

Agda による 依存型プログラミング入門

叢 悠悠 (東京科学大学)

PPL サマースクール 2025

自己紹介

- 名前：叢 悠悠（そう ゆうゆう）
- 経歴：お茶大 PhD → 東工大 / Science Tokyo 助教
- 興味：継続、型、自然言語、音楽

本講演のねらいと流れ

依存型の嬉しさ・面白さを体感しよう

- 依存型と Agda の基本
- 簡単な依存型プログラミング
- 音楽への応用

資料置き場

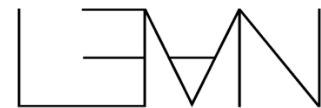


依存型とは

- 項に依存する型
 - 例：Vec Int 3 は3つの整数を含むリストの型
- 多くの定理証明支援系が提供

 Agda

 Idris

 LEMN

 ROCCQ

依存型の嬉しさ：正当性・安全性の保証

- 失敗しないリストの参照

$[a, b, c].4$ ❌

- 整列されたリストを返す並べ替え

$[2, 3, 1] \longrightarrow [1, 2, 3]$

性質保証の仕組み：カリー・ハワード対応

論理

命題 $A \rightarrow A$

証明 $\frac{[A]_1}{A \rightarrow A} \rightarrow I_1$

プログラミング

型 $A \rightarrow A$

項 $\text{id} : A \rightarrow A$
 $\text{id } x = x$

性質を保証するためのアプローチ

- Extrinsic なアプローチ：プログラムと証明が分離

`sort : List A → List A`

`sort-correct : (l : List A) → Sorted (sort l)`

- Intrinsic なアプローチ：プログラムと証明が一体化

`sort : List A → SortedList A`

本
講
演

Agda プログラムの構成要素

```
module Double where
```

```
Double.agda
```

```
open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
```

```
double : ℕ → ℕ
```

```
double zero      = zero
```

```
double (suc n) = suc (suc (double n))
```


Agda プログラムの構成要素

module Double where モジュール宣言 Double.agda

open import Data.Nat using (N; zero; suc)

double : N → N

double zero = zero

double (suc n) = suc (suc (double n))

Agda プログラムの構成要素

<code>module <u>Double</u> where</code>	モジュール名・ ファイル名は同一	<code><u>Double</u>.agda</code>
---	---------------------	---------------------------------

```
open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
```

$$\text{double} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

```
double zero = zero
```

$$\text{double } (\text{suc } n) = \text{suc } (\text{suc } (\text{double } n))$$

Agda プログラムの構成要素

```
module Double where
```

Double.agda

モジュール読み込み

```
open import Data.Nat using (N; zero; suc)
```

```
double : N → N
```

```
double zero      = zero
```

```
double (suc n) = suc (suc (
```

標準ライブラリ

```
data N : Set where
```

```
  zero : N
```

```
  suc  : N → N
```

Agda プログラムの構成要素

```
module Double where
```

```
Double.agda
```

```
open import Data.Nat using (N; zero; suc)
```

```
double : N → N           型定義, 関数定義, etc.  
double zero               = zero  
double (suc n) = suc (suc (double n))
```

Agda の型定義

型の名前 型の型

↓ ↓

```
data N : Set where
```

zero : \mathbb{N}

suc : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ } コンストラクタ

Agda の関数定義

関数名

入出力型



`double : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$`

`double zero = zero`

`double (suc n) = suc (suc (double n))`

} 本体

Unicode の入力

シンボル	VS Code	Emacs
\mathbb{N}	<code>]bN</code>	<code>\bN</code>
λ	<code>]G1</code>	<code>\G1</code>
\forall	<code>]a11</code>	<code>\a11</code>
\rightarrow	<code>]r-</code>	<code>\r-</code>
x_1	<code>x]_1</code>	<code>x_1</code>

キーバインディング

キー	操作
C-c C-l	読み込み
C-c C-n	正規化 (評価)
C-c C-,	ゴール・環境の確認
C-c C-c	場合分け
C-c C-r	穴埋め

* C = control キー

プログラムの読み込み (C-c C-l)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero      = zero
7  double (suc n) = suc (suc (double n))
8
```

プログラムの読み込み (C-c C-l)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero      = zero
7  double (suc n) = suc (suc (double n))
8
```

≡ Agda ×

...

All Done

AGDA v2.6.4.1

プログラムの正規化 (C-c C-n)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero      = zero
7  double (suc n) = suc (suc (double n))
8
```

≡ Agda



Compute normal form (DefaultCompute)

AGDA v2.6.4.1

expression to normalize:

プログラムの正規化 (C-c C-n)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero      = zero
7  double (suc n) = suc (suc (double n))
8
```

≡ Agda



Compute normal form (DefaultCompute)

AGDA v2.6.4.1

double 3

プログラムの正規化 (C-c C-n)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero      = zero
7  double (suc n) = suc (suc (double n))
8
```

≡ Agda ×

...

Normal form

AGDA v2.6.4.1

6

穴の記述 (?)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = ?
7
```

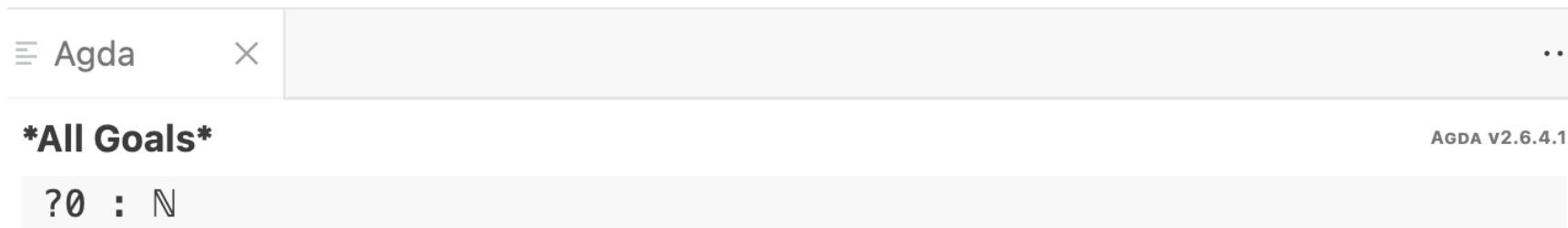
≡ Agda × ...

Normal form AGDA v2.6.4.1

6

穴の記述 (?)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = {! 0!}
7
```



ゴールと環境の確認 (C-c C-,)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = {! | 0!}
7
```

≡ Agda × ...

All Goals AGDA v2.6.4.1

?0 : ℕ

ゴールと環境の確認 (C-c C-,)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = {! | 0!}
7
```

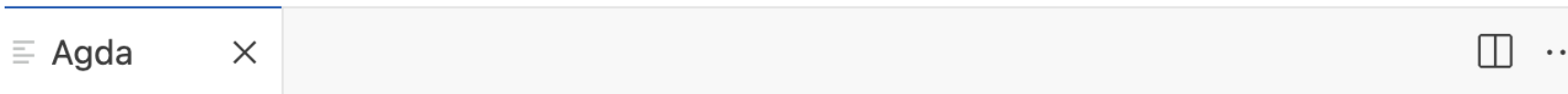
≡ Agda × ...

Goal and Context AGDA v2.6.4.1

ℕ	GOAL
n : ℕ	

場合分け (C-c C-c)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = {! 0!}
7
```



Case

AGDA v2.6.4.1

Please specify which variable(s) you wish to split, multiple variables are delimited by whitespaces

variable(s) to case split:

場合分け (C-c C-c)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double n = {! 0!}
7
```

≡ Agda × ☐ ...

Case AGDA v2.6.4.1

Please specify which variable(s) you wish to split, multiple variables are delimited by whitespaces

n

場合分け (C-c C-c)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero = {! 0!}
7  double (suc n) = {! 1!}
8
```

≡ Agda × ...

All Goals AGDA v2.6.4.1

?0 : ℕ

?1 : ℕ

穴埋め (C-c C-r)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero = {! zero 0!}
7  double (suc n) = {! 1!}
8
```

≡ Agda × ...

All Goals AGDA v2.6.4.1

?0 : ℕ

?1 : ℕ

穴埋め (C-c C-r)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero = zero
7  double (suc n) = {! 1!}
8
```

≡ Agda ×

...

All Goals

AGDA v2.6.4.1

?1 : ℕ

穴埋め (C-c C-r)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero = zero
7  double (suc n) = {! x 1!}
8
```

≡ Agda ×

...

All Goals

AGDA v2.6.4.1

?1 : ℕ

穴埋め (C-c C-r)

```
1  module Double where
2
3  open import Data.Nat using (ℕ; zero; suc)
4
5  double : ℕ → ℕ
6  double zero = zero
7  double (suc n) = {! x 1!}
8
```

≡ Agda

×

...

Error

AGDA v2.6.4.1

```
/Users/youyoucong/pplss-2025/Double.agda:7,20-21
Not in scope:
  x at
/Users/youyoucong/pplss-2025/Double.agda:7,20-21
when scope checking x
```

ERROR

依存型プログラミング 入門編：

リスト操作の性質を保証しよう

通常のリスト

標準ライブラリ

```
data List (A : Set) : Set where  
  []      : List A  
  _::__   : A → List A → List A
```

通常のリスト

標準ライブラリ

```
data List (A : Set) : Set where
  [] : List A
  _::_ : A → List A → List A
```

要素の型
(パラメータ)

通常のリスト

標準ライブラリ

```
data List (A : Set) : Set where
```

```
  [] : List A
```

```
  _∷_ : A → List A → List A
```

1文字 (`[]` :: or `\::` ::)

通常のリスト

標準ライブラリ

```
data List (A : Set) : Set where
```

```
  [] : List A
```

```
  _::__ : A → List A → List A
```

引数の位置

長さの情報を持つリスト

標準ライブラリ

```
data Vec (A : Set) : ℕ → Set where
```

```
  [] : Vec A zero
```

```
  _::_ : {n : ℕ} → A → Vec A n → Vec A (suc n)
```

長さの情報を持つリスト

標準ライブラリ

```
data Vec (A : Set) : N → Set where   リストの長さ  
    []      : Vec A zero              (インデックス)  
    _∷_     : {n : N} → A → Vec A n → Vec A (suc n)
```

長さの情報を持つリスト

標準ライブラリ

data Vec (A : Set) : \mathbb{N} \rightarrow Set where

[] : Vec A zero 空リストの長さは 0

:: : {n : \mathbb{N} } \rightarrow A \rightarrow Vec A n \rightarrow Vec A (suc n)

長さの情報を持つリスト

標準ライブラリ

```
data Vec (A : Set) :  $\mathbb{N}$   $\rightarrow$  Set where
```

```
  [] : Vec A zero
```

```
  _::_ : {n :  $\mathbb{N}$ }  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  Vec A n  $\rightarrow$  Vec A (suc n)
```

暗黙の引数 (Agda が推論)

長さの情報を持つリスト

標準ライブラリ

```
data Vec (A : Set) : ℕ → Set where
```

```
  [] : Vec A zero
```

```
  _::_ : {n : ℕ} → A → Vec A n → Vec A (suc n)
```

長さ n のリストに要素を1つ追加した結果は長さ $\text{suc } n$

List 上の append 関数

$\text{appendL} : \text{List } A \rightarrow \text{List } A \rightarrow \text{List } A$

$\text{appendL } [] \quad l = l$

$\text{appendL } (x :: xs) \quad l = x :: \text{appendL } xs \quad l$

Vec 上の append 関数

$\text{appendV} : \text{Vec } A \ m \rightarrow \text{Vec } A \ n \rightarrow \text{Vec } A \ (m + n)$

$\text{appendV} [] \quad l = l$

$\text{appendV} (x :: xs) \ l = x :: \text{appendV} \ xs \ l$

Vec 上の append 関数

$\text{appendV} : \text{Vec } A \ \underline{m} \rightarrow \text{Vec } A \ \underline{n} \rightarrow \text{Vec } A \ (\underline{m + n})$

$\text{appendV } [] \quad 1 = 1$

$\text{appendV } (x :: xs) \ 1 = x :: \text{appendV } xs \ 1$

型から得られる保証：

appendV の結果の要素数は入力リストの要素数の和

演習問題 1

$A \rightarrow B$ 型の関数 f と $\text{Vec } A \ n$ 型のリスト l を受け取り、 l の各要素に f を適用する関数 mapV 関数を定義せよ。
この関数の型はどのような性質を保証するだろうか。

参考：List 上の map 関数

$\text{mapL} : (A \rightarrow B) \rightarrow \text{List } A \rightarrow \text{List } B$

$\text{mapL } f [] = []$

$\text{mapL } f (x :: xs) = f x :: \text{mapL } f xs$

演習問題 1 の解答

$\text{mapV} : (A \rightarrow B) \rightarrow \text{Vec } A \text{ } \underline{n} \rightarrow \text{Vec } B \text{ } \underline{n}$

$\text{mapV } f \ [] = []$

$\text{mapV } f (x :: xs) = f x :: \text{mapV } f xs$

型から得られる保証： mapV は要素の数を保存

List 上の head 関数

$\text{headL} : \text{List } A \rightarrow A$

$\text{headL } [] = ?$

List 上の head 関数

$\text{headL} : \text{List } A \rightarrow A$

$\text{headL } [] = ?$

$\text{headL } (x :: xs) = ?$

List 上の head 関数

$\text{headL} : \text{List } A \rightarrow A$

$\text{headL } [] = ?$

$\text{headL } (x :: xs) = x$

List 上の head 関数

`headL : List A → A`

`headL (x :: xs) = x`

← 実行不可能

Incomplete pattern matching for headL.

Missing cases:

`headL []`

when checking the definition of headL

List 上の head 関数

`headL : List A → Maybe A`

`headL [] = nothing`

`headL (x :: xs) = just x`

Vec 上の head 関数

$\text{headV} : \text{Vec } A \ (\text{suc } n) \rightarrow A$

$\text{headV } 1 = ?$

Vec 上の head 関数

$\text{headV} : \text{Vec } A \ (\underline{\text{suc } n}) \rightarrow A$

$\text{headV } 1 = ?$

長さが $\text{suc } n \Rightarrow$ 空でない
(cf. $[] : \text{Vec } A \ \text{zero}$)

Vec 上の head 関数

$\text{headV} : \text{Vec } A \ (\text{suc } n) \rightarrow A$

$\text{headV } (x :: xs) = ?$

Vec 上の head 関数

$\text{headV} : \text{Vec } A \ (\text{suc } n) \rightarrow A$

$\text{headV } (x :: xs) = x$

Vec 上の head 関数

$\text{headV} : \text{Vec } A \ (\text{suc } n) \rightarrow A$

$\text{headV } [] = ?$

$\text{headV } (x :: xs) = x$

The case for the constructor $[]$ is impossible because unification ended with a conflicting equation

$$\text{zero} \stackrel{?}{=} \text{suc } n$$

List 上の lookup 関数

$\text{lookupL} : \text{List } A \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow A$

$\text{lookupL } [] \quad n \quad = ?$

$\text{lookupL } (x :: xs) \text{ zero} \quad = x$

$\text{lookupL } (x :: xs) (\text{suc } n) = \text{lookupL } xs \ n$

List 上の lookup 関数

$\text{lookupL} : \text{List } A \rightarrow \underline{\mathbb{N}} \rightarrow A$ リストの長さ未満

$\text{lookupL } [] \quad n \quad = ?$

$\text{lookupL } (x :: xs) \text{ zero} \quad = x$

$\text{lookupL } (x :: xs) (\text{suc } n) = \text{lookupL } xs \ n$

有限集合 `Fin`

`Fin n =`
`n` 未満の自然数

```
data Fin : ℕ → Set where
```

```
  zero : {n : ℕ} → Fin (suc n)
```

```
  suc   : {n : ℕ} → Fin n → Fin (suc n)
```

標準ライブラリ

`Fin 0` 型の値 :

`Fin 1` 型の値 :

`Fin 2` 型の値 :

`zero`

`zero`

`suc zero`

Vec 上の lookup 関数

$\text{lookupV} : \text{Vec } A \ n \rightarrow \text{Fin } n \rightarrow A$

$\text{lookupV } (x :: xs) \ \text{zero} = x$

$\text{lookupV } (x :: xs) \ (\text{suc } n) = \text{lookupV } xs \ n$

Vec 上の lookup 関数

$\text{lookupV} : \text{Vec } A \ n \rightarrow \text{Fin } n \rightarrow A$ リストの長さ未満

$\text{lookupV } (x :: xs) \ \text{zero} = x$

$\text{lookupV } (x :: xs) \ (\text{suc } n) = \text{lookupV } xs \ n$

List 上の lookup 関数 (別解)

$\text{lookupL2} : (l : \text{List } A) \rightarrow \text{Fin } (\text{length } l) \rightarrow A$

$\text{lookupL2 } (x :: xs) \text{ zero} = x$

$\text{lookupL2 } (x :: xs) (\text{suc } n) = \text{lookupL2 } xs \ n$

List 上の lookup 関数 (別解)

$\text{lookupL2} : (l : \text{List } A) \rightarrow \text{Fin } (\text{length } l) \rightarrow A$

$\text{lookupL2 } (x :: xs) \text{ zero} = x$ リストの長さ未満

$\text{lookupL2 } (x :: xs) (\text{suc } n) = \text{lookupL2 } xs \ n$

発展

- 行列の表現
 - 型を行数と列数の情報でインデックス
- 安全な行列演算
 - 型から得られる情報を用いて次元の不一致を検知

依存型プログラミング 初級編： 型付き言語・インタプリタを実装しよう

BoolNat 言語

- 真偽値 `true, false`
- 自然数 `0, 1, 2, ...`
- 条件文 `if e1 then e2 else e3`

BoolNat 言語の式 (型なし)

```
data Exp : Set where
```

```
  tru  : Exp
```

```
  fls  : Exp
```

```
  num  :  $\mathbb{N}$   $\rightarrow$  Exp
```

```
  ifte : Exp  $\rightarrow$  Exp  $\rightarrow$  Exp  $\rightarrow$  Exp
```

型なしの式の例

exp1 : Exp -- if true then 1 else 0

exp1 = ifte tru (num 1) (num 0)

exp2 : Exp -- if 1 then 1 else 0

exp2 = ifte (num 1) (num 1) (num 0)

exp3 : Exp -- if true then 1 else false

exp3 = ifte tru (num 1) fls

BoolNat 言語の値 (型なし)

```
data Val : Set where
```

```
  vtru  : Val
```

```
  vfls  : Val
```

```
  vnum  :  $\mathbb{N} \rightarrow$  Val
```

型なし言語のインタプリタ

`interp : Exp → Val`

`interp tru = vtru`

`interp fls = vfls`

`interp (num n) = vnum n`

`interp (ifte e1 e2 e3) with interp e1 =`

`... | vtru = interp e2`

`... | vfls = interp e3`

`... | vnum n = ?`

BoolNat 言語の型

```
data Ty : Set where  
  boolty : Ty  
  numty   : Ty
```


BoolNat 言語の式 (型付き)

```
data TExp : Ty → Set where
```

```
  tru  : TExp boolty
```

```
  fls  : TExp boolty
```

```
  num  :  $\mathbb{N}$  → TExp numty
```

```
  ifte : { $\tau$  : Ty} →
```

```
    TExp boolty → TExp  $\tau$  → TExp  $\tau$  → TExp  $\tau$ 
```

BoolNat 言語の式 (型付き)

data TExp : Ty → Set where

tru : TExp boolty

f1s : TExp boolty

num : $\mathbb{N} \rightarrow$ TExp numty

ifte : $\{\tau : \text{Ty}\} \rightarrow$

TExp boolty → TExp $\tau \rightarrow$ TExp $\tau \rightarrow$ TExp τ

tru, f1s は
真偽値型の式

BoolNat 言語の式 (型付き)

data TExp : Ty → Set where

tru : TExp boolty

fals : TExp boolty

num : $\mathbb{N} \rightarrow$ TExp numty num n は
自然数型の式

ifte : { τ : Ty} →

TExp boolty → TExp $\tau \rightarrow$ TExp $\tau \rightarrow$ TExp τ

BoolNat 言語の式 (型付き)

```
data TExp : Ty → Set where
```

```
  tru  : TExp boolty
```

```
  fls  : TExp boolty
```

```
  num  : ℕ → TExp numty
```

```
  ifte : {τ : Ty} →
```

```
        TExp boolty → TExp τ → TExp τ → TExp τ
```

条件部分は真偽値型の式

BoolNat 言語の式 (型付き)

```
data TExp : Ty → Set where
```

```
  tru  : TExp boolty
```

```
  fls  : TExp boolty
```

```
  num  :  $\mathbb{N}$  → TExp numty
```

```
  ifte : { $\tau$  : Ty} →
```

```
        TExp boolty → TExp  $\tau$  → TExp  $\tau$  → TExp  $\tau$ 
```

then 節, else 節は同じ型の式

型が付く式の例

```
texp1 : TExp numty  -- if true then 1 else 0
```

```
texp1 = ifte tru (num 1) (num 0)      ✓ 型検査通過
```

型が付かない式の例

```
texp2 : TExp numty  -- if 1 then 1 else 0
```

```
texp2 = ifte (num 1) (num 1) (num 0)  ✗ 型エラー  
          TExp numty
```

型が付かない式の例

```
texp3 : TExp numty  -- if true then 1 else false  
texp3 = ifte tru (num 1) fls                × 型エラー  
                TExp numty  TExp boolty
```


BoolNat 言語の値 (型付き)

```
data TVal : Ty → Set where  
  vtru  : TVal boolty  
  vfls  : TVal boolty  
  vnum  :  $\mathbb{N}$  → TVal numty
```

型付き言語のインタプリタ

$\text{interp2} : \text{TExp } \tau \rightarrow \text{TVa1 } \tau$

$\text{interp2 } \text{tru} = \text{vtru}$

$\text{interp2 } \text{fls} = \text{vfls}$

$\text{interp2 } (\text{num } n) = \text{vnum } n$

$\text{interp2 } (\text{ifte } e_1 \ e_2 \ e_3) \text{ with } \text{interp2 } e_1 =$

$\dots \mid \text{vtru} = \text{interp2 } e_2$

$\dots \mid \text{vfls} = \text{interp2 } e_3$

型付き言語のインタプリタ

$\text{interp2} : \text{TExp } \underline{\tau} \rightarrow \text{TVa1 } \underline{\tau}$ 型から得られる保証：
 $\text{interp2 } \text{tru} = \text{vtru}$ interp2 は型を保存
 $\text{interp2 } \text{fls} = \text{vfls}$
 $\text{interp2 } (\text{num } n) = \text{vnum } n$
 $\text{interp2 } (\text{ifte } e_1 \ e_2 \ e_3) \text{ with } \text{interp2 } e_1 =$
 $\dots \mid \text{vtru} = \text{interp2 } e_2$
 $\dots \mid \text{vfls} = \text{interp2 } e_3$

型付き言語のインタプリタ

`interp2 : TExp τ \rightarrow TVal τ`

`interp2 tru = vtru`

`interp2 fls = vfls`

`interp2 (num n) = vnum n`

`interp2 (ifte e_1 e_2 e_3) with interp2 e_1 =`

`... | vtru = interp2 e_2 vnum n のケースなし`

`... | vfls = interp2 e_3 (interp2 e_1 : TVal boolty)`

型の解釈

`interpTy : Ty → Set`

`interpTy boolty = Bool`

`interpTy numty = \mathbb{N}`

プリミティブの値を返すインタプリタ

`interp3 : TExp τ \rightarrow interpTy τ`

`interp3 tru = true`

`interp3 fls = false`

`interp3 (num n) = n`

`interp3 (ifte e_1 e_2 e_3) with interp3 e_1`

`... | true = interp3 e_2`

`... | false = interp3 e_3`

演習問題 2

TExp を $is0\ e$ という形の式で拡張し、interp2 と interp3 をそれに合わせて拡張せよ。ただし、 $is0$ は引数が 0 と等しいかどうかを返す演算子である。

演習問題 2 の解答

data TExp : Ty → Set where

⋮

is0 : TExp numty → TExp boolty

演習問題 2 の解答

`interp2 : TExp τ \rightarrow TVal τ`

`⋮`

`interp2 (is0 e) with interp2 e`

`... | vnum zero = vtru`

`... | vnum (suc n) = vfls`

演習問題 2 の解答

`interp3 : TExp τ \rightarrow interpTy τ`

`⋮`

`interp3 (is0 e) with interp3 e`

`... | zero = true`

`... | suc n = false`

発展

- 単純型付きラムダ計算
 - 式の型を型環境でインデックス
- 依存型付きラムダ計算
 - 型規則と型の同値性規則を同時に定義
(Altenkirch & Kaposi '16)

依存型プログラミング 中級編： 挿入ソートの正しさを保証しよう

一般のリスト

```
data List (A : Set) : Set where  
  [] : List A  
  _::_ : A → List A → List A
```

昇順に整列されたリスト

```
data OList (A : Set) : Set where
```

```
[] : OList A
```

```
_::_ : (a : A) → OList A → OList A
```

a 以上の要素が昇順に並んだリスト

昇順に整列された自然数のリスト

```
data OList (b :  $\mathbb{N}$ ) : Set where
```

```
  nil  : OList b
```

```
  cons : (n :  $\mathbb{N}$ )  $\rightarrow$  b  $\leq$  n  $\rightarrow$  OList n  $\rightarrow$  OList b
```

昇順に整列された自然数のリスト

```
data OList (b : ℕ) : Set where           要素の下限
  nil    : OList b
  cons   : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b
```


昇順に整列された自然数のリスト

```
data OList (b : ℕ) : Set where
  nil    : OList b
  cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b
```

b 以上

n :: n 以上

昇順に整列された自然数のリスト

```
data OList (b : ℕ) : Set where
```

```
  nil  : OList b
```

```
  cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b
```

b は n 以下

```
data _≤_ : ℕ → ℕ → Set where
```

```
  z≤n : zero ≤ n
```

```
  s≤s  : m ≤ n → suc m ≤ suc n
```

標準ライブラリ

整列されたリストの例

`goodList : OList 0`

`goodList = cons 1 z ≤ n (cons 2 (s ≤ s z ≤ n) nil)`

`data OList (b : ℕ) : Set where`

`nil : OList b`

`cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b`

整列されたリストの例

goodList : OList 0 OList 0
goodList = cons 1 z≤n (cons 2 (s≤s z≤n) nil)

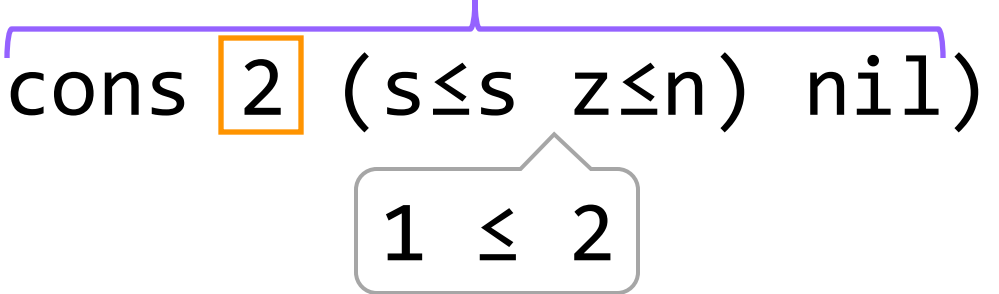
$0 \leq 1$

data OList (b : ℕ) : Set where
 nil : OList b
 cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b

整列されたリストの例

goodList : OList 0

goodList = cons 1 z≤n (cons 2 (s≤s z≤n) nil)



data OList (b : ℕ) : Set where

nil : OList b

cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b

整列されていないリストの例

badList : OList 0

badList = cons 2 z≤n (cons 1 ? nil)

0List 2

2 ≤ 1

data OList (b : ℕ) : Set where

nil : OList b

cons : (n : ℕ) → b ≤ n → OList n → OList b

要素の挿入

`insert : {b : ℕ} →`

`(n : ℕ) → b ≤ n → OList b → OList b`

`insert n b≤n nil = cons n b≤n nil`

`insert m b≤m (cons n b≤n l) with compare m n`

`... | less .m k = cons m b≤m (cons n ≤-suc+ l)`

`... | equal .m = cons m b≤m (cons n ≤-refl l)`

`... | greater .n k = cons n b≤n (insert m ≤-suc+ l)`

要素の挿入

insert の入力・出力は
整列されたリスト

insert : {b : ℕ} →

(n : ℕ) → b ≤ n → OList b → OList b

insert n b≤n nil = cons n b≤n nil

insert m b≤m (cons n b≤n l) with compare m n

... | less .m k = cons m b≤m (cons n ≤-suc+ 1)

... | equal .m = cons m b≤m (cons n ≤-refl 1)

... | greater .n k = cons n b≤n (insert m ≤-suc+ 1)

要素の挿入

挿入する要素は

`insert` : $\{b : \mathbb{N}\} \rightarrow$ 入力・出力の下限以上

$(n : \mathbb{N}) \rightarrow \underline{b \leq n} \rightarrow \text{OList } b \rightarrow \text{OList } b$

`insert n b≤n nil = cons n b≤n nil`

`insert m b≤m (cons n b≤n l) with compare m n`

`... | less .m k = cons m b≤m (cons n ≤-suc+ 1)`

`... | equal .m = cons m b≤m (cons n ≤-refl 1)`

`... | greater .n k = cons n b≤n (insert m ≤-suc+ 1)`

要素の挿入

`insert : {b : ℕ} →`

`(n : ℕ) → b ≤ n → OList b → OList b`

`insert n b≤n nil = cons n b≤n nil`

`insert m b≤m (cons n b≤n l) with compare m n`

`... | less .m k = cons m b≤m (cons n ≤-suc+ l)`

`... | equal .m = cons m b≤m (cons n ≤-refl l)`

`... | greater .n k = cons n b≤n (insert m ≤-suc+ l)`

要素の挿入

`insert : {b : ℕ} →`

`(n : ℕ) → b ≤ n → OList b → OList b`

`insert n b≤n nil = cons n b≤n nil`

`insert m b≤m (cons n b≤n l) with compare m n`

`... | less .m k = cons m b≤m m と n の比較`

`... | equal .m = cons m b≤m (cons n ≤-refl l)`

`... | greater .n k = cons n b≤n (insert m ≤-suc+ l)`

要素の挿入

$\text{insert} : \{b : \mathbb{N}\} \rightarrow$

$(n : \mathbb{N}) \rightarrow b \leq n \rightarrow \text{OList } b \rightarrow \text{OList } b$

$\text{insert } n \ b \leq n \ \text{nil} = \text{cons } n \ b \leq n \ \text{nil}$

$\text{insert } m \ b \leq m \ (\text{cons } n \ b \leq n \ 1) \text{ with compare } m \ n$

$\dots \mid \text{less } .m \ k = \text{cons } m \ b \leq m \ (\text{cons } n \ \underline{\leq - \text{suc} + 1})$

$n = \text{suc } (m + k)$ の場合 $m \leq \text{suc } (m + k)$ の証明

$\dots \mid \text{greater } .n \ k = \text{cons } n \ b \leq n \ (\text{insert } m \ \leq - \text{suc} + 1)$

要素の挿入

`insert : {b : ℕ} →`

`(n : ℕ) → b ≤ n → OList b → OList b`

`insert n b ≤ n nil = cons n b ≤ n nil`

`insert m b ≤ m (cons n b ≤ n l) with compare m n`

`... | less .m k = cons m b ≤ m (cons n ≤-suc+ 1)`

`... | equal .m = cons m b ≤ m (cons n ≤-refl 1)`

`n = m` の場合

`m ≤ m` の証明

要素の挿入

$\text{insert} : \{b : \mathbb{N}\} \rightarrow$

$(n : \mathbb{N}) \rightarrow b \leq n \rightarrow \text{OList } b \rightarrow \text{OList } b$

$\text{insert } n \ b \leq n \ \text{nil} = \text{cons } n \ b \leq n \ \text{nil}$

$\text{insert } m \ b \leq m \ (\text{cons } n \ b \leq n \ 1) \text{ with compare } m \ n$

$\dots \mid \text{less} \quad .m \ k = \text{cons } m \ b \leq m \ (\text{cons } n \ \leq\text{-suc}+ \ 1)$

$m = \text{suc } (n + k)$ の場合 $n \leq \text{suc } (n + k)$ の証明

$\dots \mid \text{greater } .n \ k = \text{cons } n \ b \leq n \ (\text{insert } m \ \leq\text{-suc}+ \ 1)$

挿入ソート

`isort : List \mathbb{N} \rightarrow OList \emptyset`

`isort [] = nil`

`isort (n :: l) = insert n $z \leq n$ (isort l)`

挿入ソート

`isort` : `List N` \rightarrow `OList 0`

`isort []` = `nil`

`isort (n :: l)` = `insert n z ≤ n (isort l)`

`isort` の結果は
整列されたリスト

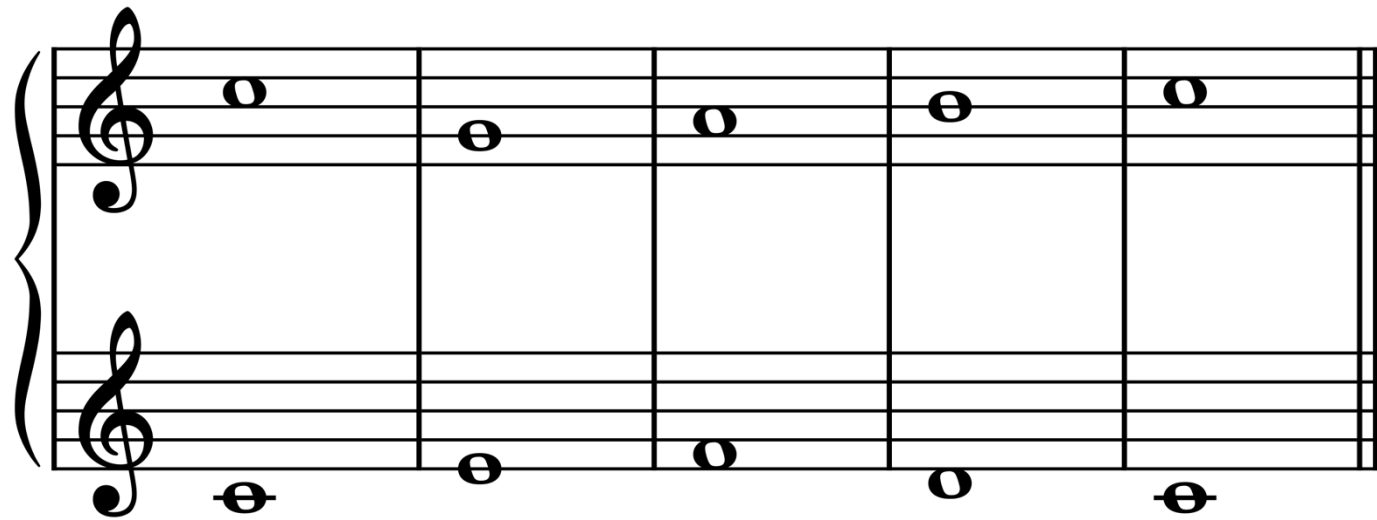
発展

- ソート前後の要素の保存
 - 入力・出力リストが並べ替えの関係であることを型として表現
- 二分探索木の表現
 - 要素の下限・上限の情報を型に持たせる

依存型プログラミング 応用編：

音楽の正しさを保証しよう

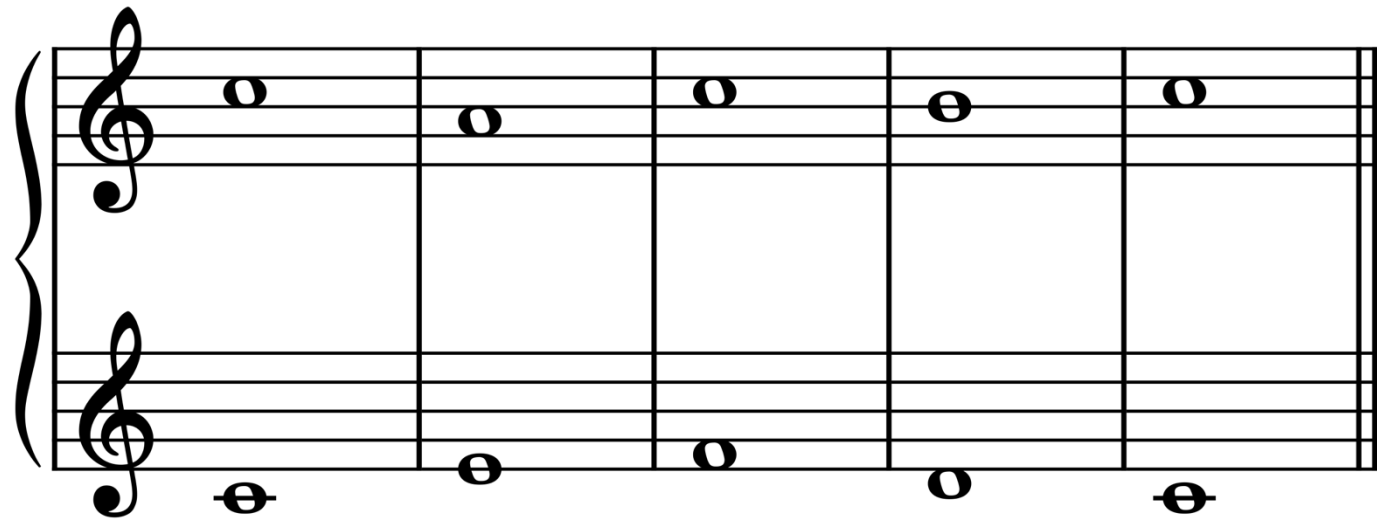
対位法による旋律の重ね合わせ（良い例）



対旋律
(counterpoint)

定旋律
(cantus firmus)

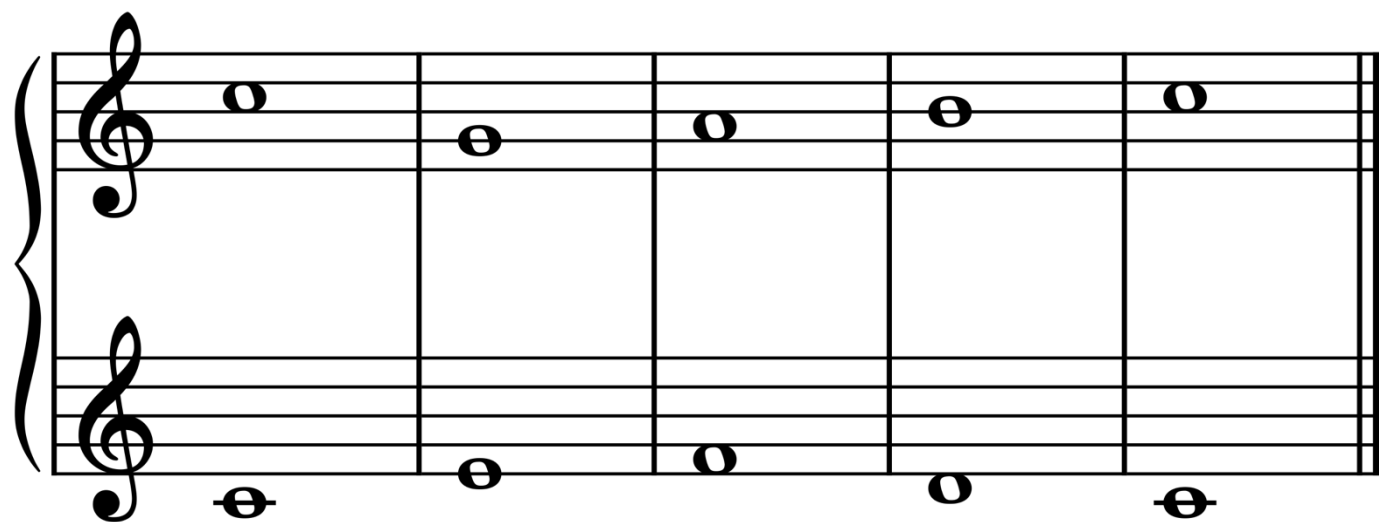
対位法による旋律の重ね合わせ（悪い例）



対旋律
(counterpoint)

定旋律
(cantus firmus)

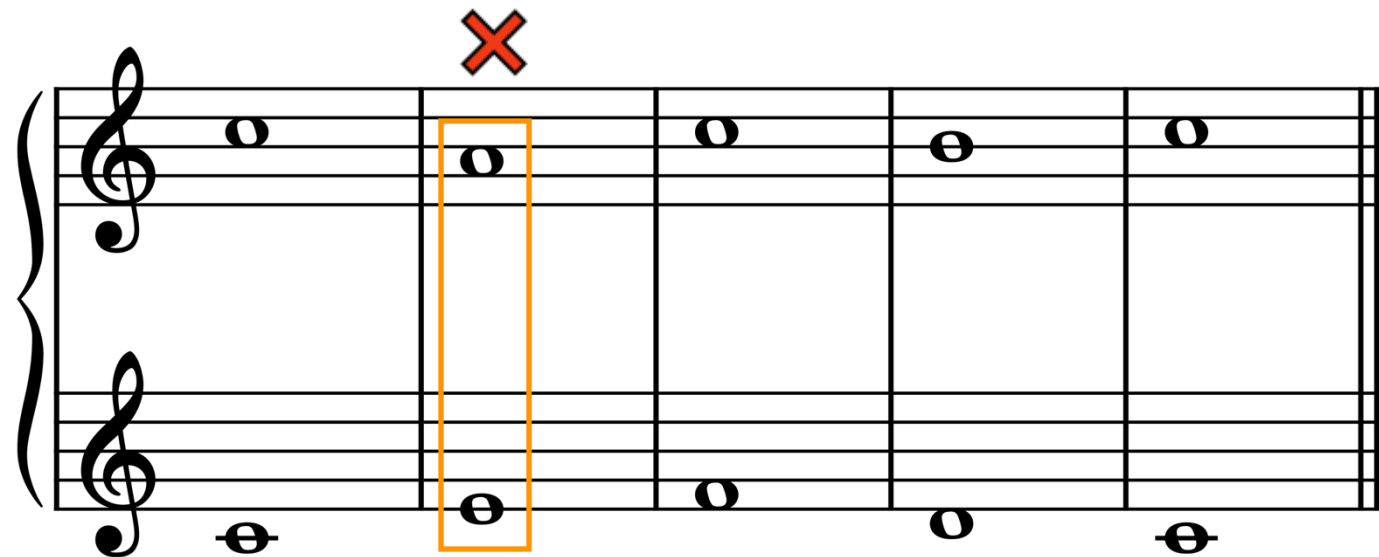
対位法の規則 ①：すべて協和音



8度 3度 3度 6度 8度

協和音 =
1度, 3度, 5度,
6度, 8度

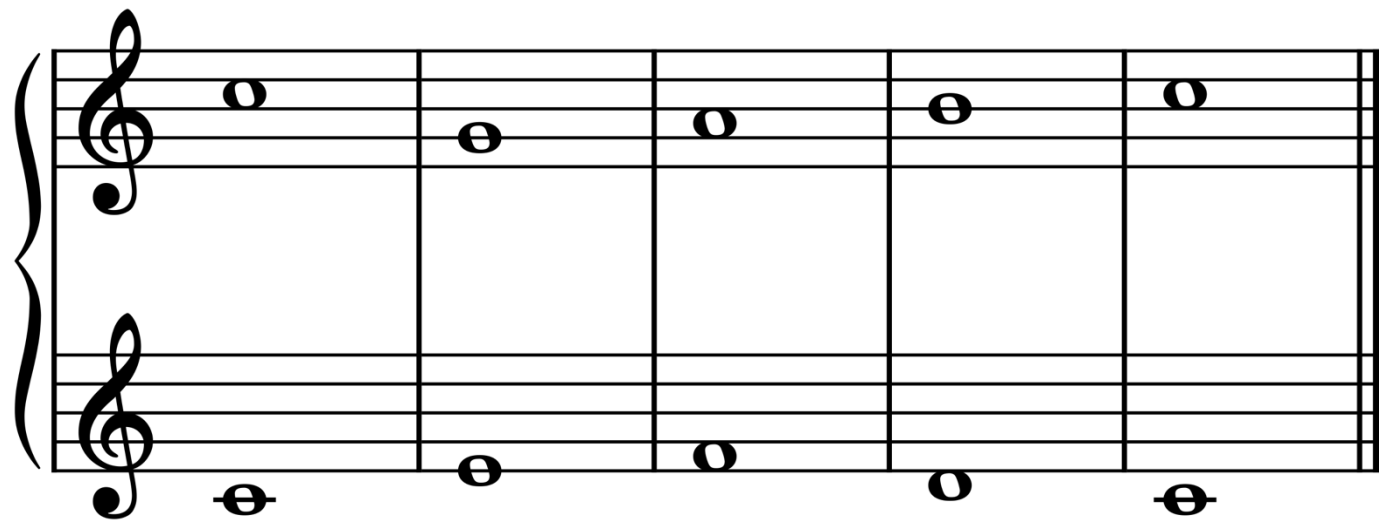
対位法の規則 ①：すべて協和音



8度 4度 5度 6度 8度

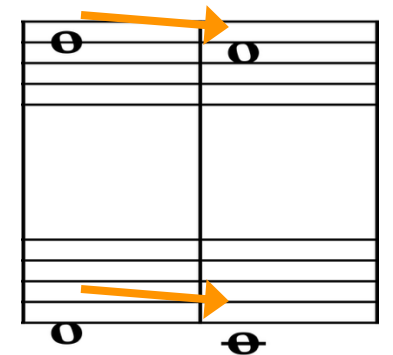
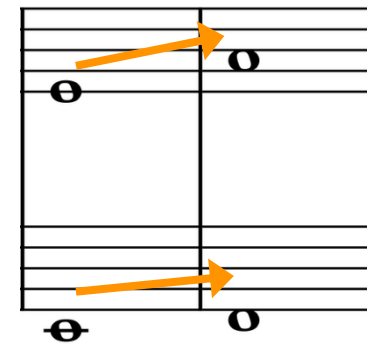
協和音 =
1度, 3度, 5度,
6度, 8度

対位法の規則 ②：並達5度・8度なし

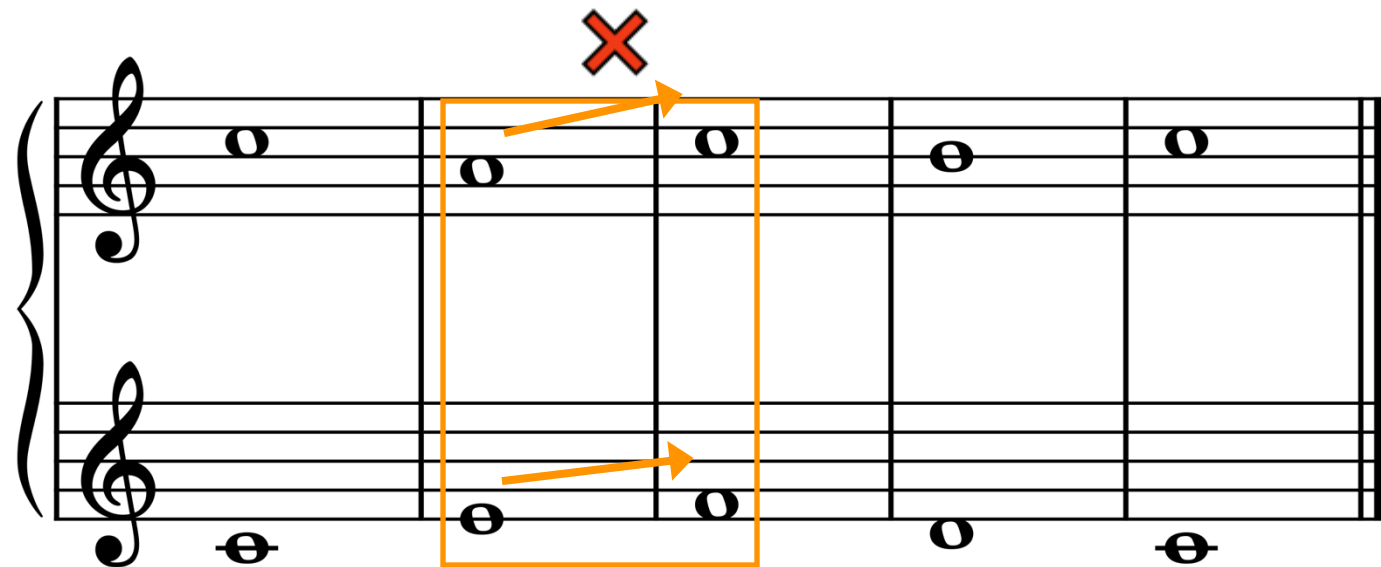


8度 3度 3度 6度 8度

並達5度・8度 =

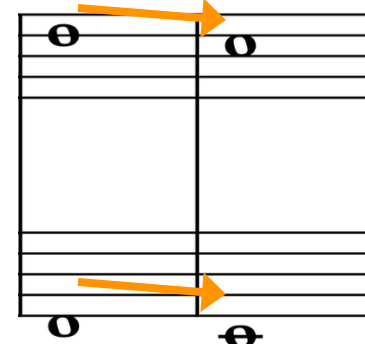
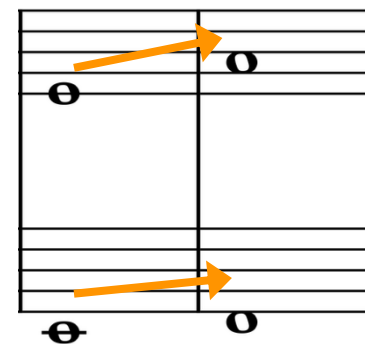


対位法の規則 ②：並達5度・8度なし



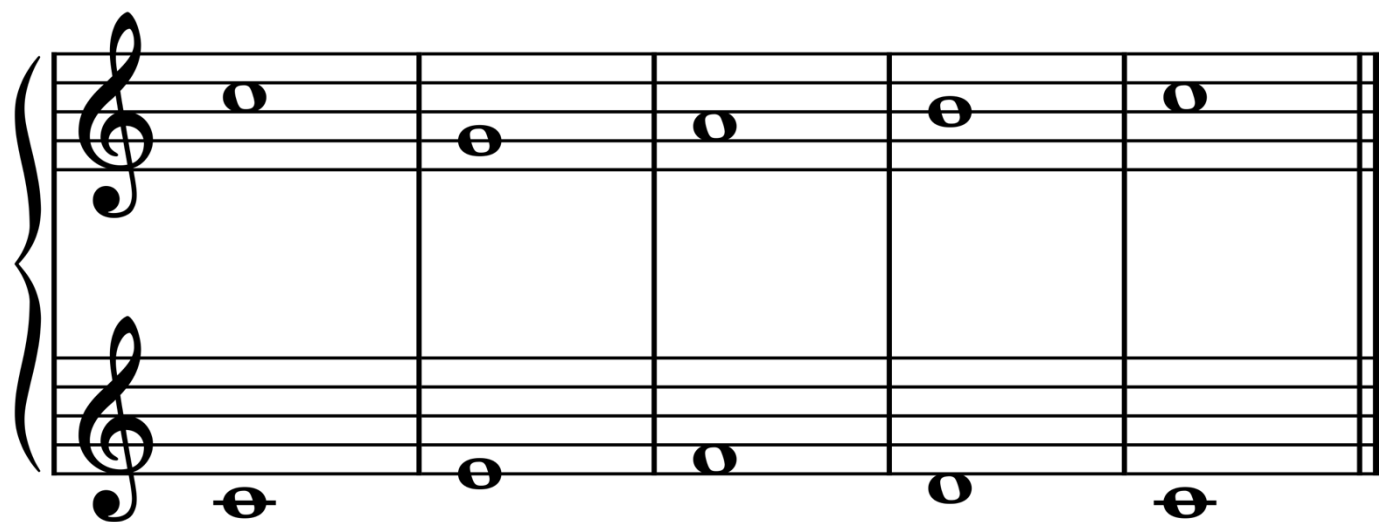
8度 4度 5度 6度 8度

並達5度・8度 =



音楽の表現（イメージ）

Bar =
Pitch × Interval



[(c , oct),
 (e , 3rd),
 (f , 3rd),
 (d , 6th),
 (c , oct)]

ピッチとインターバル

data Pitch : Set where

c : Pitch

d : Pitch

e : Pitch

f : Pitch

g : Pitch

a : Pitch

b : Pitch

c2 : Pitch

data Interval : Set where

uni : Interval

2nd : Interval

3rd : Interval

4th : Interval

5th : Interval

6th : Interval

7th : Interval

oct : Interval

小節

Bar : Set

Bar = Pitch × Interval

record _×_ : (A B : Set) → Set where

標準ライブラリ

constructor _,_

field

proj₁ : A

proj₂ : B

, の前後にスペースが必要

対位法に従った音楽

- ベースケースは要素数1のリスト
- 要素は後ろに追加

data CP where

first : (bar : Bar) → valid1 bar → CP

extend : (cp : CP) → (bar : Bar) →

valid1 bar →

valid2 (last cp) bar →

CP

対位法に従った音楽

data CP where

1小節の正しさ

first : (bar : Bar) → valid1 bar → CP

extend : (cp : CP) → (bar : Bar) →

valid1 bar →

valid2 (last cp) bar →

CP

対位法に従った音楽

data CP where

first : (bar : Bar) → valid1 bar → CP

extend : (cp : CP) → (bar : Bar) →

valid1 bar →

最後の1小節

valid2 (last cp) bar → の正しさ

CP

対位法に従った音楽

data CP where

first : (bar : Bar) → valid1 bar → CP

extend : (cp : CP) → (bar : Bar) →

valid1 bar →

valid2 (last cp) bar → 最後の2小節
CP の正しさ

1つの小節に対する規則

$\text{valid1} : \text{Bar} \rightarrow \text{Set}$

$\text{valid1 bar} = \text{Consonant } (\text{proj}_2 \text{ bar})$

協和音である

1つの小節に対する規則

`valid1 : Bar → Set`

`valid1 bar = Consonant (proj2 bar)`

`bar` は協和音

和音が協和音であることの証明

data Consonant : Interval → Set where

uniIsConsonant : Consonant uni

3rdIsConsonant : Consonant 3rd

5thIsConsonant : Consonant 5th

6thIsConsonant : Consonant 6th

octIsConsonant : Consonant oct

隣接する2小節に対する規則

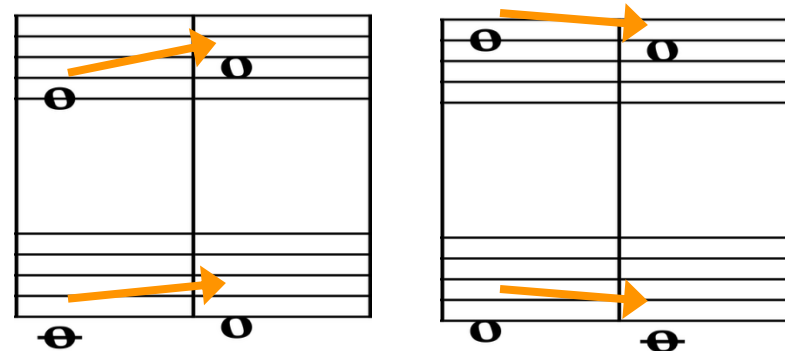
`valid2 : Bar → Bar → Set`

並達5度・8度でない

`valid2 bar1 bar2 =`

`Not58 (proj2 bar2) ∪ NotDirect bar1 bar2`

復習：並達5度・8度



隣接する2小節に対する規則

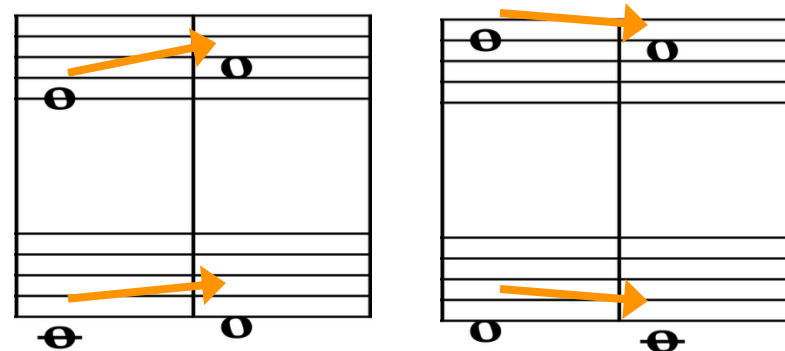
`valid2 : Bar → Bar → Set`

`valid2 bar1 bar2 =`

`Not58 (proj2 bar2)` \cup `NotDirect bar1 bar2`

2つ目の和音は5度・8度以外

復習：並達5度・8度



隣接する2小節に対する規則

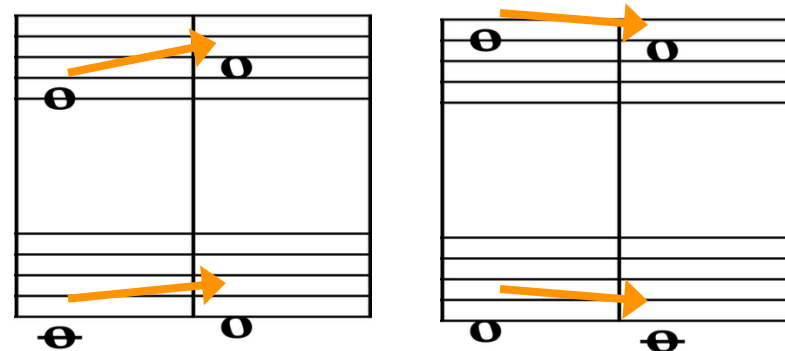
`valid2 : Bar → Bar → Set`

`valid2 bar1 bar2 =`

`Not58 (proj2 bar2) ∪ NotDirect bar1 bar2`

2声の進行方向が同じでない

復習：並達5度・8度



隣接する2小節に対する規則

`valid2 : Bar → Bar → Set`

`valid2 bar1 bar2 =`

`Not58 (proj2 bar2) ⊔ NotDirect bar1 bar2`

論理和

`data ⊔ : Set → Set → Set where`

`inj1 : A → A ⊔ B`

`inj2 : B → A ⊔ B`

標準ライブラリ

和音が5度・8度以外であることを証明

```
data Not58 : Interval → Set where
  uniIsNot58 : Not58 uni
  2ndIsNot58 : Not58 2nd
  3rdIsNot58 : Not58 3rd
  4thIsNot58 : Not58 4th
  6thIsNot58 : Not58 6th
  7thIsNot58 : Not58 7th
```

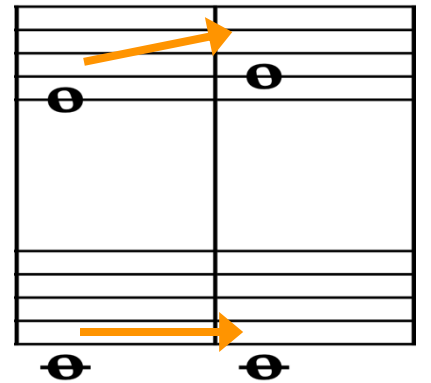
進行方向が同じでないことの証明 (抜粋)

```
data NotDirect (bar1 bar2 : Bar) : Set where
```

```
  oblique1 :
```

```
    dir (cf bar1) (cf bar2)  $\equiv$  stay  $\rightarrow$ 
```

```
    NotDirect bar1 bar2
```



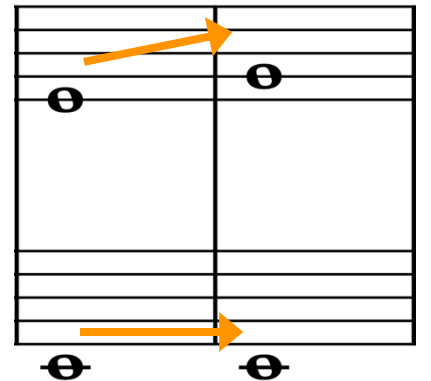
進行方向が同じでないことの証明 (抜粋)

```
data NotDirect (bar1 bar2 : Bar) : Set where
```

```
  oblique1 :
```

```
    dir (cf bar1) (cf bar2) ≡ stay →
```

```
    NotDirect bar1 bar2      同値
```

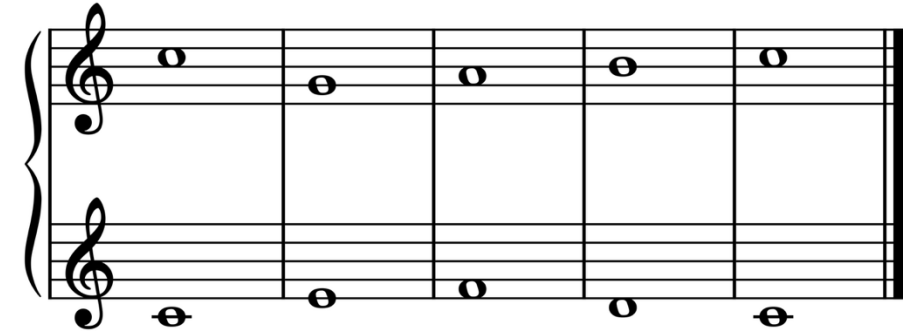


標準ライブラリ

```
data _≡_ {A : Set} : A → A → Set where
```

```
  refl : {x : A} → x ≡ x
```

規則を守った音楽の例



extend

(extend

(extend

(extend (first (c , oct) octIsConsonant)

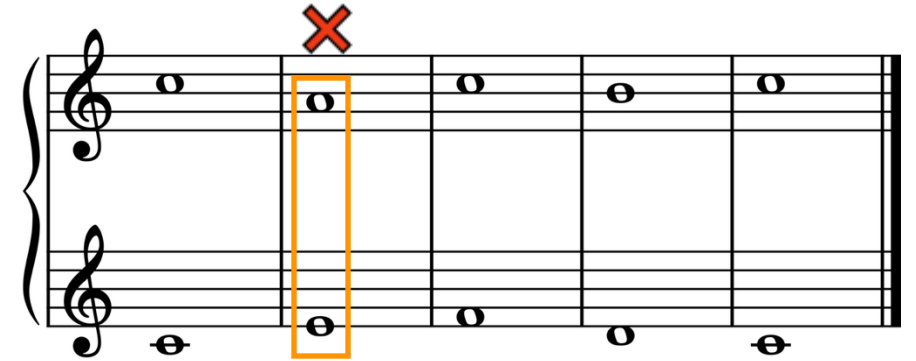
(e , 3rd) 3rdIsConsonant (inj₁ 3rdIsNot58))

(f , 3rd) 3rdIsConsonant (inj₁ 3rdIsNot58))

(d , 6th) 6thIsConsonant (inj₁ 6thIsNot58))

(c , oct) octIsConsonant (inj₂ (contrary2 (ref1 , ref1)))

規則を破った音楽の例



extend

(extend

(extend

(extend (first (c , oct) octIsConsonant)

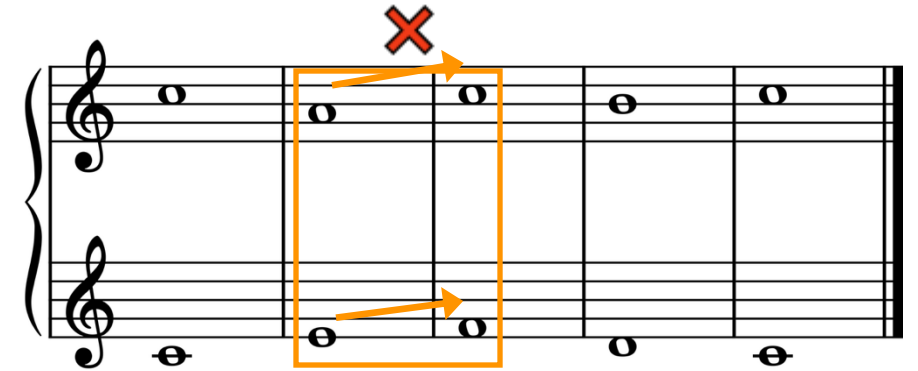
(e , 4th) ? (inj₁ 4thIsNot58)) Consonant 4th
が必要

(f , 5th) 5thIsConsonant ?)

(d , 6th) 6thIsConsonant (inj₁ 6thIsNot58))

(c , oct) octIsConsonant (inj₂ (contrary2 (ref1 , ref1)))

規則を破った音楽の例



extend

(extend

(extend

(extend (first (c , oct) octIsConsonant)

(e , 4th) ? (inj₁ 4thIsNot58))

(f , 5th) 5thIsConsonant ?)

(d , 6th) 6thIsConsonant (inj₁ 6thIsNot58))

(c , oct) octIsConsonant (inj₂ (contrary2 (ref1 , ref1)))

Not58 5th ⊔

NotDirect

(e , 4th)

(f , 5th)

が必要

演習問題 3 (オプション)

CP 型の音楽を自由に作成し、型が付いた音楽が良い音楽であるかどうかを確かめよ。

cf. "Well-Typed Music Does Not Sound Wrong"
(Szamozvancev & Gale '17)

おわりに

依存型はいろいろな性質の保証に役立つ！

Agda 学習リソース集：

<https://agda.readthedocs.io/en/latest/getting-started/tutorial-list.html>

Agda Zulip Server: <https://agda.zulipchat.com/>