Institut Supérieur d'informatique et de Multimédia de Gabes — A.U :2022/2023
Section LSIM1

# ***Série*** $N^o2$
## ***Analyse***

**Exercice 1**

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}.$$

**Exercice 2**

Soit $a$ et $b$ deux nombre réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\ si\ \ x\leq 0\\ \frac{1}{1+x}\ si\ x>0\end{cases}$$

Donner une condition sur $b$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3**

Les fonction suivantes sont-elles prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ ?
a) $f(x)=sin(x)sin(\frac{1}{x})$.
b) $h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$.

**Exercice 4**

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=0$ et$f(1)=1$.
On suppose $f$ dérivable en 0 et en 1 et que $f^{'}(0)=f^{'}(1)=0$.
Montrer qu'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

On pourra utiliser la fonction $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\begin{cases}-1\ si\ \ x=0\\ \frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)-1}{x-1}\ si\ x\in]0,1[\\ 1\ si\ x=1\end{cases}$$

En déduire que $f(\alpha)=\alpha$.

**Exercice 5**

1. Montrer que pour tout $x,\ y$ réels on a :

$$|sin(x)-sin(y)|\leq|x-y|$$

2. Montrer que pour tout $x>0$

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$