 0.23
\end{aligned}$$

Exercice 10.
Considérons deux urnes, U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules blanches et l'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules blanches. On choisit au hasard l'une des deux urnes et on effectue, dans l'urne choisie, 2 tirages successifs sans remise.
Calculer les probabilités des événements suivants :
$E1 = \langle$*Obtenir deux boules blanches*$\rangle$, $E2 = \langle$*Obtenir au moins une boule rouge*$\rangle$,
$E3 = \langle$*Obtenir une boule blanche et une boule rouge*$\rangle$.

Solution de l'exercice 10.
L'ensemble des événements possibles peut être vu comme $\Omega = U_1 \cup U_2$ (les deux boules tirées peuvent provenir soit de l'urne U_1 soit de l'urne U_2). Chaque urne est choisie avec

probabilité 1/2.

$$\begin{aligned}
P(E1) &= P(E1 \cap \Omega) \\
&= P(E1 \cap (U_1 \cup U_2)) \\
&= P(E1 \cap U_1) + P(E1 \cap U_2) \\
&= P(U_1)P(E1/U_1) + P(U_2)P(E1/U_2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{1}{4} \quad \text{(tirage de 2 boules sans remise)} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

On adopte les notations suivantes :

B_i pour désigner l'obtention d'une boule blanche au $i$ème tirage.

R_i pour désigner l'obtention d'une boule rouge au $i$ème tirage.

Nous avons

$$\begin{aligned}
P(E2) &= P[(R_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap R_2)] \\
&= P(R_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
P(R_1 \cap B_2) &= P(U_1)P(R_1 \cap B_2/U_1) + P(U_2)P(R_1 \cap B_2/U_2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{2}{4} \\
&= \frac{3}{10} \\
P(R_1 \cap R_2) &= P(U_1)P(R_1 \cap R_2/U_1) + P(U_2)P(R_1 \cap R_2/U_2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{5} \\
P(B_1 \cap R_2) &= P(U_1)P(B_1 \cap R_2/U_1) + P(U_2)P(B_1 \cap R_2/U_2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Donc $P(E2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$.

Nous avons

$$P(E3) = P[(B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

Exercice 11.

On tire, avec remise, une boule dans une urne contenant n_1 boules blanches et n_2 boules rouges.

1^o) Soit X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

1.a) Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X.

1.b) Calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$ et sa variance $\sigma^2(X)$.

2^o) Soit maintenant Y le nombre de boules blanches obtenues durant n tirages successifs ($n \geq 1$).

2.a) Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Y.

2.b) Calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et sa variance $\sigma^2(Y)$.

2.c) Que représente la variable aléatoire $Z = n - Y$? Déterminer sa loi de probabilités et ses moments d'ordre un et deux.

Solution de l'exercice 11.

1^o) X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathbb{N}^*$.

1.a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, il est donc question de calculer $\pi(k)$, où π est la loi de X.
Pour cela désignons par X_i la v.a. de Bernoulli, qui prend 1 si la boule blanche sort au $i$ème tirage et qui prend 0 sinon. Le paramètre de X_i est

$$p = P(\textit{Obtenir une boule blanche au ieme tirage}) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Nous avons donc $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ qui sont indépendantes pour $i = 1, 2, \ldots,$ puisque le tirage se fait avec remise.
Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\pi(k) &= P(X = k) \\
&= P(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) \quad \text{(succes boule blanche au kieme tirage)} \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \cdots P(X_{k-1} = 0)P(X_k = 1) \quad \text{(par independance)} \\
&= (1-p)^{k-1} p
\end{aligned}$$

Donc

$$\pi(k) = (1-p)^{k-1} p, \; k \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui signifie que $X \sim Geom(p)$, avec $p = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$.

1.b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\pi(k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p \\
&= -p\sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^k\right)' \quad \text{(derivee en } p\text{)} \\
&= -p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right)' \\
&= -p\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k - 1\right)' \\
&= -p\left(\frac{1}{p} - 1\right)' \\
&= -p\left(\frac{-1}{p^2}\right) \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\pi(k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}p \\
&= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} \left((1-p)^k\right)'' \quad \text{(derivee deux fois en } p\text{)} \\
&= p(1-p)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(1-p)^k\right)'' \\
&= p(1-p)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k + p - 2\right)'' \\
&= p(1-p)\left(\frac{1}{p} + p - 2\right)'' \\
&= p(1-p)\left(\frac{2}{p^3}\right) \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{2(1-p)}{p^2} = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$

D'où

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.$$

La variance de X est donc

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

2^o)

$2;a$) La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\mathcal{Y} = \{0, 1, \ldots, n\}$. C'est une variable binômiale de paramètre n et $p = \dfrac{n_1}{n_1+n_2}$: $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Donc la loi de Y est :

$$\pi_Y(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$2.b$) En utilisant les v.a. de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(1,p),\ i = 1, 2, \ldots, n$ définies au début de l'exercice, la v.a. Y peut s'écrire sous la forme

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Par linéarité de l'espérance, on peut écrire

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{E}(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \quad (\textit{independance}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} p^2 \\
&= np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Donc la variance de Y est :

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p)$$

$2.c$) La v.a. $Z = n - Y$ représente le nombre de boules rouges obtenus durant les n tirages. Donc de façon analogue à Y, la v.a. Z obéit à une loi binômiale de paramètres

n et $q = \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ (chance d'obtenir une boule rouge au $i$ème tirage). Nous avons donc $Z \sim \mathcal{B}(n,q)$.
D'où

$$\mathbb{E}(Z) = nq, \qquad \mathbb{E}(Z^2) = nq + n(n-1)q^2, \qquad \sigma^2(Z) = nq(1-q)$$

<u>Exercice 12.</u> (loi de Pascal)

Soit X une variable alŕepertoire sur $\mathbb{N}$, de loi de probabilités $\pi(k) = \dfrac{\alpha a^{k-1}}{(1+a)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$ où $a > 0$ est un paramètre supposé connu.
Calculer le paramètre α, la moyenne $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\sigma^2(X)$.

<u>Solution de l'exercice 12.</u>

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi(k) = 1$, alors

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha a^{k-1}}{(1+a)^{k+1}} \\ &= \frac{\alpha}{a(1+a)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \\ &= \frac{\alpha}{a(1+a)} \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} \\ &= \frac{\alpha}{a} \end{aligned}$$

D'où $\alpha = a$. Donc

$$\pi(k) = \frac{1}{1+a}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k, \; k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{1+a} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \\ &= \frac{1}{1+a} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \\ &= \frac{a}{(1+a)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \\ &= a \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \frac{1}{(1+a)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= a \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{a}{1+a} \right)^k \right)' \quad \text{(derivee en } a\text{)} \\
&= a \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^k \right)' \\
&= a \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^k - 1 \right)' \\
&= a\,(1+a-1)' \\
&= a
\end{aligned}
$$

Donc $\mathbb{E}(X) = a$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \frac{1}{1+a} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{a}{1+a} \right)^k \\
&= \frac{1}{1+a} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) u^k \qquad \text{avec } u = \frac{a}{1+a} \in]0,1[\text{ car } a > 0 \\
&= \frac{u^2}{1+a} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) u^{k-2} \\
&= \frac{u^2}{1+a} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(u^k\right)'' \\
&= \frac{u^2}{1+a} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} u^k \right)'' \\
&= \frac{u^2}{1+a} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k - 1 - u \right)'' \\
&= \frac{u^2}{1+a} \left(\frac{1}{1-u} - 1 - u \right)'' \qquad \text{car } 0 < u < 1 \\
&= \frac{u^2}{1+a} \left(\frac{2}{(1-u)^3} \right) \\
&= 2a^2 \qquad \text{en remplaçant } u = \tfrac{a}{1+a}
\end{aligned}
$$

Donc

$$2a^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

D'où

$$\mathbb{E}(X^2) = 2a^2 + \mathbb{E}(X) = 2a^2 + a$$

Par conséquent

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2a^2 + a - a^2 = a^2 + a$$

Exercice 13.
Soit X une variable aléatoire réelle continue $f(x) = e^{-\lambda|x|},\ x \in \mathbb{R}$
1^o) Calculer la constante λ,
2^o) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$,
3^o) Calculer la fonction de répartition F de X et représenter son allure de graphe,
4^o) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 < X < 1 \ ou\ X > 2)$,
5^o) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
5.1) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(X^2 < \alpha)$ en fonction de F et α ,
5.2) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(|X| < \alpha \mid X > \beta)$ en fonction de F, α et β.

Solution de l'exercice 13.
1^o)
$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}$$
Donc $\lambda = 2$, par conséquent $f(x) = e^{-2|x|},\ x \in \mathbb{R}$.
2^o)
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = 0, \text{ puisque } xf(x) \text{ est impaire}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$
Donc $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{2}$.
3^o) Soit $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-2|x|}dx$.
Si $t \leq 0$ alors $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2t}$
Si $t > 0$ alors $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx + \int_0^t e^{-2x}dx = \frac{1}{2}e^{2t} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2t}$
Donc
$$F(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(t) + \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

4^o)

5^o) $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

5.1) $\mathbb{P}(X^2 < \alpha) = \mathbb{P}(-\sqrt{\alpha} < X < \sqrt{\alpha}) = F(\sqrt{\alpha}) - F(-\sqrt{\alpha})$.

5.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| < \alpha | X > \beta) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > \beta)} \mathbb{P}(-\alpha < X < \alpha, X > \beta) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(X>\beta)} \mathbb{P}(-\alpha < X < \alpha) & si \quad \beta \leq -\alpha \\ \frac{1}{\mathbb{P}(X>\beta)} \mathbb{P}(\beta < X < \alpha) & si \quad -\alpha \leq \beta \leq \alpha \\ 0 & si \quad \beta \geq \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(|X| < \alpha | X > \beta) = \begin{cases} \frac{1}{1-F(\beta)} (F(\alpha) - F(-\alpha)) & si \quad \beta \leq -\alpha \\ \frac{1}{1-F(\beta)} (F(\alpha) - F(\beta)) & si \quad -\alpha \leq \beta \leq \alpha \\ 0 & si \quad \beta \geq \alpha \end{cases}$$

Exercice 14.

Soit X une variable aléatoire continue dont le graphe de la fonction densité de probabilité forme un triangle isocèle avec l'axe Ox et de base $[-1, 1]$.
1^o) Calculer la probabilité $P(X^2 < \frac{1}{4}, X < \frac{1}{4})$.
2^o) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Solution de l'exercice 14.

On commence d'abord par déterminer l'expression de la fonction densité f de la v.a. X : nous avons $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et f est paire (triange isocèle). Elle croit linéairement du point $(-1, 0)$ au point $(0, h)$, où $h = f(0)$ à déterminer, puis décroit du point $(0, h)$ au point $(1, 0)$ (faites un schéma). Maintenant l'aire sous la courbe de f est $\frac{(1-(-1))\times h}{2} = h$ (base fois hauteur sur 2). Comme cette aire doit être égale à 1, nous avons donc $h = 1$. Une fois on a les trois points $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$, de notre triangle isocèle, nous pouvons facilement déduire les équations des segments de droite de la courbe de f délimitant la partie supŕieure du triangle en question. Nous obtenons finalement

$$f(x) = (x + 1)\mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + (1 - x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

1^o)

$$\begin{aligned}
I\!P(X^2 < \tfrac{1}{4}, X < \tfrac{1}{4}) &= I\!P(-\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{1}{2}, X < \tfrac{1}{4}) \\
&= I\!P(-\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{1}{4}) \\
&= \int_{-1/2}^{1/4} f(x)dx \\
&= \int_{-1/2}^{0} x+1dx + \int_{0}^{1/4} 1-xdx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1/2}^{0} + \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1/4} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32} = \frac{19}{32} \simeq 0.59
\end{aligned}$$

2^o) Soit G la fonction de répartition de la v.a. $Y = |X|$. Soit $t \in I\!R$, nous avons

$$G(t) = I\!P(Y \leq t) = I\!P(|X| \leq t)$$

Donc

$$G(t) = I\!P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ I\!P(-t \leq X \leq t) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Maintenant

$$I\!P(-t \leq X \leq t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)dx & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$I\!P(-t \leq X \leq t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{0} x+1dx + \int_{0}^{t} 1-xdx & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

D'où

$$I\!P(-t \leq X \leq t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{0} x+1dx + \int_{0}^{t} 1-xdx & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

$$I\!P(-t \leq X \leq t) = \begin{cases} -t^2+2t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

En remplaçant mantenant dans $G(t)$, nous obtenons

$$G(t) = I\!P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ -t^2+2t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

que nous pouvons écrire sous une forme condensée :

$$G(t) = (-t^2 + 2t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t), \quad t \in I\!R$$

La fonction G est dérivable sur $I\!R - 0, 1$. Donc la densité de probabilité g de la v.a. Y peut être déduite de G ainsi :

$$g(x) = G'(x), x \in I\!R - \{0, 1\},$$

qui donne

$$g(x) = (2 - 2x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x), x \in I\!R - \{0, 1\},$$

que l'on peut étendre par continuité aux points 0 et 1 ce qui ne changera rien au calcul de probabilité.

$$g(x) = (2 - 2x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x), x \in I\!R$$

Vous pouvez vérifier que g est bien une densité de probabilité.

Exercice 15

Considérons un couple aléatoire réel discret indépendant (X, Y) tel que X obéit à une loi binomiale $\mathcal{B}(3, p)$ et Y obéit à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, q)$, où p et q sont dans $]0, 1[$. Pour simplifier, on propose d'adopter les deux notions suivantes : $\bar{p} = 1 - p$ et $\bar{q} = 1 - q$.

1°) Dresser le tableau qui résume la loi jointe et les lois marginales du couple (X, Y),

2°) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$ en fonction de p et q et en déduire q

3°) Soit S la variable aléatoire définie par $S = X + Y$.

3.1) Donner l'ensemble des valeurs possibles de S et dresser le tableau de la loi de S,

3.2) Calculer la variance $Var(S)$ et identifier la loi de S lorsque $p = q$.

Solution de l'exercice 15

$X \sim \mathcal{B}(3, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(1, q)$ et (X, Y) indépendant. $p, q \in]0, 1[$, $\bar{p} = 1 - p$ et $\bar{q} = 1 - q$.

1°) X est à valeurs dans $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ et Y est à valeurs dans $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Comme (X, Y) est indépendant, alors la loi jointe $\pi = (\pi_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ est le produit des lois marginales $\pi_X = (\pi_{i,.})_{i\in\mathcal{X}}$ et $\pi_Y = (\pi_{.,j})_{j\in\mathcal{Y}}$. Nous avons donc le tableau suivant :

$\mathcal{Y}$ / $\mathcal{X}$	0	1	π_X
0	$(1-q)C_3^0(1-p)^3$	$qC_3^0(1-p)^3$	$C_3^0(1-p)^3$
1	$(1-q)C_3^1p(1-p)^2$	$qC_3^1p(1-p)^2$	$C_3^1p(1-p)^2$
2	$(1-q)C_3^2p^2(1-p)$	$qC_3^2p^2(1-p)$	$C_3^2p^2(1-p)$
3	$(1-q)C_3^3p^3$	$qC_3^3p^3$	$C_3^3p^3$
π_Y	$1-q$	q	1

$\mathcal{Y}$ / $\mathcal{X}$	0	1	π_X
0	$\bar{q}\bar{p}^3$	$q\bar{p}^3$	$\bar{p}^3$
1	$3\bar{q}p\bar{p}^2$	$3qp\bar{p}^2$	$3p\bar{p}^2$
2	$3\bar{q}p^2\bar{p}$	$3qp^2\bar{p}$	$3p^2\bar{p}$
3	$\bar{q}p^3$	qp^3	p^3
π_Y	$\bar{q}$	q	1

2^o)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - 3pq$$

Calcul de $\mathbb{E}(XY)$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{0}^{1} ij\pi_{i,j} = \sum_{i=1}^{3} i\pi_{i,1} = 3\bar{q}p\bar{p}^2 + 6\bar{q}p^2\bar{p} + 3\bar{q}p^3$$

Donc

$$Cov(X,Y) = 3\bar{q}p\bar{p}^2 + 6\bar{q}p^2\bar{p} + 3\bar{q}p^3 - 3pq = 3p(1-2q)$$

Comme (X,Y) est indépendant, alors $Cov(X,Y) = 0$, d'où $q = 1/2$ car $p \neq 0$.
3^o) $S = X + Y$
3.1) L'ensemble des valeurs possibles de S est $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$.
La loi de S est déduite de la loi jointe de (X,Y) :

$\mathcal{S}$	0	1	2	3	4
π_S	$\bar{q}\bar{p}^3$	$q\bar{p}^3 + 3\bar{q}p\bar{p}^2$	$3qp\bar{p}^2 + 3\bar{q}p^2\bar{p}$	$3qp^2\bar{p} + \bar{q}p^3$	qp^3

3.2) Comme (X,Y) est indépendant, alors $Var(S) = Var(X) + Var(Y) = 3p\bar{p} + q\bar{q}$.
Si $p = q$, $S \sim \mathcal{B}(4,p)$, car c'est la somme d'une binômiale $\mathcal{B}(3,p)$ et d'une Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ qui sont indépendantes.
En conclusion $S \sim \mathcal{B}(4, 1/2)$ car $p = q = 1/2$.

Exercice 16

Considérons une pièce de monnaie telle que $P(Pile) = p,\ (0 < p < 1)$. On lance cette pièce trois fois de suite.
1^o) Donner l'espace fondamental, Ω, associé à cette expérience.
2^o) Considérons les deux variables aléatoires X et Y définies, pour $\omega \in \Omega$ par :
$X(\omega) = $ *nombre de séquences PileFace dans* ω,
$Y(\omega) = $ *nombre de séquences FacePile dans* ω.
Montrer que X et Y sont des variables aléatoires de Bernoulli pour lesquelles on précise le paramètre de la loi.
3^o) Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires $Z = XY$ et $S = X + Y$.
4^o) Calculer la covariance entre X et Y notée $Cov(X,Y)$.
5^o) Déterminer la loi jointe du couple aléatoire (X,Y).
6^o) Chercher une condition nécessaire et suffisante sur p pour que le couple (X,Y) soit indépendant.

Solution de l'exercice 16

1^o)

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

2^o) X est à valeurs dans $\mathcal{X} = \{0,1\}$ et Y est à valeurs dans $\mathcal{Y} = \{0,1\}$ car pour tout élément $\omega \in \Omega$, ω contient soit une fois soit zéro fois la séquence PF et de même pour la séquence FP. De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(\{PPP, FPP, FFP, FFF\}) \\
&= \mathbb{P}(PPP) + \mathbb{P}(FPP) + \mathbb{P}(FFP) + \mathbb{P}(FFF) \\
&= p^3 + (1-p)p^2 + (1-p)^2 p + (1-p)^3 \\
&= 2p^2 - 2p + 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(\{PPP, PPF, PFF, FFF\}) \\
&= \mathbb{P}(PPP) + \mathbb{P}(PPF) + \mathbb{P}(PFF) + \mathbb{P}(FFF) \\
&= p^3 + (1-p)p^2 + (1-p)^2 p + (1-p)^3 \\
&= 2p^2 - 2p + 1
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $2p^2 - 2p + 1 \in]0,1[$ pour $p \in)0,1[$.
Donc X et Y sont deux variables aléatoires de Bernoulli, de même paramètre $2p - 2p^2 = 2p(1-p)$.
3^o)L'ensemble de valeurs possibles pour la variable Z est $\mathcal{Z} = \{0,1\}$ et celui des valeurs possibles pour la variable S et $\mathcal{S} = \{0,1,2\}$ puisque X et Y sont à valeurs dans $\{0,1\}$.
• Loi de Z

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}[(X=0,Y=0) \cup (X=0,Y=1) \cup (X=1,Y=0)] \\
&= \mathbb{P}[(X=0,Y=0)] + \mathbb{P}[(X=0,Y=1)] + \mathbb{P}[(X=1,Y=0)] \\
&= \mathbb{P}[\{PPP, FFF\}] + \mathbb{P}[\{FPP, FFP\}] + \mathbb{P}[\{PFF, PPF\}] \\
&= p^3 + (1-p)^3 + (1-p)p^2 + (1-p)^2 p + p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\
&= 1 + p^2 - p
\end{aligned}$$

Donc Z est une variable de Bernoulli de paramètre $p(1-p)$: $Z \sim \mathcal{B}(1, p(1-p))$.
• Loi de S

$$\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1 - 3p + 3p^2 = 1 - 3p(1-p)$$

$$\mathbb{P}(S=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(\{FPF, PFP\}) = p(1-p)^2 + p^2(1-p) = p(1-p)$$

$$\mathbb{P}(S=1) = 1 - [\mathbb{P}(S=0) + \mathbb{P}(S=2)] = 2p(1-p)$$

que l'on résume dans le tableau suivant :

$\mathcal{S}$	0	1	2
π_S	$1-3p(1-p)$	$2p(1-p)$	$p(1-p)$

4^o)

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= p(1-p) - (2p(1-p))^2 \\
&= p(1-p)(2p-1)^2
\end{aligned}$$

5^o) Loi jointe de (X,Y) : nous avons $\mathbb{P}(X=0,Y=0) = \mathbb{P}(S=0) = 1 - 3p(1-p)$ et donc

$$\mathbb{P}(X=0,Y=1) = \pi_X(0) - \mathbb{P}(X=0,Y=0) = 2p^2 - 2p + 1 - [1 - 3p(1-p)] = p(1-p)$$

De même nous avons $I\!P(X=1, Y=1) = I\!P(S=2) = p(1-p)$ et donc

$$I\!P(X=1, Y=0) = \pi_X(1) - I\!P(X=1, Y=1) = 2p(1-p) - p(1-p) = p(1-p)$$

La loi jointe du couple (X, Y) est donc résumée dans le tableau suivant en incluant les lois marginales déjà calculées :

$\mathcal{X} / \mathcal{Y}$	0	1	π_X
0	$1-3p(1-p)$	$p(1-p)$	$2p^2-2p+1$
1	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
π_Y	$2p^2-2p+1$	$2p(1-p)$	1

En notant (π_{ij}) la loi jointe du couple (X, Y), alors pour que (X, Y) soit indépendant, il faut que $\pi_{ij} = \pi_X(i)\pi_Y(j)$ pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$. En regardant le tableau résumant la loi jointe de (X, Y) avec les marges, il faut que $p(1-p) = \frac{1}{4}$, soit $p = \frac{1}{2}$ est la condition nécessaire que l'on montre qu'elle est aussi suffisante, en remplaçant p par $\frac{1}{2}$ dans le tableau, pour que (X, Y) soit indépendant. Pour $p = 1/2$, on trouve $1/4$ à l'intérieur du tableau et $1/2$ dans les marges, ce qui signifie que la pièce utilisée est équilibrée.

Exercice 17.

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles possédant une densité de probabilité f définie par :

$$f(x, y) = \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-y} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0, x<y^2\}}$$

1.) Calculer la constante réelle c.

2.) Déterminer les loi marginales (celle de X et celle de Y).
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

Solution de l'exercice 17.

1.)

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy \\
&= c\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-y}dy \right) dx \\
&= c\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
&= 2c\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \qquad \text{(changment de variable : } t = \sqrt{x}) \\
&= 2c
\end{aligned}$$

Donc $c = 1/2$. Par conséquent $f(x, y) = \dfrac{e^{-y}}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0, x<y^2\}}$.

2.) Densité de probabilité de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-y}dy \right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

ce qui donne

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

Densité de probabilité de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \left(\frac{e^{-y}}{2} \int_{0}^{y^2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

ce qui donne

$$f_Y(y) = ye^{-y} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

Il est facile de vérifier que $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, par conséquent X et Y ne sont pas indépendantes.