TD2

EX1 : coefficients d'induction

1) (C_1) est une bobine plate (O_1, R_1), de N_1 spires circulaires parcourue par un courant d'intensité I_1.

(C_1) est assimilée à une spire circulaire (O_1, R_1) parcourue par un courant d'intensité égale à $N_1 I_1$

. Le champ d'induction magnétique crée au centre O_1 par (C_1) : $B_1(O_1) = \mu_0 \dfrac{N_1 I_1}{2R_1}$

. Le coefficient d'induction propre ou inductance propre :

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} > 0$$

où $\Phi_{11} = N_1 \, \Phi_{1-spire_1} \simeq N_1 \iint_{S_1} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \, dS_1$

- S_1 = surface du disque limité par la spire 1 de $(\mathcal{E}_1)$:
- Le rayon R_1 étant petit, on suppose qu'en tout point de la surface S_1 le champ d'induction magnétique est égal à $\mu_0 \frac{N_1 I_1}{2R_1}$
- $\vec{B_1}(O_1)$ et la surface S_1 sont orientés par le courant d'intensité I_1 conformément à la règle du tire-bouchon $\Rightarrow$ $\vec{B_1}(O_1) \cdot \vec{dS_1} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \, dS_1$

d'où $\phi_{11} = N_1^2 \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2R_1} I_1 = \left[N_1^2 \frac{\mu_0 \pi R_1}{2}\right] I_1$

On en déduit l'inductance propre L_1 de (C_1) :

$$\boxed{L_1 = N_1^2 \frac{\mu_0 \pi R_1}{2}}$$

de même : on trouve $\boxed{L_2 = N_2^2 \frac{\mu_0 \pi R_2}{2}}$ l'inductance propre du circuit (C_2)

2) Déterminons le coefficient d'induction mutuelle M des deux circuits (C_1) et (C_2) :

$\boxed{a}$ Cas où (C_1) et (C_2) sont dans un même plan et $O_1 \equiv O_2$

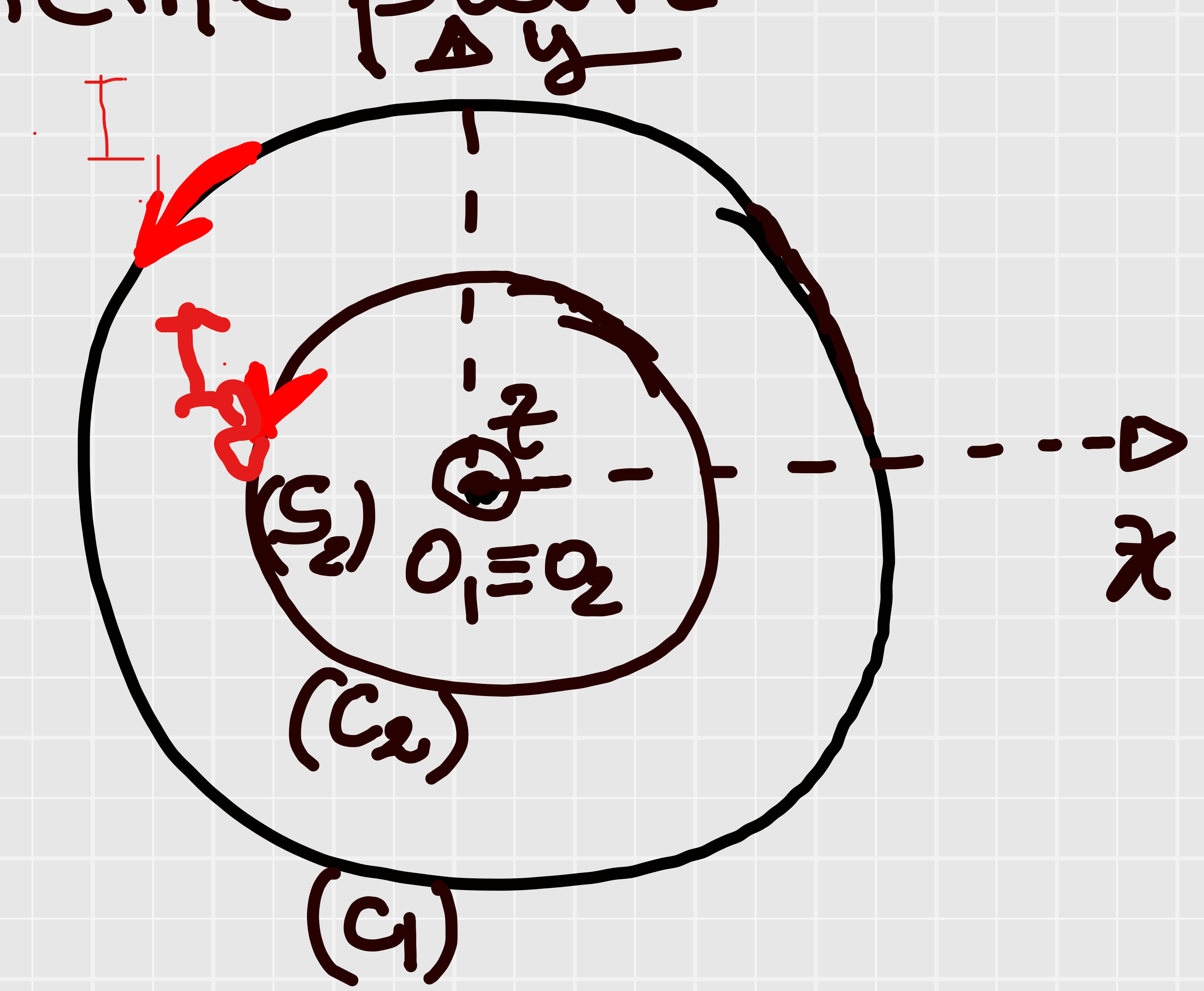


Figure 1

On a $M = \dfrac{\Phi_{12}}{I_1} = \dfrac{\Phi_{21}}{I_2}$

Calculons Φ_{12} :

$\Phi_{12} \simeq N_2 \, \Phi_{1-spire_2}$

$$\Phi_{1\text{-spire}_2} \simeq \iint_{S_2} \vec{B}_1(O_1)\cdot\vec{n}_2\, dS_2$$

/ S_2 : surface du disque limité par la spire$_2$ du circuit (C_2) orientée par le courant d'intensité I_2 conformément à la règle du tire-bouchon. Dans le cas de figure 1 : $\vec{n}_2 = \vec{e}_z$

/ On suppose qu'en tout point de la surface S_2 le champ $\vec{B}_1$ créé par (C_1) est uniforme

$$\vec{B}_1 \simeq \mu_0 \frac{N_1 I_1}{2R_1} \vec{e}_z = \vec{B}_1(O_1) \qquad O_1 \equiv O_2$$

On aura : $\Phi_{12} \simeq N_2 \left[\iint_{S_2} \vec{B}_1(O_1) \cdot \vec{n}_2 \, dS_2 \right]$

$$= N_1 N_2 \frac{\mu_0}{2R_1} \left[\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \iint_{S_2} dS_2 \right] I_1$$

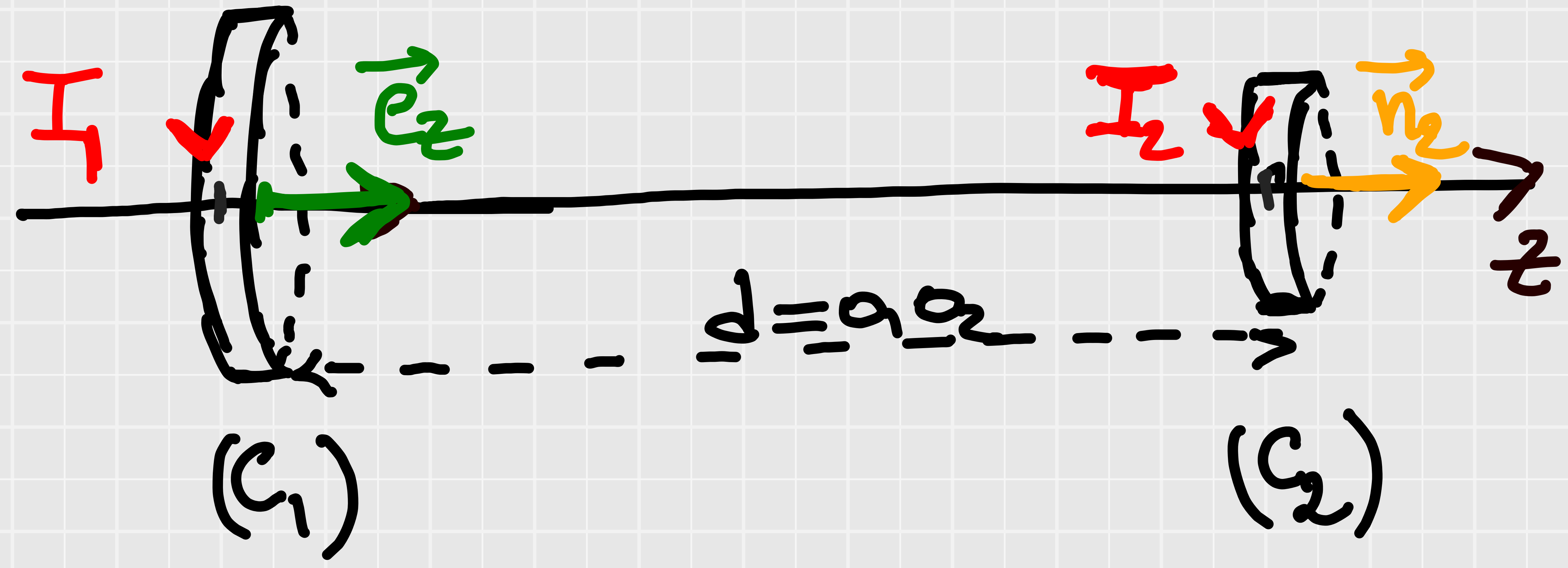
$$= \left[N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \right] I_1$$

d'où $\boxed{M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}}$

Si on inverse le sens de I_1 ou celui de I_2, on trouve :

$$M = -N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} < 0$$

$\boxed{b}$ Cas où (C_1) et (C_2) sont parallèles et ayant le même axe passant par les centres O_1 et O_2.
soit $d = O_1O_2 \gg R_1$ et on a $R_2 \ll R_1$.



$$\begin{cases} M = \dfrac{\Phi_{12}}{I_1} \\ \Phi_{12} = N_2\, \Phi_{1-spire_2} \\ \Phi_{1-spire_2} = \iint_{S_2} \vec{B_1} \cdot \vec{n_2}\, dS_2 \end{cases}$$

S_2 : surface du disque limité par la spire 2 de (C_2) orientée par I_2 conformément à la règle du tire-bouchon. Dans le cas de la figure 2

$$\vec{n_2} = \vec{e_z}$$

. On suppose qu'en tout point de la surface S_2 le champ $\vec{B_1}$ créé par (C_1) est uniforme : $\vec{B_1}(M \in S_2) \simeq \vec{B_1}(O_2)$

d'où $\Phi_{1\text{-spire}_2} \simeq \iint_{S_2} \vec{B_1}(O_2) \cdot \vec{n_2}\, dS_2$

$$= N_1 \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e_z} \cdot \vec{e_z} \iint_{S_2} dS_2$$

$$\Phi_{1-spire_2} \simeq \left[N_1 \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2\, d^3} \right] I_1 \qquad d >> R_1$$

d'où : $$\Phi_{12} = \left(N_1 N_2 \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2 d^3} \right) I_1$$

et $$\boxed{M = N_1 N_2 \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2 d^3} > 0}$$

Si on inverse le sens de I_1 ou celui de I_2, $M < 0$

$$M = - N_1 N_2 \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2 d^3}$$

Conclusion : M dépend de la géométrie de (C_1) et (C_2), de la disposition de l'un / à l'autre et de leur orientation.

Ex2 :

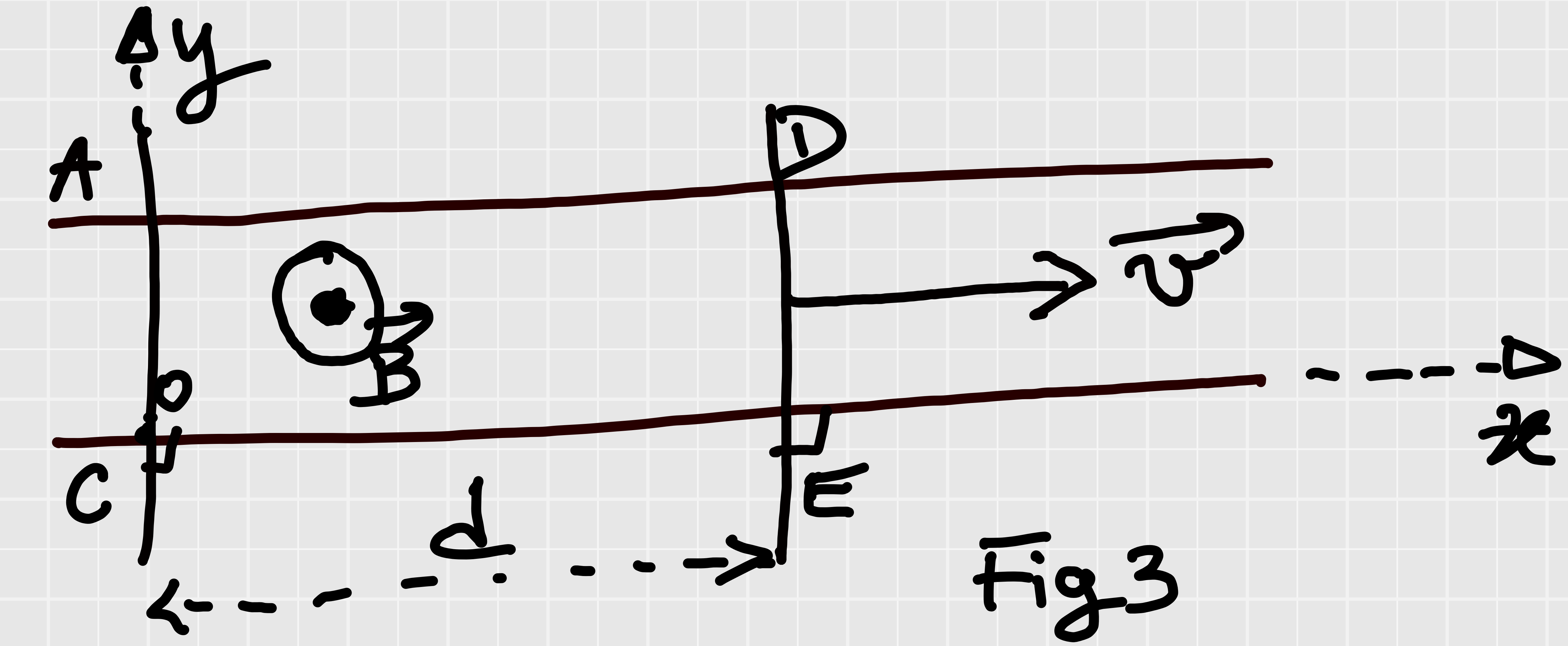


Fig 3

Le circuit constitué des deux rails, de la barre AC et la barre DE est placé dans un champ uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$ $\quad B_0 = cte > 0$

La barre DE est mobile. Elle se déplace sur les rails avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e_x}$ (Fig 3)

1) Déterminer l'expression du courant induit i_{ind} dans le circuit.

Tout d'abord, on va déterminer la f.e.m induite (e) :

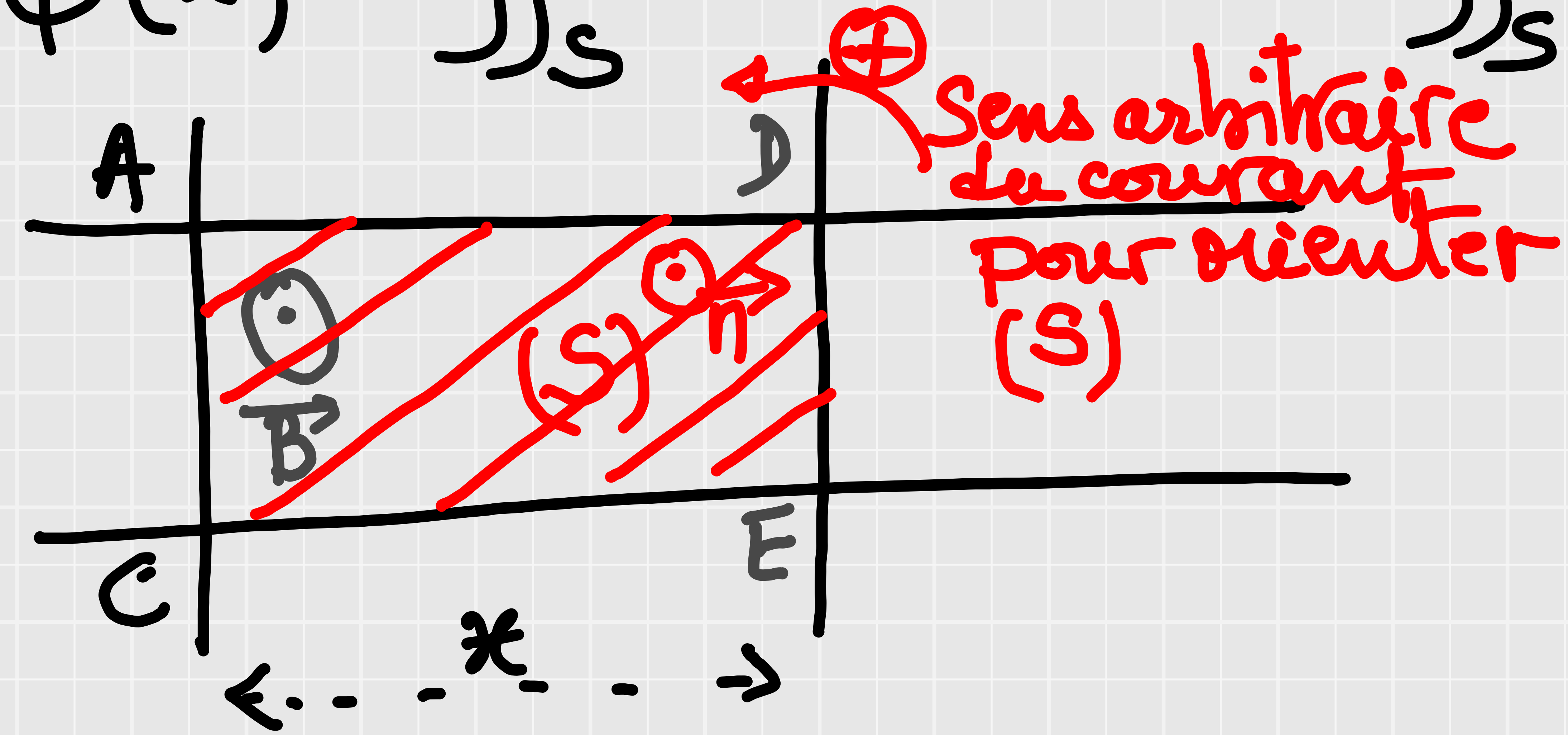
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{où } \Phi = \Phi_a + \Phi_p$$

où Φ_a, est le flux à travers le circuit, dc $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$

Φ_p est le flux propre induit qu'on va négliger.

$$\Rightarrow \quad \Phi = \Phi_a = \Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S B_0 \vec{e_z} \cdot \vec{e_z}\, dS = B_0 \ell x$$



le flux $\Phi(x)$ à travers le circuit à l'instant t :

$$\boxed{\Phi(x) = B_0 \ell x}$$

On en déduit la f.e.m induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v < 0$$

$$\dot{x} = v = at$$

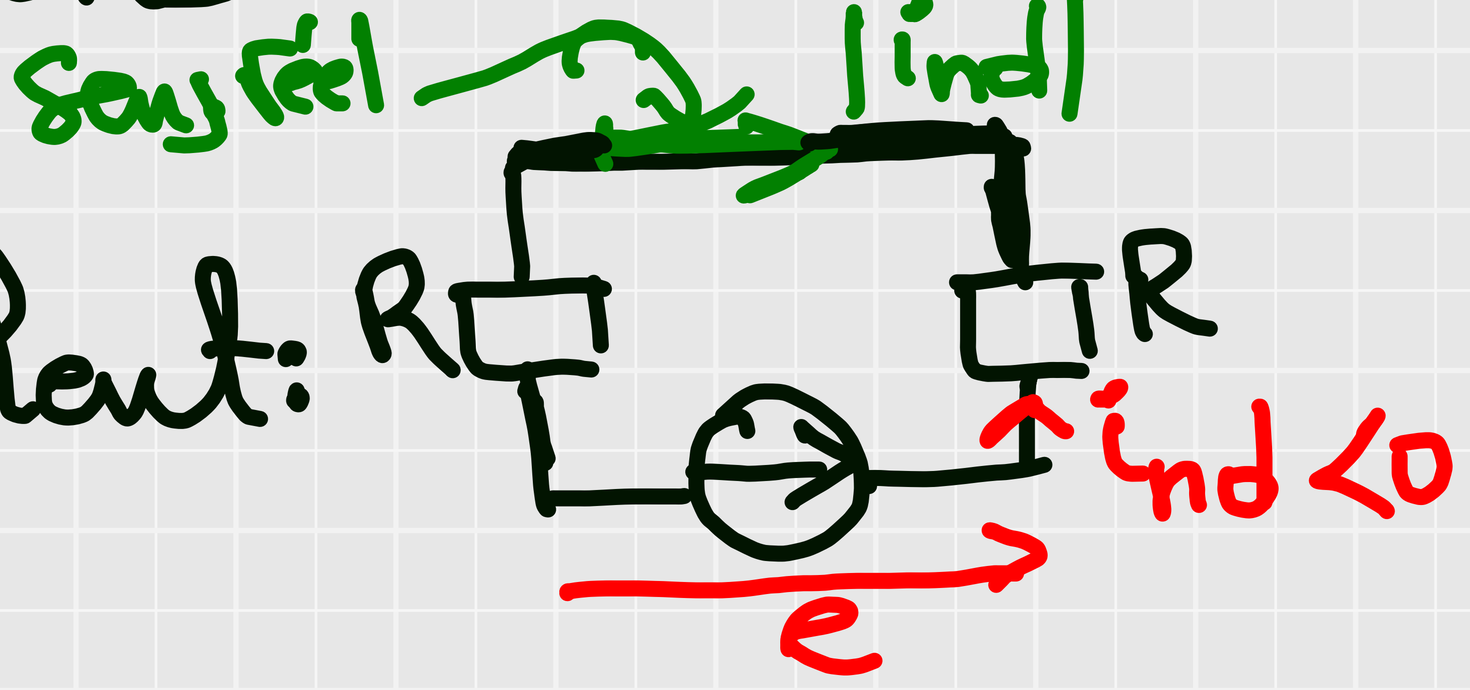
Avec le sens choisi arbitraire :

$$e = 2R\, i_{nd} \Rightarrow i_{nd} = \frac{e}{2R} = -\frac{B_0 \ell a t}{2R} < 0$$

2R : résistance équivalente du circuit.

Le sens réel de i_{nd} est le sens contraire de celui choisi pour le contour.

Le circuit électrique équivalent:



2) Force de Laplace sur la barre AC :

$$\vec{F}_{L_{AC}} = \int_A^C i_{nd}\, dy(-\vec{e_y}) \wedge \vec{B} = i_{nd}\, \vec{AC} \wedge \vec{B} = -\frac{B_0 \ell a t}{2R} \times \ell(-\vec{e_y}) \wedge B_0 \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{F}_{L_{AC}} = \frac{B_0^2 \ell^2 a t}{2R} \vec{e_x}}$$

. Force de Laplace sur la barre ED :

$$\vec{F}_{L_{ED}} = i_{nd}\, \vec{ED} \wedge \vec{B} = -\frac{B_0 \ell a t}{2R} \ell \vec{e_y} \wedge B_0 \vec{e_z} = -\frac{B_0^2 \ell^2 a t}{2R} \vec{e_x} = -\vec{F}_{L_{AC}}$$

La force de Laplace $\vec{F}_{L_{ED}}$ va s'opposer à l'augmentation du flux Φ.