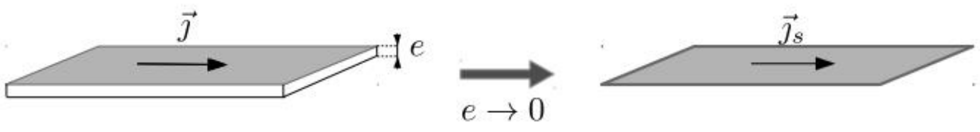
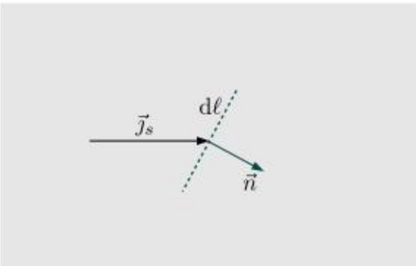
Corrigé de l'exercice 6/TD1

Nappe de courant infinie parcouru par un courant surfacique

Rappel : lorsqu'une distribution de courant possède une épaisseur faible devant ses autres dimensions (longueur, largeur par exemple) on la modélise par une distribution surfacique de courant de vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s$



$\vec{j}\, e \leftrightarrow \vec{j}_s$ pour $e \to 0$



L'intensité du courant traversant une ligne de longueur $\mathrm{d}\ell$ et de normale orientée $\vec{n}$ vaut

$$\vec{j}_s.\mathrm{d}\ell\vec{n}$$

L'intensité traversant une ligne $\mathcal{L}$ s'en déduit par intégration :

$$I = \int_{\mathcal{L}} \vec{j}_s.\mathrm{d}\ell\vec{n}$$

Dimensionnellement : $[\|\vec{j}_s\|] =$ A.m^{-1}

Exercice 6 :

On considère une distribution surfacique de vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s = j_s\ \vec{e}_y$ où $j_s > 0$

• Choix du système de coordonnées :

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Les vecteurs sont exprimés dans la base cartésienne $(\vec{e}_x\ ,\ \vec{e}_y\ ,\ \vec{e}_z)$.

1) Détermination du champ d'induction magnétique créé par la distribution de courant surfacique

• Étude de symétrie de la distribution de courant

Soit M un point de l'espace: le plan {M, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) est un plan de symétrie de la distribution de courants. Il s'ensuit que le champ d'induction magnétique $\vec{B}$(M) est orthogonal à ce plan et donc dirigé selon $\vec{e}_x$. $\vec{B}$(M) = B_x(M) $\vec{e}_x$

• Etude des invariances

La distribution de courant reste invariante dans toute translation parallèlement à l'axe Ox et à l'axe Oy (distribution de courant confondue avec le plan (xOy)) $\Rightarrow$ $B_x(M)$ ne dépend ni de x ni de y : $\vec{B}(M) = B_x(z)\vec{e}_x$.

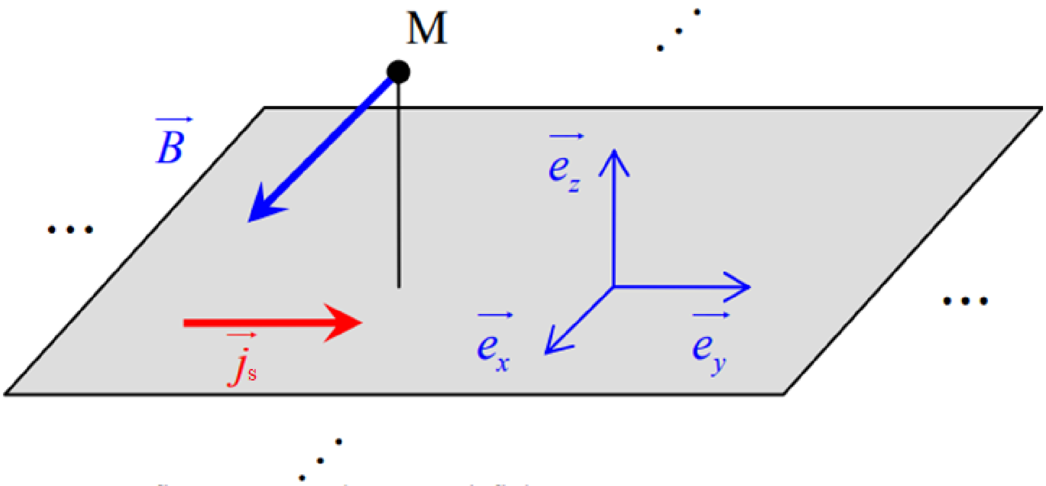


figure1: nappe de courant infinie

Les lignes de champ sont des droites parallèles à l'axe Ox.

• Choix du contour d'Ampère

Le plan de la nappe de courant est un plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent, en un point M′ symétrique de M, le champ $\vec{B}(M')$ est antisymétrique de $\vec{B}(M)$; ($\vec{B}(M') = -\,sym/_{(xOy)}\ \vec{B}(M)$) . La fonction $B_x(z)$ est ,donc, une fonction impaire et on peut écrire: $B_x(-z) = -B_x(z)$.

On peut choisir comme contour d'Ampère Γ un rectangle de longueur ℓ et de hauteur 2z , orthogonal au courant (voir figure2).

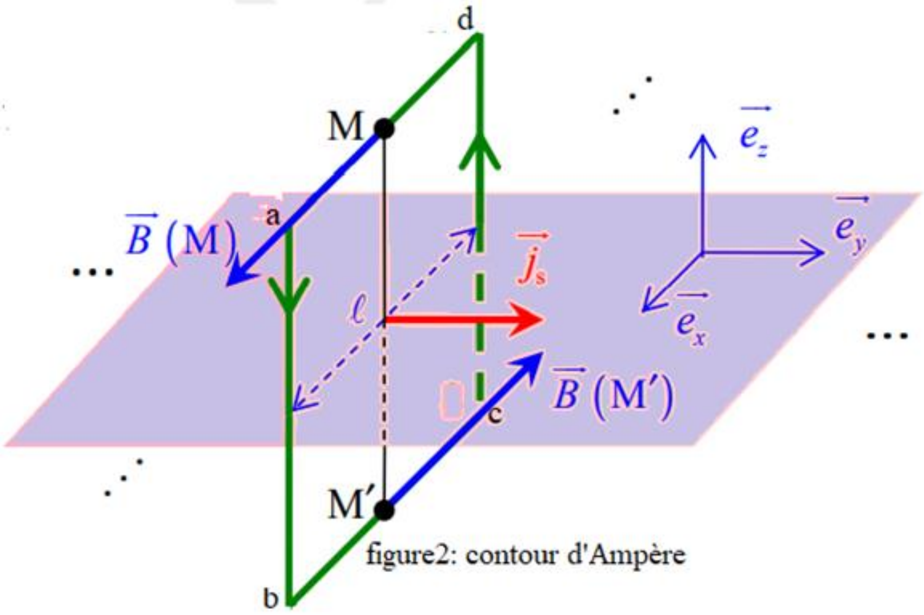


figure2: contour d'Ampère

Le champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ étant porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$, les circulations le long des segments ab et cd sont nulles.

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M).d\vec{M} = \int_{da} B_x(z)\vec{e}_x.dx\vec{e}_x + \int_{ab} B_x\vec{e}_x.dz(-\vec{e}_z) + \int_{bc} B_x(-z)\vec{e}_x.dx(-\vec{e}_x) + \int_{cd} B_x\vec{e}_x.(dz)\vec{e}_z$$
$$= 2\, B_x(z)\ell$$

Le contour d'Ampère Γ est orienté à ce que $\vec{n} = \vec{e}_y$ soit la normale positive à toute surface qui s'appuie sur Γ.

$$I_{enlacé} = \int_\ell j_s\,\vec{e}_y.\vec{e}_y\, d\ell = j_s\,\ell$$

Pour z > 0 : $2\, B_x(z)\ell = \mu_0\, j_s\,\ell$ d'où $B_x(z) = \dfrac{\mu_0\, j_s}{2}$

Un point de la nappe appartient à la fois à un plan de symétrie et à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ y est donc nul : $B_x(z=0) = 0$

Soit finalement :

$$\begin{cases} \text{pour } z>0 & \vec{B}(z) = +\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \\ \text{pour } z=0 & \vec{B}(0) = \vec{0} \\ \text{pour } z<0 & \vec{B}(z) = -\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \end{cases} \qquad \text{ou encore : } \vec{B}(z) = \operatorname{sgn}(z)\,\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x$$

2) Détermination du potentiel vecteur créé par la nappe de courant surfacique

• Étude de symétrie de distribution de courant

Soit M un point de l'espace: le plan {M, $\vec{e}_z, \vec{e}_x$ } est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Par conséquent, le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$, créé au point M par la distribution de courant, est orthogonal à ce plan et donc dirigé selon $\vec{e}_y$

$$\vec{A}(M) = A_y(M)\,\vec{e}_y$$

• Etude des invariances

La distribution reste invariante dans toute translation parallèlement à l'axe Ox et à l'axe Oy (distribution de courant confondue avec le plan (xOy)) $\Rightarrow$ $A_y(M)$ ne dépend ni de x ni de y : $\vec{A}(M) = A_y(z)\vec{e}_y$

Par ailleurs, le plan xOy contenant la nappe de courant est un plan de symétrie du problème et le potentiel vecteur en M′, symétrique de M par rapport à ce plan, est le symétrique du potentiel vecteur en M. Par conséquent , $A_y(z)$ est paire

$A_y(-z) = A_y(z)$ (figure 3)

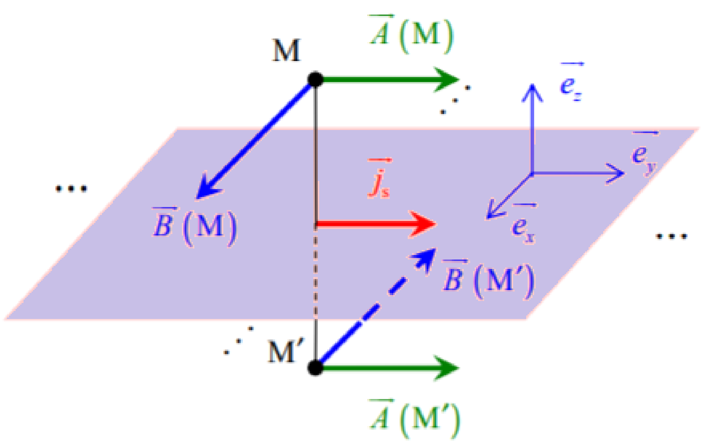


figure 3

Dans de telles conditions de symétrie, la relation $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \dfrac{d}{dz}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\A_y\\0\end{pmatrix}=-\frac{dA_y}{dz}\,\vec{e}_x \qquad \text{soit} \qquad A_y(z)=-\int B_x\,dz+\text{constante}$$

$$\begin{cases}\text{pour } z>0 \quad \vec{B}(z)=+\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \qquad A_y(z)=-\displaystyle\int\frac{\mu_0 j_s}{2}dz=-\frac{\mu_0 j_s}{2}z+\text{constante}\\ \text{pour } z<0 \quad \vec{B}(z)=-\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \qquad A_y(z)=+\displaystyle\int\frac{\mu_0 j_s}{2}dz=+\frac{\mu_0 j_s}{2}z+\text{constante}\end{cases}$$

Et donc, finalement, en choisissant l'origine du potentiel dans le plan de la nappe de courant ($A_y(z=0)=0$):

$$\vec{A}=-\frac{\mu_0 j_s}{2}|z|\,\vec{e}_y=-\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2}|z|$$

Rappel : $r\vec{o}t\ \vec{A}(\mathrm{M})\ =(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z})\vec{e}_x-(\dfrac{\partial A_z}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial z})\vec{e}_y+(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y})\vec{e}_z$