Corrigé exercice 1 (cours)/TD3

1) Soit le couple de potentiel électromagnétique $(V \ ,\vec{A}\ )$ pour le champ électromagnétique $(\vec{E}\,,\vec{B}\,)$ vérifiant la condition (jauge de Lorenz) : $div\vec{A}\ +\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$

Equations de propagation pour les potentiels V et $\vec{A}$ loin des sources $(\vec{j}=\vec{0},\rho=0))$

D'une part les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ vérifient les équations:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\overrightarrow{grad}V \quad \text{et} \quad \vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A} \text{ (relations champs-potentiels)}$$

D'autre part les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ vérifient les équations de Maxwell

$$div\vec{E}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (\text{pour } \vec{j}=\vec{0},\rho=0))$$

- Commençons par $div\vec{E}=0$ et $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\overrightarrow{grad}V \Rightarrow div\left[-\overrightarrow{grad}V-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$

Soit : $\Delta V+\dfrac{\partial}{\partial t}div\vec{A}=0$ or $div\vec{A}\ +\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$

D'où : $\Delta V-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$ CQFM

- En utilisant $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$ et $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\overrightarrow{grad}V$

On écrit : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A})=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left[-\overrightarrow{grad}V-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$

$$\overrightarrow{grad}(div\vec{A})-\Delta\vec{A}=\varepsilon_0\,\mu_0\left[-\overrightarrow{grad}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right]$$

Soit : $\Delta\vec{A}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\overrightarrow{grad}\left[\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial V}{\partial t}+div\vec{A}\right]=\vec{0}$ (2)

Sachant que $\left[div\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial V}{\partial t}\right]=0$

Boustani

On déduit : $\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$ CQFM

avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$, où c représente la vitesse de la lumière dans le vide et vaut $c = 3\ 10^8$ m/s

2) En utilisant les équations de Maxwell, on peut retrouver l'équation de conservation de la charge électrique $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$:

Maxwell-Ampère : $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

Appliquons l'opérateur « divergence » à M-A :

$$0 = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (\bullet)$$

Maxwell-Gauss : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad\rightarrow\quad \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$

L'équation (•) devient : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ CQFT

Ainsi, les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge électrique.

3)a) Reprenons les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En multipliant scalairement la première par $\vec{B}$ et la seconde par $\vec{E}$ et en soustrayant membre à membre les deux relations, et compte tenu de la relation

$$div(\vec{E}\Lambda\vec{B}) = \vec{B}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) - \vec{E}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})$$

On obtient $$div(\vec{E}\Lambda\vec{B}) + \mu_0\varepsilon_0\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\bullet)$$

Où $\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{E}.\vec{E})}{\partial t}$ et $\vec{B}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{B})}{\partial t}$

On divise les deux membres de l'égalité (•) par μ_0 on obtient:

$$div\left(\frac{\vec{E}\Lambda\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right] = 0$$

Boustani

En introduisant le *vecteur de Poynting* : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Et la densité volumique de l'énergie électromagnétique : $w_{em} = \left[\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right]$

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right]$$

On obtient : $div(\vec{P}) + \dfrac{\partial w_{em}}{\partial t} = 0$ la relation de conservation locale de l'énergie électromagnétique loin des sources (ρ = 0) et ($\vec{j} = \vec{0}$)

Remarque : l'intégration de l'équation sur un volume τ conduit à la forme intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique (loin des sources ($\vec{j} = \vec{0}, \rho = 0$)))

$$\iiint_\tau div(\vec{P})\, d\tau + \iiint_\tau \frac{\partial w_{em}}{\partial t} d\tau = 0$$

En notant S la surface fermée limitant le volume τ, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à dS, orienté vers l'extérieur, on obtient: $\oiint_S \vec{P}.\vec{n}\, ds = - \iiint_\tau \dfrac{\partial w_{em}}{\partial t} d\tau = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_\tau \dfrac{W_{em}}{d\tau} d\tau\right]$

Cette relation exprime que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée S, limitant le volume τ, est égal à la variation par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume τ. En d'autres termes, le flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée S est égal à la puissance transportée par le champ électromagnétique à travers cette surface :

$p = \oiint_S \vec{P}.d\vec{S}$ est appelée puissance rayonnée (s'exprime en watts), comptée positivement pour une énergie sortante

Le terme ($\vec{P} \cdot d\vec{S}$) est l'énergie électromagnétique traversant dS par unité de temps.

Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ est un vecteur qui représente la densité de courant de puissance. Il a la direction et le sens de propagation de l'onde. Il décrit la propagation de l'énergie dans l'espace. Il s'exprime en watts m^{-2}

Boustani

3)b) Considérons une onde électromagnétique plane se propageant dans une direction de vecteur unitaire $\vec{e}_u$. Soit $(\vec{E},\vec{B})$ le champ électromagnétique associé à l'onde.

On a $\vec{B} = \dfrac{\vec{e}_u \wedge \vec{E}}{c}$

L'intensité de $\vec{B}$ s'écrit : $B = \dfrac{E}{c}$

Et la densité volumique de l'énergie électromagnétique :

$$w_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

On peut trouver une relation entre le vecteur de Poynting $\vec{P}$ et la densité volumique de l'énergie électromagnétique w_{em} :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}\wedge(\vec{e}_u \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \ \vec{e}_u \quad , \quad (\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

$$w_{em} = \varepsilon_0 E^2$$

Par conséquent : $\vec{P} = (w_{em} \times c)\,\vec{e}_u$ soit $|\vec{P}| = w_{em} \times c$

Si on considère un volume dτ (= c dt dS)de section dS et de génératrices de longueur cdt, on peut écrire : $|\vec{P}| = w_{em} \times c = \dfrac{dW_{em}}{d\tau} \times c \Rightarrow dW_{em} = \dfrac{1}{c}|\vec{P}|\,d\tau = \dfrac{1}{c}|\vec{P}|\vec{c}\,dt.d\vec{S} = \dfrac{1}{c}|\vec{P}|\,c\,\vec{e}_u\,.d\vec{S}\,dt$

où $\vec{e}_u$ est le vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde plane et

$d\tau = c\,dt\,dS = c\vec{e}_u\,dt\,dS\,\vec{e}_u = c\vec{e}_u\,dt.\,d\vec{S}$.

$$dW_{em} = = |\vec{P}|\,\vec{e}_u\,.d\vec{S}\,dt = \vec{P}.\,d\vec{S}\ dt \Rightarrow \frac{dW_{em}}{dt} = \vec{P}\,.\,d\vec{S}$$

Le terme ($\vec{P}\cdot d\vec{S}$) est l'énergie électromagnétique transportée à travers dS par unité de temps.

Finalement : la puissance électromagnétique transportée à travers la surface S :

$$p = \iint_S \vec{P}\,.\,d\vec{S}$$

Boustani