

Exercice 21) Champ d'induction magnétique créé par une spire circulaire

Considérons une spire circulaire, de centre O, de rayon R, parcourue par un courant constant d'intensité I. La spire est placée dans le plan xoy.

a) - Le plan xOy de la spire est un plan de symétrie de la distribution de courant ($\forall M$ appartenant au plan de la spire le champ d'induction magnétique créé au point M par la spire parcourue par le courant d'intensité I est orthogonal à ce plan « plan miroir » donc porté par l'axe Oz)

- Tout plan passant par l'axe Oz de la spire est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant (Le champ d'induction magnétique créé par la distribution de courant en un point M de son axe Oz appartient à tous ces plans d'antisymétrie donc il est porté par l'axe Oz intersection de tous ces plans d'antisymétrie (figure 1))

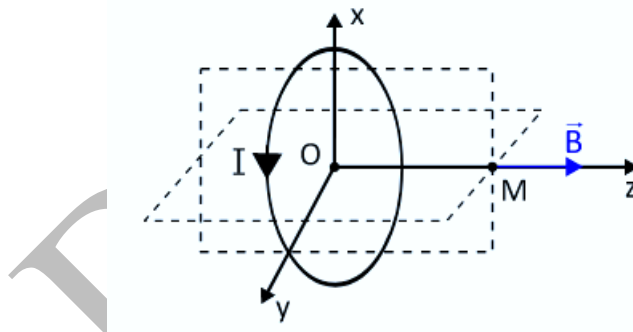


Figure 1-Champ créé par une spire parcourue par un courant en un point M de son axe Oz

b) Le champ d'induction magnétique créé par la spire en son centre O :

D'après loi de Biot et Savart :un élément de longueur dl de la spire (figure 2), centré en un point P et orienté dans le sens du courant crée, au point O :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PO}}{PO^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (-R \vec{e}_\rho)}{R^3}$$

Le champ total s'obtient en intégrant sur φ de 0 à 2π : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$

c) Déterminons le champ d'induction magnétique \vec{B} créé par la distribution de courant en un point M de son axe OZ.

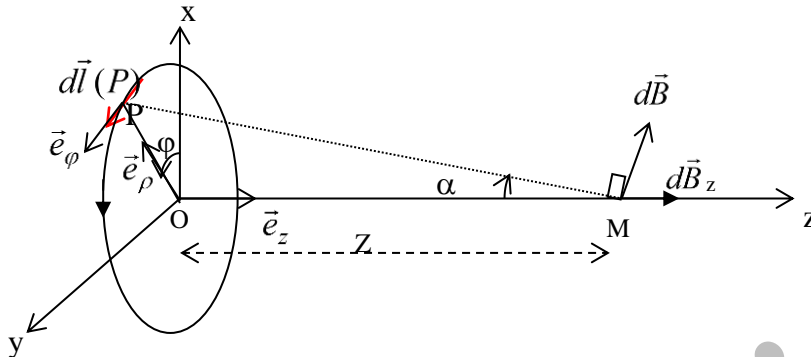


Figure 2

D'après loi de Biot et Savart : un élément de longueur dl de la spire (figure 2), centré en un point P et orienté dans le sens du courant, crée en un point M de l'axe OZ un champ d'induction magnétique élémentaire:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire en M : $\vec{B}(M) = \int_{spire} d\vec{B}$.

Méthode 1 :

* On utilise un repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$.

* Etude de symétrie : tout plan contenant l'axe Oz de la spire est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant : le champ résultant $\vec{B}(M)$, créé au point M par la distribution de courant, est porté par l'axe Oz, intersection de tous ces plan d'antisymétrie ; $\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{e}_z$

Projetons, alors, $d\vec{B}(M)$ suivant l'axe OZ :

$$dB_z = d\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{dl \vec{e}_\phi \wedge (-R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z)}{PM^3} \right] \cdot \vec{e}_z$$

On pose $PM = \sqrt{(R^2 + z^2)}$ et on a $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} R dl$; et on intègre sur

toute la spire :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} R \int_{spire} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On introduit l'angle α tel que $\sin(\alpha) = \frac{R}{PM} \Rightarrow PM = \frac{R}{\sin(\alpha)}$

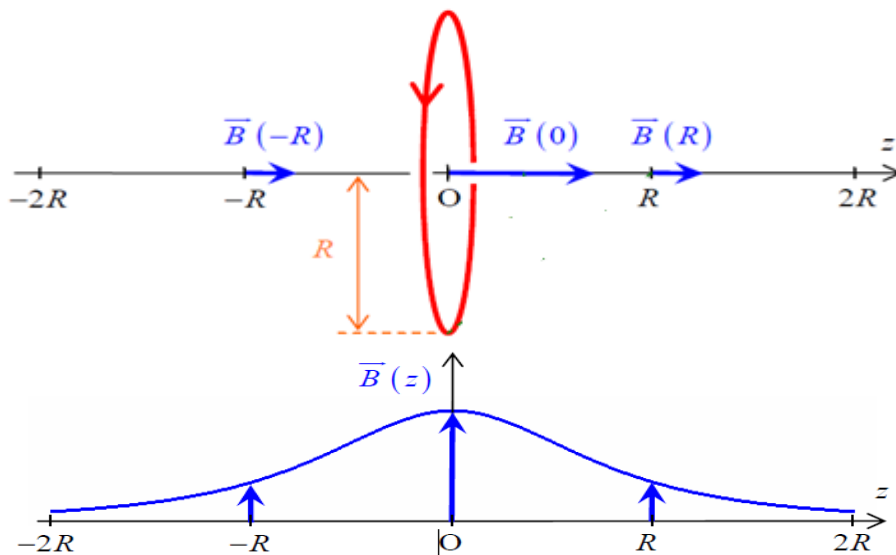
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

Méthode 2 :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{d\vec{l} \times (-R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)}{PM^3} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{R dl \vec{e}_z + z dl \vec{e}_\rho}{PM^3} \right] = \frac{R^2 d\varphi \vec{e}_z + z R d\varphi \vec{e}_\rho}{PM^3}$$

$$\vec{B}(M) = \int_{\text{spire}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

Remarque : on retrouve l'expression du champ d'induction magnétique créé par la spire en son centre O : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$



2) La bobine plate : sa longueur est négligeable devant son rayon ($l \ll R$)

Une bobine plate, de centre O et de rayon R , constituée par N spires circulaires jointives parcourue chacune par un courant constant d'intensité I , crée en un point M de son axe Oz un champ d'induction magnétique $\vec{B}_{bp}(M)$:

$$\vec{B}_{bp}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z = N \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

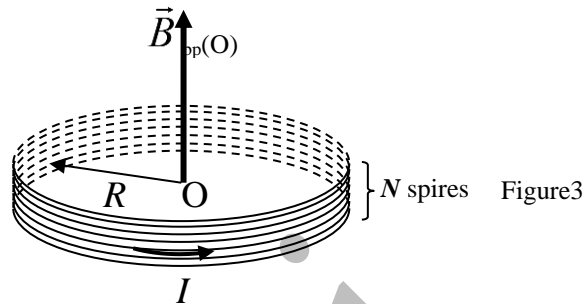
$$\vec{B}_{bp}(M) = N \vec{B}_{\text{spire}}(M)$$

La bobine plate est assimilée à une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité égale à NI.

Le champ d'induction magnétique créé par la bobine plate au point O (figure 3) :

$$\vec{B}_{bp}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{bp}(O) = N \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z = N \vec{B}_{1spire}(O)$$



3) Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique de longueur finie

Un solénoïde cylindrique est constitué par un ou plusieurs enroulements de fil conducteur sur une surface cylindrique.

En général, le solénoïde est équivalent à un ensemble de N spires coaxiales, circulaires (carrées ou rectangulaires) perpendiculaires à l'axe du solénoïde.

a) Solénoïde de longueur finie

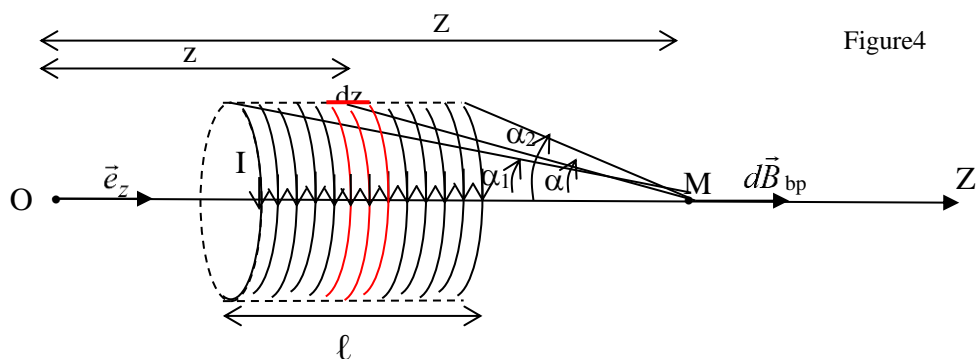
Considérons un solénoïde de rayon R, de longueur ℓ et d'axe Oz, portant n spires jointives par unité de longueur. Ces spires circulaires sont parcourues par un même courant constant d'intensité I.

Déterminons le champ créé par le solénoïde en un point M de son axe Oz.

Solution :

Soit M un point de l'axe Oz, placé à l'extérieur du solénoïde : OM = Z

$$n = \frac{N}{\ell}$$



On considère une tranche (équivalente à une bobine plate) du solénoïde de longueur dz de côte z (voir figure 4) et qui contient dN spires tel que

$$dN = \frac{N}{\ell} dz \quad (n = \frac{N}{\ell} = \frac{dN}{dz}) \quad (\text{les spires étant jointives})$$

La tranche est assimilée à une spire parcourue par un courant égal à $(\frac{N}{\ell} dz = ndz)I$

Le champ d'induction magnétique élémentaire créé au point M de l'axe Oz par la tranche considérée:

$$d\vec{B}(M) = (n dz \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)) \vec{e}_z$$

Tous les champs $d\vec{B}(M)$ sont colinéaires et de même sens. Le champ résultant $\vec{B}(M)$ créé au point M de l'axe Oz par le solénoïde est porté par l'axe OZ (l'axe Oz est l'intersection de tous les plans d'antisymétrie de la distribution de courant) et son module s'écrit:

$$B(M) = \int_{\text{solénoïde}} dB = \frac{\mu_0 I}{2R} n \int_{\text{solén}} (\sin^3 \alpha) dz$$

On pose $\text{tg}(\alpha) = \frac{R}{Z-z} \Rightarrow dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ (voir figure4)

En intégrant entre les valeurs extrêmes α_1 et α_2 de l'angle α , on obtient le module du champ résultant créé par le solénoïde en un point M de son axe:

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\sin^3 \alpha) \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2))$$

soit $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) \vec{e}_z$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi \Rightarrow \cos(\alpha_1) > \cos(\alpha_2)$$

Remarques :

1- Pour un point M placé, sur l'axe Oz, à l'intérieur du solénoïde de longueur finie (figure5), le champ aura la même expression que pour un point extérieur au

solénoïde : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) \vec{e}_z$

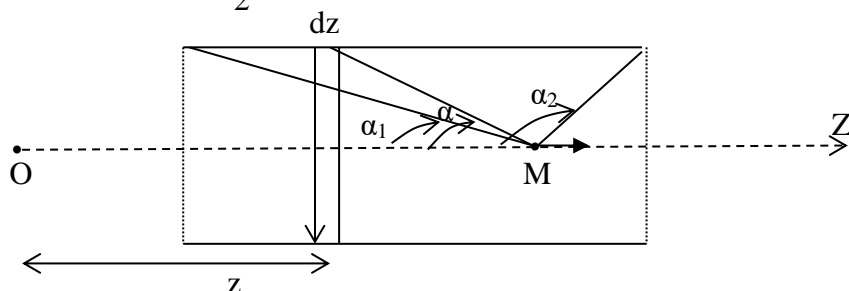


Figure5

2- Pour un point M placé, sur l'axe Oz, au milieu du solénoïde de longueur finie on aura $\cos(\alpha_1) = -\cos(\alpha_2) = \cos(\alpha_0)$, et le champ aura pour expression :

$$\vec{B}(M) = 2 \frac{\mu_0 n I}{2} \cos(\alpha_0) \vec{e}_z$$

b) Solénoïde cylindrique de longueur indéfinie

Pour un solénoïde cylindrique infiniment long ($\ell \gg R$) parcouru par un courant constant d'intensité I, la méthode pour déterminer l'expression du champ magnétostatique créé par le solénoïde en un point de son axe est la même que pour le cas d'un solénoïde de longueur finie, il suffit de tendre α_1 vers 0 et α_2 vers π

Ce qui donne : **$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$** résultat très important en magnétostatique

Le champ \vec{B} sur l'axe est uniforme et ne dépend que du nombre de spires par unité de longueur $n = \frac{N}{L}$ et de l'intensité I du courant.

N est le nombre total de spires pour une longueur ℓ du solénoïde.

