Youssef AYACHI

TP1 : Débruitage d'image.

I Formulation du problème de débruitage.

① Montrer que résoudre (1) revient à calculer un opérateur proximal :

$$\hat{x} \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + f(Lx) \quad (1).$$

par définition : $$\operatorname{prox}_F(u) = \underset{v \in \mathcal{U}}{\operatorname{argmin}} F(v) + \frac{1}{2}\|v - u\|^2 .$$

avec F fonction définie sur $\mathcal{U}$
et $\mathcal{U}$ désigne l'espace de Hilbert de dimension finie $\mathbb{R}^n$.

Alors,

$$\underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 + f(Lx) = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 + f \circ L(x)$$
$$= \operatorname{prox}_{f \circ L}(x).$$

② Montrer que le calcul de cet opérateur est équivalent au calcul de $L^{-1} \operatorname{prox}_f (Ly)$. $\Leftrightarrow$ montrer que $\operatorname{prox}_{f \circ L}(x) = L^{-1} \operatorname{prox}_f (Lx)$.

on sait que $\forall x$, $x - \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) \in \partial f \circ L(x)$.

soit $h = f \circ L$

$\rightarrow h(x) = f \circ L(x) \Rightarrow h(x) = f(Lx)$.

$\rightarrow$ on a : $x - \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) \in \partial h(x)$.

et $\partial h(x) = A^t \partial f(Ax + b)$ (cours)

$\Bigg\} \Rightarrow x - \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) \in L^t \partial f(Lx)$

si L est ~~[illegible]~~ une transformation orthogonale $\Leftrightarrow L^t = L^{-1}$

$$\Longrightarrow L\left(x - \operatorname{prox}_{f \circ L}(x)\right) \in \partial f(Lx).$$

$$\Longleftrightarrow Lx - L \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) \in \partial f(Lx).$$

$$\Longleftrightarrow L \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) = \operatorname{prox}_{f}(Lx)$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{prox}_{f \circ L}(x) = L^{-1} \operatorname{prox}_{f}(Lx).$$