近似算法作业

SA23011253 任永文

问题1

a) 不是，假设图中只有一条边(u,v)，其中u的权为1而v的权大于2c。最小权顶点覆盖是1，但是这个算法以1/2的概率选择顶点v，因此权的期望大于c。

b) 是，令算法选择边e的概率为p_e，则$\sum_{e\in E} p_e$是算法选择顶点的期望数量，因为每次选择一条边就会添加一个顶点到顶点集。$E(|S(v)|) = \sum_{e\in\delta(v)} p_e$，即顶点v的邻接边集中被选择的期望数等于边集中所有边的概率和，$E(|S(v)|) \le 2$，因为每次从v的邻接边集中选择一条边，有1/2的可能会用v来覆盖边e，然后邻接边集中的剩余所有边都被覆盖，令E_i表示最多选择了i条邻接边，则下面等式$E(|S(v)|) = \sum_i iProb(E_i - E_{i+1}) + \sum_i Prob(E_i) \le 1 + \sum_{i>1}(1/2)^{i-1} \le 2$，因此$\sum_e p_e \le \sum_{v\in S^*}\sum_{e\in\delta(v)} p_e \le \sum_{v\in S^*} 2 = 2|S^*|$。

问题2

a) 对于机器p，任务j没有被分配到p的概率是$1-1/k$，因此p没有分配到任务当且仅当k个任务都被分到其他机器，概率为$(1-1/k)^k$，因此没有分配到任务的机器的期望数量是$k(1-1/k)^k$，由于$(1-1/k)^k$随着k的增大趋向于$1/e$，因此期望数量趋向于k/e。

b) 被拒绝的任务的数量是任务总数k减去被接受的任务数量，被接受的任务数量是k减去没有任务的机器数量，因此被拒绝的期望数量等于没有工作的期望数量k/e。

c) 只有一个任务被赋予机器p的概率是$k*1/k(1-1/k)^{k-1}$，随着k增加趋向于k/e，剩余的机器将处理两个任务$k-2k/e$，因此被拒绝的任务总数是$k(3-e)/e$。

问题3

a) 考虑一个n变量的子句C_i，这个子句不被满足的概率是$1/2^n$，当n=1时子句被满足的概率是$1/2$，因为总共有k个子句，被满足的期望至少是$k/2$。x_1和$\bar{x}_1$是一个任何赋值满足的子句不超过子句一半的例子。

b) 对于出现在单变量子句中的变量，让设置这个变量以满足这个子句的概率p≥$1/2$，对所有其他变量，让p= $1/2$。对于n变量的子句$C_i(n\ge 2)$，该子句被满足的

概率最差是$(1-1/2^n) \geq (1-p^2)$，现在为了求p，我们想满足所有子句，解$p = 1-p^2$得$p \approx 0.62$，因此子句满足数量得期望数量是0.62n。

c) 设子句总数是k，对于每对单变量冲突子句，从子句集中移除其中的一个，假设我们移除了m个，则我们最多能满足的子句数是k-m，现在将前一部分的算法应用到这k-2m个无冲突子句，子句满足的期望数量是0.62(k-2m)，初次之外我们能满足2m个冲突自居中的m个，因此我们能满足0.62(k-2m)+m个子句。