Corrigé de l'exercice 1 du TD 1

Champ créé par un fil rectiligne de longueur finie

Considérons un fil rectiligne vertical de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I. Déterminons le champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant en un point M.

- Système de coordonnées : M est repéré par ses coordonnées cylindriques ρ , φ et z
On note O la projection du point M sur l'axe OZ du fil tel que: OM = ρ

- On utilise la base cylindrique ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$) : $\vec{e}_\rho = \dfrac{\vec{OM}}{OM}$, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire porté par l'axe OZ

D'après la loi de Biot et Savart un élément de courant Idℓ centré en un point P crée au point M un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz\vec{e}_z \wedge (-z\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho)}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho\, dz\vec{e}_\varphi}{PM^3}$$

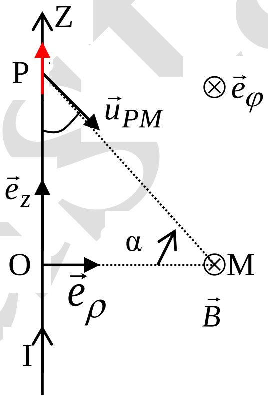


Figure1

$d\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan contenant le fil et le point M et il est porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$ (Tous les champs magnétiques $d\vec{B}$ sont portés par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{B}$ est porté par $\vec{e}_\varphi$.

On peut utiliser la symétrie :
Le plan (M, $\vec{e}_\rho$,$\vec{e}_z$) est un plan de symétrie magnétique pour la distribution de courant, donc le champ résultant créé au point M par la distribution du courant est perpendiculaire à ce plan : $\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$ est porté par $\vec{e}_\varphi$

On écrit alors : dB = $\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\rho\, dz}{PM^3}$

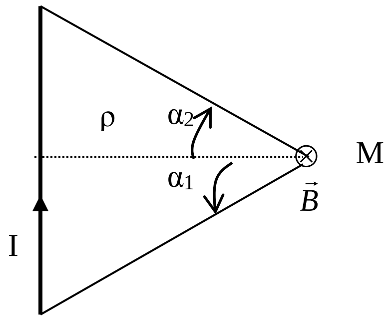
Introduisons l'angle α, orienté par l'espace ,tel que : cos(α) = $\dfrac{\rho}{PM}$; PM = $\dfrac{\rho}{\cos(\alpha)}$

On a OP = z = ρ tg(α) ⇒ dz = $\dfrac{\rho}{\cos^2(\alpha)}$ dα dB (M) = $\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}$cos(α) dα . Le champ total créé par le fil fini :

B(M) = $\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}$ $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\alpha) d\alpha$ = $\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}$ (sin(α_2) – sin(α_1))

Remarque :

Pour les points M appartenant au plan médiateur, α_1 = - α_2 = β : B(M) = $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ sin β



2) Pour un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I :
α_1 tend vers -π/2 et α_2 tend vers π/2

B(M) = $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta$

d'où B(M) = $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ soit $\vec{B}$ (M) = $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi$

Remarque :
Les lignes de champ d'induction magnétique sont des cercles d'axe Oz et de rayon ρ. Elles sont orientées selon la règle du tire bouchon : ($d\vec{B}$, I$d\vec{l}$, $\overrightarrow{PM}$) est un trièdre direct
Le module de $\vec{B}$ décroît avec la distance.