Les Moyennes Mobiles

Définition : Transformation de la série X_t sous forme d'une combinaison linéaire des valeurs de X_t

$$M_{m1+m2+1}X_t = \sum_{i=-m1}^{m2} \theta_i X_{t+i} = \theta_{-m1}X_{t-m1} + ... + \theta_0 X_t + ... + \theta_{m2}X_{t+m2}$$

$\theta_{-m1},\ldots,\theta_{m2}$ sont des réels, m1, m2 ∈ N, m1+m2+1 est appelé ordre de la moyenne mobile.

Rque : l'ordre représente le nbre de termes présents dans le calcul de la moyenne mobile.

La moyenne mobile ne peut être calculée que lorsque :

$m1 + 1 \leq t \leq T - m2$ (Perte de données)

Une moyenne mobile est centrée si m1 = m2 = m

Une moyenne mobile centrée est symétrique si $\theta_{-i} = \theta_i$, i = 1,…,m

Si la somme des coefficients d'une moyenne mobile, est égale à 1, alors celle-ci est une moyenne pondérée des valeurs de la série.

Lorsque l'ordre de la moyenne mobile est impair, alors celle-ci est calculée aux mêmes instants que la série chronologique :

$$M_{2m+1}X_t = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i X_{t+i} = \theta_{-m} X_{t-m} + \ldots + \theta_0 X_t + \ldots + \theta_m X_{t+m}$$

Si l'ordre de la moyenne mobile est pair, celle-ci est calculée entre les dates d'observations de la série.

Conservation d'une constante $\sum_{i=-p}^{f}\theta_i a = a \text{ si } \sum_{i=-p}^{f}\theta_i = 1$

Conservation d'un polynôme de degré 1 : $\sum_{i=-p}^{f}\theta_i (t+i) = t\sum_{i=-p}^{f}\theta_i + \sum_{i=-p}^{f} i\theta_i$

Conservation d'un polynôme de degré 2 :

$$\sum_{i=-p}^{f}\theta_i (t+i)^2 = t^2\sum_{i=-p}^{f}\theta_i + 2t\sum_{i=-p}^{f} i\theta_i + \sum_{i=-p}^{f} i^2\theta_i$$

Conservation d'un polynôme de degré n : $(t+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k} i^k$

$$\sum_{i=-p}^{f}\theta_i (t+i)^n = \sum_{i=-p}^{f}\theta_i \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k} i^k = t^n\sum_{i=-p}^{f}\theta_i + \sum_{k=1}^{n} C_n^k t^{n-k}\sum_{i=-p}^{f} i^k\theta_i$$

Une condition nécessaire pour qu'une moyenne mobile conserve un polynôme de degré n :

$$\sum_{i=-p}^{f} \theta_i = 1 \text{ et } \sum_{i=-p}^{f} i^k \theta_i = 0, \quad \mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

Les séries éliminées par les moyennes mobiles : $\sum_{i=-p}^{f} \theta_i X_{t+i} = 0$

Cherchons $X_t = \lambda^t$ donc $\theta_{-p}\lambda^{t-p} + \ldots + \theta_f\lambda^{t+f} = 0 \quad \leftarrow \lambda^{p-t}$

$$\theta_{-p} + \ldots + \theta_0\lambda^p + \ldots + \theta_f\lambda^{p+f} = 0$$

Si l'équation admet m racines d'ordres de multiplicité $m_1, \ldots, m_m$, alors l'ensemble des solutions est :

$$\lambda_1^t\left(a_{11} + ta_{12} + \ldots + t^{m_1-1}a_{1m_1}\right) + \ldots + \lambda_m^t\left(a_{m1} + ta_{m2} + \ldots + t^{m_m-1}a_{mm_m}\right)$$

Cas des moyennes mobiles d'ordre impair 2m+1 $\frac{1}{2m+1}[1 \ldots 1], \sum_{i=-m}^{m} \frac{X_{t+i}}{2m+1}$

Cherchons les série éliminées par cette moyenne mobile :

$$\frac{1}{2m+1}\left[1+\lambda+\ldots+\lambda^{2m}\right]=\frac{1-\lambda^{2m+1}}{(2m+1)(1-\lambda)}$$

Les racines de cette équation sont les 2m racines (2m+1)ème de l'unité ≠ 1 :

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi j}{2m+1}},\ \mathrm{j}=1,\ldots,2\mathrm{m}$$

Si λ_{j} est solution, alors $\overline{\lambda}_{\mathrm{j}}$ est également solution

L'ensemble des solutions est : $\sum_{j=1}^{m} a_j \cos\left(\frac{2\pi jt}{2m+1}\right)+b_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{2m+1}\right)$

Ce sont les fonctions périodiques de période 2m+1

Cas des moyennes mobiles centrées $$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}1\ldots1\frac{1}{2}\right]$$

C'est la moyenne de deux moyennes mobiles successifs d'ordre 2m

Cette moyenne mobile est calculée aux mêmes instants que ceux de la série chronologique et son ordre est 2m+1

$$\frac{1}{2m}\frac{1}{2}\left[1+2\lambda+\ldots+2\lambda^{2m-1}+\lambda^{2m}\right]=\frac{1}{2m}\frac{1}{2}(1+\lambda)\left(1+\ldots+\lambda^{2m-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2m}\frac{1}{2}(1+\lambda)\left(\frac{1-\lambda^{2m}}{1-\lambda}\right)$$

On remarque que -1 est une racine d'ordre de multiplicité 2

$$\lambda_j=e^{i\frac{2\pi j}{2m}},\ \ \mathrm{j}=1,\ldots,2\mathrm{m}-1,\ \mathrm{j}\neq\mathrm{m}$$

La moyenne mobile centrée d'ordre 2m+1 : $\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}1\ldots1\frac{1}{2}\right]$, élimine les séries périodiques de période 2m et la série $(-1)^t(at+b)$

L’application d’une moyenne mobile à une série permet de réduire la variance de celle-ci : la série obtenue est plus lisse

Considérons le cas d’une suite de variables aléatoires iid :

$$Y_t = \sum_{i=-m1}^{m2} \theta_i X_{t+i}$$

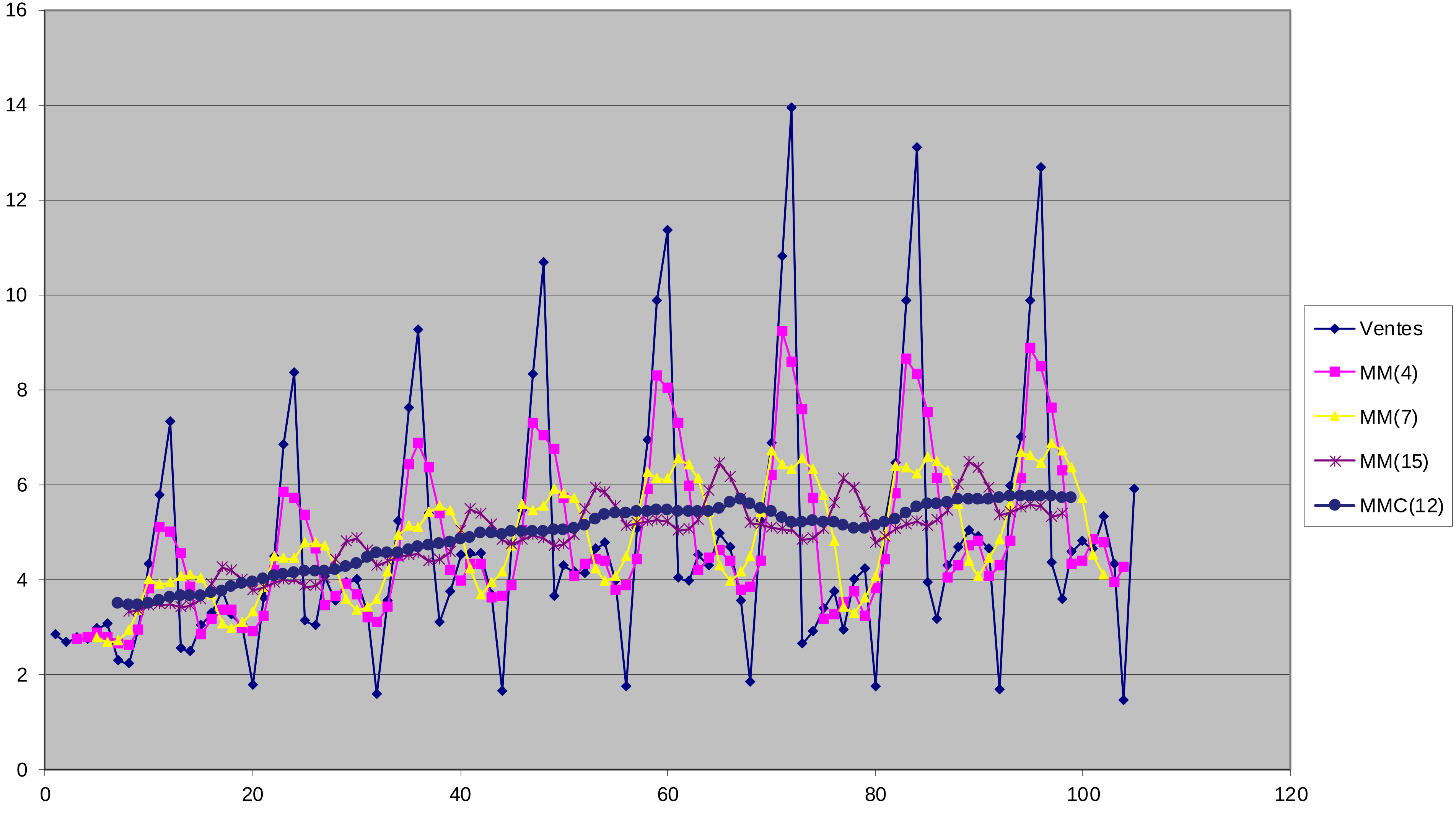
$$V(Y) = V(X) \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i^2$$

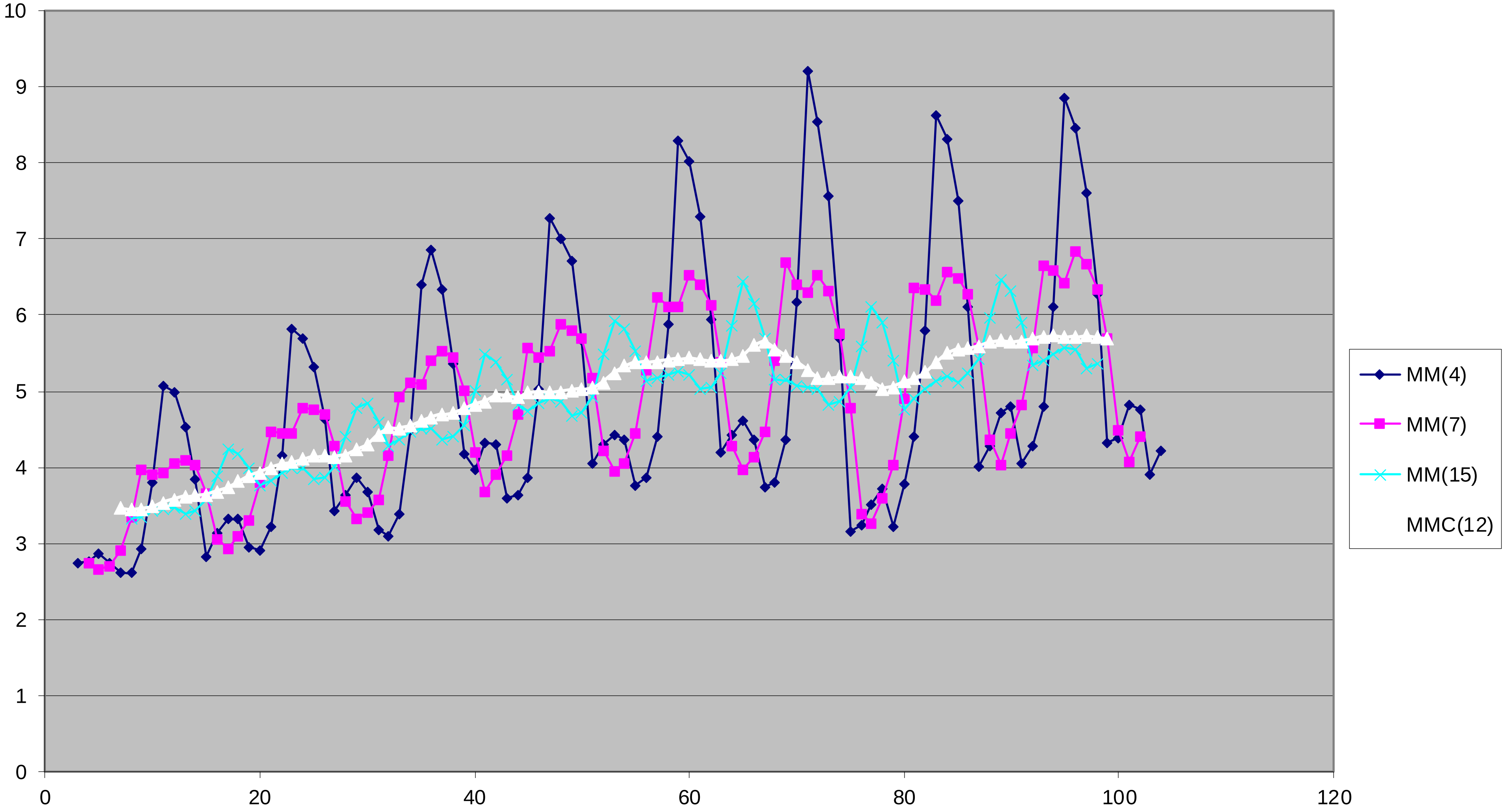
V(Y) < V(X) si $\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i^2 < 1$, cette condition est vérifiée si $\sum \theta_i = 1$ avec $\theta_i > 0$

iid : indépendantes et identiquement distribuées

Ventes mensuelles de champagne

(million de bouteilles, jan-62, sep-70)





La courbe MM(7) est plus lisse que MM(4)

La courbe MMC(12) est la plus lisse

La courbe MM(15) présente des crêtes et n’est pas plus lisse que MMC(12)

A retenir

La moyenne mobile d'ordre 2m+1 : $\frac{1}{2m+1}\left[1 \ldots 1\right]$ **élimine les fonctions périodiques de période 2m+1**

La moyenne mobile centrée d'ordre 2m+1: $\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}1 \ldots 1\frac{1}{2}\right]$ **élimine les fonctions périodiques de période 2m**

Calculer les Moyennes Mobiles suivantes pour la série Ventes de Champagne : MM3, MM7, MMC12, MM15

Tracer dans le même graphique la série temporelle, MM3, MM7, MMC12 et MM15

Tracer dans le même graphique, MM3, MM7, MMC12 et MM15

$$MMC12 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}1 \ldots 1\frac{1}{2}\right]$$