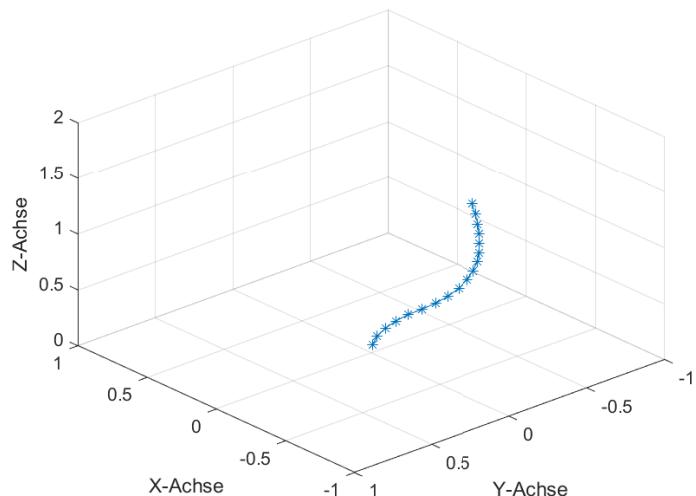


## Modellierung der Dynamik eines seilzugaktuierten Kontinuumsroboters



Masterarbeit M-12/2021-1088

Youyu Chen  
Matrikelnummer 10021928

Hannover, 31. Dezember 2021

Erstprüfer Dr. -Ing. Hans-Georg Jacob  
Zweitprüfer Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek  
Betreuer Tim-David Job, M.Sc.

## Selbstständigkeitserklärung

**Name:** Youyu Chen

Matrikelnummer: 10021928

**Titel der Arbeit:** Modellierung der Dynamik eines seilzugaktuierten Kontinuumsroboters

**Art der Arbeit:** Masterarbeit

**Studiengang:** Mechatronik Robotik

**Abgabedatum:** 31. Dezember 2021

**Erstprüfer:** Dr. -Ing. Hans-Georg Jacob

**Zweitprüfer:** Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek

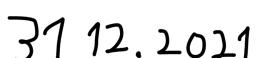
**Betreuer:** Tim-David Job, M.Sc.

Ich, Youyu Chen, versichere hiermit, dass die Masterarbeit mit dem Titel *Modellierung der Dynamik eines seilzugaktuierten Kontinuumsroboters* von mir selbstständig verfasst wurde, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden, alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen hat.

Mit der Übermittlung meiner Arbeit auch an externe Dienste zur Plagiatsprüfung durch Plagiatssoftware erkläre ich mich hiermit einverstanden.

Hannover, 31. Dezember 2021





(Youyu Chen)

## Masterarbeit

Herr Youyu Chen, Matr.-Nr. 10021928

### Modellierung der Dynamik eines seilzugaktuierten Kontinuumsroboters

Dynamic Modelling of a Tendon-Driven Continuum Robot

#### Allgemeines:

Um eine teure Demontage von Triebwerken in der Luftfahrttechnik zu vermeiden, werden zur Begutachtung der Schaufeln im Inneren einer Turbine Boroskope eingesetzt. Das Ziel des Projekts besteht in der Entwicklung eines neuartigen Kontinuumsroboters, der mittels eines Streifenprojektionssystems am Endeffektor die Untersuchung der Turbinenschaufeln ermöglicht und die bisher verwendeten starren Boroskope ersetzt. Für die Simulation, Steuerung und Steifigkeitsuntersuchung des Roboters ist die Implementierung eines Dynamikmodells notwendig.

#### Aufgabe:

Im Rahmen dieser Masterarbeit soll ein Dynamikmodell eines Kontinuumsroboters modelliert werden. Hierzu ist die Dynamik für einen räumlichen Roboter bestehend aus mehreren Segmenten und basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und einem Constant Curvature Ansatz mit alternativer Parameterwahl zu modellieren. Das Dynamikmodell soll an den vorliegenden, seilzugaktuierten Roboter und den angreifenden Kräften angepasst werden. Zur Identifikation der Modellparameter soll die Implementierung auf eine parameterlineare Form erweitert und anschließend der Roboterverlauf aus dem Modell mit realen Messdaten verglichen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit ergeben sich insbesondere die folgenden Aufgabenpunkte:

- Literaturrecherche zur Dynamikmodellierung von seilzugaktuierten Kontinuumsrobotern,
- Implementierung eines räumlichen Dynamikmodells basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und einem Constant Curvature Ansatz mit alternativer Parameterwahl,
- Anpassung des Dynamikmodells an den vorliegenden, seilzugaktuierten Roboter und den vorgegebenen angreifenden Kräften,
- Erweiterung der Implementierung auf die parameterlineare Form zur Identifikation der Modellparameter,
- Vergleich des Roboterverlaufs aus dem Modell mit realen Messdaten des Roboters.

Die Bearbeitungszeit beträgt 900h.

Ausgabe der Aufgabenstellung: 01.07.2021

Abgabe der Arbeit: 31.12.2021

Betreuer: M. Sc. Tim-David Job

.....  
(Dr.-Ing. Hans-Georg Jacob)

 31.12.2021  
(Youyu Chen)

## **Kurzfassung**

Es handelt sich in dieser Arbeit hauptsächlich um die Modellierung eines neuartigen Kontinuumsroboters. Nicht nur ein Statikmodell, sondern auch ein Dynamikmodell wurden entwickelt. Um die Bewegung des Kontinuumsroboters zu beschreiben, wurde der sogenannte „Piecewise-Constant-Curvature Ansatz“ verwendet. Es wurde angenommen, dass jedes Teilsegment des Roboters mit einer konstanten Krümmung gebogen wird.

Um die statischen und dynamischen Gleichungen aufzustellen, wurde eine virtuelle Leistungsmethode benutzt. Bei der virtuellen Leistungsmethode, auch „Kane-Methode“ genannt, werden Variationsrechnungen zur Berechnung der Dynamik eines Systems durch die Minimierung der virtuellen Leistung der externen Kräfte und Momente, die auf das System einwirken, verwendet. Sie wurde bereits sowohl für starre als auch für flexible Robotersysteme angewendet. Zuerst wurde ein allgemeiner Kontinuumsroboter modelliert und danach passt das Modell an den vorliegenden, seilzugaktuierten Roboter und vorgegebenen angreifenden Kräften an. Es wurde eine parameterlineare Form implementiert, die auf der Dynamikmodellierung basierte. Dadurch konnten weitere technische Parameter mit den Messdaten identifiziert werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Technik . . . . .	1
<b>2 Aufbau des Kontinuumsroboters</b>	<b>3</b>
2.1 Aufbau eines allgemeinen Kontinuumsroboters . . . . .	4
2.2 Aufbau eines spezifischen Kontinuumroboters . . . . .	5
<b>3 Modellierung</b>	<b>7</b>
3.1 Der „Piecewise-constantcurvature-Ansatz“ . . . . .	7
3.2 Starrkörper-Ansatz in der Modellierung des neuartigen Kontinuumsroboters . . . . .	9
3.3 Prinzip der Virtuellen Leistung . . . . .	11
3.4 Kinematikanalyse . . . . .	12
3.4.1 Kinematik mit „Constant-Curvature-Ansatz“ . . . . .	12
3.4.2 Kinematik mit dem Starrkörper-Ansatz . . . . .	17
3.5 Seilkinematik . . . . .	17
3.5.1 Seilkinematik . . . . .	17
3.5.2 Elastizität der Seile . . . . .	21
3.6 Belastungsanalyse . . . . .	22
3.6.1 Gravitation . . . . .	22
3.6.2 Elastizität . . . . .	22
3.6.3 Actuation und Reibung . . . . .	24
3.6.4 Externe Belastung auf dem letzten Teilsegment . . . . .	26
3.6.5 Trägheitseffekt . . . . .	26
3.6.6 Gesamtbelastung . . . . .	26
3.7 Gleichungssystem in der Dynamik und Statik . . . . .	27
3.7.1 Differentialgleichungssysteme der Dynamik . . . . .	27
3.7.2 Gleichgewichtsbedingungen der Statik . . . . .	28
3.8 Die parameterlineare Form zur Identifikation der Modellparameter . . . . .	28

<b>4 Evaluation</b>	<b>31</b>
4.1 Allgemeine Beobachtung . . . . .	31
4.1.1 Einfluss der Reibungskräfte . . . . .	35
4.1.2 Validierung des Dynamikmodells . . . . .	41
4.1.3 Einfluss der externen Kräfte auf den Endeffektor . . . . .	42
4.1.4 „Totlage“ beim neuartigen Kontinuumsroboter . . . . .	44
4.2 Die Konfigurationen des Kontinuumsroboters mit unterschiedlicher Ausgangslage in der Statikmodellierung . . . . .	45
4.3 Geometrische Anpassung der Backbone . . . . .	48
4.4 Kinematische Ansätze zur Beschreibung der Backbone . . . . .	49
4.4.1 Variable-Curvature-Ansatz . . . . .	51
4.4.2 Modal-Ansatz . . . . .	52
4.4.3 „Constant-Curvature-Ansatz“ . . . . .	52
4.4.4 Starrkörper-Ansatz . . . . .	53
4.4.5 Vergleich der Ergebnisse mit der Modellierung von Priyanka Rao . . . . .	57
4.5 Laufzeit reduzieren . . . . .	59
4.5.1 Laufzeit des „Maple-Skripts“ . . . . .	59
4.5.2 Parameterreduktion in der Dynamikmodellierung . . . . .	60
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>63</b>
<b>6 Ausblick</b>	<b>64</b>
<b>Anhang</b>	<b>65</b>
<b>Literatur</b>	<b>66</b>

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Strukturen des Kontinuumsroboters . . . . .	2
2.1	Schematische Darstellung eines allgemeinen Kontinuumsroboters [RB14] . . . . .	3
2.2	Aufbau des neuartigen Kontinuumsroboters [Gos21] . . . . .	4
2.3	Ein Manipulator mit drei Seilen und drei Segmenten . . . . .	5
2.4	Eine abgeschrägte Scheibe [Gos21] . . . . .	5
2.5	Die Gelenke des neuartigen Kontinuumsroboters, der elastische Kern besteht aus zwei NiTi-Stäben [Gos21] . . . . .	6
3.1	(a) Das Koordinatensystem eines Teilsegments, (b) Die Biegebene eines Teil-segments . . . . .	8
3.2	Koordinatensystem in einem neuartigen Kontinuumsroboter [Gos21] . . . . .	8
3.3	Koordinatensystem in einer Scheibe des neuartigen Kontinuumsroboters [Gos21]	9
3.4	Koordinatensystem mit dem Starrkörper-Ansatz . . . . .	10
3.5	Parameter jedes Drehgelenk . . . . .	10
3.6	Darstellung des Koordinatensystems des Kontinuumsroboters und der Transformationsmatrix $T_{i-1}^i$ , KS <sub>0</sub> ist das globale Koordinatensystem und KS <sub>i</sub> ist das lokale Koordinatensystem . . . . .	14
3.7	Radialer Abstand einer Bohrung und Winkel zwischen der Bohrung und der x-Achse . . . . .	16
3.8	Der axiale Abstand von der linken und der rechen Kante der Bohrung zum Schwerpunkt der Scheibe . . . . .	16
3.9	(a) Vorderansicht der Seilkinematik auf der Biegebene, (b) Draufsicht auf die XY-Ebene der Seilkinematik, die vier inneren Kreise sind die Bohrungen für die Seile, der Radius kann vernachlässigt werden. . . . .	18
3.10	Vorderansicht auf die YZ-Ebene, der gelbe Vektor ist $r_{hr,ij}$ , der braune Vektor ist $r_{hr,ij}$ . . . . .	19
3.11	(a) Vorderansicht der Seilkinematik auf der Biegebene unter der Berücksichti-gung der L <sub>1</sub> und der L <sub>2</sub> , (b) Geometrische Darstellung der Seillänge d <sub>ss</sub> auf der Biegebene . . . . .	20
3.12	(a) Das Biegemoment in der 3D Darstellung, (b) Das Biegemoment auf der XY-Ebene . . . . .	23

---

3.13 Seilreibung . . . . .	25
4.1 „3D-Matlab-Plots“ der Statikmodellierung . . . . .	32
4.2 Die Sprungantwort von $q$ in der Dynamikmodellierung des allgemeinen Kontinuumsroboters . . . . .	33
4.3 Die Sprungantwort von $q$ in der Dynamikmodellierung des neuartigen Kontinuumsroboters . . . . .	34
4.4 Einfluss der Reibung . . . . .	35
4.5 Vergleich des Einflusses mit dem Saturation-Funktion-Ansatz . . . . .	36
4.6 Die skalierte Atan-Funktion und die Signum-Funktion . . . . .	37
4.7 Vergleich des Einflusses mit dem Atan-Funktion-Ansatz . . . . .	38
4.8 FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Signum-Ansatz) . . . . .	39
4.9 FFT Analyse des dynamischen Verhaltens ohne Reibung . . . . .	39
4.10 FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Saturation-Ansatz) . . . . .	39
4.11 Die Resonanz mit einer Frequenz von 6,30 Hz . . . . .	40
4.12 FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Atan-Ansatz) . . . . .	40
4.13 Die Resonanz mit einer Frequenz von 6,30 Hz . . . . .	40
4.14 Energiekonsistenz des Dynamikmodells, (a) im „Constant-Curvature-Ansatz“, (b) im Starrkörper-Ansatz . . . . .	42
4.15 Eine Bewegung des Kontinuumsroboters . . . . .	43
4.16 Die Konfiguration unter einer zusätzlichen externen Kraftbelastung ( $F_{ex,s,x} = -0.1\text{N}$ ) . . . . .	43
4.17 (a) schematische Darstellung der Totlage, (b) das Ergebnis der Statikmodellierung des Roboters mit sechs Teilsegmenten . . . . .	44
4.18 (a) Fall 1: die Konfiguration des Kontinuumsroboters (blaue Darstellung) bei einer höheren Belastung durch die Nulllage (schwarze Darstellung), (b) Fall 2: die Konfiguration des Kontinuumsroboters (blaue Darstellung) bei einer niedrigeren Belastung von einer höheren Belastung (schwarze Darstellung) .	46
4.19 Die Konfigurationen des Kontinuumsroboters mit 6 Teilsegmenten in den unterschiedlichen Ausgangslagen . . . . .	47
4.20 Die Konfigurationen mit 12 Teilsegmenten in den beiden Ausgangslagen . . . . .	47
4.21 Die Konfigurationen mit 18 Teilsegmenten in den beiden Ausgangslagen . . . . .	47
4.22 Die Konfigurationen mit 27 Teilsegmenten in den beiden Ausgangslagen . . . . .	48
4.23 Konfigurationen mit unterschiedlicher Parameter $L_1$ und $L_2$ , die gesamte Länge des Kontinuumsroboters bleibt konstant., (a) Roboter mit 27 Scheiben, (b) Roboter mit 18 Scheiben, (c) Roboter mit 12 Scheiben, (d) Roboter mit 6 Scheiben . . . . .	49

---

4.24 (a) Die Darstellung mit dem „Variable-Curvature-Ansatz“ dient zur Beschreibung der Position $p(s)$ und der Orientierung $R(s)$ , (b) Bogenparameter $[\kappa, \phi]$ , die zur Beschreibung eines Segments mit dem „Constant-Curvature-Ansatz“ ohne Torsion verwendet werden, (c) Starrkörper 1R-Modell, das die Backbone mit zwei Gliedern annähert, (d) Darstellung der Backbone-Parameter durch Shape-Funktionen $\Psi(a_1, a_2, ..s)$ und $\zeta(b_1, b_2..s)$ im modalen Ansatz. . . . .	51
4.25 Die Federmomente bei dem Constant-Curvature-Ansatz und dem Starrkörper-Ansatz . . . . .	54
4.26 Die Konfigurationen mit zwei kinematischen Ansätzen, (a) 6 Scheiben, (b) 12 Scheiben, (c) 18 Scheiben . . . . .	55
4.27 Konfigurationen bei der Kleinwinkelbiegung, (a) $\hat{\tau}_1 = 12, 8$ , (b) $\hat{\tau}_1 = 9$ , (c) $\hat{\tau}_1 = 6$ , (d) $\hat{\tau}_1 = 1$ . . . . .	56
4.28 Abweichungen bei jedem Teilsegment . . . . .	56
4.29 Vier Modellierungen von Priyanka Rao und zwei Modellierungen aus dieser Arbeit, (a) der klassische CC-Ansatz von Priyanka Rao, (b) der VC-Ansatz von Priyanka Rao, (c) Starrkörper-Ansatz (3R-Modell) von Priyanka Rao, (d) die Variation des CC-Ansatzes (50 Abschnitte) von Priyanka Rao, (e) Starrkörper-Ansatz aus dieser Arbeit, (f) CC-Ansatz (1R-Modell) aus dieser Arbeit. . . . .	58
4.30 Fehler der Dynamikmodellierung mit unterschiedlichen $n_{\text{opt}}$ . . . . .	61

## Tabellenverzeichnis

3.1	Definition der Linien im Dreieck $\triangle ABB'$ . . . . .	19
4.1	Die Unterschiede zwischen den beiden Robotern . . . . .	31
4.2	Die technischen Parameter in der Probemodellierung . . . . .	32
4.3	Berechnung von $\kappa_i$ des neuartigen Kontinuumsroboters auf der Totlage . . . . .	44
4.4	Die aktuierten Kräfte $\hat{\tau}_i$ des neuartigen Kontinuumsroboters auf der Totlage . .	45
4.5	Die Abweichungen des Endeffektors zwischen den Implementierungen aus dieser Arbeit und den vier Implementierungen von Priyanka Rao . . . . .	57
4.6	Die Laufzeit der Statikmodellierung . . . . .	59
4.7	Die Laufzeit der Dynamikmodellierung in Maple . . . . .	60
4.8	Die Laufzeit der Dynamikmodellierung mit den Optimierungsfaktor . . . . .	62

## Nomenklatur

Selten bzw. nur abschnittsweise verwendete Symbole und Formelzeichen sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text beschrieben.

### Allgemeine Parameter

$i$	Index des Teilsegments
$j$	Index der Bohrung oder des Seils
$n$	Anzahl der Teilsegmente
$n_{\text{opt}}$	Optimierungsfaktor
$T$	Homogene Transformationsmatrix
$R$	Rotationsmatrix
$t$	Translationsvektor

### Geometrische Parameter

$\kappa$	Krümmung des Backbones
$\theta$	Biegewinkel
$\phi$	Winkel der Biegeebene
$\psi$	Positionwinkel der Bohrung
$\gamma$	Winkel für die Hole-to-Hole Orientierung
$L_0$	Länge der Krümmung
$L_1$	Länge der Backbone, 1. Teil
$L_2$	Länge der Backbone, 2. Teil
$\hat{d}_l$	Dicke in der linken Seite
$\hat{d}_r$	Dicke in der rechten Seite
$\hat{r}_h$	Radialer Abstand der Bohrung
$\Delta l_{\text{geo}}$	Geometrische Seillängeänderung
$\Delta l_{\text{el}}$	Dehnung des Seils
$p_h$	Hole-to-Hole Orientierung

### Mechanische Parameter

$m_i$	Masse der Scheibe
-------	-------------------

---

$J_{xx}$	Massenträgheit des Backbones
$\mathbf{I}$	Massenträgheitstensor der Scheibe
$C_b$	Dämpfungskoeffizient
$\mu$	Reibungskoeffizient
$E$	E-Modul der Backbone
$E_s$	E-Modul des Seils
$A_s$	Fläche des Seils
$g$	Gravitationsbeschleunigung

### Belastungen

$\hat{\tau}$	Zugkraft
$\mathbf{F}_{ex}$	Externe Kraft
$\mathbf{F}_g$	Gravitation
$\mathbf{F}_{inr}$	Trägheitskraft
$\mathbf{F}_{act}$	Aktuierte Kraft
$\mathbf{F}_{ex,s}$	Externe Kraft auf dem Endeffektor
$\mathbf{M}_{ex}$	Externes moment
$\mathbf{M}_{inr}$	Trägheitsmoment
$\mathbf{M}_{act}$	Aktuiertes Moment
$\mathbf{M}_{ex,s}$	Externes Moment auf dem Endeffektor
$\mathbf{M}_{el}$	Elastisches Moment
$\mathbf{F}_{kon}$	Kontaktkraft
$\mathbf{F}_{reib}$	Reibungskraft
$\mathbf{F}_{ex:st}$	Externe Kraft in der Statikmodelleirung
$\mathbf{M}_{ex:st}$	Externes Moment in der Statikmodelleirung

---

# 1 Einleitung

Der Kontinuumsroboter besteht aus mehreren biegsamen Abschnitten mit kleinem Durchmesser, die in der Regel durch einen Seilzug aktuiert werden. Jeder dieser Abschnitte kann eine kreisförmige Form bilden, wobei flexible Materialien als sogenannten „Backbone“ verwendet werden. Mit diesen Eigenschaften sind Kontinuumsroboter in der Lage, sich in engen Räumen zu bewegen. Der Kontinuumsroboter besitzt heute ein breites Anwendungsspektrum, z. B. bei endoskopischen Verfahren für Diagnostik und Therapie, bei der Wartung an Flugzeugtriebwerken, bei chirurgischen Anwendungen usw.

Das Ziel dieser Arbeit liegt in der Implementierung einer Statik- bzw. Dynamikmodellierung eines neuartigen Kontinuumsroboters. Das Modell wird genau an die vorliegende Geometrie und die vorgegebenen angreifenden Kräften des Kontinuumsroboters angepasst.

## 1.1 Motivation

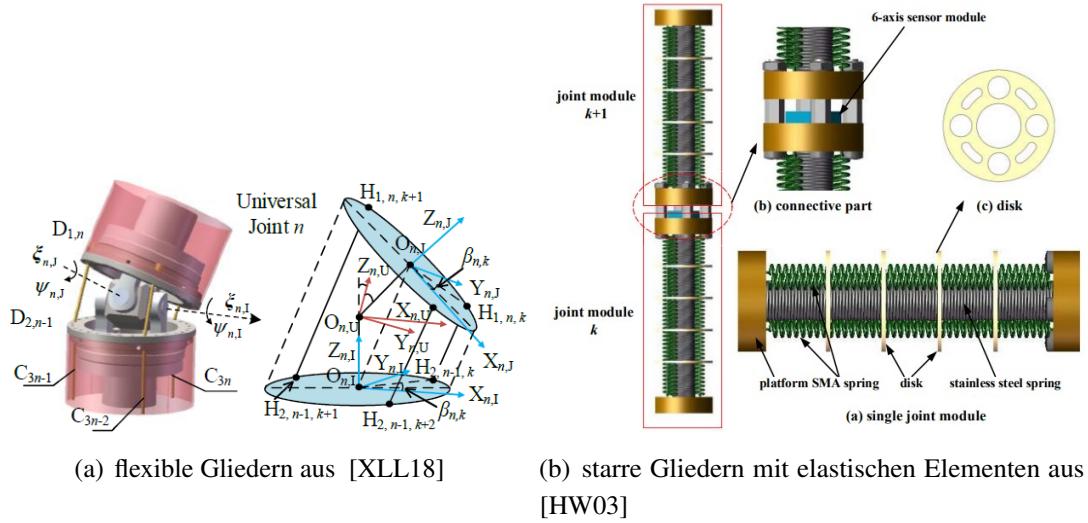
In-situ-Wartungsarbeiten an Flugzeugtriebwerken sind äußerst vorteilhaft, da durch sie der derzeitige Wartungszyklus, der aufgrund der erforderlichen Demontage von Turbinen aus Flugzeugen umfangreich und kostspielig ist, erheblich reduziert werden kann. Die Navigation durch Inspektionsöffnungen und die Durchführung mehrachsiger Bewegungen mit Endeffektoren in beengten Umgebungen (z.B. in der Brennkammer) sind jedoch eine wesentliche Herausforderung.

Daher wird ein neuartiger Kontinuumsroboter entwickelt, um in bzw. aus beengten Umgebungen zu navigieren und die erforderlichen Konfigurationen für weitere Reparaturarbeiten durchzuführen. Die Modellierung dieses mechatronischen Systems spielt eine bedeutende Rolle bei der praktischen Anwendung.

## 1.2 Stand der Technik

Ein Kontinuumsroboter wird manchmal auch „hyper-redundant manipulator“ genannt und hat große Vorteile bei der Hindernisvermeidung, der Behandlung von Singularitäten und der fehler-toleranten Steuerung. In den letzten zehn Jahren wurden viele Formen von Kontinuumrobotern entwickelt. Die Forschende entwickeln meistens zwei Hauptstrukturen für einen Kontinuumsroboter. Bei der einen besteht jedes Teilstück des Kontinuumsroboters aus mehreren flexiblen

Gliedern. Eine elastische Backbone läuft durch den ganzen Roboter. Damit kann sich Roboter sich unter bestimmten Lastfällen mit konstanter Krümmung biegen [XLL18]. Bei der anderen Struktur besteht jedes Teilsegment aus mehreren starren Gliedern und elastischen Elementen (z. B. Federn und Dämpfungen) [HW03].



**Abbildung 1.1:** Strukturen des Kontinuumsroboters

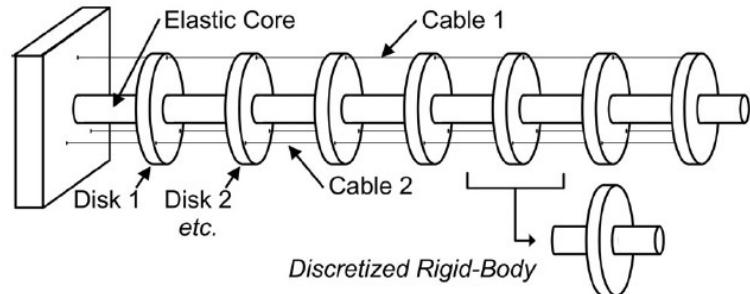
Um das Robotersystem zu simulieren werden die folgenden Methoden benutzt:

- Prinzip der virtuellen Arbeit [RB12]
- Euler–Lagrange-Gleichungen [Wan+21]
- Erhaltungssatz [Chi93]
- Cosserat-rod-Modell [Wan+17]

Unter der Annahme des „constant-curvature Ansatzes“ wird ein generalisiertes Koordinatensystem mit der Krümmung  $\kappa$  und der Segmentlänge  $L_0$  angewandt. Diese Standard-Parametrisierung der minimalen Koordinaten bietet eine visuelle Darstellung der Konfiguration des Manipulators. In dreidimensionalen Formulierung der Standard-Parametrisierung haben sie jedoch viele Einschränkungen bei der Anwendbarkeit-insbesondere in der Dynamikmodellierung. Daher wird eine verbesserte Parametrisierung der minimalen Koordinaten entwickelt, die durch zwei orthogonale Krümmungen  $\Delta_x$  und  $\Delta_y$  definiert wird [DBR20]. Damit können die Probleme angemessen vermieden werden.

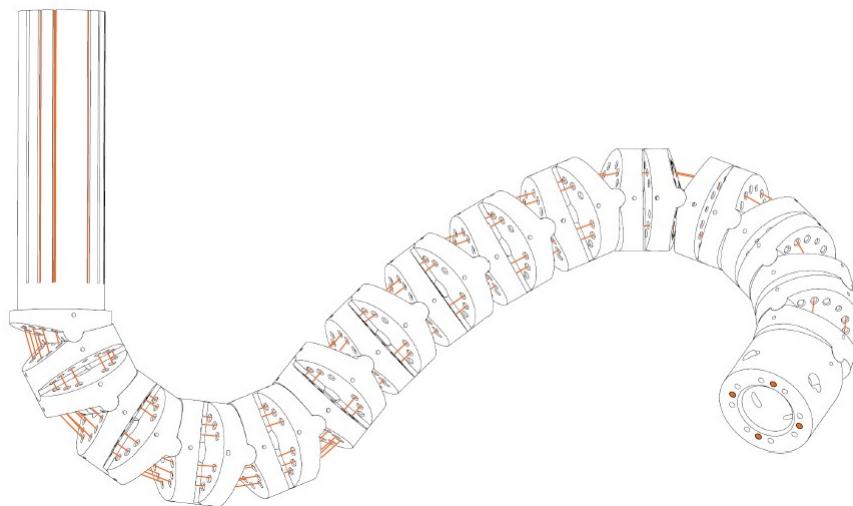
## 2 Aufbau des Kontinuumsroboters

Der Kontinuumsroboter wird in den letzten Jahren aufgrund der vielfältigen Anwendungsgebiete von vielen Forschenden konstruiert. Zahlreiche Varianten werden für unterschiedliche Zwecke entwickelt. Diese Manipulatoren besitzen jedoch im Vergleich zum klassischen, seriellen Roboter einige gleiche Eigenschaften und Vorteile. Ein Kontinuumsroboter kann im Raum flexibel bewegt werden und hat eine hohe Anpassungsfähigkeit an unregelmäßige Umgebungen mit komplexen und vielfältigen Hindernissen. Einige bekannte Anwendungen sind z.B. seilaktuierte Roboter für Triebwerksinspektionen und hydraulische schlängelartige Roboter für die Endoskopie. In diesem Kapitel werden vor allem zwei Formen des seilaktuierten Roboters erklärt. Ein allgemeiner Entwurf wird in der Abbildung 2.1 schematisch dargestellt. Ein Teilsegment besteht aus einer Scheibe, einem zugehörigen elastischen Kern und aus dazwischenliegenden Seilen.



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung eines allgemeinen Kontinuumsroboters [RB14]

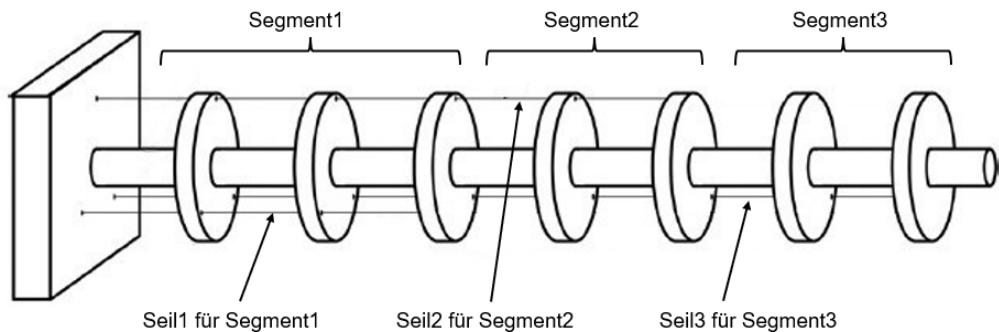
Der andere ist eine Variante, die von Daniel Gossen [Gos21] entwickelt wird.



**Abbildung 2.2:** Aufbau des neuartigen Kontinuumsroboters [Gos21]

## 2.1 Aufbau eines allgemeinen Kontinuumsroboters

Ein allgemeiner Kontinuumsroboter besteht aus drei Hauptkomponenten. Ein elastischer Kern läuft komplett durch den ganzen Manipulator, viele Scheiben werden auf dem Kern festmontiert und einige Seile aktuieren den Roboter. Diese Struktur ähnelt der einer Wirbelsäule oder einer Schlange. Der elastische Kern befindet sich in der Mitte der Scheibe, die Bohrungen für die Seile werden um den Kern herum angeordnet. Bei dieser Diskretisierung im Teilsegment wird jede Scheibe als starrer Körper modelliert. Die Seile verlaufen ebenfalls durch jede Scheibe, werden aber an der Spitze des Segments (bei der letzten Scheibe) befestigt. Ein Kontinuumsroboter kann aus mehreren Segmenten bestehen. In Abbildung 2.3 ist ein Manipulator mit drei Seilen und drei Segmenten dargestellt. Das erste Segment besitzt drei Scheiben und das zweite sowie das dritte Segment besitzen jeweils zwei Scheiben. Drei Seile sind entsprechend an der dritten, der fünften und der siebten Scheibe befestigt.



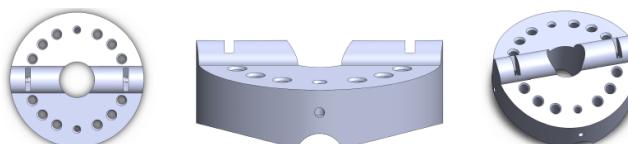
**Abbildung 2.3:** Ein Manipulator mit drei Seilen und drei Segmenten

Die Masse und die Trägheit jedes starren Körpers werden zusammen durch die Scheibe und den elastischen Kern bestimmt. Aufgrund der Eigenschaften der Kernmaterialien werden die beiden benachbarten Scheiben der Teilsegmente unter einem elastischen Effekt (Biegemoment) belastet. Druck-, Torsion- und Scherkräfte werden aufgrund der Inkompressibilität des modellierten elastischen Kerns im Vergleich zu seiner Biegung vernachlässigt. Die Gravitation wird auf den Schwerpunkt jeder Scheibe belastet. Die Seile verlaufen durch jede Scheibe und die Dicke der Scheibe darf nicht vernachlässigt werden. Daher werden die aktuierten Kräfte mit Reibung auf den oberen und den unteren Kanten der Bohrung gewirkt. Außerdem wird das zugehörige Moment auf dem Schwerpunkt der Scheibe berücksichtigt.

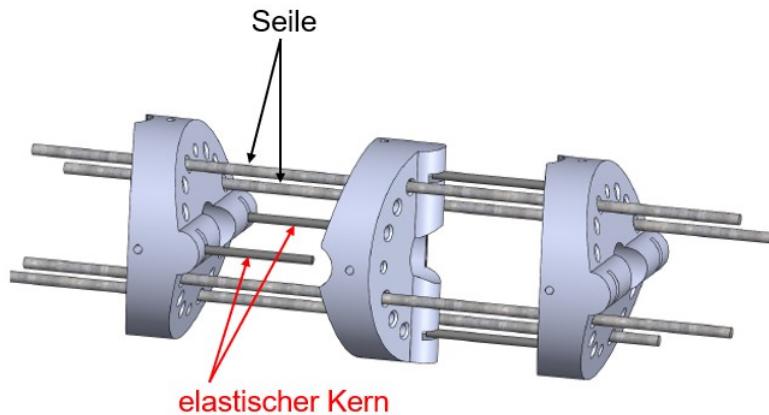
Mit der Krümmung des elastischen Kerns und dem Winkel der Biegeebene wird die Bewegung jedes Teilssegments deutlich beschrieben.

## 2.2 Aufbau eines spezifischen Kontinuumroboters

Als Alternative zur festmontierten Scheibe soll im Folgenden eine neuartige Lösung für eine Zweigelenkkupplung vorgeschlagen werden. Die Scheibe jedes Teilssegments wird senkrecht mit einem Paar superelastischer NiTi-Stäbe als nachgiebige Gelenke kombiniert. Daher funktioniert jeder Abschnitt wie eine 2-FHG-Kontinuumssstruktur. Darüber hinaus wird im Kontinuumsroboter eine abgeschrägte Scheibe verwendet. In jeder Scheibe besteht vier schräge Flächen. Die Winkel der schrägen Flächen werden durch den maximalen Biegewinkel des Roboters bestimmt.



**Abbildung 2.4:** Eine abgeschrägte Scheibe [Gos21]



**Abbildung 2.5:** Die Gelenke des neuartigen Kontinuumsroboters, der elastische Kern besteht aus zwei NiTi-Stäben [Gos21]

Gemäß dieses Designs kann jedes Teilsegment lediglich in einer bestimmten Ebene gebogen werden, wodurch eine hohe Flexibilität und eine verbesserte Torsionsstabilität gewährleistet werden können. Der Kontinuumsroboter besteht aus insgesamt drei Segmenten - es gibt neun Abschnitte und vier Seile in jedem Segment. Dieses Design vereinfacht die Modellierung wesentlich und der Berechnungsaufwand wird reduziert, weil der Winkel der Biegeebene nun als eine Konstante eingesetzt werden kann. Die Komplexität des Gleichungssystems des Statik- und Dynamikmodells wird um mehr als die Hälfte reduziert.

## 3 Modellierung

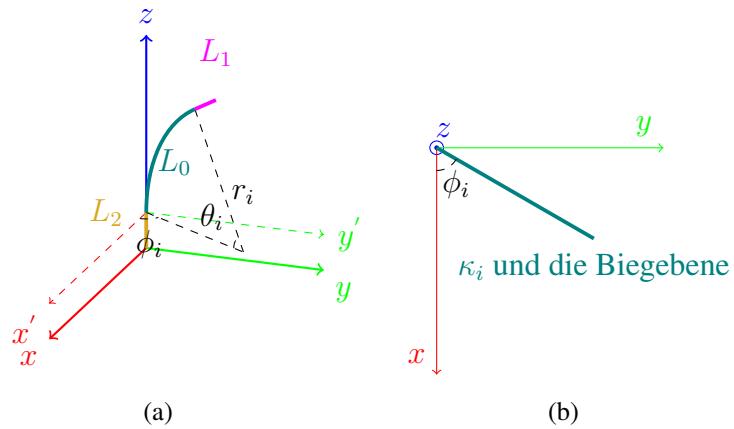
In diesem Kapitel werden die Methoden zur Dynamik- und Statikmodellierung des allgemeinen sowie des neuartigen Kontinuumsroboters eingeführt.

### 3.1 Der „Piecewise-constantcurvature-Ansatz“

„Piecewise-constantcurvature-Ansatz“ ist eine grundlegende Annahme zur Modellierung eines Kontinuumsroboters. Das Robotersystem verhält sich wie eine serielle Kette von stückweise konstant gekrümmten Kontinuumssegmenten innerhalb einer einzigen aktuierten Region. Die Biegung zwischen zwei benachbarten Scheiben wird durch den superelastischen Kern realisiert. Die Dehnung des elastischen Kerns in jedem Teilsegment wird vernachlässigt, d. h. die Länge jedes Krümmung ist konstant. Zur Beschreibung des Kinematikansatzes werden drei Parameter (die Krümmung der Teilsegment  $\kappa$ , der Winkel der Biegebene  $\phi$  und die Länge der Krümmung  $L_0$ ) verwendet. Aufgrund des Aufbaus des Kontinuumsroboters werden die elastischen Kerne in die Bohrung von der Scheibe eingesteckt. Daher ist ein elastischer Kern tatsächlich in drei Stücke eingeteilt: Ein Stück wird als eine Krümmung mit der Länge  $L_0$  in der Mitte gebogen und zwei Stücke sind gerade, sodass sie nicht mehr gebogen werden können. Der Abstand vom Schwerpunkt der aktuellen Scheibe bis zum Endpunkt der Krümmung wird als  $L_1$  definiert. Der Abstand vom Schwerpunkt der letzten Scheibe bis zum Startpunkt der Krümmung wird als  $L_2$  definiert. Der Zusammenhang zwischen den Krümmungen kann wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{cases} \theta = \kappa \cdot L_0 \\ r = 1/\kappa \end{cases} \quad (3.1)$$

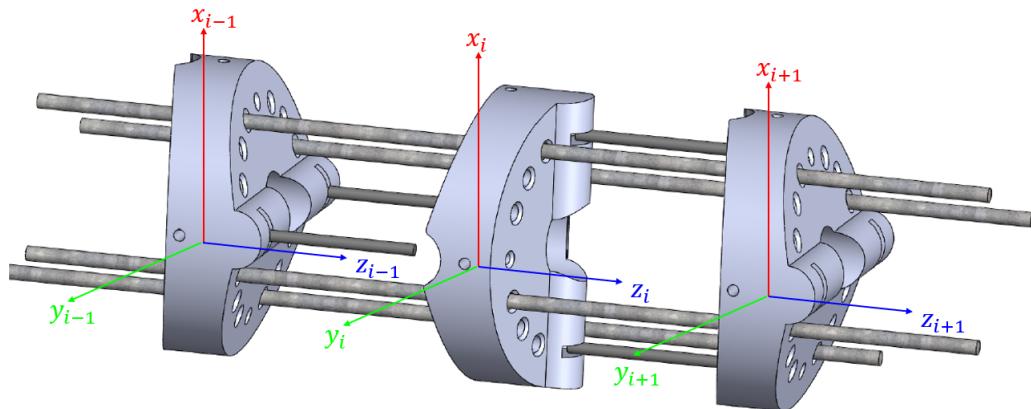
wobei  $\theta$  der Biegewinkel und  $r$  der Biegradius ist. Das Koordinatensystem eines Teilsegments wird mit folgenden Regeln aufgestellt: Die  $Z$ -Achse wird in der tangentialen Richtung der Krümmung definiert, der Schwerpunkt der Scheibe liegt auf der XY-Ebene.



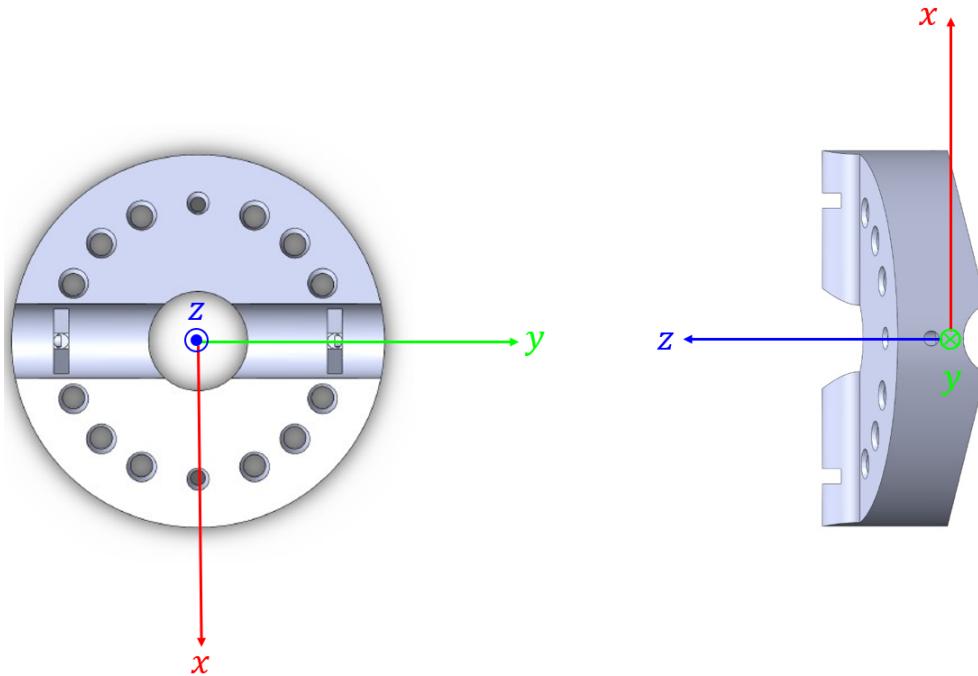
**Abbildung 3.1:** (a) Das Koordinatensystem eines Teilegments, (b) Die Biegebene eines Teilegments

Außerdem wird die Ebene, auf der die Krümmung liegt, als Biegebene definiert.

Ein allgemeiner Kontinuumsroboter besitzt eine identische Biegebene, alle  $\phi_i$  sind identisch. Allerdings liegen die lokalen Biegebenen wegen der Diskretisierung eines neuartigen Kontinuumsroboters entweder auf der XZ-Ebene oder auf der YZ-Ebene. Der Winkel  $\phi_i$  entspricht in dieser Reihenfolge  $0^\circ$  oder  $90^\circ$ . Das Koordinatensystem ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



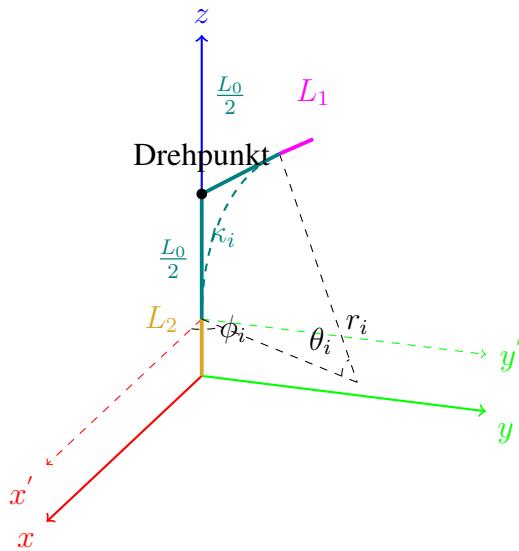
**Abbildung 3.2:** Koordinatensystem in einem neuartigen Kontinuumsroboter [Gos21]



**Abbildung 3.3:** Koordinatensystem in einer Scheibe des neuartigen Kontinuumsroboters [Gos21]

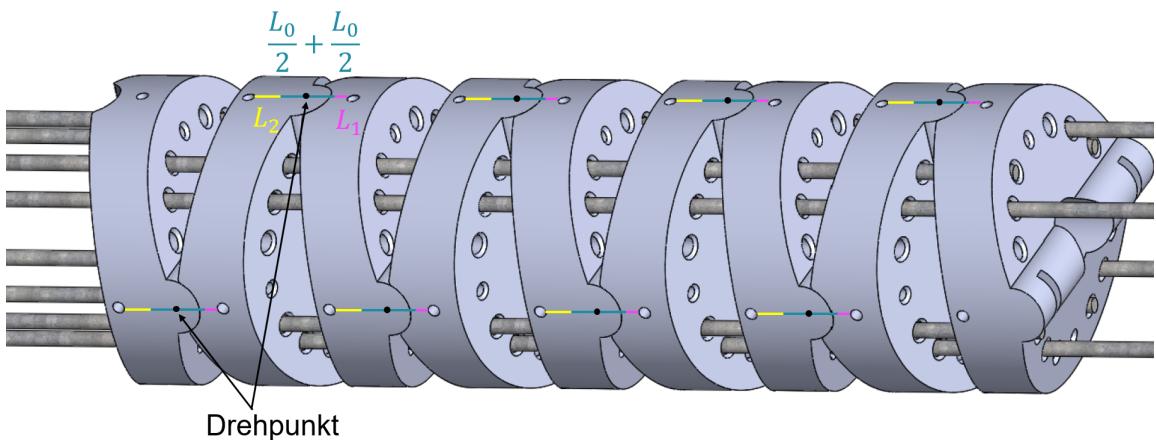
### 3.2 Starrkörper-Ansatz in der Modellierung des neuartigen Kontinuumsroboters

Der allgemeine Kontinuumsroboter kann als eine kontinuierliche Struktur betrachtet werden. Der neuartige Kontinuumsroboter besteht jedoch grundsätzlich aus mehreren Drehgelenken. Daher kann der Roboter auch als ein klassischer serieller Roboter modelliert werden und jedes Teilstück kann als ein Starrkörper diskretisiert werden. Der Unterschied zwischen dem Starrkörper-Ansatz und „Constantcurvature-Ansatz“ liegt in der Kinematik, das Koordinaten- system ist in der Abbildung 3.4 dargestellt:



**Abbildung 3.4:** Koordinatensystem mit dem Starrkörper-Ansatz

Die Parameter  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_i$  und die Regeln zur Aufstellung des Koordinatensystems werden so wie in Kapitel 3.1 definiert. Der Unterschied besteht darin, dass die gesamte Länge des Drehgelenks dem Parameter  $L_0$  entspricht Im „Constant-curvature-Ansatz“ wird  $L_0$  direkt als die Länge des gekrümmten elastischen Kerns definiert, die im Starrkörper Ansatz nicht mehr ein konstanter Parameter ist.



**Abbildung 3.5:** Parameter jedes Drehgelenk

Der Zusammenhang zwischen  $\theta$ ,  $\kappa$  und  $L_0$  in der Gleichung 3.1 wird durch die Gleichung 3.2

formuliert:

$$\begin{cases} \theta_i = 2 \cdot \arctan\left(\frac{L_0}{2} \cdot \kappa_i\right) \\ r_i = \frac{1}{\kappa_i} \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.3 Prinzip der Virtuellen Leistung

Ein Differentialgleichungssystem wird formuliert, um das dynamische Verhalten eines mechanischen Systems darzustellen. Es gibt viele Möglichkeiten zur Lösung des Differentialgleichungssystems, z. B. ODE Solver in Matlab®. Zuerst müssen jedoch die symbolischen Ausdrücke der Gleichungen bestimmt werden. Die Komplexität der Gleichungen hängt von den Freiheitsgraden und äußeren Belastungen des Systems ab. Daher ist es schwierig, anhand von Newton-Euler- oder Lagrangeschen Methoden die Ausdrücke der dynamischen Bewegungsgleichungen mit mehreren FHG sowohl für 2D- als auch für 3D-System zu implementieren. Nach dem Aufbau des allgemeinen Kontinuumsroboters gibt es insgesamt  $2n$  FHG ( $n$  entspricht Anzahl der Abschnitte eines Kontinuumsroboters, normalerweise mehr als zehn). Hierbei bietet das Prinzip der Virtuellen Leistung eine angemessene Möglichkeit zur Implementierung der dynamischen Bewegungsgleichungen für komplexe Mehrkörpersysteme mit mehreren FHG. Ein Mehrkörpersystem wird als Ganzes mithilfe dieser Methode analysiert. Zwei Hilfsgrößen „partielle Winkelgeschwindigkeiten“ und „partielle Geschwindigkeiten“ werden gebildet und es werden nur die äußeren Belastungen des Mehrkörpersystems berücksichtigt. Danach wird das Skalarprodukt von der Kräfte und der linearen Geschwindigkeiten bzw. der Drehmomenten und der Winkelgeschwindigkeiten berechnet. Die Größen aus dem Skalarprodukt sind die sogenannten „Virtuellen Leistungen“. Der Vorteil von Maple ist, dass es schneller rechnet als die symbolic toolbox in Matlab. Die Kane-Methode bietet sowohl die Vorteile der Newton-Euler- als auch der Lagrange-Methode bei der Modellierung des Kontinuumsroboters:

- Im Gegensatz zur Newton-Euler Methode sind explizite Berechnungen der inneren Kräfte bei jedem Abschnitt nicht erforderlich,
- Im Gegensatz zur Euler-Lagrange Methode können bei dem Prinzip der virtuellen Leistung nicht-konservative Effekte direkt in die Bewegungsgleichungen integriert werden. Durch die Berechnung der Energieverlustfunktionen wird die Analyse verkompliziert.

Das Dynamikmodell eines Kontinuumsroboters wird mithilfe des Prinzips der Virtuellen Leistung mit der folgenden Gleichung formuliert: Die virtuelle Leistung  $P$  ist gleich der Summe des Skalarprodukts zwischen den äußeren Kräften  $\mathbf{F}_{\text{ex},i}$  und den linearen Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i$  bzw. den äußeren Momenten  $\mathbf{M}_{\text{ex},i}$  und den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i$  vom  $i$ -ten Abschnitt.

$$P = \sum_i (\mathbf{M}_{\text{ex},i} \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{F}_{\text{ex},i} \cdot \mathbf{v}_i) \quad (3.3)$$

Die linearen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten können mithilfe der generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_k$  und deren partialen Geschwindigkeiten  $v_{i,k}$  und partialen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{i,k}$  definiert werden.

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_k \boldsymbol{\omega}_{i,k} \dot{q}_k, \quad \boldsymbol{v}_i = \sum_k \boldsymbol{v}_{i,k} \dot{q}_k \quad (3.4)$$

Durch diese Formulierung entspricht die zeitliche Änderung der virtuellen Leistung  $\Delta P$  und ist gleich 0, wie in der folgenden Gleichung dargestellt wird.

$$\Delta P = \sum_k \left( \left[ \sum_i (\boldsymbol{M}_{\text{ex},i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i,k} + \boldsymbol{F}_{\text{ex},i} \cdot \boldsymbol{v}_{i,k}) \right] \Delta \dot{q}_k \right) = 0 \quad (3.5)$$

Wenn die Gleichung 3.5 für alle Werte von  $\Delta \dot{q}_k$  gelten kann, muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\sum_i (\boldsymbol{M}_{\text{ex},i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i,k} + \boldsymbol{F}_{\text{ex},i} \cdot \boldsymbol{v}_{i,k}) = 0 \quad (3.6)$$

Im Differentialgleichungssystem 3.6 ist die dynamische Konfiguration des Kontinuumsroboters vollständig beschreibt, die  $k$ -te Gleichung definiert die  $k$ -te Koordinate  $q_k$ .

## 3.4 Kinematikanalyse

### 3.4.1 Kinematik mit „Constant-Curvature-Ansatz“

Um die Kinematik zu implementieren, muss zuerst das generalisierte Koordinatensystem für jeden Abschnitt des Kontinuumsroboters definiert werden. Eine verbesserte Parametrisierung mit zwei orthogonalen Krümmungen  $\Delta_{x,i}$  und  $\Delta_{y,i}$  wird anstelle der Parametrisierung  $\theta_i$  und  $\phi_i$  im Kapitel 3.1 verwendet, um die lokale Lage und Orientierung des Endeffektor zu beschreiben. Der Zusammenhang der Parameter wird durch die folgende Gleichungen definiert,

$$\begin{cases} \Delta_{x,i} &= \theta_i \cos(\phi_i) \\ \Delta_{y,i} &= \theta_i \sin(\phi_i) \\ \Delta &= \sqrt{\Delta_{x,i}^2 + \Delta_{y,i}^2} \end{cases} \quad (3.7)$$

$\theta_i$  und  $\phi_i$  können wieder mit  $\Delta_{x,i}$  und  $\Delta_{y,i}$  umgerechnet werden,

$$\begin{cases} \theta_i = \Delta \\ \phi_i = \arctan \left( \frac{\Delta_{y,i}}{\Delta_{x,i}} \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

Diese Parameter enthalten gleichzeitig beide Informationen über  $\kappa_i$  und  $\phi_i$ . Der Grund für die Anwendung der verbesserten Parametrisierung liegt darin, dass die Singularität der Massenmatrix in den Bewegungsgleichungen vermieden werden kann [DBR20]. Das lokale generalisierte Koordinatensystem wird durch den folgenden Vektor dargestellt:

$$\mathbf{q}_{\text{lcl},i} = \begin{bmatrix} \Delta_{x,i} & \Delta_{y,i} \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

Das gesamte Koordinatensystem wird wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta x_3 & \Delta y_3 & \dots & \Delta x_n & \Delta y_n \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

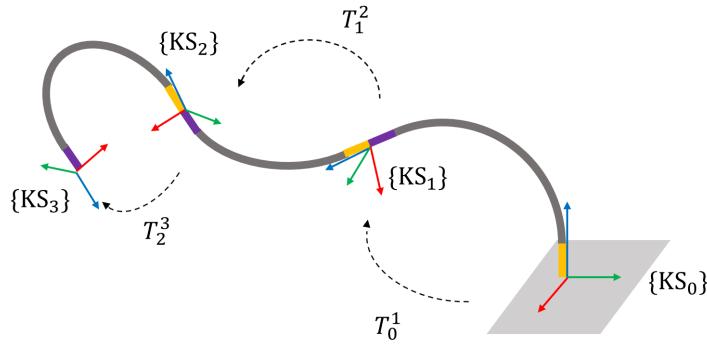
Es ist zu beachten, dass die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}_i$  des neuartigen Kontinuumsroboters wegen der konstanten Einsatzes von  $\phi_i$  wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta x_3 & \Delta y_3 & \dots & \Delta x_n & \Delta y_n \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 \cos(0) & \theta_1 \sin(0) & \theta_2 \cos(\pi/2) & \theta_2 \sin(\pi/2) & \dots & \theta_n \cos(\phi_n) & \theta_n \sin(\phi_n) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.11)$$

Gleichung 3.11 wird lautet Gleichung 3.1 weiter vereinfacht:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \dots & \kappa_n \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

Alle Größe müssen zum Schluss wieder im kartesischen Koordinatensystem zusammengefasst werden, daher wird der Koordinatenursprung des Teilsegments auf dem Schwerpunkt jeder Scheibe definiert, wie in Abbildung 3.6 dargestellt ist. Mithilfe der homogenen Transformationsmatrix kann die Lage jedes Teilsegments und des Endeffektors rekursiv berechnet werden.



**Abbildung 3.6:** Darstellung des Koordinatensystems des Kontinuumsroboters und der Transformationsmatrix  $T_{i-1}^i$ , KS<sub>0</sub> ist das globale Koordinatensystem und KS<sub>i</sub> ist das lokale Koordinatensystem

Mit der homogenen Transformationsmatrix  $T_{i-1}^i$  wird die Lage des Koordinatensystems (KS)<sub>i</sub> im Koordinatensystem (KS)<sub>i-1</sub> beschrieben. Eine homogene Transformationsmatrix besteht aus zwei Teilen: Rotation  $R_{i-1}^i$  und Translation  $t_{i-1}^i$

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & t_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.13)$$

Aus der geometrischen Analyse wird die Translation  $t_{i-1}^i$  des (KS)<sub>i</sub> im (KS)<sub>i-1</sub> durch den folgenden Vektor bestimmt,

$$t_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \left( \frac{(1-\cos(\theta_i))}{\kappa_i} + L_1 \sin(\theta_i) \right) \cos(\phi_i) \\ \left( \frac{(1-\cos(\theta_i))}{\kappa_i} + L_1 \sin(\theta_i) \right) \sin(\phi_i) \\ \frac{\sin(\theta_i)}{\kappa_i} + L_1 \cos(\theta_i) + L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{(1-\cos(\Delta_i))}{\kappa_i} + L_1 \sin(\Delta_i) \right) \frac{\Delta_{x,i}}{\Delta_i} \\ \left( \frac{(1-\cos(\Delta_i))}{\kappa_i} + L_1 \sin(\Delta_i) \right) \frac{\Delta_{y,i}}{\Delta_i} \\ \frac{\sin(\Delta_i)}{\kappa_i} + L_1 \cos(\Delta_i) + L_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Um die Orientierung zu bestimmen, wird die lokale Rotationsmatrix  $R_{i-1}^i$  aus dem Euler-Winkel zusammengesetzt: Zuerst dreht das Koordinatensystem um den Winkel  $\phi_i$  um die letzte Achse  $z_{i-1}$ , danach dreht das aktuelle Koordinatensystem um den Winkel  $\theta_i$  um die aktuelle Achse  $y_i$ , zum Schluss dreht das aktuelle Koordinatensystem um den Winkel  $-\phi_i$  um aktuelle Achse  $z_i$  wieder zurück. Die Rotation wird durch die folgende Multiplikation bestimmt:

$$R_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c_{\phi_i} & -s_{\phi_i} & 0 \\ s_{\phi_i} & c_{\phi_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & 0 & -s_{\theta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\theta_i} & 0 & c_{\theta_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-\phi_i} & -s_{-\phi_i} & 0 \\ s_{-\phi_i} & c_{-\phi_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Die lokale Rotationsmatrix wird weiter mit der verbesserten Parametrisierung vereinfacht:

$$\mathbf{R}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta_{x,i}^2}{\Delta_i^2}(\cos(\Delta_i) - 1) & \frac{\Delta_{x,i}\Delta_{y,i}}{\Delta_i^2}(\cos(\Delta_i) - 1) & \frac{\Delta_{x,i}}{\Delta_i} \sin(\Delta_i) \\ \frac{\Delta_{x,i}\Delta_{y,i}}{\Delta_i^2}(\cos(\Delta_i) - 1) & 1 + \frac{\Delta_{y,i}^2}{\Delta_i^2}(\cos(\Delta_i) - 1) & \frac{\Delta_{y,i}}{\Delta_i} \sin(\Delta_i) \\ -\frac{\Delta_{x,i}}{\Delta_i} \sin(\Delta_i) & -\frac{\Delta_{y,i}}{\Delta_i} \sin(\Delta_i) & \cos(\Delta_i) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Die Position  $\mathbf{p}_i$  der  $i$ -ten Scheibe im KS<sub>0</sub> wird rekursive berechnet:

$$\mathbf{p}_i = \prod_1^i \mathbf{T}_{i-1}^i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i$  der  $i$ -ten Scheibe im KS<sub>0</sub> entspricht der zeitlichen Ableitung von  $\mathbf{p}_i$ , und die Beschleunigung  $\mathbf{a}_i$  ist die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{v}_i$ .

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{v}}_i \end{cases} \quad (3.18)$$

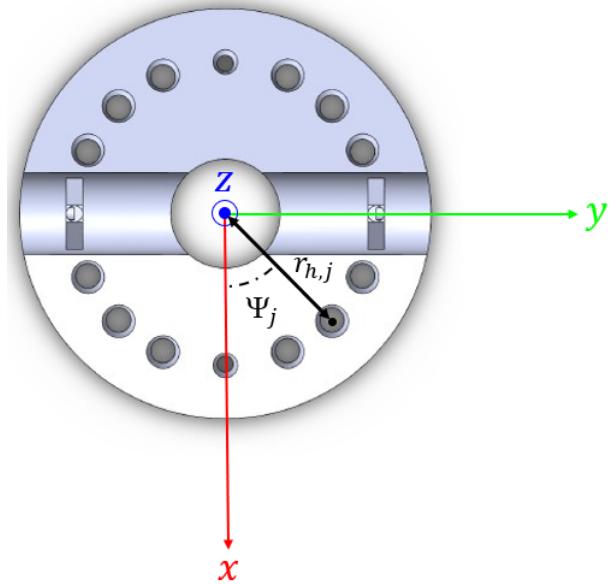
Die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_i$  der  $i$ -ten Scheibe im KS<sub>0</sub> basiert auf der zeitlichen Ableitung der Rotationsmatrizen:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z,i} & \omega_{y,i} \\ \omega_{z,i} & 0 & -\omega_{x,i} \\ -\omega_{y,i} & \omega_{x,i} & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}_i^0 \mathbf{R}_i^{0T} \quad (3.19)$$

Die Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}_i$  ist die zeitliche Ableitung von  $\boldsymbol{\omega}_i$ :

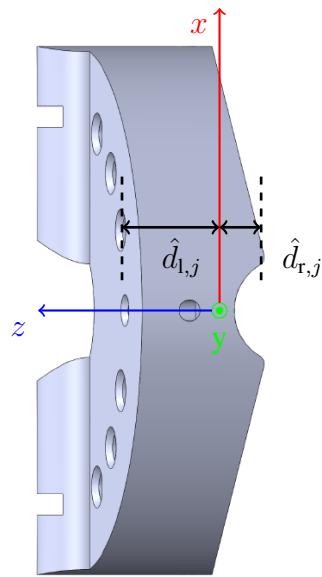
$$\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (3.20)$$

Außerdem werden auch einige geometrische Parameter über die Seile, die Bohrungen für die Seile und die Dicke der Scheiben definiert. Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der  $j$ -ten Bohrung und dem Mittelpunkt der Scheibe wird als  $\hat{r}_{h,j}$  bezeichnet, und der Winkel zwischen der  $j$ -ten Bohrung und der  $x$ -Achse wird als  $\psi_j$  bezeichnet.



**Abbildung 3.7:** Radialer Abstand einer Bohrung und Winkel zwischen der Bohrung und der  $x$ -Achse

Die Dicke einer Scheibe darf bei der Modellierung nicht vernachlässigt werden. Hierbei werden die axialen Abstände von der linken und der rechten Kante der  $j$ -ten Bohrung zu der  $x$ -Achse der Scheibe als die linke Dicke  $\hat{d}_{l,j}$  und die rechte Dicke  $\hat{d}_{r,j}$  definiert:



**Abbildung 3.8:** Der axiale Abstand von der linken und der rechen Kante der Bohrung zum Schwerpunkt der Scheibe

### 3.4.2 Kinematik mit dem Starrkörper-Ansatz

Im Vergleich zur Kinematik mit dem „Constant-curvature-Ansatz“ gibt es nur zwei Änderungen in der Herleitung der Kinematik. Der Zusammenhang zwischen  $\kappa_i$  und  $\theta_i$  (Gleichung 3.1) wird durch die Gleichung 3.2 ersetzt und die Translation in der Transformationsmatrix (Gleichung 3.14) wird durch die Gleichung 3.21 ersetzt.

$$\mathbf{t}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} (\frac{L_0}{2} \cdot \sin(\theta_i) + L_1 \cdot \sin(\theta_i)) \cdot \cos(\phi_i) \\ (\frac{L_0}{2} \cdot \sin(\theta_i) + L_1 \cdot \sin(\theta_i)) \cdot \sin(\phi_i) \\ \frac{L_0}{2} \cdot \cos(\theta_i) + \frac{L_0}{2} + L_1 \cdot \cos(\theta_i) + L_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

## 3.5 Seilkinematik

Aufgrund der Antriebesmethode des seilaktuierten Kontinuumsroboters ist es sinnvoll, dass der Zusammenhang zwischen der Änderung der Seillänge und der Krümmung  $\kappa$  untersucht wird. Aufgrund der Elastizität der Seile wird auch die Dehnung berücksichtigt. Das Ziel ist es, dass die Lage des Endeffektors über die gesamte Zuglänge der Seile  $\Delta l$  bestimmt werden kann. Die Zuglänge  $\Delta l_j$  besteht aus zwei Komponenten: der Änderung aufgrund der Biegung  $\Delta l_{\text{geo},ij}$  und der Dehnung aufgrund der Elastizität  $\Delta l_{\text{el},ij}$ .

$$\Delta l_j = \sum_i (\Delta l_{\text{geo},ij} + \Delta l_{\text{el},ij}) \quad (3.22)$$

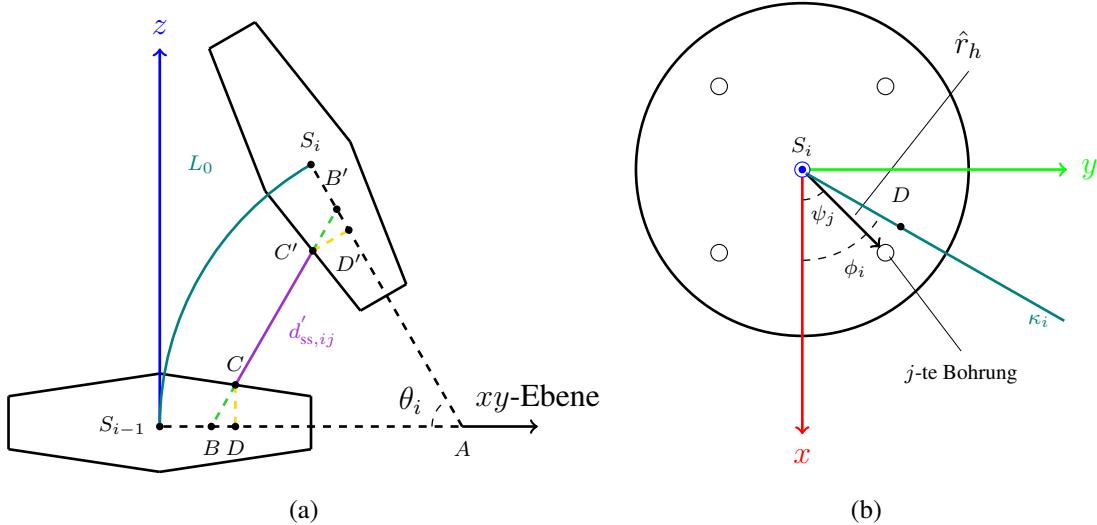
### 3.5.1 Seilkinematik

Die Seillängen zwischen zwei benachbarten Scheiben werden aus zwei Schritten bestimmt. Zuerst wird die Seillänge  $d_{ss,ij}$  unter der Bedingung  $L_1 = L_2 = 0$  in der Biegebene berechnet. Danach werden  $L_1$  und  $L_2$  als Variablen eingesetzt. In der folgenden Abbildung ist eine schematische Darstellung der Biegung zwischen der  $i$ -ten und der  $i+1$ -ten Scheibe gezeichnet,  $S_i$  und  $S_{i+1}$  sind die Schwerpunkte der Scheiben aufgeführt, die blaue Krümmung ist der elastische Kern. Die violette Linie  $CC'$  ist das  $j$ -te Seil der  $i$ -ten Scheibe. Die grünen Linien  $BC$  und  $B'C'$  entsprechen der Verlängerung bis zur XY-Ebene. Die gelben Linien sind die Positionen der Bohrungen für die Seile. Es ist zu erkennen, dass die Längen der gelben Linien in der Reihenfolge wegen der symmetrischen Zweigelenkkupplung gleich  $\hat{d}_{r,j}$  oder  $\hat{d}_{l,j}$  sind. Der Radius der Bohrung wird vernachlässigt.

$$\begin{cases} CD = C'D' = \hat{d}_{r,j}, & i \bmod 2 = 1 \\ CD = C'D' = \hat{d}_{l,j}, & i \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Die Definition der linken und der rechten Dicke in Vektorform in der Gleichung 3.24 lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{r,j} &= \left[ -\hat{d}_{r,j} \quad -\hat{d}_{l,j} \quad -\hat{d}_{r,j} \quad -\hat{d}_{l,j} \quad \dots \quad -\hat{d}_{r,j} \quad -\hat{d}_{l,j} \right] \\ \mathbf{d}_{l,j} &= \left[ \hat{d}_{l,j} \quad \hat{d}_{r,j} \quad \hat{d}_{l,j} \quad \hat{d}_{r,j} \quad \dots \quad \hat{d}_{l,j} \quad \hat{d}_{r,j} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$



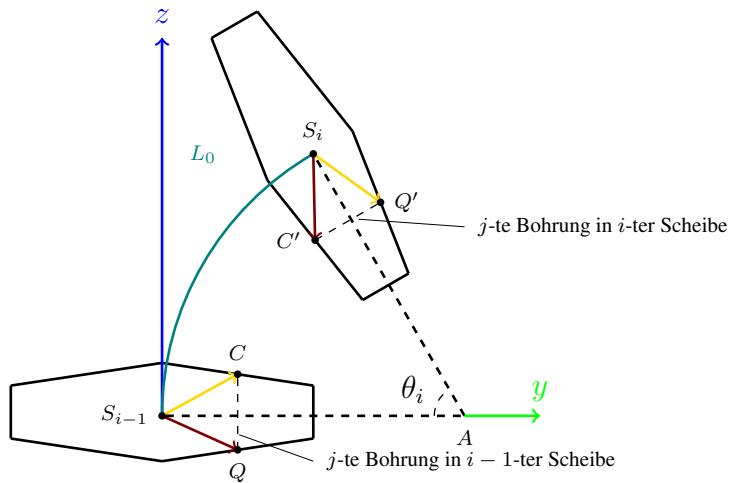
**Abbildung 3.9:** (a) Vorderansicht der Seilkinematik auf der Biegebene, (b) Draufsicht auf die XY-Ebene der Seilkinematik, die vier inneren Kreise sind die Bohrungen für die Seile, der Radius kann vernachlässigt werden.

Der lokale Ortsvektor der Bohrung wird durch die Gleichung 3.25 formuliert,

$$\mathbf{r}_{hr,lcl,ij} = \begin{bmatrix} \hat{r}_h \cdot \cos(\phi_i) \\ \hat{r}_h \cdot \sin(\phi_i) \\ d_{r,ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{hl,lcl,ij} = \begin{bmatrix} \hat{r}_h \cdot \cos(\phi_i) \\ \hat{r}_h \cdot \sin(\phi_i) \\ d_{l,ij} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Dieser wird weiter ins globalen Koordinatensystem rotiert.

$$\mathbf{r}_{hr,ij} = \prod_1^i \mathbf{R}_{i-1}^i \mathbf{r}_{hr,lcl,ij}, \quad \mathbf{r}_{hl,ij} = \prod_1^i \mathbf{R}_{i-1}^i \mathbf{r}_{hl,lcl,ij} \quad (3.26)$$



**Abbildung 3.10:** Vorderansicht auf die YZ-Ebene, der gelbe Vektor ist  $r_{hr,ij}$ , der braune Vektor ist  $r_{hr,ij}$

Durch die geometrische Analyse wird  $d'_{ss,ij}$  in einem gleichschenkligen Dreieck  $\triangle ABB'$  bestimmt. In der folgenden Tabelle werden den Linien kleine Buchstaben zugewiesen, um die Herleitung zu vereinfachen,

**Tabelle 3.1:** Definition der Linien im Dreieck  $\triangle ABB'$

$BB'$	$a$
$AB, AB'$	$b$
$BC, B'C'$	$c$
$BD, B'D'$	$d$
$DS_i, DS_{i+1}$	$e$
$AS_i, AS_{i+1}$	$\frac{1}{\kappa_i}$
$DC, D'C'$	$d_{r,j}$ oder $d_{l,j}$
$CC'$	$d'_{ss,ij}$

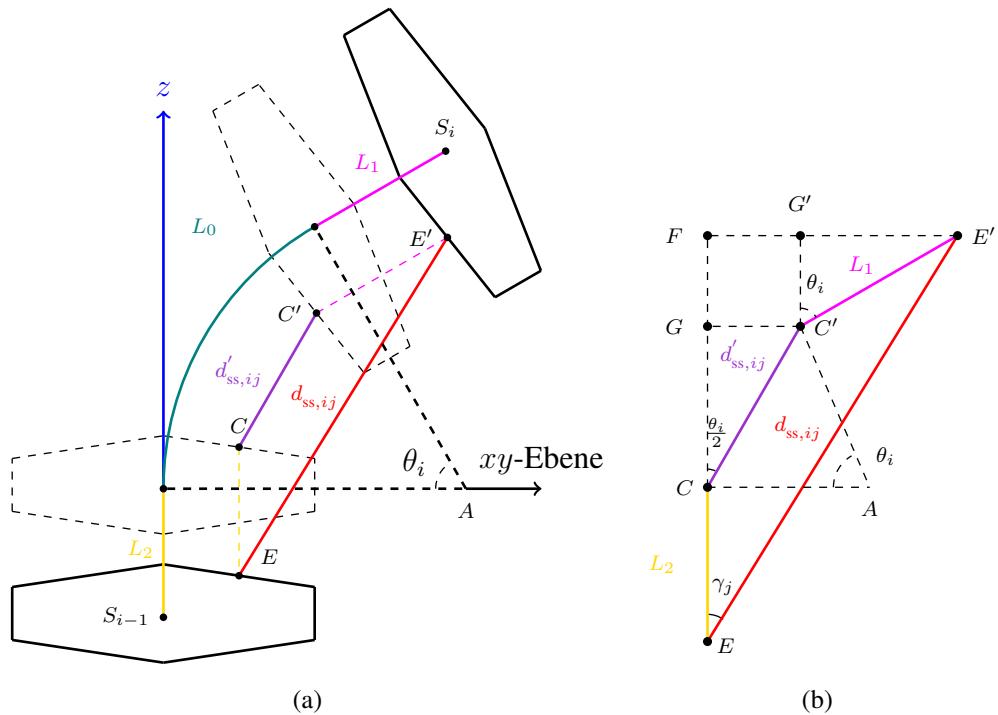
Die Projektion  $DS_i$  des Abstands vom Schwerpunkt zu der  $j$ -ten Bohrung auf der Biegebene wird wie folgt bestimmt:

$$e = \hat{r}_h \cos(\psi_j - \phi_i) \quad (3.27)$$

Die Seilänge wird durch folgende Gleichungen hergeleitet:

$$\begin{aligned}
 d'_{ss,ij} &= a - 2c \\
 a &= \sqrt{b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos(\theta_i)} \\
 c &= \frac{d_{r,j}}{\cos(\theta/2)} \text{ oder } \frac{d_{l,j}}{\cos(\theta/2)} \\
 d &= d_{r,j} \cdot \tan(\theta_i/2) \\
 b &= \frac{1}{\kappa_i} - e + d
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Danach werden  $L_1$  und  $L_2$  berücksichtigt. Der Startpunkt  $C$  und der Endpunkt  $C'$  werden entlang der tangentialen Richtung von der Krümmung um  $L_2$  und  $L_1$  verlängert.



**Abbildung 3.11:** (a) Vorderansicht der Seilkinematik auf der Biegebene unter der Berücksichtigung der  $L_1$  und der  $L_2$ , (b) Geometrische Darstellung der Seillänge  $d_{ss}$  auf der Biegebene

Durch die geometrische Analyse wird  $d_{ss,ij}$  in einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle EFE'$  bestimmt:

$$d_{ss,ij} = \sqrt{(d'_{ss,ij} \cdot \cos(\theta/2) + L_1 \cos(\theta) + L_2)^2 + (d'_{ss,ij} \cdot \sin(\theta/2) + L_1 \sin(\theta))^2} \tag{3.29}$$

Die Änderung der  $j$ -ten Seilänge  $\Delta l_{geo,ij}$  zwischen zwei benachbarten Scheiben wird durch die

Gleichung 3.30 formuliert:

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{geo},ij} &= L_0 - 2 \cdot d_{r,j} - d_{ss,ij}, \quad i \bmod 2 = 1 \\ \Delta l_{\text{geo},ij} &= L_0 - 2 \cdot d_{l,j} - d_{ss,ij}, \quad i \bmod 2 = 0\end{aligned}\quad (3.30)$$

Da jedes Seil an der letzten Scheibe befestigt ist, ist die Seillängeänderung an dieser Scheibe null. Die gesamte Seillängeänderung der nächsten Scheibe ist die Summe aus der gesamten Seillängeänderung der vorherigen Scheibe. Die gesamte  $j$ -te Seillängeänderung  $i$ -ter Scheibe wird durch die Gleichung 3.31 formuliert:

$$\Delta l_{\text{geo,sum},ij} = \begin{cases} 0, & i = n \\ \Delta l_{\text{geo,sum},i+1,j} + \Delta l_{\text{geo},i+1,j}, & i < n \end{cases} \quad (3.31)$$

Alle Seile verlaufen parallel durch den ganzen Roboter. Hierbei sind alle Orientierungen zwischen zwei benachbarten Bohrungen identisch. Die Orientierung  $\mathbf{p}_{h,i}$  zwischen zwei benachbarten Bohrungen wird durch Winkel  $\gamma$  bestimmt,

$$\gamma_i = \arctan \left( \frac{d'_{ss,ij} \cdot \sin(\theta/2) + L_1 \sin(\theta)}{d'_{ss,ij} \cdot \cos(\theta/2) + L_1 \cos(\theta) + L_2} \right) \quad (3.32)$$

Diese werden weiter zum globalen Koordinatensystem rotiert.

$$\mathbf{p}_{h,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\phi_1) \\ \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\phi_1) \\ \cos(\gamma_1) \end{bmatrix}, & i = 1 \\ \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{R}_{i-j}^j \begin{bmatrix} \sin(\gamma_i) \cdot \cos(\phi_i) \\ \sin(\gamma_i) \cdot \sin(\phi_i) \\ \cos(\gamma_i) \end{bmatrix}, & i > 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Es ist eine spezielle Konfiguration des neuartigen Kontinuumsroboters zu betrachten: Wenn die äußereren Lastvektoren ohne Berücksichtigung der Gravitation genauso auf der XZ- oder der YZ-Ebene liegen, treten Singularitäten bei den heftigen Gelenken. Diese heftigen Gelenke können nicht mehr gebogen. In diesem Fall muss die Seillänge nicht mit dem Kosinussatz berechnet werden, sondern auf dem originalen Wert bleiben.

### 3.5.2 Elastizität der Seile

In Kapitel 3.5.1 wurde der Abstand zwischen zwei benachbarten Bohrungen nämlich Seillänge implementiert. Allerdings muss noch die Elastizität des Seilmaterials berücksichtigt, um die

genaue Änderung der Seillänge bestimmen zu können. Die Zugkraft eines Seils pro Teilsegment sind aufgrund der Reibung zwischen der Bohrung und dem Seil nicht konstant. Die Zugkraft eines Seils im Äußeren der  $j$ -ten Bohrung wird als  $\hat{\tau}_{ij}$  definiert und der innere Teil wird als  $\hat{\tau}_{i+1,j}$  ( $i < n$ ) definiert. Die gesamte Dehnung des Seils in jedem Teilsegment ergibt sich aus der Aufsummierung der zwei Komponenten.

$$\Delta l_{\text{el},ij} = \frac{d_{\text{ss},ij} \cdot \hat{\tau}_{ij}}{E_{\text{Seil}} \cdot A_{\text{Seil}}} + \frac{(d_{\text{l},ij} + d_{\text{r},ij}) \cdot \hat{\tau}_{i+1,j}}{E_{\text{Seil}} \cdot A_{\text{Seil}}} \quad (3.34)$$

## 3.6 Belastungsanalyse

In der Kane-Methode müssen nur die äußeren Belastungen analysiert werden. Die gesamten externen Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ex},i}$  und Momente  $\mathbf{M}_{\text{ex},i}$ , die auf den Kontinuumsroboter wirken und aus fünf Komponenten Elastizität, Gravitation, Actuation, Reibung und Trägheit bestehen, werden in diesem Kapitel implementiert.

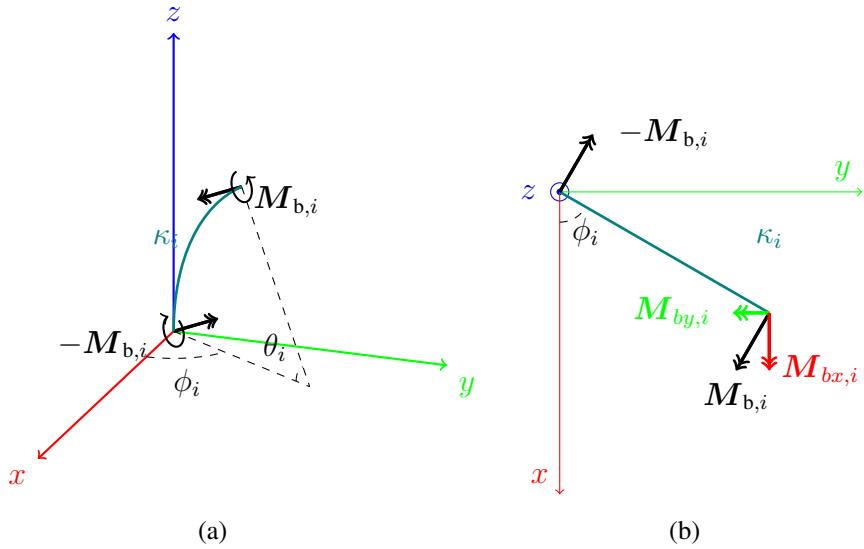
### 3.6.1 Gravitation

Die Belastung  $\mathbf{F}_{\text{g},i}$  berücksichtigt die auf den Roboter wirkenden Körperkräfte aufgrund der Gravitation. Die Kraft  $\mathbf{F}_{\text{g},i}$  wirkt auf den Schwerpunkt jeder Scheibe im globalen Koordinatensystem  $KS_0$ , wobei  $m_i$  die Masse der  $i$ -ten Scheibe ist. Der Parameter  $g$  ist die Gravitationsbeschleunigung. Die  $Z$ -Achse ist die axiale Richtung des Kontinuumsroboters, daher wirkt die Gravitation in der  $y$ -Richtung darauf.

$$\mathbf{F}_{\text{g},i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_i g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

### 3.6.2 Elastizität

Bei elastischen Effekten werden die Kräfte und Momente berücksichtigt, die im Inneren des Kontinuumskerns als Reaktion auf eine Verformung entstehen. Biegemomente des elastischen Kerns können direkt durch die generalisierten Koordinaten berechnet werden. Die skalare Größe des Biegemoments vom  $i$ -ten Teilsegment ist proportional zu  $\kappa_i$  mit der Proportionalitätskonstante  $EJ_{xx}$ , wobei  $E$  das Young's Modul und  $J_{xx}$  der Hauptträgheitsmoment des elastischen Kerns ist. Die Richtung des Biegemoments ist senkrecht zur Biegeebene, und die lokale Orientierung muss wieder zum globalen Koordinatensystem rotiert werden.



**Abbildung 3.12:** (a) Das Biegemoment in der 3D Darstellung, (b) Das Biegemoment auf der XY-Ebene

$$\boldsymbol{M}_{b,i} = \begin{cases} E J_{xx} \kappa_1 \begin{bmatrix} s_{\phi_1} \\ -c_{\phi_1} \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 1 \\ E J_{xx} \kappa_i \prod_1^{i-1} \boldsymbol{R}_{i-1}^i \begin{bmatrix} s_{\phi_i} \\ -c_{\phi_i} \\ 0 \end{bmatrix}, & i > 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

Außerdem gibt es noch ein Biegedämpfungsmoment, das proportional zur zeitlichen Ableitung von  $\kappa_i$  mit der Proportionalitätskonstante  $C_b$  ist. Die Orientierung des Biegedämpfungsmoments ist mit dem Biegmoment identisch.

$$\boldsymbol{M}_{bD,i} = \begin{cases} C_b \dot{\kappa}_1 \begin{bmatrix} s_{\phi_1} \\ -c_{\phi_1} \\ 0 \end{bmatrix}, & i = 1 \\ C_b \dot{\kappa}_i \prod_1^{i-1} \boldsymbol{R}_{i-1}^i \begin{bmatrix} s_{\phi_i} \\ -c_{\phi_i} \\ 0 \end{bmatrix}, & i > 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

Es ist zu beachten, dass ein elastischer Kern zwei gleich große Momente in entgegengesetzter Richtung an den Start- und Endpunkten erzeugt. Auf der anderen Seite ergibt sich die elastische Belastung an jeder Scheibe (mit Ausnahme der letzten Scheibe) aus der Summe dieser beiden Effekte zwischen zwei benachbarten Teilstücken. Es gibt jedoch bei der letzten Scheibe nur einen angrenzenden elastischen Kern. Daher wird das elastische Moment, das auf jeder Scheibe liegt, durch die Gleichung 3.38 implementiert.

$$\mathbf{M}_{\text{el},i} = \begin{cases} \mathbf{M}_{\text{b},i} + \mathbf{M}_{\text{bD},i} - \mathbf{M}_{\text{b},i+1} - \mathbf{M}_{\text{bD},i+1}, & i < n \\ \mathbf{M}_{\text{b},n} + \mathbf{M}_{\text{bD},i}, & i = n \end{cases} \quad (3.38)$$

### 3.6.3 Actuation und Reibung

Bei der aktuierten Belastung werden die Kräfte und die Momente berücksichtigt, die durch die Zugkräfte der Seile auf jede Scheibe wirken. Durch den Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  werden die aktuierten Kräften der Antriebe beschrieben, die auf die erste Scheibe wirken.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & \dots & \hat{\tau}_{1,j} & \dots & \hat{\tau}_{1,d} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Der Index  $d$  ist die Anzahl der Seilkraft. Darüber hinaus resultieren die Reibungskräfte aus dem Kontakt zwischen den Seilen und den Scheiben. Die resultierenden Kräfte werden auf den Kanten der Bohrungen gewirkt. Dadurch wird noch ein Moment auf dem Schwerpunkt der Scheibe erzeugt. Es wird eine geometrische Analyse von den Seilverlegungen  $\mathbf{p}_{\text{h},i}$  und den Positionen der Bohrungen  $\mathbf{r}_{\text{hr},ij}, \mathbf{r}_{\text{hl},ij}$  im Kapitel 3.5.1 verwendet, um die Belastung auf jeder Scheibe zu bestimmen.

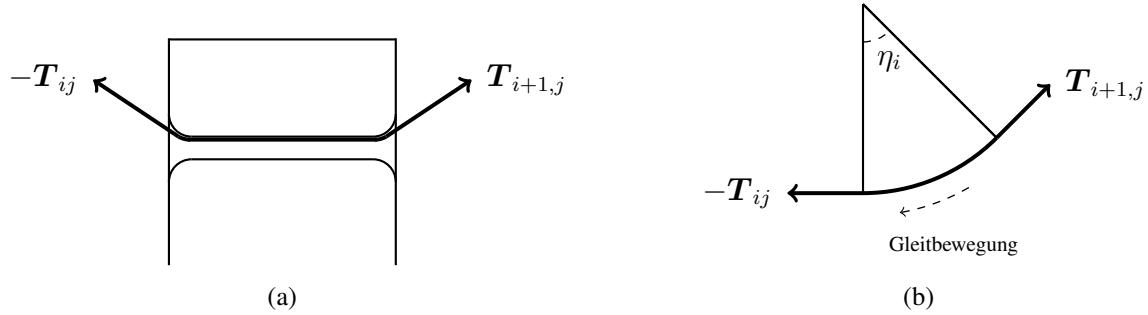
Durch die Zugkräfte vor und nach der Scheibe und durch den Reibungskräfte wird die Implementierung erschwert. Die Berechnung der Normalkraft und Normalrichtung ist erforderlich, wenn ein Modell der Gleitreibung verwendet wird. Aufgrund der „Umschlingung“ der Seile um die innere Fläche der Bohrung wird die Euler-Eytelwein-Formel, auch „Seilreibungsformel“ genannt, verwendet. Abbildung 3.13 enthält die relevantesten Modellparameter.

Die skalare Größe  $\hat{\tau}_{ij}$  kann laut der Seilreibungsformel (Gleichung 3.40) rekursiv berechnet werden, wobei  $\mu$  der Reibungskoeffizient und  $\eta_i$  der Winkel von der Umschlingung (Gleichung 3.41) ist.

$$\hat{\tau}_{i+1,j} = \begin{cases} \hat{\tau}_{ij} e^{\text{sign}(d_{\text{ss0},ij} - d_{\text{ss},ij}) \mu \eta_i}, & \text{Statikmodellierung} \\ \hat{\tau}_{ij} e^{\text{sign}(d_{\text{dsk},ij}) \mu \eta_i}, & \text{Dynamikmodellierung} \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\eta_i = \arccos(\mathbf{p}_{\text{h},i} \cdot \mathbf{p}_{\text{h},i+1}) \quad (3.41)$$

Es ist zu erkennen, dass die Richtung der Reibungskraft von der Richtung der Gleitbewegung

**Abbildung 3.13:** Seilreibung

abhängt. In der Statikmodellierung wird das Vorzeichen über die Differenz der Seillängeänderung auf jeder Scheibe jeweils in der Ausgangslage  $d_{ss0,ij}$  und der Eingangslage  $d_{ss,ij}$  bestimmt. In der Dynamikmodellierung wird das Vorzeichen über die Geschwindigkeit des Seils  $\dot{d}_{dsk,ij}$  bestimmt (Gleichung 3.42).

$$\dot{d}_{dsk,i,j} = \begin{cases} 0, & i = n \\ \dot{d}_{dsk,i+1,j} + \dot{d}_{ss,i+1,j}, & i < n \end{cases} \quad (3.42)$$

In Gleichung 3.43 wird der Vektor der Zugkraft formuliert:

$$\mathbf{T}_{ij} = \hat{\tau}_{ij} \mathbf{p}_{h,i} \quad (3.43)$$

Die Kontaktkraft  $\mathbf{F}_{kon,ij}$  in der  $j$ -ten Bohrung auf der  $i$ -ten Scheibe resultiert aus zwei Zugkräften.

$$\mathbf{F}_{kon,ij} = \begin{cases} \mathbf{T}_{i+1,j} - \mathbf{T}_{ij}, & i < n \\ -\mathbf{T}_{ij}, & i = n \end{cases} \quad (3.44)$$

Mithilfe der Kontaktkraft  $\mathbf{F}_{kon,ij}$  können die gesamte aktivierte Kraft und das Moment jeder Scheibe bestimmt werden.

$$\mathbf{F}_{act,i} = \sum_j \mathbf{F}_{kon,ij} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{M}_{act,i} = \sum_j (\mathbf{r}_{hr,ij} \times \mathbf{T}_{i+1,j} - \mathbf{r}_{hl,ij} \times \mathbf{T}_{ij}) \quad (3.46)$$

### 3.6.4 Externe Belastung auf dem letzten Teilsegment

Mit der externen Belastung werden die äußeren Kräfte und Momente im globalen Koordinatensystem beschrieben, die an der Spitze des Kontinuumsroboters wirken.

$$\mathbf{F}_{\text{ex,s},n} = \begin{bmatrix} F_{\text{ex,s},x} \\ F_{\text{ex,s},y} \\ F_{\text{ex,s},z} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{M}_{\text{ex,s},n} = \begin{bmatrix} M_{\text{ex,s},x} \\ M_{\text{ex,s},y} \\ M_{\text{ex,s},z} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

### 3.6.5 Trägheitseffekt

Mit den Trägheitseffekten wird der Widerstand des Roboters gegen Änderungen der linearen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten beschrieben. In Gleichung 3.49 und Gleichung 3.50 werden die Trägheitskraft und das Trägheitsmoment definiert, wobei  $m_i$  die Masse der  $i$ -ten Scheibe ist. Der Parameter  $\mathbf{I}_i$  ist der Trägheitstensor. In Gleichung 3.51 ist die Transformation des lokalen Trägheitstensors in das globale Koordinatensystem dargestellt.

$$\mathbf{F}_{\text{inr},i} = -m_i \mathbf{a}_i \quad (3.49)$$

$$\mathbf{M}_{\text{inr},i} = -\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (3.50)$$

$$\mathbf{I}_i = \prod_1^i \mathbf{R}_{i-1}^i \begin{bmatrix} I_{xx,i} & I_{xy,i} & I_{xz,i} \\ I_{yx,i} & I_{yy,i} & I_{yz,i} \\ I_{zx,i} & I_{zy,i} & I_{zz,i} \end{bmatrix} \prod_1^i \mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \quad (3.51)$$

### 3.6.6 Gesamtbelastung

Die Gesamtbelastungen, die auf jede Scheibe einwirken, ergeben sich aus der Addition der einzelnen Komponenten. In der Dynamikmodellierung werden die äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ex},i}$  und Momente  $\mathbf{M}_{\text{ex},i}$  durch die Gleichung 3.54 und 3.55 definiert:

$$\mathbf{F}_{\text{ex},i} = \mathbf{F}_{\text{g},i} + \mathbf{F}_{\text{inr},i} + \mathbf{F}_{\text{act},i} + \mathbf{F}_{\text{ex,s},i} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{M}_{\text{ex},i} = \mathbf{M}_{\text{inr},i} + \mathbf{M}_{\text{act},i} + \mathbf{M}_{\text{el},i} + \mathbf{M}_{\text{ex,s},i} \quad (3.53)$$

Darüber hinaus kann ein Modell für das statische Gleichgewicht des Kontinuumsroboters auch durch die virtuelle Leistung Methode erstellt werden. Die äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{ex:st,i}$  und Momente  $\mathbf{M}_{ex:st,i}$  des Statikmodells werden ähnlich implementiert, wenn der Trägheitseffekt ( $\mathbf{F}_{inr,i}$  und  $\mathbf{M}_{inr,i}$ ) und die Dämpfung in der Elastizität ( $\mathbf{M}_{bD,i}$  in  $\mathbf{M}_{el,i}$ ) vernachlässigt werden.

$$\mathbf{F}_{ex:st,i} = \mathbf{F}_{g,i} + \mathbf{F}_{act,i} + \mathbf{F}_{ex,s,i} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M}_{ex:st,i} = \mathbf{M}_{act,i} + \mathbf{M}_{el,i} + \mathbf{M}_{ex,s,i} \quad (3.55)$$

Diese externen Kräfte und Momente werden dann verwendet, um die Leistungsänderung  $\Delta P_{st}$  zu berechnen.

$$\Delta P_{st} = \sum_i (\boldsymbol{\omega}_{i,k} \cdot \mathbf{M}_{ex:st,i} + \mathbf{v}_{i,k} \cdot \mathbf{F}_{ex:st,i}) = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

### 3.7 Gleichungssystem in der Dynamik und Statik

In diesem Kapitel wird erklärt, wie die Dynamik und die Statik des Kontinuumsroboters mithilfe von **Maple®** und **Matlab®** durch die virtuelle Leistungsmethode gelöst werden können. Zuerst werden die Parameter des Aufbaus - Anzahl der Segmente, Anzahl der Scheiben in jedem Segment und Anzahl der Seile in jedem Segment - als Input Data in Maple definiert. Durch die symbolische Berechnung werden die dynamischen Bewegungsgleichungen und die statischen Gleichgewichtsbedingungen mit „Matlab Syntax“ exportiert. Im exportierten Modell wird der Aufbau des Kontinuumsroboters festgestellt. Die mechanischen Eigenschaften, z. B. Massen, Trägheitstensoren usw., und die Zielkonfiguration werden währenddessen noch Variablen zugewiesen, die weiter als Input Data in Matlab definiert werden. Es gibt zwei Konfigurationen, nämlich die Seilkonfiguration und die Kraftkonfiguration in der Statikmodellierung - in der Dynamikmodellierung gibt es nur die Kraftkonfiguration. In der Seilkonfiguration werden die Zuglängen jedes Seils  $\Delta l_j$  als Bekannte und die Zugkraft  $\hat{\tau}_{1,j}$  bzw. die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  als Unbekannte definiert. In der Kraftkonfiguration wird die Zugkraft jedes Seils  $\hat{\tau}_{1,j}$  als Bekannt definiert und nur die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  gelten als Unbekannte. Am Ende werden alle Unbekannten mithilfe des numerischen Solver („ode45“ und „fsolve“) berechnet und die Lage jeder Scheibe wird durch  $\mathbf{q}$  umgerechnet.

#### 3.7.1 Differentialgleichungssysteme der Dynamik

Der dynamische Modellierungsansatz aus Gleichung 3.6 ist nun vollständig implementiert. Das Ergebnis entspricht einem gewöhnlichem gekoppelten Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.57)$$

wobei  $M(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  die Massenmatrix ist. Der Kraftfunktionsvektor wird mit  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  beschrieben. Um die Differentialgleichungen mithilfe des ODE-Solvers zu lösen, müssen diese in eine Formel erster Ordnung umgerechnet werden.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ -M^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \mathbf{V}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

### 3.7.2 Gleichgewichtsbedingungen der Statik

Die Gleichgewichtsbedingungen der Statik werden durch die Gleichung 3.56 bestimmt. Das Resultat entspricht einem nicht linearen Gleichungssystem. Die Gleichung 3.60 erhält die Kraftkonfiguration:

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

Die Gleichung 3.62 erhält die Seilkonfiguration:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\ \Delta \mathbf{l}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) - \mathbf{l}_{\text{zug}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}) \\ \Delta \mathbf{l}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{l}_{\text{zug}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

## 3.8 Die parameterlineare Form zur Identifikation der Modellparameter

Bei der Regelung des mechatronischen Systems spielt das dynamische Modell eine entscheidende Rolle. Die Modellierung ist in zwei grundlegende Schritte zu unterteilen. Dabei ist die Aufstellung der Systemgleichungen mithilfe physikalischer Betrachtungen (z. B. Energiebilanzen, eulersche Gleichungen und die virtuelle Leistung) der erste Schritt. Durch diese Gleichungen ergeben sich die strukturelle Zusammenhänge erhalten. Die Systemparameter sind jedoch im Allgemeinen a priori unbekannt. Zunächst lässt sich das gesamte Gleichungssystem parametrieren. Die geometrischen Größen können aus der CAD-Zeichnung oder direkt aus der Messung entnommen werden. Andere Größen sind hingegen schwierig zu messen, z. B. der Reibungskoeffizient, also der tatsächliche Trägheitstensor eines unregelmäßigen Bauteils. Die Parameter müssen zwingend durch experimentelle Verfahren identifiziert werden.

In diesem Kapitel wird eine parameterlineare Form des Identifikationsproblems auf Basis der allgemeinen Form der dynamischen Gleichungen in 3.63 umgestellt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.63)$$

Mithilfe dieser Form und des Least-Squares-Verfahrens können die Parameter identifiziert werden. Die Form wird durch die Gleichung 3.64 formuliert:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.64)$$

wobei  $\hat{\mathbf{y}}$  die modellbasierten, berechneten Ausgangsgrößen sind.

$$\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & \dots & \hat{\tau}_{1,j} & \dots & \hat{\tau}_{1,d} \end{bmatrix}^T \quad (3.65)$$

Weiterin ist  $\mathbf{x}$  der zu identifizierende Parameter, der die Federkonstante, die Dämpfungskonstante, die Masse und die Massenträgheit jeder Scheibe erhält.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} EJ_{xx} & C_b & m_i & I_{xx,i} & I_{xy,i} & I_{xz,i} & I_{yx,i} & I_{yy,i} & I_{yz,i} & I_{zx,i} & I_{zy,i} & I_{zz,i} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

In einem MIMO-System besteht die Designmatrix  $\mathbf{C}$  aus mehreren  $\mathbf{D}$  Matrizen. Für eine (erste) Messung der Eingangsgrößen  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}$  gilt:

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.67)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_d \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{z}_{11} & \hat{z}_{12} & \dots & \hat{z}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_{d1} & \hat{z}_{d2} & \dots & \hat{z}_{dn} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (3.68)$$

Bei  $m$  Messungen ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{y}}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}^{(m)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{y}}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(1)} \\ \mathbf{D}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{D}^{(m)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}=\mathbf{C}_m} \mathbf{x} \quad (3.69)$$

Nach der Least-Squares-Methode ist der folgende Ausdruck zu minimieren:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 \quad (3.70)$$

Gesucht ist der optimale Parameter  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , der für den Unterschied zwischen den modellbasiert berechneten ( $\hat{\boldsymbol{y}}$ ) und der gemessenen Ausgangsgröße ( $\boldsymbol{y}$ ) minimal wird:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|_2^2 \quad (3.71)$$

## 4 Evaluation

### 4.1 Allgemeine Beobachtung

In diesem Kapitel werden der neuartige und der allgemeine Kontinuumsroboter jeweils in Bezug auf die Ergebnisse der Statik- und Dynamikmodellierung evaluiert. Die Unterschiede des Modells hinsichtlich der beiden Roboter werden in Tabelle 4.1 zusammengefasst:

**Tabelle 4.1:** Die Unterschiede zwischen den beiden Robotern

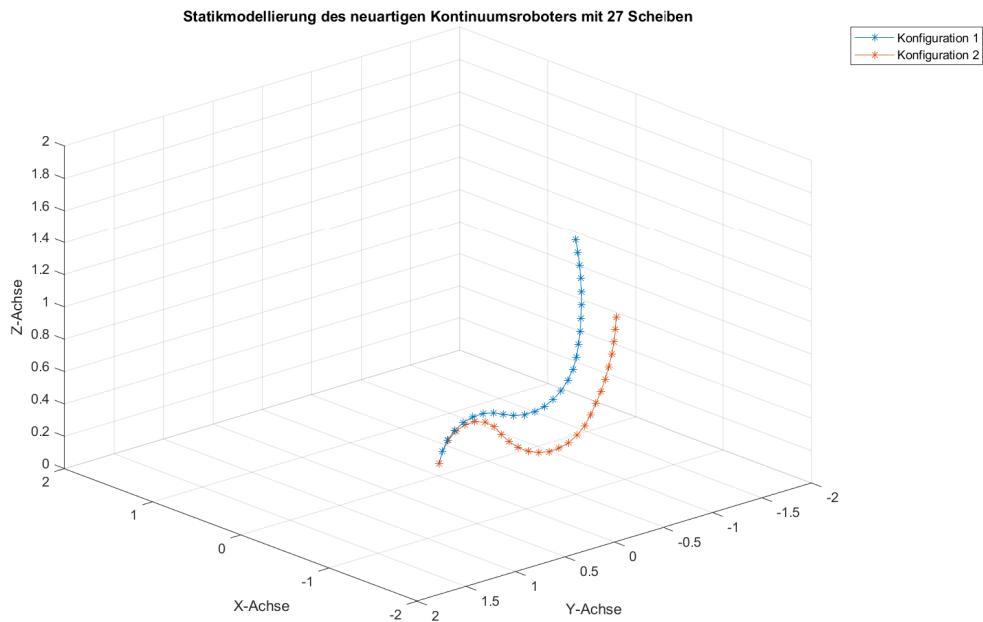
Eigenschaft	das allgemeine Design	das neuartige Design
Minimalkoordinaten	$\mathbf{q}_i = [\Delta_{x,i}, \Delta_{y,i}]^T$	$\mathbf{q}_i = [\kappa_i]^T$
Geometrie des Kerns	nur $L_0$	$L_0, L_1$ und $L_2$
Kinematik	PCC-Ansatz	PCC- und Starrkörper-Ansatz

In den folgenden Kapiteln wird ein Kontinuumsroboter simuliert, dessen technische Parameter in Tabelle 4.2 zusammengefasst werden.

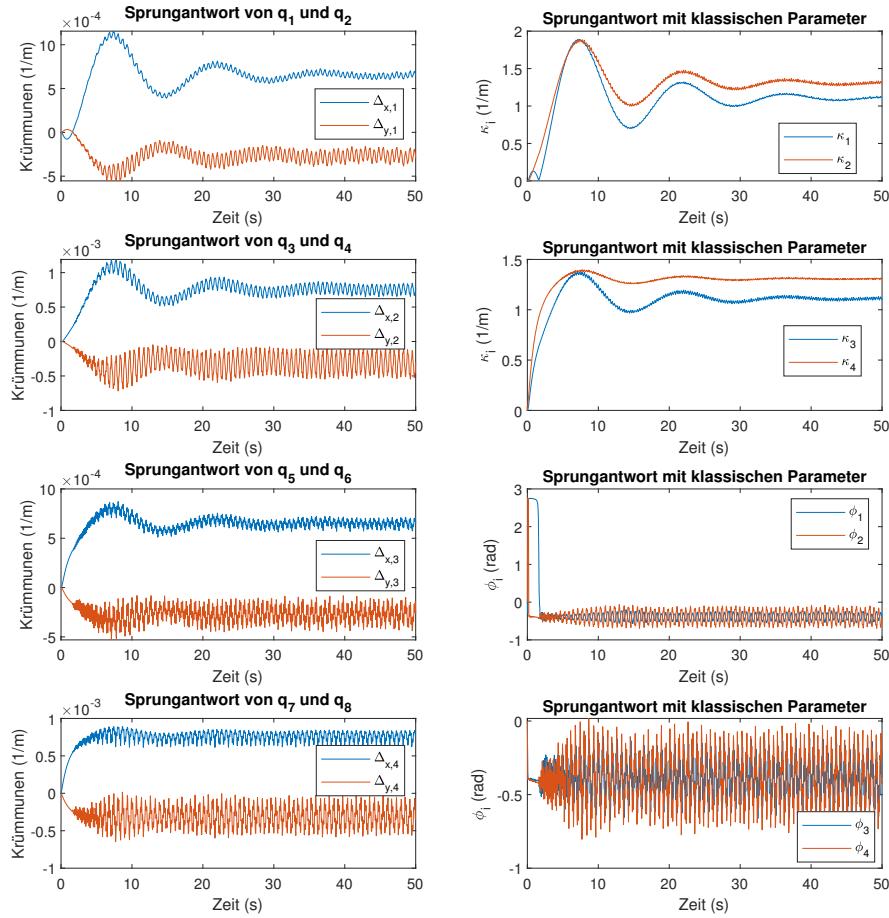
Zur Beschreibung der Ergebnisse der Statikmodellierung werden „3D-Matlab-Plots“ benutzt, die aus einer Reihe von aufeinanderfolgenden Liniensegmenten und Sternchen bestehen. Die Lage des Schwerpunkts jeder Scheibe und der gebogene elastische Kern sind jeweils mithilfe des Sternchens und des Liniensegments näherungsweise dargestellt. In Abbildung 4.1 sind zwei Konfigurationen des neuartigen Kontinuumsroboters mit drei Segmenten zu sehen, wobei bei jedem Segment neun Scheiben vorhanden sind. Der Roboter wird unter drei Seilzugkräften jeweils auf den drei Segmenten belastet. Es ist ersichtlich, dass der Roboter bei mehrachsenigen Bewegungen in beengten Umgebungen eine ausgezeichnete Fähigkeit aufweist. Je mehr Segmente ein Kontinuumsroboter besitzt, desto komplexere Bewegungen kann er durchführen.

**Tabelle 4.2:** Die technischen Parameter in der Probemodellierung

Parameter	Beschreibung	Wert	Parameter	Beschreibung	Wert
$m_i$	Masse jedes Teilssegment	1,7 kg	$g$	Gravitationsbeschleunigung	$9,81 \text{ m/s}^2$
$E_s$	E-Modul jedes Seils	50 GPa	$A_s$	Fläche jedes Seils	$10^{-4} \text{ m}^2$
$E$	E-Modul des Kerns	200 GPa	$J_{xx}$	Trägheitsmoment des Kerns	$2 \cdot 10^{-14} \text{ m}^4$
$\hat{r}_h$	radialer Abstand der Bohrung	8 mm	$L_0$	Krümmungslänge des Kerns	18 mm
$L_1, L_2$	Längen des Kerns	1 mm	$I_{xx,i}, I_{yy,i}$	Trägheitsmomente der Scheibe	$10^{-5} \text{ m}^4$
$I_{zz,i}$	Trägheitsmoment der Scheibe	$2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$	Andere $I$	übrige Trägheitsmomente	0 $\text{m}^4$
$C_b$	Dämpfungs-koeffizient	$10^{-4}$ $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	$\mu$	Reibungskoeffizient	0.1
$\hat{d}_{r,j}, \hat{d}_{l,j}$	Dicken der Bohrung	8 mm	$\psi_i$	Position der Bohrung	flexibel definieren

**Abbildung 4.1:** „3D-Matlab-Plots“ der Statikmodellierung

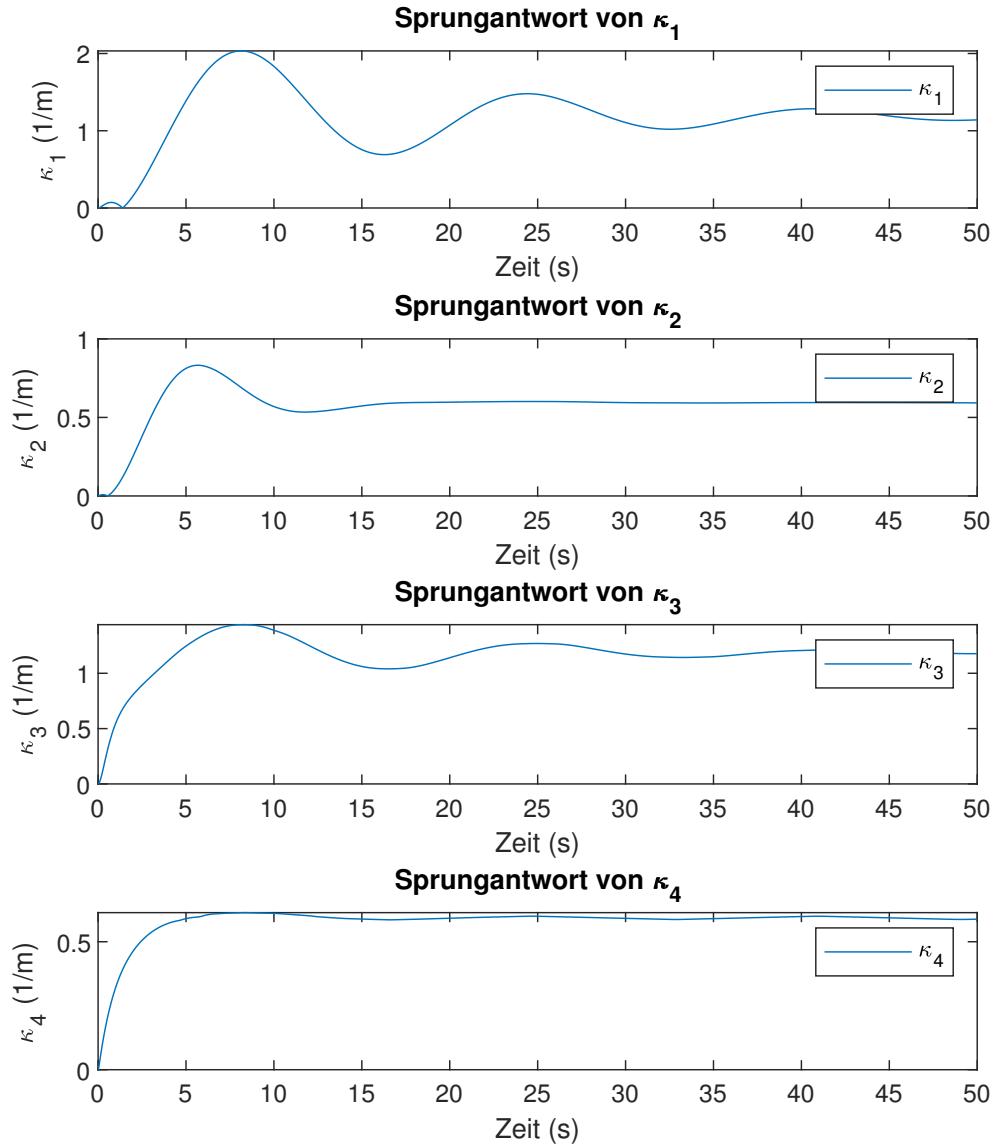
Zur Beschreibung der Ergebnisse der Dynamikmodellierung des allgemeinen Kontinuumsroboters wird die Sprungantwort der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [\Delta_{x,i} \quad \Delta_{y,i}]^T$  verwendet. Im Vergleich zum Ergebnis des neuartigen Kontinuumsroboters werden die Koordinaten wieder zur klassischen Parametrisierung  $\mathbf{q} = [\kappa_i \quad \phi_i]^T$  umgestellt. In Abbildung 4.2 wird das Ergebnis der Dynamikmodellierung des allgemeinen Kontinuumsroboters mit zwei Segmenten dargestellt, wobei jedes Segment über zwei Scheiben verfügt. Der Roboter wird lediglich unter einer Seilzugkraft auf dem letzten Segment aktuiert.



**Abbildung 4.2:** Die Sprungantwort von  $\mathbf{q}$  in der Dynamikmodellierung des allgemeinen Kontinuumsroboters

Die Anzahl der generalisierten Koordinaten des neuartigen Kontinuumsroboters beträgt nur die Hälfte der Anzahl des allgemeinen Kontinuumsroboters. In Abbildung 4.2 wird die Sprungant-

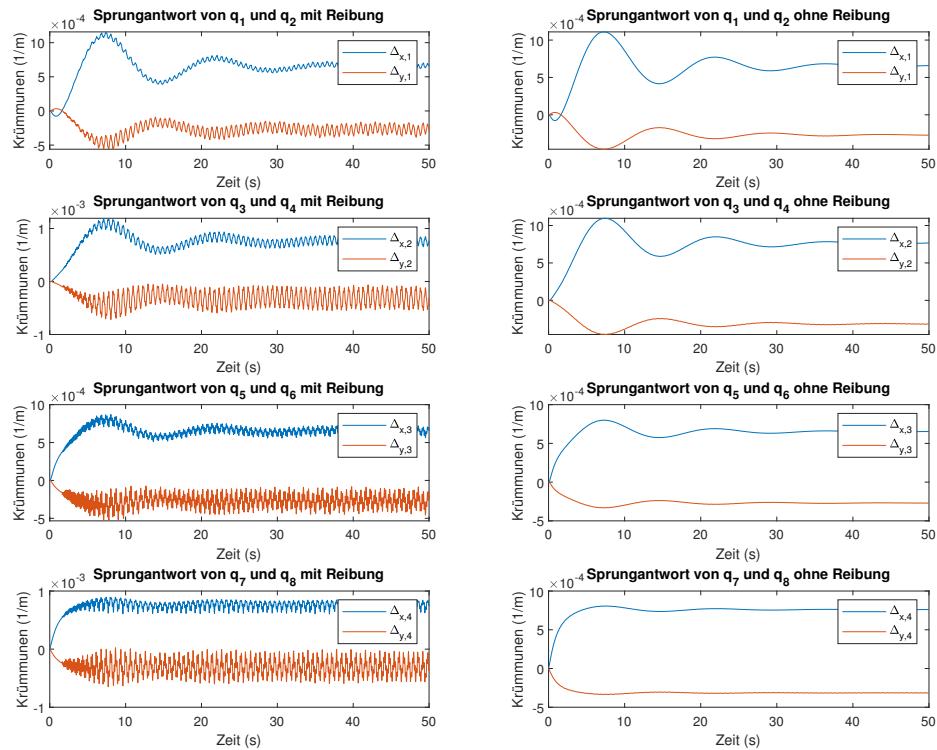
wort des neuartigen Kontinuumsroboters mit zwei Segmenten dargestellt, wobei jedes Segment zwei Scheiben aufweist. Der Roboter wird nur unter einer Seilzugkraft auf dem letzten Segment aktuiert. Das Modell wird mithilfe des „ode45-Solvers“ mit einem festen Zeitschritt  $dt = 0,1\text{s}$  gelöst.



**Abbildung 4.3:** Die Sprungantwort von  $q$  in der Dynamikmodellierung des neuartigen Kontinuumsroboters

#### 4.1.1 Einfluss der Reibungskräfte

Dieses Robotersystem kann als ein Masse-Feder-Dämpfungs-System definiert werden. In Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass die Krümmungen am Ende nicht stabil bleiben, sondern mit einer hohen Frequenz schwingen. Aufgrund der festgelegten  $\phi_i$  besteht in der Modellierung des neuartigen Kontinuumsroboters keine Schwingung. Die Gründe liegen darin, dass die Schwingungen zum einen aus dem Berechnungsfehler des numerischen Solvers (Runge-Kutta-Verfahren) und zum anderen aus der diskontinuierlichen Signum-Funktion in der Implementierung der Reibungskraft. Die Reibungskräfte wirken in der Gegenrichtung auf den Roboter, wenn sich die Richtung der relativen Geschwindigkeit zwischen den Seilen und den Scheiben verändert. Die hochfrequente Schwingung geht zurück, wenn der Reibungskoeffizient auf null gesetzt wird.



**Abbildung 4.4:** Einfluss der Reibung

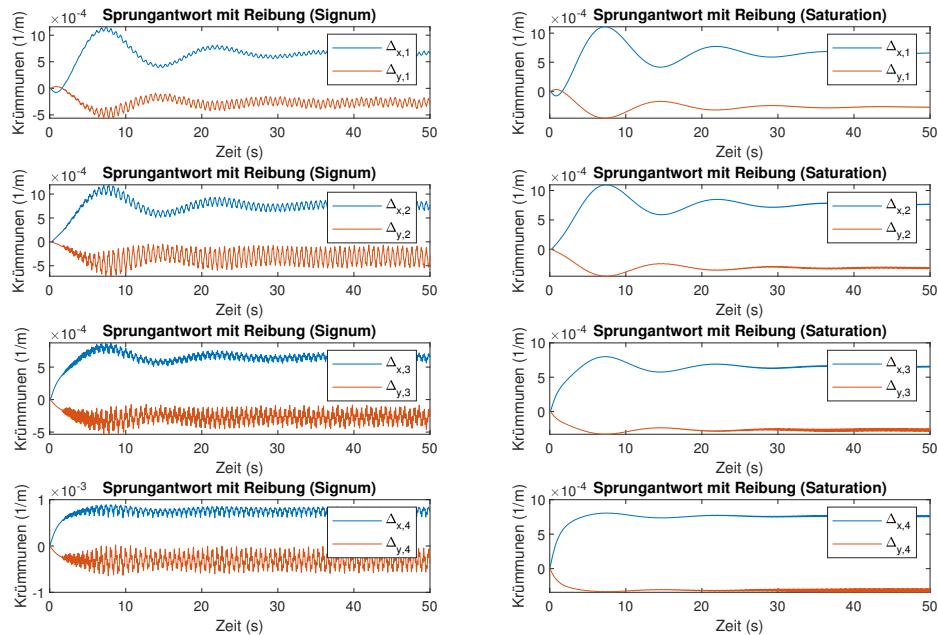
Um die Unstetigkeit der Signum-Funktion zu vermeiden, wird eine Saturation-Funktion verwendet. Die Skalierung und die Richtung der Reibungskraft können gleichzeitig durch die Saturation-Funktion bestimmt werden. In Gleichung 4.1 und 4.2 können die Zugkräfte auf

Basis der skalierten Reibungskräfte abgeschätzt werden.

$$\|F_{Reib,ij}\| = (\hat{\tau}_{ij} + \hat{\tau}_{i+1,j})(e^{\mu\eta_i} - 1)/(e^{\mu\eta_i} + 1) \quad (4.1)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = \begin{cases} \hat{\tau}_{Input,j}, & i = 1 \\ \hat{\tau}_{i-1,j} - \text{sat}(d_{dsk,ij})\|F_{Reib,ij}\|, & i > 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

In diesem Fall ist eine iterative Berechnung erforderlich. Die linken und rechten Zugkräfte ( $\hat{\tau}_{i+1,j}$  und  $\hat{\tau}_{i,j}$ ) werden zu Beginn gleich stark angenommen. Die Reibungskraft wird jedoch in Gleichung 4.1 abgeschätzt. Mit der Schätzung der Reibungskräfte können alle Zugkräfte  $\hat{\tau}_{ij}$ , die auf jeder Scheibe wirken, durch die Gleichung 4.2 rekursiv implementiert werden. Die Zugkraft  $\hat{\tau}_{Input}$  entspricht der Antriebskraft. Das Update der Zugkräfte  $\hat{\tau}_{ij}$  wird wiederum verwendet, um eine genauere Schätzung über die Reibungskräfte zu erhalten. Mit diesem Verfahren wird demzufolge eine iterative Schleife erzeugt. Sobald genügend Iterationen durchgeführt werden, können die Zugkräfte mit den Reibungseffekten konvergiert werden. In Abbildung 4.5 wird die Sprungantwort von  $q$  dargestellt.



**Abbildung 4.5:** Vergleich des Einflusses mit dem Saturation-Funktion-Ansatz

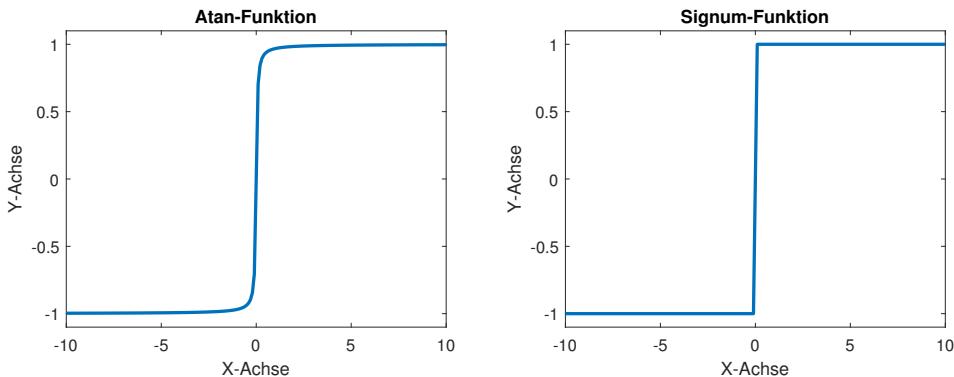
Durch diese stetige Saturation-Funktion wird die Stabilität des dynamischen Verhaltens erhöht.

Es ist ersichtlich, dass die hochfrequenten Schwingungen im Zeitbereich von 5 s bis 20 s deutlich reduziert werden. Der Endeffektor schwingt trotzdem nach 25 s mit einer kleinen Amplitude. Der iterative Schleife verkompliziert die mathematischen Ausdrücke der Differentialgleichungen und erhöht den Zeitaufwand insbesondere bei der symbolischen Berechnung wesentlich.

Um das Problem zu vermeiden, wird die Signum-Funktion in Gleichung 3.40 direkt durch eine skalierte, glatte Atan-Funktion ( $f(x) = \text{atan}(a \cdot x) \cdot b$ ) ersetzt.

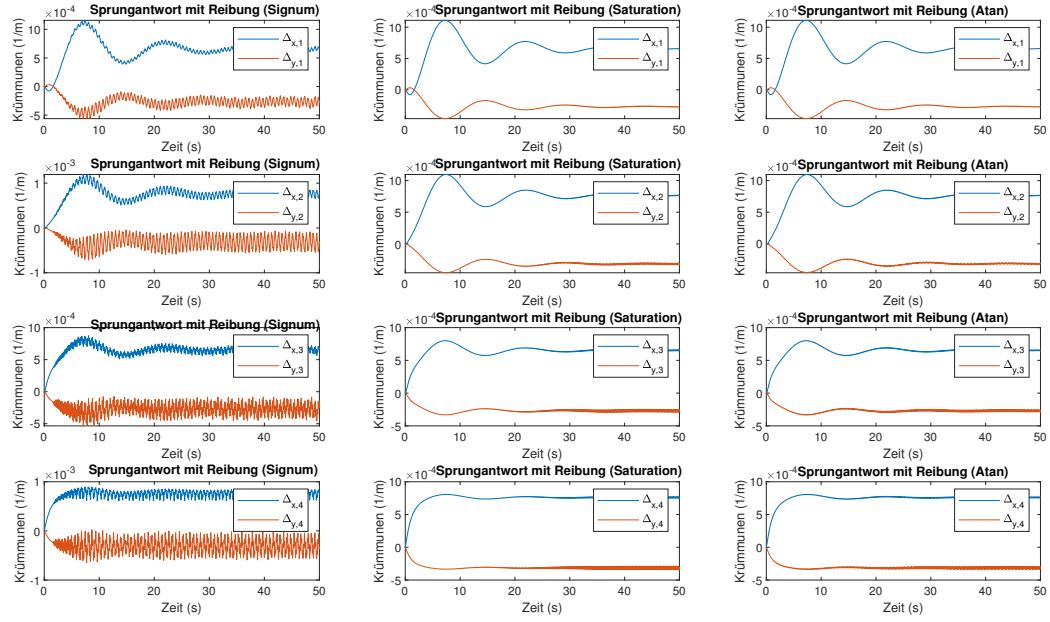
$$\hat{\tau}_{i+1,j} = \hat{\tau}_{ij} e^{\text{atan}(\dot{d}_{\text{dsk},ij} \cdot 20) / \pi \cdot 2\mu\eta_i} \quad (4.3)$$

In Abbildung 4.6 wird die skalierte Atan-Funktion dargestellt. Sie ist über den Definitionsbereich ableitbar und glatt in der Nähe von null. Diese Methode vereinfacht die Berechnung und gewährleistet gleichzeitig die Stetigkeit der Reibungskraft.



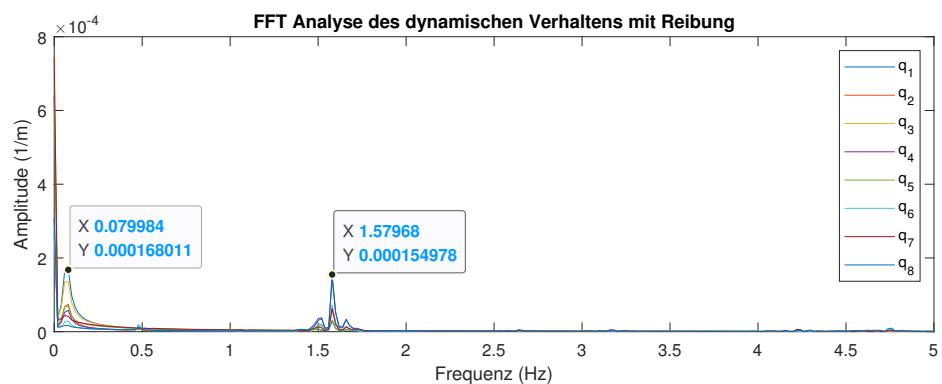
**Abbildung 4.6:** Die skalierte Atan-Funktion und die Signum-Funktion

Das Ergebnis der Sprungantwort von  $q$  mit dem Atan-Funktion-Ansatz und dem Saturation-Funktion-Ansatz ist in Abbildung 4.7 veranschaulicht. Es lässt sich erkennen, dass die beiden dynamischen Verhalten nahezu identisch sind. Bei der Implementierung des Dynamikmodells mit mehreren Teilssegmenten wird die Laufzeit im Vergleich zum Saturation-Funktion-Ansatz jedoch um mehr als die Hälfte reduziert.

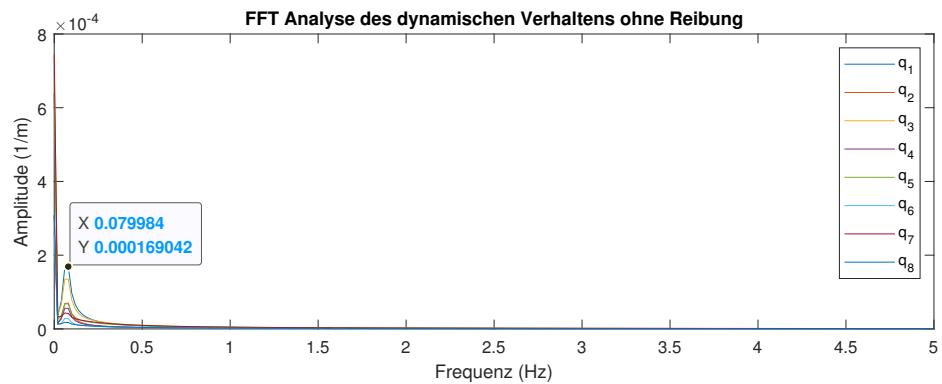


**Abbildung 4.7:** Vergleich des Einflusses mit dem Atan-Funktion-Ansatz

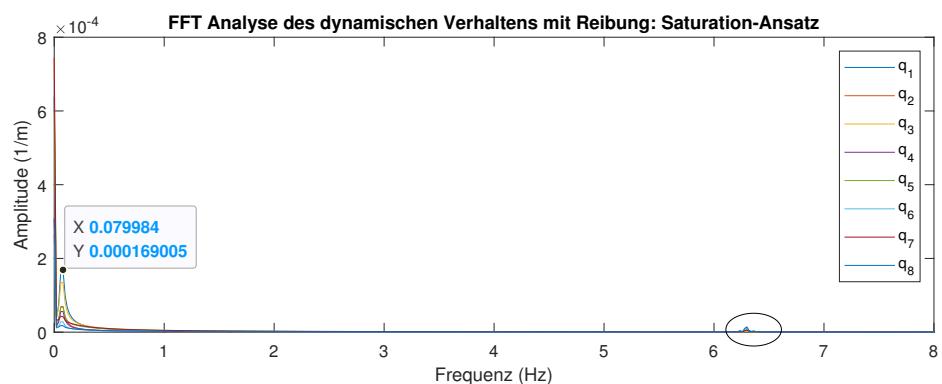
Um die Schwingungen zu auswerten, werden die Sprungantworten mithilfe der „Fast-Fourier-Transform“ analysiert. In Abbildung 4.8 und 4.9 werden die Sprungantworten im Frequenzbereich jeweils mit und ohne Reibungskräfte dargestellt. In dieser FFT-Analyse ist deutlich zu sehen, dass die Eigenfrequenz des Mehrkörpersystems 0,08 Hz entspricht. Zudem findet sich eine Resonanz bei 1,57 Hz, die aufgrund der unstetigen Reibungskräfte (Signum-Ansatz) zugeführt wird. Die Amplitude dieser Resonanz bei 1,57 Hz ist nahezu gleich wie die bei 0,08 Hz. Daher wird die Stabilität des Systems reduziert. In Abbildung 4.10 wird die FFT-Analyse mit den stetigen Reibungskräften (Saturation-Ansatz) dargestellt. Die zweite Resonanz besitzt nun eine relative, höhere Frequenz (6,30 Hz) und eine kleine Amplitude. Sie ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Das Ergebnis der FFT-Analyse mit den stetigen Reibungskräften (Atan-Ansatz) fällt ähnlich aus wie das des Saturation-Ansatzes. Die zweite Resonanz liegt ebenfalls auf 6,30 Hz und besitzt im Vergleich zur ersten Eigenschwingung eine kleine Amplitude.



**Abbildung 4.8:** FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Signum-Ansatz)



**Abbildung 4.9:** FFT Analyse des dynamischen Verhaltens ohne Reibung



**Abbildung 4.10:** FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Saturation-Ansatz)

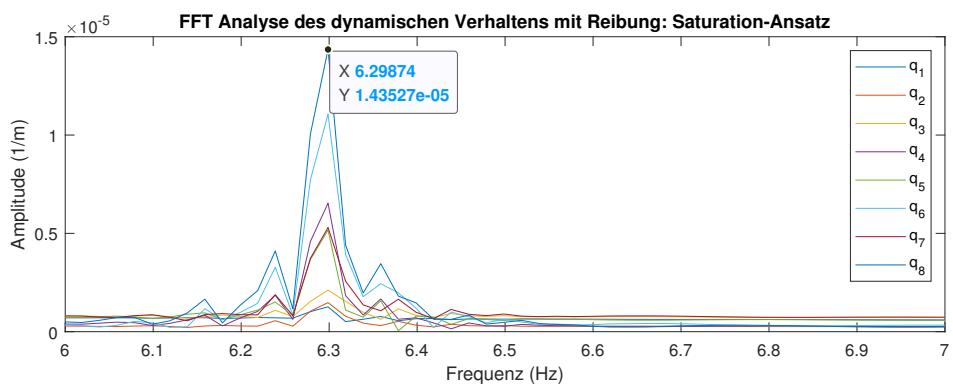


Abbildung 4.11: Die Resonanz mit einer Frequenz von 6,30 Hz

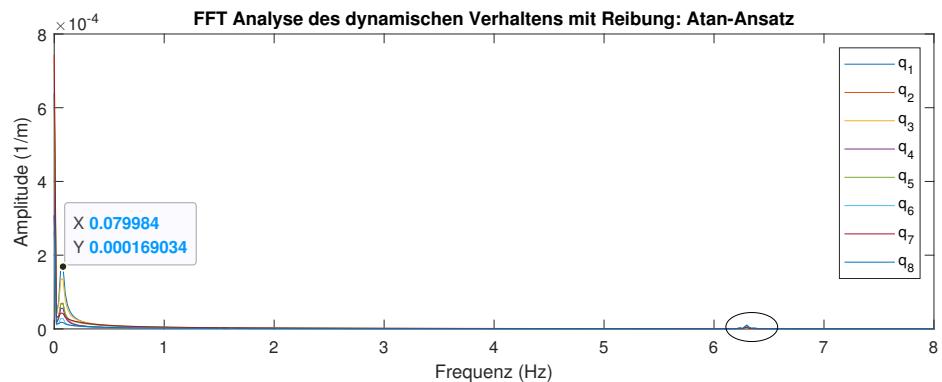


Abbildung 4.12: FFT Analyse des dynamischen Verhaltens mit Reibung (Atan-Ansatz)

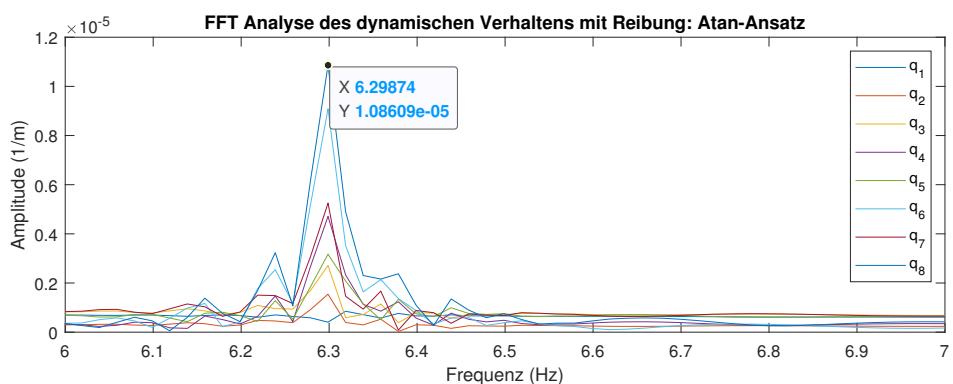


Abbildung 4.13: Die Resonanz mit einer Frequenz von 6,30 Hz

### 4.1.2 Validierung des Dynamikmodells

Um die Genauigkeit und die Plausibilität des Dynamikmodells zu validieren, wird die Energiekonsistenz des Mehrkörpersystems implementiert. Wenn der Kontinuumsroboter frei schwingt und die Dämpfung bzw. die Reibung vernachlässigt wird, ist die gesamte Energie konstant. Die Zunahme der kinetischen Energie sollte identisch mit der Abnahme der potenziellen Energie verlaufen. Die Krümmung  $\kappa_i$ , der Winkel  $\phi_i$  und deren zeitlichen Ableitung in jedem Zeitschritt stellen die Lösung der Dynamikmodellierung dar, damit die Position, die Geschwindigkeit sowie die Winkelgeschwindigkeit ins kartesische Koordinatensystem umgerechnet werden können. Anschließend können die kinetische und die potenzielle Energie in jedem Zeitschritt mithilfe dieser Größen berechnet werden, um die Energiekonsistenz des Mehrkörpersystems zu überprüfen. Die potenzielle Energie ist die Spannenergie, die in der Backbone aufgrund deren elastischer Verformung steckt. Die Spannenergie gibt an, wie viel Arbeit beispielsweise beim Spannen einer Drehfeder verrichtet wurde. Dies bedeutet, dass die Drehfeder zusammen gedrückt oder auseinandergezogen wurde. In Kapitel 3.4 werden zwei kinematische Ansätze verwendet. Daher sind die Formulierungen unterschiedlich. Für die potenzielle Energie im „Constant-Curvature-Ansatz“ gilt:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}} &= \sum_1^n \int_0^{\theta_i} \frac{EJ_{xx}}{L_0} \theta_i d\theta_i \\
 &= \sum_1^n \frac{EJ_{xx}}{2L_0} \theta_i^2 \\
 &= \sum_1^n \frac{1}{2} EJ_{xx} L_0 \kappa_i^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Für die potenzielle Energie im Starkkörper-Ansatz gilt:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}} &= \sum_1^n \int_0^{\theta_i} \frac{EJ_{xx}}{L_{\text{Krümmung}}} \theta_i d\theta_i \\
 &= \sum_1^n \int_0^{\theta_i} EJ_{xx} \frac{\tan(\theta_i/2)}{L_0/2} d\theta_i \\
 &= \sum_1^n \frac{2EJ_{xx}}{L_0} \ln(1 + \tan(\frac{\theta_i}{2})^2) \\
 &= \sum_1^n \frac{2EJ_{xx}}{L_0} \ln(1 + \frac{L_0^2 \kappa_i^2}{4})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

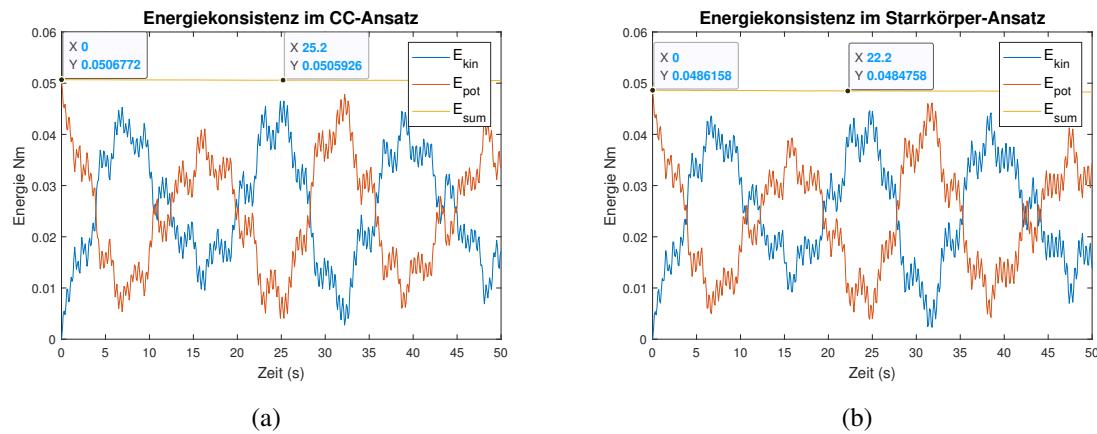
Für die kinetische Energie in den beiden Ansätzen gilt:

$$E_{\text{kin}} = \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} I_i \boldsymbol{\omega}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i \quad (4.6)$$

Der Kontinuumsroboter bewegt sich mit dem Anfangswert:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

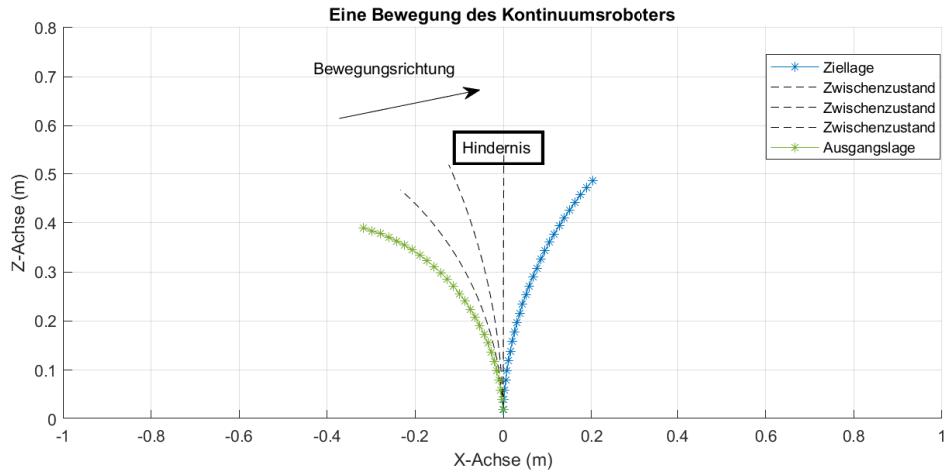
Somit besteht zum Beginn in diesem System lediglich die potenzielle Energie, während die kinetische Energie dem Wert Null entspricht. Die Gesamtenergie bleibt konstant. In Abbildung 4.14 werden die Energiekonsistenz in den beiden Ansätzen dargestellt.



**Abbildung 4.14:** Energiekonsistenz des Dynamikmodell, (a) im „Constant-Curvature-Ansatz“, (b) im Starrkörper-Ansatz

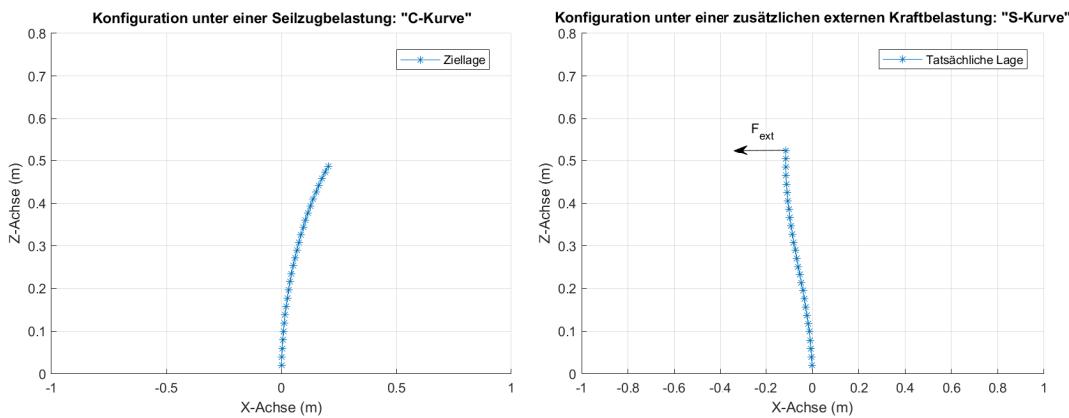
#### 4.1.3 Einfluss der externen Kräfte auf den Endeffektor

In diesem Abschnitt steht die Statikmodellierung im Vordergrund. Dabei werden die externen Kräfte auf den Endeffektor berücksichtigt. Während der Bewegung des Roboters in einer beengten Umgebung ist anzunehmen, dass der Endeffektor auf ein Hindernis stoßen wird. In Abbildung 4.15 wird eine Bewegung mithilfe der Statikmodellierung veranschaulicht. Der Roboter bewegt sich durch eine Seilzugkraft von der grünen Ausgangslage zur blauen Ziellage. Auf dem Weg der Bewegung des Endeffektors liegt ein Hindernis. Wenn der Endeffektor darauf stößt, wird eine Reaktionskraft darauf belastet. Um die Situation näherungsweise zu simulieren, wird eine externe Kraft, die direkt auf den Endeffektor wirkt, als sogenannte Reaktionskraft ausgeübt.



**Abbildung 4.15:** Eine Bewegung des Kontinuumsroboters

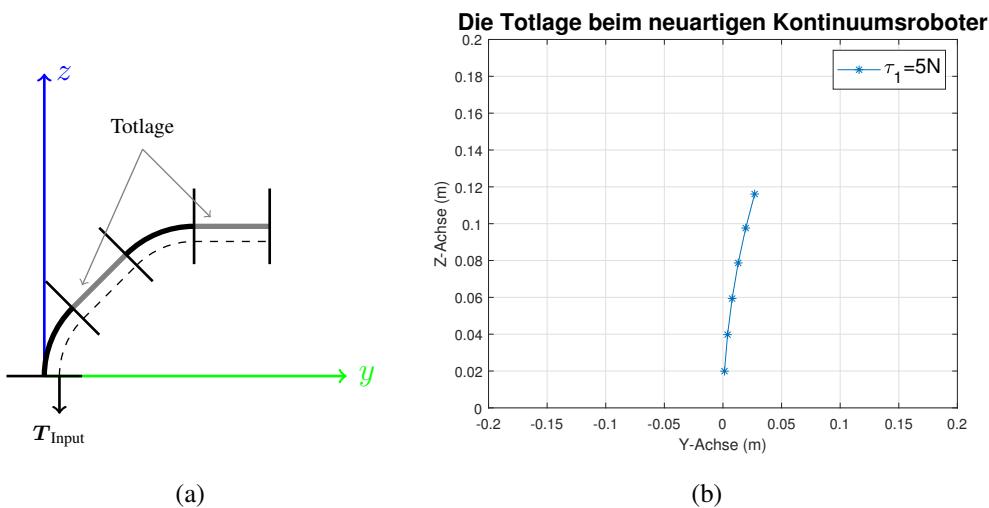
In Abbildung 4.16 wird die Konfiguration des Kontinuumsroboters unter einer externen Kraftbelastung dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass sich der Kontinuumsrobter unter nur einer Seilzugbelastung ( $\hat{\tau}_1 = 3\text{N}$ ,  $\psi_1 = 0^\circ$ ) zu einer „C-Kurve“ verformt. Alle Krümmungen der Teilsegmente sind nahezu identisch. Wenn zusätzlich eine externe Kraft ( $F_{ex,s,x} = -0.1\text{N}$ ) auf den Endeffektor des Kontinuumsroboters wirkt, verformt sich der Roboter zu einer „S-Kurve“. Die 1. bis 14. Teilsegmente werden mit den negativen Krümmungen gebogen, während die 15. bis 27. Teilsegmente mit den positiven Krümmungen gebogen werden. Bei ebenen Kurven kann die Krümmung außerdem mit einem Vorzeichen definiert werden. Eine Linkskurve weist dabei eine positive Krümmung auf, während eine Rechtskurve über eine negative verfügt. Der obere Teil des Kontinuumsroboters verformt sich in der Gegenrichtung des unteren Teils.



**Abbildung 4.16:** Die Konfiguration unter einer zusätzlichen externen Kraftbelastung ( $F_{ex,s,x} = -0.1\text{N}$ )

#### 4.1.4 „Totlage“ beim neuartigen Kontinuumsroboter

In Abschnitt 3.5.1 wurde ein spezifischer Fall erwähnt: Die Hälften der Gelenke des neuartigen Kontinuumsroboters verlieren die Freiheitsgerade, wenn die äußeren Lastvektoren (die Gravitationen und die aktuierten Kräfte) ebenso auf der YZ-Ebene liegen. In diesem Fall kann die hälften der Backbone aufgrund des Aufbaus der Zweigelenkkupplungen nicht mehr gebogen werden. In Abbildung 4.17 wird diese Situation dargestellt.



**Abbildung 4.17:** (a) schematische Darstellung der Totlage, (b) das Ergebnis der Statikmodellierung des Roboters mit sechs Teilssegmenten

Die Werte der Koordinaten werden in Tabelle 4.4 dargestellt. Die Hälfte von  $\kappa_i$  ist gleich null, die andere Hälfte verringert sich aufgrund des Reibungseffekts von der Basis zur Spitze des Roboters.

**Tabelle 4.3:** Berechnung von  $\kappa_i$  des neuartigen Kontinuumsroboters auf der Totlage

$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$	$\kappa_5$	$\kappa_6$
$8,94 \frac{1}{m}$	$0 \frac{1}{m}$	$8,79 \frac{1}{m}$	$0 \frac{1}{m}$	$8,65 \frac{1}{m}$	$0 \frac{1}{m}$

Es ist zu beachten, dass sich die Seillänge auf den letzten beiden Scheiben in Abbildung 4.17 (a) wegen der Totlage des letzten Teilssegments nicht ändert. Daher ergibt sich keine relative Bewegung zwischen den Seilen und den letzten beiden Scheiben, d. h., die Reibungskräfte

entsprechen dem Wert Null. Diese Situation führt dazu, dass die aktuierten Kräfte bei den letzten beiden Scheiben identisch wirken.

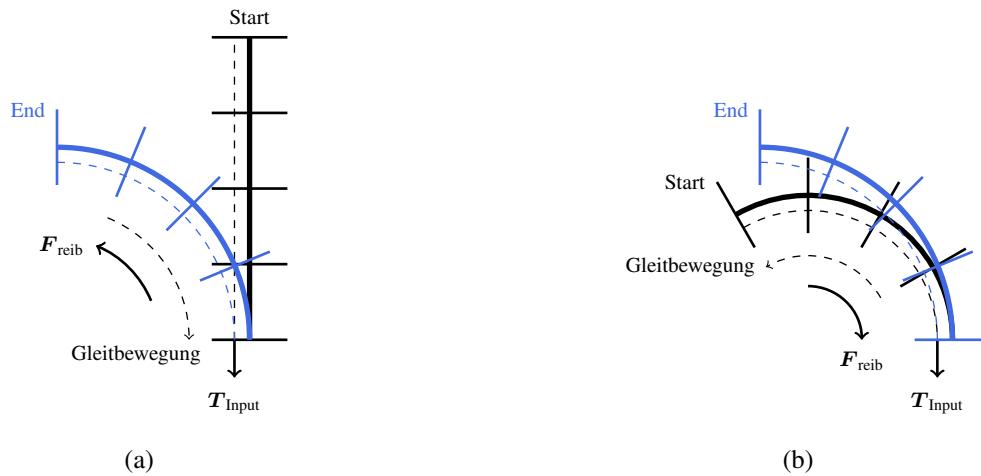
**Tabelle 4.4:** Die aktuierten Kräfte  $\hat{\tau}_i$  des neuartigen Kontinuumsroboters auf der Totlage

$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$	$\hat{\tau}_3$	$\hat{\tau}_4$	$\hat{\tau}_5$	$\hat{\tau}_6$
5 N	4,96 N	4,91 N	4,87 N	4,83 N	4,83 N

## 4.2 Die Konfigurationen des Kontinuumsroboters mit unterschiedlicher Ausgangslage in der Statikmodellierung

Die Reibungsrichtung ist von der relativen Gleitbewegung der Seile abhängig. Die Urteilsgrundlage der Reibungsrichtung in der Dynamikmodellierung entspricht der Geschwindigkeit des Seils. Allerdings besteht keine Geschwindigkeit in der Statikmodellierung. Die Ausgangslage des Kontinuumsroboters muss als Anfangsbedingung berücksichtigt werden, um die Richtung der Reibungskraft bestimmen zu können.

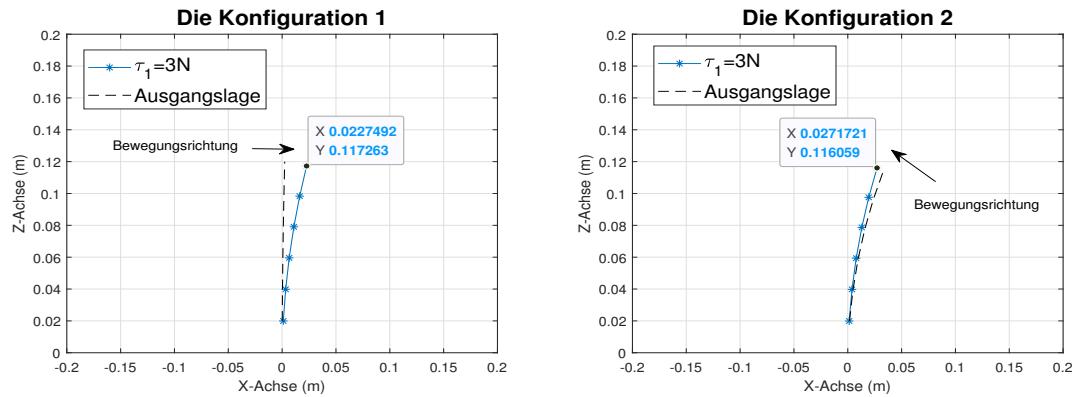
Die Reibungskräfte werden bei einer größeren Belastung durch die Nulllage oder eine Lage mit einer relativen kleinen Belastung als negativ definiert, weil die Reibung der Kraftübertragung von der Basis zur Spitze des Roboters widersteht. Wenn der Roboter von einer höheren auf eine niedrigere Seilzugbelastung entladen wird, widersteht die Reibung der Verringerung der Zugkraft von der Basis zur Spitze des Roboters. In diesem Fall wird die Reibungskraft als positiv festgelegt. In Abbildung 4.18 (a) und (b) werden jeweils der erste und der zweite Fall dargestellt.



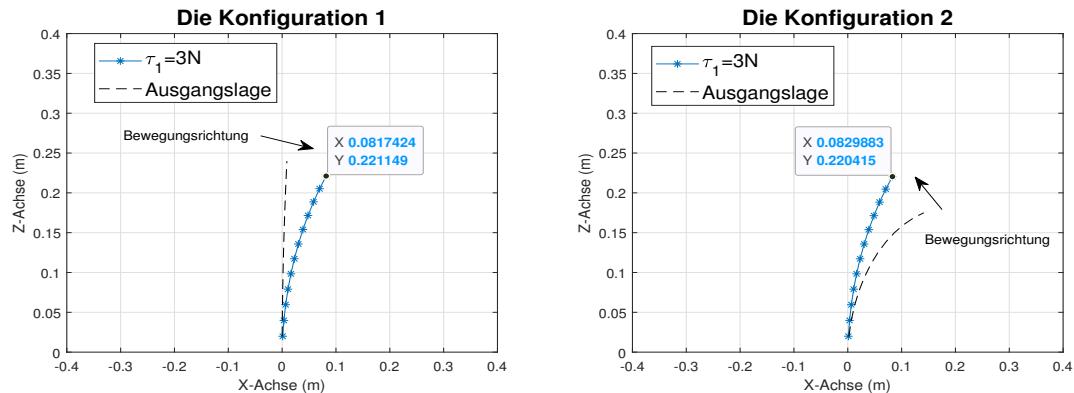
**Abbildung 4.18:** (a) Fall 1: die Konfiguration des Kontinuumsroboters (blaue Darstellung) bei einer höheren Belastung durch die Nulllage (schwarze Darstellung), (b) Fall 2: die Konfiguration des Kontinuumsroboters (blaue Darstellung) bei einer niedrigeren Belastung von einer höheren Belastung (schwarze Darstellung)

In diesem Abschnitt werden die Kontinuumsroboter untersucht, die aus nur einem Seil und jeweils aus 6, 12, 18 sowie 27 Teilstücken bestehen. Die Seilzugbelastung wird ebenso wie im letzten Abschnitt eingestellt. Der Winkel  $\psi_1$  ist gleich Null. Die Konfigurationen werden auf der Biegeebebene ( $x$ - $z$ -Ebene) zweidimensional dargestellt.

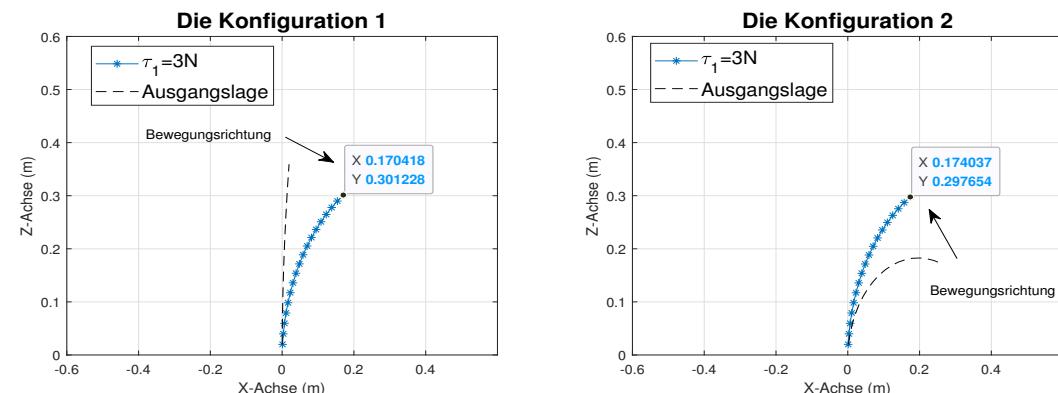
In Abbildung 4.20 bis 4.22 sind die Ergebnisse des Kontinuumsroboters jeweils mit 6, 12, 18 und 27 Scheiben ersichtlich. Es ist zu erkennen, dass die Lagen des Roboters unter einer gleichen Belastung jedoch aus den unterschiedlichen Ausgangslagen nicht identisch sind. Der Abstand des Endeffektors beim 6-Scheiben-Kontinuumsroboter zwischen den beiden Fällen beträgt lediglich 4,6 mm. Wenn die Anzahl der Scheiben erhöht wird, steigt dieser Abstand jedoch wesentlich. Diese Abstände beim 12-, 18- und 27-Scheiben-Kontinuumsroboter entsprechen 1,4 mm, 5,1 mm und 17,3 mm.



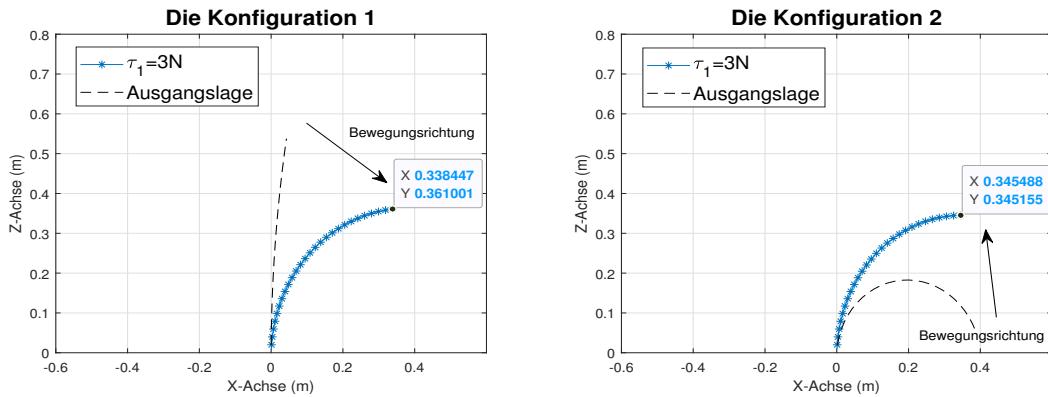
**Abbildung 4.19:** Die Konfigurationen des Kontinuumsroboters mit 6 Teilssegmenten in den unterschiedlichen Ausgangslagen



**Abbildung 4.20:** Die Konfigurationen mit 12 Teilssegmenten in den beiden Ausgangslagen



**Abbildung 4.21:** Die Konfigurationen mit 18 Teilssegmenten in den beiden Ausgangslagen



**Abbildung 4.22:** Die Konfigurationen mit 27 Teilsegmenten in den beiden Ausgangslagen

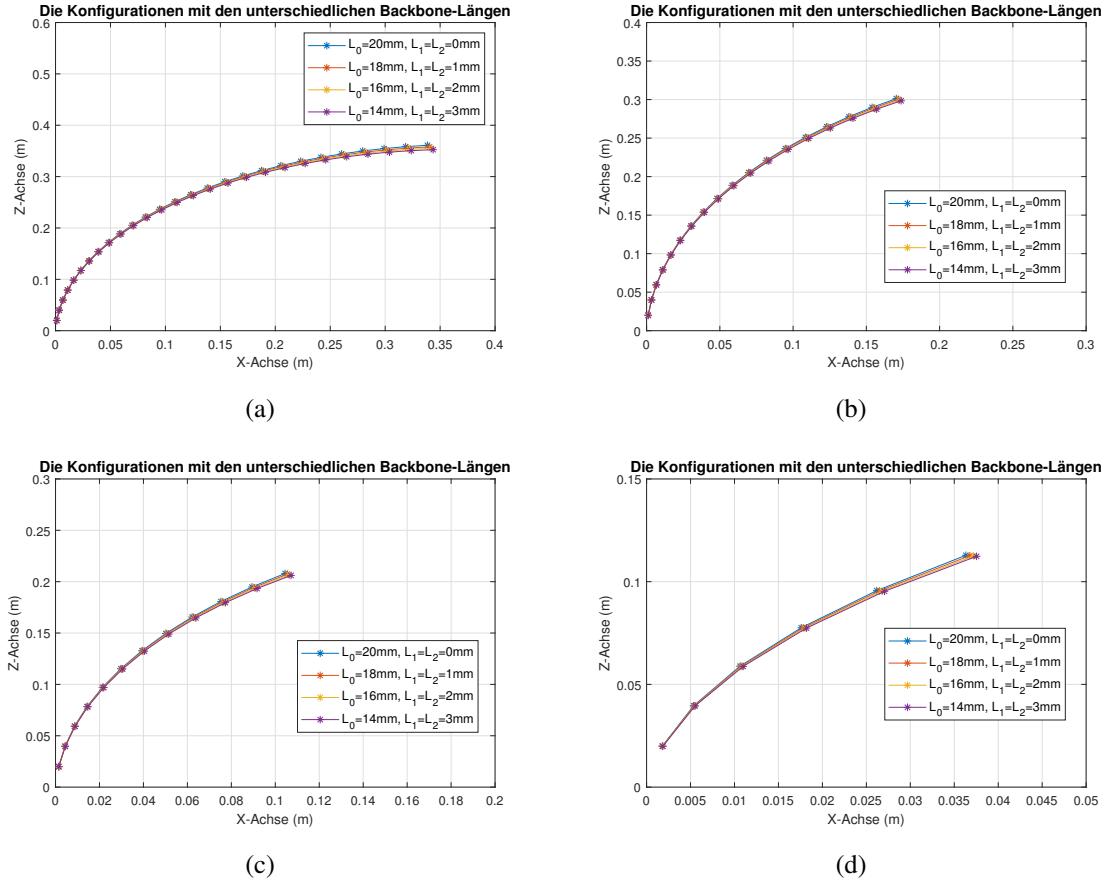
### 4.3 Geometrische Anpassung der Backbone

In der Literatur wird die Geometrie der Scheibe meist nicht berücksichtigt. Die Backbone zwischen den beiden benachbarten Teilsegmenten wird direkt als eine gebogene Kurve mit einer konstanten Krümmung betrachtet. Wenn die Dicke der Scheibe nicht mehr vernachlässigt wird, muss eine geometrische Anpassung durchgeführt werden. In Abschnitt 3.2 wurden zwei zusätzliche Parameter  $L_1$  und  $L_2$  auf Basis des klassischen Constant-Curvature-Ansatzes verwendet, um die Kinematik des neuartigen Kontinuumsroboters genauer zu beschreiben. In diesem Abschnitt werden die Parameterstudien unter der Berücksichtigung von  $L_1$ ,  $L_2$  und der Anzahl der Teilsegmenten untersucht. Die gesamte Länge zwischen den Schwerpunkten der beiden benachbarten Teilsegmente entspricht einer Konstante:

$$L_0 + L_1 + L_2 = 20\text{mm} \quad (4.8)$$

In Abbildung 4.23 werden die Konfigurationen von vier Kontinuumsrobotern jeweils mit 27, 18, 12 und 6 Scheiben unter einer Belastung von 3 N dargestellt. Die Parameter  $L_1$  und  $L_2$  werden von 0 mm auf 3 mm jedes Mal um 1 mm erhöht, trotzdem bleibt die gesamte Länge des Kontinuumsroboters konstant. Mit der Erhöhung der Anzahl der Scheiben ist die Differenz beim Endeffektor deutlicher. Der Abstand der Endeffektoren des 27-Scheiben-Kontinuumsroboters zwischen dem blauen Plot ( $L_1 = L_2 = 0$  mm) und dem violetten Plot ( $L_1 = L_2 = 3$  mm) beträgt ca. 10 mm, während dieser Abstand beim 6-Scheiben-Kontinuumsroboter nur ca. 1,3 mm groß ist. Je größer die Parameter  $L_1$  und  $L_2$  sind, desto stärker wird der Roboter in die aktuierten Richtung gebogen. Der Grund liegt darin, dass die Steifigkeit des Backbones proportional zum  $L_0$  ist ( $M = \frac{EJ_{xx}}{L_0} \cdot \theta$ ). Wenn  $L_0$  verringert, aber die gesamte Länge des Kontinuumsroboters gleich bleibt, erhöht die Steifigkeit. Dies führt zu

einer schwächeren Verformung über den Winkel  $\theta_i$ . Solche Faktoren bringen anschließend eine niedrigere Verschiebung des Endeffektors in der  $z$ -Richtung, aber eine höhere Verschiebung des Endeffektors in der  $x$ -Richtung.

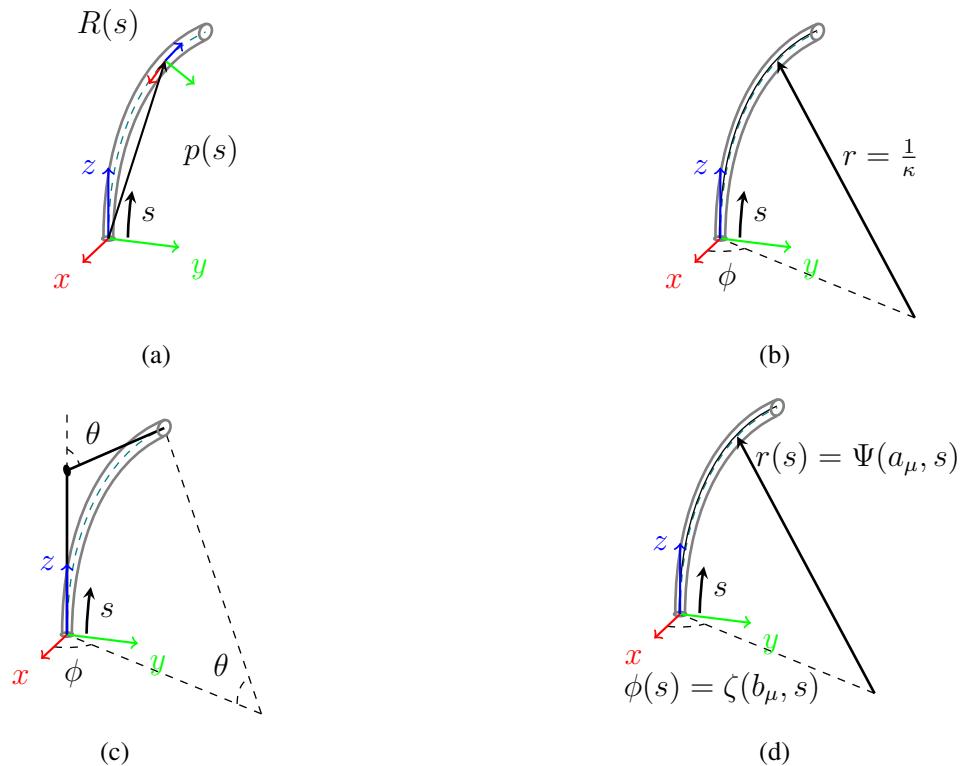


**Abbildung 4.23:** Konfigurationen mit unterschiedlicher Parameter  $L_1$  und  $L_2$ , die gesamte Länge des Kontinuumsroboters bleibt konstant., (a) Roboter mit 27 Scheiben, (b) Roboter mit 18 Scheiben, (c) Roboter mit 12 Scheiben, (d) Roboter mit 6 Scheiben

#### 4.4 Kinematische Ansätze zur Beschreibung der Backbone

Um den Kontinuumsroboter darzustellen, wurden mehrere kinematische Ansätze vorgeschlagen. Diese Methoden führen zu unterschiedlichen Ausdrücken der gebogenen Backbone, woraus eine unterschiedliche Position und Orientierung des Teilstückes resultiert. Die bestehenden Ansätze können als verteilte und als Lumped-Parameterisierung der Backbone klassifiziert werden. In der verteilten Parametrisierung (Variable-Curvature-Ansatz) wird die Kurve durch eine

kontinuierliche Funktion von  $s$  definiert. In der Lumped-Parametrisierung (Constant-Curvature-Ansatz, Starrkörper-Ansatz und Modal-Ansatz) werden die Position und die Orientierung der Backbone durch einen endlichen Satz an Parametern dargestellt. Die Backbone wird in zahlreichen Teilsegmenten diskretisiert. Die erforderlichen unendlichen Backbone-Parameter werden reduziert, indem die Verformung der Backbone als eine bestimmte Geometrie betrachtet wird. Diese Annahmen führen zu einem Kompromiss zwischen der Komplexität und der Genauigkeit, denn sie vereinfachen die Beschreibung der Backbone. Aufgrund der Diskretisierung kommt es zu einem Informationsverlust, da eine Interpolation erforderlich ist, um jeden Punkt auf den gesamten Backbone zu erhalten. Im Gegensatz dazu beschreibt die verteilte Parametrisierung jeden Punkt auf der Backbone ohne Interpolation und führt nicht zu einem solchen Verlust. In Abbildung 4.24 werden die relevantesten, in der Literatur verwendeten vier Backbone-Parametrisierungen zusammengefasst. In dieser Arbeit werden die zweite und die dritte Parametrisierungen verwendet. Deren Ergebnisse sind im folgenden Abschnitt ersichtlich.



**Abbildung 4.24:** (a) Die Darstellung mit dem „Variable-Curvature-Ansatz“ dient zur Beschreibung der Position  $p(s)$  und der Orientierung  $R(s)$ , (b) Bogenparameter  $[\kappa, \phi]$ , die zur Beschreibung eines Segments mit dem „Constant-Curvature-Ansatz“ ohne Torsion verwendet werden, (c) Starrkörper 1R-Modell, das die Backbone mit zwei Gliedern annähert, (d) Darstellung der Backbone-Parameter durch Shape-Funktionen  $\Psi(a_1, a_2, \dots, s)$  und  $\zeta(b_1, b_2, \dots, s)$  im modalen Ansatz.

#### 4.4.1 Variable-Curvature-Ansatz

Aufgrund der kontinuierlichen Kurve der Backbone ist theoretisch eine unendliche Anzahl an Parametern erforderlich, um den Arbeitsraum des Roboters zu beschreiben. Da keine Annahme darüber besteht, wie die Form der Backbone aussieht, wird eine geometrisch exakte Darstellung verwendet. Bei dieser Darstellung können beliebige Krümmungsvariationen durch Differentialgleichungen berücksichtigt werden. Daher wird der Ansatz als „Variable-Curvature-Ansatz“ bezeichnet. Die Minimalkoordinaten werden durch zwei Parameter definiert.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(s) & \mathbf{v}(s) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Die beiden Variablen  $\mathbf{u}(s) \in \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  werden verwendet, um die Änderungsrate der Rotations- bzw. Translationsmatrix darzustellen. Die Rotationsmatrix wird mithilfe der Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{u}(s)$  in Gleichung 4.10 definiert.

$$\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} = \mathbf{R}(s) \begin{bmatrix} 0 & u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Wenn die Backbone als nicht dehnbar und scherenlos angenommen wird, ergeben sich keine axiale Verformung. Daher wird die Translation in Gleichung 4.11 formuliert:

$$\frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} = \mathbf{R}(s)\mathbf{v}(s), \quad (4.11)$$

wobei  $\mathbf{v}(s) = [0, 0, 1]$ .

#### 4.4.2 Modal-Ansatz

Beim modalen Ansatz wird die Backbone durch die folgenden Kurvenparametern ausgedrückt, die aus linearen modalen Shape-Funktionen bestehen. Letztere sind kontinuierliche Funktionen und abhängig von  $s$ . In Gleichung 4.12 wird ein Kurvenparameter  $c(s)$  formuliert,

$$c(s) = \sum_{r=1}^n a_r \Phi_r(s), \quad (4.12)$$

wobei  $a_r$  der  $r$ -te Koeffizient von der  $r$ -ten modalen Shape-Funktion  $\Phi_r$  ist. Die Anzahl der Kurvenparameter hängt von den Systemparametern ab. Beispielsweise werden in Abbildung 4.24(d) zwei Kurvenparameter  $\phi(s)$  und  $r(s)$  verwendet, die jeweils mithilfe einer polynomialen Approximation formuliert werden. Die Minimalkoordinaten entsprechen den Koeffizienten der beiden Polynome:

$$\mathbf{q} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\mu \ b_\mu] \quad (4.13)$$

#### 4.4.3 „Constant-Curvature-Ansatz“

Die Annahme des Constant-Curvature-Ansatzes bildet die Grundlage für einen Ansatz zur Parametrisierung der Backbone. Der Backbone wird als eine Reihe an Tangentenabschnitten betrachtet, die als Bögen mit konstanten Krümmungen und konstanten Längen approximiert werden. Der „Constant-Curvature-Ansatz“ kann entweder auf das gesamte Segment oder jedes Teilsegment angewendet werden. Wenn die Auswirkungen der Torsion vernachlässigt werden, kann das Profil der Backbone als eine planare Verformung betrachtet werden. Mithilfe

einer homogenen Transformationsmatrix können die Position und die Orientierung jedes Teilsegments beschrieben werden. Die Transformationsmatrix kann anhand zweier Backbone-Parameter bzw. einer geometrischen Analyse hergeleitet werden:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \kappa & \phi \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.4.4 Starrkörper-Ansatz

Dieser Ansatz wurde auf Basis des „Constant-Curvature-Ansatzes“ entwickelt. Die Teilsegmente des neuartigen Kontinuumsroboters werden als mehrere drehbare Zweigelenkkupplungen betrachtet. Anstatt der Backbone-Länge wird die Gelenklänge im „Starrkörper-Ansatz“ als eine Konstante definiert. In Bezug auf die Backbone wird auch eine Reihe an Tangentenabschnitten angenommen, die als Bögen, jedoch mit variablen Krümmungen und variablen Längen approximiert werden. Daher können die Position und die Orientierung jedes Teilsegments auch mithilfe einer homogenen Transformationsmatrix mit den Minimalkoordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta & \phi \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

definiert werden. Außer des kinematischen Ansatzes können alle Implementierungen, z. B. die Berechnung der Belastungen und die Aufstellung der Gleichungssysteme, ebenso wie im „Constant-Curvature-Ansatz“ verwendet werden. Die Feder- und Dämpfungsmomente dieses Robotersystems werden durch die Biegung der Backbone erzeugt, die im „Constant-Curvature-Ansatz“ jeweils linear von der Krümmung  $\kappa$  und der zeitlichen Ableitung  $\dot{\kappa}$  abhängen. Im Gegensatz dazu sind die Feder- und Dämpfungsmomente aufgrund der variablen Krümmungen und Krümmungslängen im Starrkörper-Ansatz nicht mehr linearabhängig. Die beiden Federmomente eines Teilsegments bei der gleichen gebogenen Orientierung  $\theta$  werden in Abbildung 4.26 dargestellt und in den Gleichungen 4.16 und 4.17 formuliert.

$$M = EJ_{xx}\theta/L_0, \quad \text{Constant-Curvature-Ansatz} \quad (4.16)$$

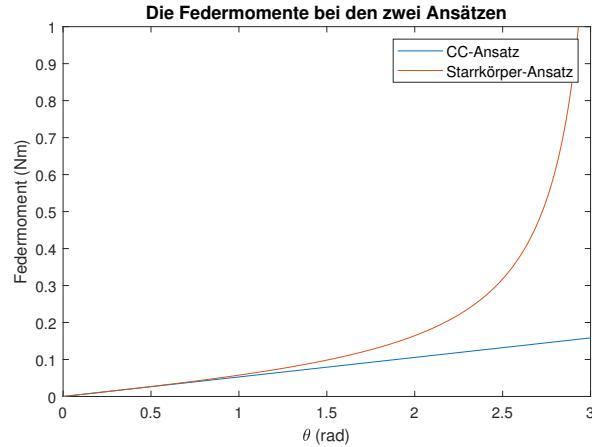
$$\begin{cases} M = EJ_{xx}\theta/L_{\text{Krümmung}}, & \text{Starrkörper-Ansatz} \\ L_{\text{Krümmung}} = \frac{L_0}{2}\theta/\tan\frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$

Bei einer Biegung mit kleinem Winkel sind die beiden Federmomente nahezu identisch. Bei 60 Grad zeigt sich der Unterschied deutlich. Daher lassen sich die Gründe für die unterschiedlichen Positionen eines Teilsegments bei den beiden Ansätzen in zwei Punkten zusammenfassen:

- unterschiedlicher Translationsvektor

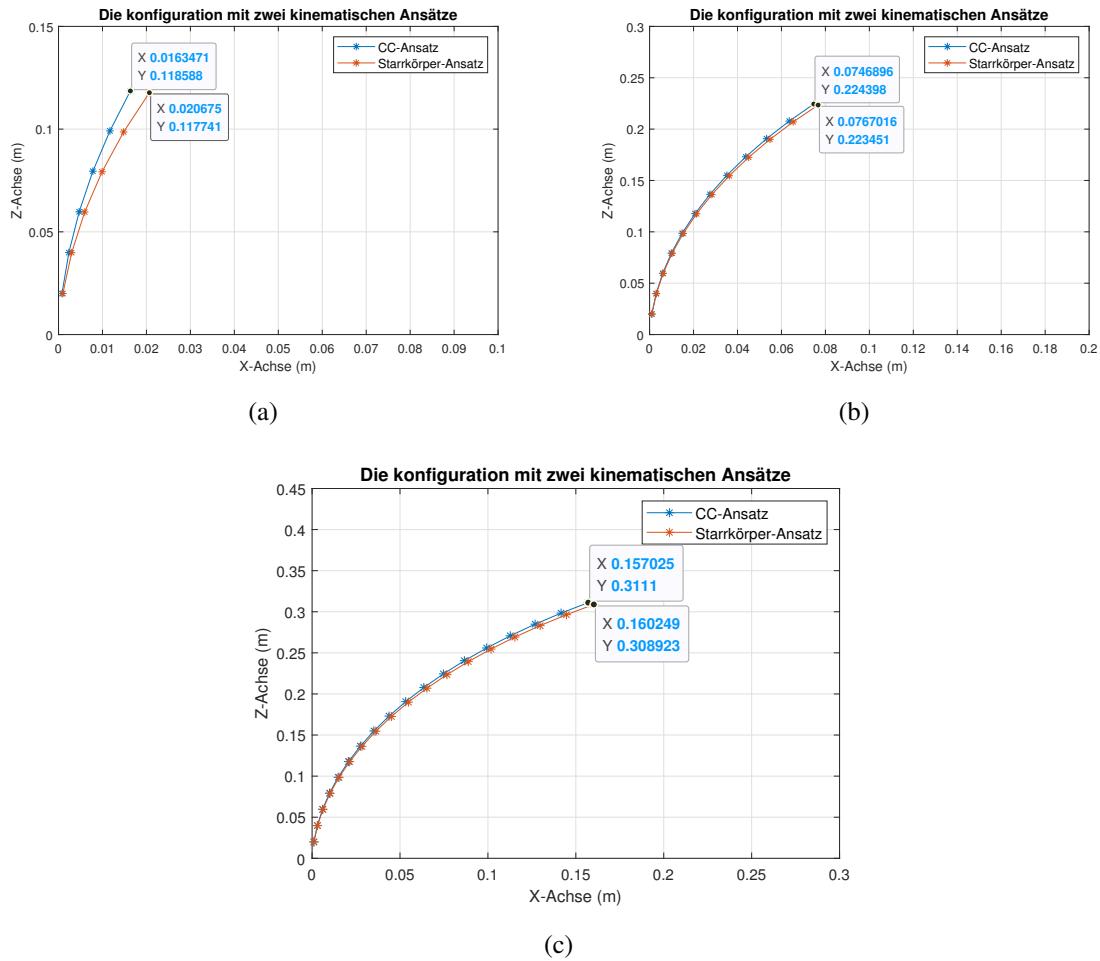
- unterschiedliche Feder- und Dämpfungsmomente

Der Einfluss dieser beiden Faktoren ist bei hohen Belastungen besonders deutlich, also bei großen Biegungen .



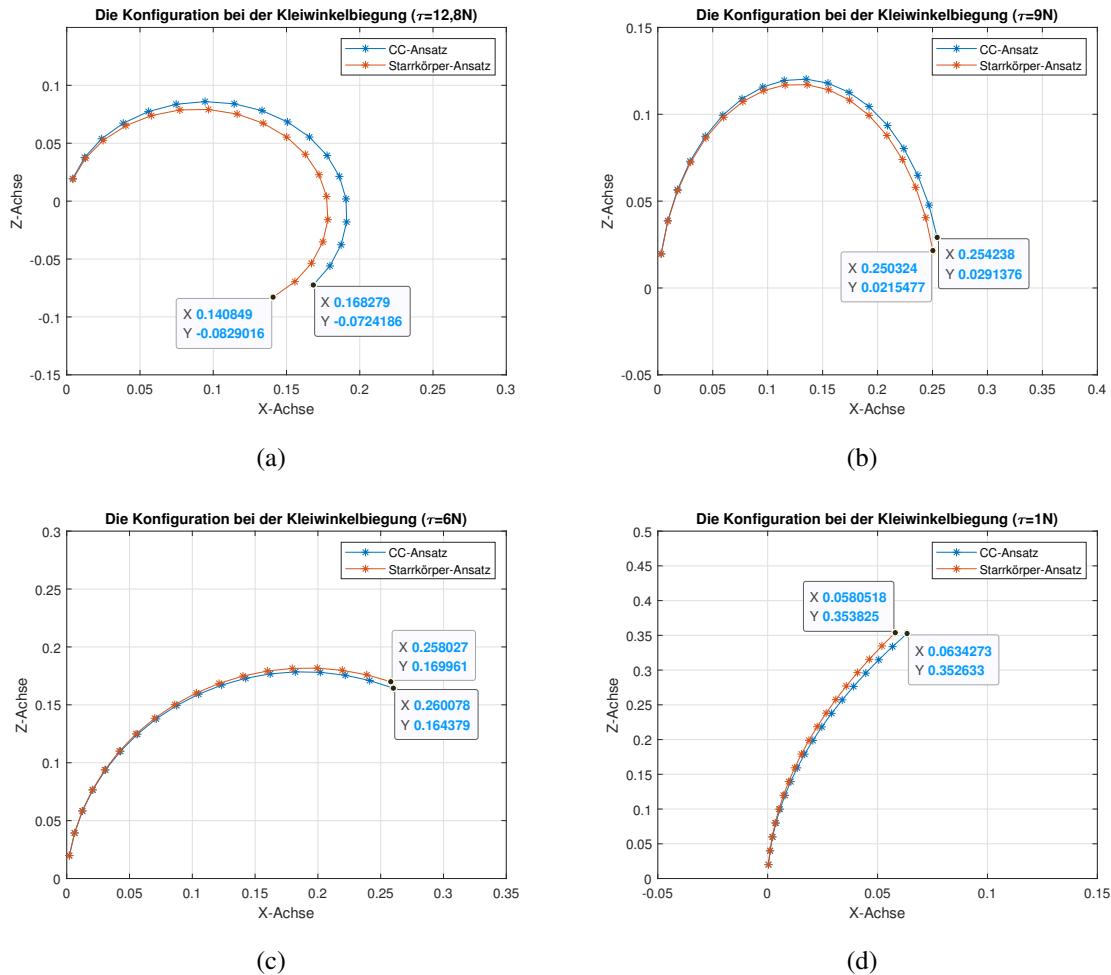
**Abbildung 4.25:** Die Federmomente bei dem Constant-Curvature-Ansatz und dem Starrkörper-Ansatz

Diese Nichtlinearität verkompliziert die Implementierung, erhöht jedoch die Genauigkeit der Modellierung. In Abbildung 4.26 werden die Konfigurationen des neuartigen Kontinuumsroboters jeweils mit 6, 12 und 18 Scheiben unter der gleichen Belastung dargestellt. Wenn die Konfiguration des Starrkörper-Ansatzes als Referenz definiert wird, entsprechen die Fehler in der Modellierung mit dem „Constant-Curvature-Ansatz“ 4, 4 mm, 2, 2 mm und 3, 9 mm.

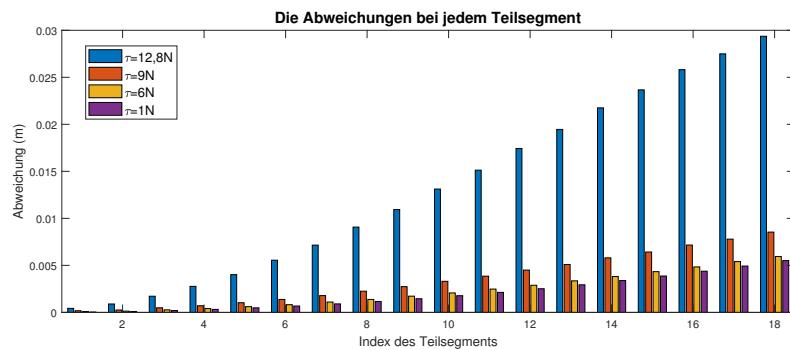


**Abbildung 4.26:** Die Konfigurationen mit zwei kinematischen Ansätzen, (a) 6 Scheiben, (b) 12 Scheiben, (c) 18 Scheiben

Laut der Formulierung des Starrkörper-Ansatzes und des Constant-Curvature-Ansatzes gilt die Kleinwinkelnäherung nicht nur bei der Kinematik, sondern auch bei der Steifigkeit der Backbone. Der Roboter wird unter einer mechanischen Beschränkung aufgebaut, sodass der Parameter  $\theta_i$  kleiner als 0,42 rad beschränkt. Die Konfigurationen des Kontinuumsroboters mit 18 Scheiben werden unter dieser Berücksichtigung damit verglichen. Der Kontinuumsroboter erreicht den maximalen Biegewinkel ( $\theta_i \approx 0,4162$  rad) unter der Belastung  $\hat{\tau}_1 = 12,8$  N. Weiterhin werden Konfigurationen mit Belastungen von 1N, 6N, 9N und 12,8N simuliert. In Abbildung 4.28 werden die Abweichungen zwischen den Endeffektoren bei diesen Kleinwinkelbiegungen dargestellt.



**Abbildung 4.27:** Konfigurationen bei der Kleinwinkelbiegung, (a)  $\hat{\tau}_1 = 12,8$ , (b)  $\hat{\tau}_1 = 9$ , (c)  $\hat{\tau}_1 = 6$ , (d)  $\hat{\tau}_1 = 1$ .



**Abbildung 4.28:** Abweichungen bei jedem Teilsegment

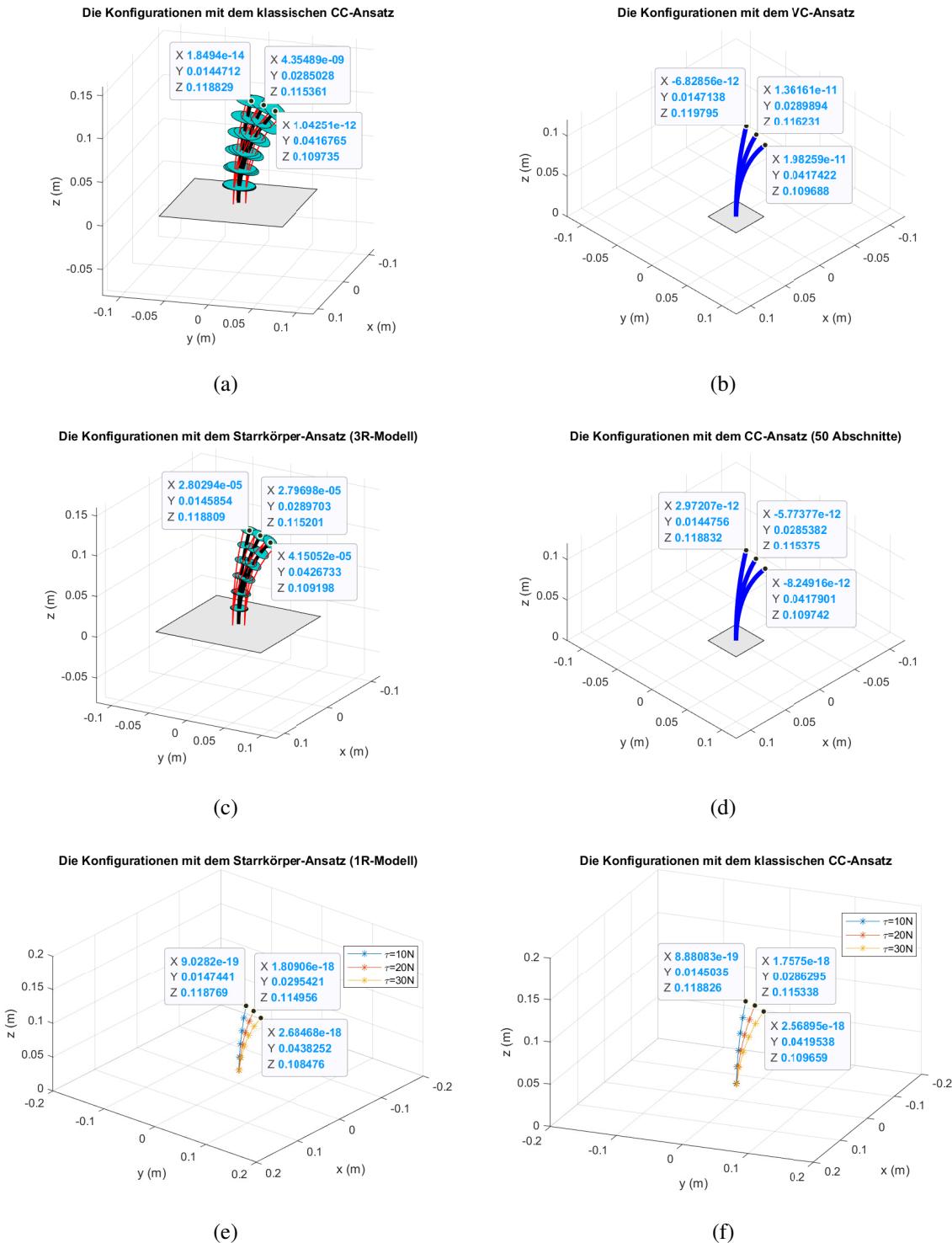
Obwohl die Abweichungen jedes Teilsegments gering sind, werden die Fehler beim Endeffektor aufsummiert. Der Anstieg der Anzahl an Teilsegmenten führt zu einem großen Unterschied in der Position des Endeffektors. Dessen Abweichungen entsprechen bei Belastungen von 1 N und 6 N lediglich 5 mm bis 6 mm, während sich die Abweichung bei einer Belastung von 12,8 N auf 29 mm erhöht.

#### 4.4.5 Vergleich der Ergebnisse mit der Modellierung von Priyanka Rao

Priyanka Rao verwendete vier unterschiedliche Ansätze, um die Statik des allgemeinen Kontinuumsroboters zu modellieren [Rao+21]. Zuerst wird ebenso wie in dieser Arbeit der Constant-Curvature-Ansatz implementiert. Danach wird eine Variation auf Basis dieser Methode entwickelt. Der Unterschied in der Variation liegt darin, dass der gesamte Kontinuumsroboter durchschnittlich in 50 Abschritte eingeteilt wird. Jeder Abschnitt wird als sogenannte Constant-Curvature implementiert. Zusätzlich wird der Variable-Curvature-Ansatz verwendet, damit das Resultat einer kontinuierlichen Kurve entspricht. Außerdem wird der Starrkörper-Ansatz genutzt. Die Backbone wird durch vier drehbare Starrkörper beschrieben. Jedoch wird die Backbone im Starrkörper-Ansatz dieser Arbeit lediglich durch zwei drehbare Starrkörper beschrieben. Die Implementierung dieser Arbeit ist durch den Vergleich mit den Lösungen in [Rao+21] zu validieren. Um den sinnvollen Vergleich sinnvoll zu erzielen, werden alle Parameter aneinander angepasst. Ein allgemeiner Kontinuumsroboter mit sechs dünnen Scheiben und einem Seil wird jeweils unter der Belastung von 10 N, 20 N und 30 N modelliert. Die Gravitation und die Reibungskraft werden vernachlässigt. In Abbildung 4.29 werden vier Konfigurationen der Modellierung von Priyanka Rao und zwei Konfigurationen der Modellierung aus dieser Arbeit dargestellt. Wenn die Modellierung mit dem Constant-Curvature-Ansatz in dieser Arbeit (in Abbildung 4.29 (f)) als Referenz angenommen wird, entspricht die Abweichung jeder Modellierung (in Abbildung 4.29 (a) bis (e)) dem Abstand zwischen den Endeffektoren. In Tabelle sind die Abweichungen ersichtlich. Die Lösungen der unterschiedlichen kinematischen Ansätze sind nahezu identisch. Alle Abweichungen der Modellierungen von Priyanka Rao sind kleiner als 1 mm.

**Tabelle 4.5:** Die Abweichungen des Endeffektors zwischen den Implementierungen aus dieser Arbeit und den vier Implementierungen von Priyanka Rao

Belastung	Modell (a)	Modell (b)	Modell (c)	Modell (d)	Modell (e)
10 N	0,5366 mm	0,9919 mm	0,0835 mm	0,0286 mm	0,2472 mm
20 N	0,1287 mm	0,9627 mm	0,3674 mm	0,0984 mm	0,9894 mm
30 N	0,2875 mm	0,2136 mm	0,8545 mm	0,1836 mm	2,2139 mm



**Abbildung 4.29:** Vier Modellierungen von Priyanka Rao und zwei Modellierungen aus dieser Arbeit, (a) der klassische CC-Ansatz von Priyanka Rao, (b) der VC-Ansatz von Priyanka Rao, (c) Starrkörper-Ansatz (3R-Modell) von Priyanka Rao, (d) die Variation des CC-Ansatzes (50 Abschnitte) von Priyanka Rao, (e) Starrkörper-Ansatz aus dieser Arbeit, (f) CC-Ansatz (1R-Modell) aus dieser Arbeit.

## 4.5 Laufzeit reduzieren

### 4.5.1 Laufzeit des „Maple-Skripts“

Obwohl die Software *Maple* einen großen Vorteil in der symbolischen Berechnung mitbringt, beschränkt sie die Leistung des Computers. Aufgrund der rekursiven Implementierung erhöht sich die Laufzeit des Maple-Skripts schnell, während die Anzahl der Minimalkoordinaten steigt. Unter der Berücksichtigung der mathematischen Voraussetzungen werden alle Implementierungen der Kinematik durch die geometrischen Analyse anstatt der Berechnung der Vektoren durchgeführt, z. B. die Implementierung der Seillängen  $d_{ss,ij}$  in der Gleichung 3.29 und die Orientierung der Bohrung  $p_{h,i}$  in Gleichung 3.33. Die Komplexität des mathematischen Ausdrucks bzw. die Laufzeit ist für jede Teilsegment identisch. Allerdings können die Seillänge  $d_{ss,ij}$  und die Orientierung der Bohrung  $p_{h,i}$  durch die Bohrungsposition direkt implementiert werden:

$$\mathbf{p}_{\text{Bohrung},ij} = \prod_1^i \mathbf{T}_{i-1}^i \underbrace{(\mathbf{t}_i^i - 1 + \mathbf{r}_{\text{hr,lcl},ij})}_{\text{die lokale Bohrungsposition}} \quad (4.18)$$

$$d_{ss,ij} = \mathbf{p}_{\text{Bohrung},ij} \cdot \mathbf{p}_{\text{Bohrung},ij} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{p}_{h,ij} = \frac{\mathbf{p}_{\text{Bohrung},ij}}{\|\mathbf{p}_{\text{Bohrung},ij}\|} \quad (4.20)$$

Die mathematische Ausdrücke der beiden Größen werden durch die Steigerung von  $i$  aufgrund der Multiplikation der Transformationsmatrizen verkompliziert. Daher sind die Berechnungen des Skalarprodukts und der Normierung angesichts bei der großen Anzahl der Scheiben  $i$  nicht durchführbar. Die Laufzeit der Statikmodellierung mit einer unterschiedlichen Anzahl an Scheiben wird in Tabelle 4.6 dargestellt.

**Tabelle 4.6:** Die Laufzeit der Statikmodellierung

Anzahl der Scheiben	Anzahl der Seile	Laufzeit (Stunde)
6	12	0,005
9	12	0,012
12	12	0,03
15	12	0,09
18	12	0,35
21	12	1,36
24	12	5,28
27	12	28,61

Es ist ersichtlich, dass die Laufzeit ein exponentielles Wachstum zeigt. Die Berechnung eines Statikmodells mit mehr als 30 Scheiben ist nicht möglich, weil die geschätzte Laufzeit über eine Woche dauert. Neben der Statikmodellierung finden sich weitere Berechnungen zu den partiellen Ableitungen in der Dynamikmodellierung, z. B. die Bestimmung der Massenmatrix. Diese partielle Ableitung nimmt den größten Teil der Laufzeit in Anspruch. In Tabelle 4.7 ist die Laufzeit der Dynamikmodellierung für den allgemeinen Kontinuumsroboter mit einer unterschiedlichen Anzahl an Scheiben zu sehen.

**Tabelle 4.7:** Die Laufzeit der Dynamikmodellierung in Maple

Anzahl der Scheiben	Anzahl der Seile	Laufzeit (Stunde)
3	4	0,025
4	4	0,036
6	4	0,65
8	4	mehr als 24

Es ist zu erkennen, dass die Laufzeit durch die Erhöhung der Scheibenanzahl rasch ansteigt. Neben der Verwendung eines leistungsfähigeren Computer zur Berechnung müssen die Parameter zwingend reduziert werden.

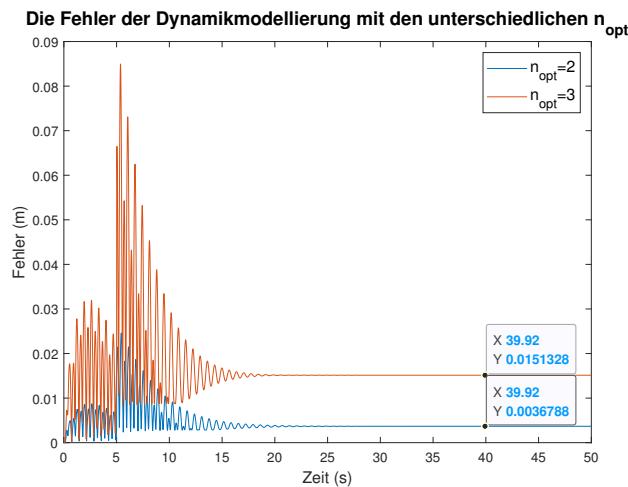
#### 4.5.2 Parameterreduktion in der Dynamikmodellierung

Aufgrund der Abhängigkeit zwischen der Laufzeit und der Anzahl der Minimalkoordinaten kann das Modell mithilfe der Reduktion der Minimalkoordinaten verbessert werden, wenn ein Kontinuumsroboter mit mehreren Scheiben simuliert wird. Es wird angenommen, dass die Parameter  $\kappa$  und  $\phi$  zweier oder dreier Teilstücke identisch sind. Diese Anzahl wird als Optimierungsfaktor  $n_{\text{opt}}$  definiert. Jedoch muss gewährleistet sein, dass die Anzahl der gesamten Scheiben durch den Optimierungsfaktor teilbar ist. Dieses Optimierungsverfahren gilt lediglich in der Modellierung des allgemeinen Kontinuumsroboters. In der Modellierung des neuartigen Kontinuumsroboters darf der Parameter  $\phi$  wegen der senkrecht kombinierten Zweigelenkkupplungen nicht durch das Optimierungsverfahren angenommen werden. In Gleichung 4.21 wird die Reduktion der Minimalkoordinaten mit einem Optimierungsfaktor  $n_{\text{opt}} = 2$  beispielhaft

durchgeführt. Die Anzahl der Minimalkoordinaten wird dabei um die Hälfte reduziert.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [\Delta_{x,1} \quad \Delta_{y,1} \quad \Delta_{x,2} \quad \Delta_{y,2} \quad \dots \quad \Delta_{x,5} \quad \Delta_{y,5} \quad \Delta_{x,6} \quad \Delta_{y,6}] \\ \rightarrow \mathbf{q}'_{\text{opt}} &= [\Delta_{x,1} \quad \Delta_{y,1} \quad \Delta_{x,1} \quad \Delta_{y,1} \quad \dots \quad \Delta_{x,3} \quad \Delta_{y,3} \quad \Delta_{x,3} \quad \Delta_{y,3}] \\ \rightarrow \mathbf{q}_{\text{opt}} &= [\Delta_{x,1} \quad \Delta_{y,1} \quad \Delta_{x,2} \quad \Delta_{y,2} \quad \Delta_{x,3} \quad \Delta_{y,3}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Das Optimierungsverfahren führt zu einem Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Modellierung und dem Berechnungsaufwand. Wenn das Originalmodell als Referenz angenommen wird, können die Abstände zwischen den Endeffektoren als Fehler der Dynamikmodellierung definiert werden. In Abbildung 4.30 werden Fehler mit unterschiedlichen Optimierungsfaktoren während der Bewegung des 6-Scheiben-Kontinuumsroboters dargestellt.



**Abbildung 4.30:** Fehler der Dynamikmodellierung mit unterschiedlichen  $n_{\text{opt}}$

Die Abnahmen des Berechnungsaufwands sind in Tabelle 4.8 zu sehen.

**Tabelle 4.8:** Die Laufzeit der Dynamikmodellierung mit den Optimierungsfaktor

Anzahl der Scheiben	Anzahl der Seile	Optimierungsfaktor	Laufzeit (Stunde)
6	4	3	0,12
6	4	2	0,18
6	4	1	0,65
4	4	2	0,018
4	4	1	0,035

Es ist erkennbar, dass die Laufzeit mit einem Optimierungsfaktor von 2 über die Hälfte reduziert werden kann. Der Fehler des Endeffektors im Ruhezustand entspricht lediglich 3,67 mm.

## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Statik und Dynamikmodelle für einen Kontinuumsroboter mit einem allgemeinen und einem spezifischen Design mithilfe des Prinzips der virtuellen Leistung entwickelt. Die mathematische Modellierung wurde zuerst mithilfe der Software *Maple* implementiert. Somit konnten die symbolischen Ausdrücke des Modells bestimmt werden.

Die Lösung war ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das durch ein numerisches Verfahren mithilfe des ODE-Solvers in Matlab gelöst werden konnte. In der Modellierung wurden zwei kinematische Ansätze verwendet – der „Constant-Curvature-Ansatz“ und der Starrkörper-Ansatz –, deren Ergebnisse damit verglichen wurden. In der Modellierung wurde eine vollständige Anpassung der Geometrie der Teilsegmente durchgeführt, z. B. die Berücksichtigung der Dicken der Scheibe, die Verformung der Backbone oder der Angriffspunkt der aktuierten Kräfte.

Dennoch wurde das Statikmodell auf Basis derselben Formulierung unter der Vernachlässigung von Trägheits- und Dämpfungseffekten implementiert. In der Statikmodellierung wurde nicht nur die Kraftkonfiguration, sondern auch die Seilkonfiguration berücksichtigt, um die Lage des Kontinuumsroboters entweder durch die aktuierten Kräfte oder durch die Zuglängen der Seile bestimmen zu können.

In der Dynamikmodellierung wurden drei Reibungsansätze verwendet. Durch die stetigen Funktionen für die Reibung konnte das dynamische Verhalten verbessert werden. Mithilfe der Reduktion der Minimalkoordinaten wurde ein Optimierungsverfahren entwickelt, um die hohe Laufzeit zu verringern. Somit kann ein Kontinuumsroboter mit mehreren Teilsegmenten simuliert werden. Gleichzeitig wurde eine parameterlineare Form erweitert, um die dynamischen Parameter zu identifizieren.

## 6 Ausblick

Die weitere Arbeit wird Folgendes umfassen, sodass die Simulation durch andere Verfahren validiert wird, z. B. durch eine Simulation mit FEA oder einen Vergleich mit den reellen Messdaten. Daher ist es notwendig, dass ein vollständiges Messsystem entwickelt wird, um die Lage des Roboters, die Antriebskräfte und die Längen der Seile zu bestimmen. Vor der Simulation sind zuerst alle Parameter des Kontinuumsroboters festzulegen. Die geometrischen Parameter können durch gemeinsame Messmethoden angegeben werden. Die anderen dynamischen Parameter, z. B. Reibungs- und Dämpfungskoeffizienten, können mithilfe des Modells der parameterlinearen Form bestimmt werden.

Es ist zu beachten, dass die Kontakt situation zwischen den Zweigelenkkupplungen kompliziert ist. Da die Kontaktreibung aufgrund der komplexen mathematischen Ausdrücke noch nicht implementiert wird, ergibt sich eine Ungenauigkeit in der Modellierung. Daher muss diese Reibung zukünftig zwingendermaßen untersucht werden.

Außerdem sind die Regelung und Steuerung des Kontinuumsroboters sowie der Entwurf der Bahnplanung in der beengten Umgebung von Interesse. Es kann überprüft werden, wie der Kontinuumsroboter seine hohe Redundanz nutzen kann, um Hindernissen auf intelligente Weise auszuweichen.

## Literatur

- [Chi93] G.S. Chirikjian. “A continuum approach to hyper-redundant manipulator dynamics”. In: *Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '93)*. Bd. 2. 1993, 1059–1066 vol.2. DOI: 10.1109/IROS.1993.583307.
- [DBR20] Cosimo Della Santina, Antonio Bicchi und Daniela Rus. “On an Improved State Parametrization for Soft Robots With Piecewise Constant Curvature and Its Use in Model Based Control”. In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 5.2 (2020), S. 1001–1008. DOI: 10.1109/LRA.2020.2967269.
- [Gos21] Daniel Gossen. “Conceptual Design and Construction of a Continuum Robot with Drive Unit for In-Situ Aeroengine Boroscope Inspection”. Magisterarb. Leibniz Universität Hannover, 2021.
- [HW03] Michael W. Hannan und Ian D. Walker. “Kinematics and the Implementation of an Elephant’s Trunk Manipulator and Other Continuum Style Robots”. In: *Journal of Robotic Systems* 20.2 (2003), S. 45–63. DOI: <https://doi.org/10.1002/rob.10070>.
- [Rao+21] Priyanka Rao, Quentin Peyron, Sven Lilge und Jessica Burgner-Kahrs. “How to Model Tendon-Driven Continuum Robots and Benchmark Modelling Performance”. In: *Frontiers in Robotics and AI* 7 (2021), S. 223. ISSN: 2296-9144. DOI: 10.3389/frobt.2020.630245. URL: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/frobt.2020.630245>.
- [RB12] *Continuum Manipulator Statics Based on the Principle of Virtual Work*. Bd. Volume 4: Dynamics, Control and Uncertainty, Parts A and B. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Nov. 2012, S. 321–328. DOI: 10.1115/IMECE2012-87675.
- [RB14] William S. Rone und Pinhas Ben-Tzvi. “Continuum Robot Dynamics Utilizing the Principle of Virtual Power”. In: *IEEE Transactions on Robotics* 30.1 (2014), S. 275–287. DOI: 10.1109/TRO.2013.2281564.

- [Wan+17] Hesheng Wang, Chao Wang, Weidong Chen, Xinwu Liang und Yuting Liu. “Three-Dimensional Dynamics for Cable-Driven Soft Manipulator”. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 22.1 (2017), S. 18–28. DOI: 10.1109/TMECH.2016.2606547.
- [Wan+21] Mingfeng Wang, Xin Dong, Weiming Ba, Abdelkhalick Mohammad, Dragos Axinte und Andy Norton. “Design, modelling and validation of a novel extra slender continuum robot for in-situ inspection and repair in aeroengine”. In: *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 67 (2021), S. 102054. ISSN: 0736-5845. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2020.102054>.
- [XLL18] Wenfu Xu, Tianliang Liu und Yangmin Li. “Kinematics, Dynamics, and Control of a Cable-Driven Hyper-Redundant Manipulator”. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 23.4 (2018), S. 1693–1704. DOI: 10.1109/TMECH.2018.2842141.