算法历年大题汇总

一．简答题

1.在分布式算法中，bit 复杂性是在算法发送的所有消息中 bit 的总数；消息链复杂性是在算法的任何执行中最长消息链的长度，若某消息链是 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，若m_i在因果关系上领先于m_{i+1}，则该消息链长度为 k。请问这两种复杂性分别属于消息复杂性和时间复杂性中的哪一种？并简述理由。

答：

bit 复杂性属于通信复杂性，消息链复杂性属于时间复杂性；若在一个分布式算法中每个 msg 信息的 bit 数目相同，则 msg 的个数就等于 bit 的总数除以一个 msg 的 bit 数目，则 bit 复杂性可以等价为 msg 复杂性；消息链复杂性是最长消息链的长度，在同步系统中它就是最大轮数，异步系统中假定任何执行的 msg 延迟至多是一个单位时间，它就是计算直到终止时间的最大运行时间，在同，异步系统中皆为时间复杂性。

2.已知事件 e1,e2,e3,e4 的向量时间戳分别是(1,0,0,0)、(3,5,0,0)、(0,0,1,2)、(3,6,4,3)，与 e3 有因果关系的是哪个事件？若该事件发生在 e3 之前，会怎样？

答：

e4,处理器会抑制过早到达的 e4 msg(不发送 e4)，直到 e3 msg 达到,才会将 e3,e4 一起发送。

3.对于一个优化问题 T，最佳可达性能比$R_{MIN}(T)$（定义如下）分别为何值时，问题 T 易于近似和难于近似？

$$R_{MIN}(T) = \inf\,(r \geq 1 | \exists \text{T 的多项式时间算法 A } 使得 R_A^\infty \leq r)$$

答：

该优化问题渐进性能比上界集合中的下确界，当 Rmin 为：

(1)1 时，因为渐进性能比大于等于 1，所以渐进性能比可以无限接近 1，则易于近似；

(2)正无穷大时，因为渐进性能比大于等于 1，所以渐进性能比也为无穷大，则难于近似；

4.对于某优化问题，什么情况下其近似算法的绝对性能比和渐进性能比相同？

答：

具有 Scaling 性质的问题，近似算法的绝对性能比和渐进性能比是相同的。

5.装箱问题是将 n 件物品放入尽可能少的若干个箱子中。不妨设每个箱子的容量为 1，物品$I_j(1 \le j \le n), n = 6)$的大小依次为：0.5、0.6、0.3、0.7、0.5、0.4，请给出其最优解，以及采用首次适应策略（First Fit）得到的近似解。这里，解是指使用了几个箱子，每个箱子放了哪些物品。

答：

FF 的近似解：4 个箱子；x1=0.5+0.3;x2=0.6+0.4;x3=0.7;x4=0.5

最优解：3 个箱子；x1=0.3+0.7;x2=0.4+0.6;x3=0.5+0.5

6.若要讲一个偏 y 的，55%-正确的一致的 MC 算法改进到 95-正确的算法，需要重复调用 MC 算法多少次？

答：

1-(1-55%)^n>=95%,n=3 时：左式=0.91；n=4 时，左式=0.959

7.在分布式算法的时间复杂性和 one-time 复杂性中，一个 msg 的延迟分别假定至多为 1 个时间单位和恰好一个时间单位，但有时后者是前者的一个下界，为什么？请举例说明

答：

考虑运行在环上的分布式算法的 1-time 时间复杂性和时间复杂性。

<1> 1-time 时间复杂性：

满足条件 O2：发送和接收一个 msg 之间的时间恰好是一个时间单位，每个阶段节点转发消息都是同步进行，从而 1-time 时间复杂度仅与环直径相关，为 O(D)。

<2> 时间复杂度：

满足条件 T2：一个 msg 的发送和接收之间的时间至多为一个时间单位，即为 O(1)。节点转发消息并非同步进行，消息转发轨迹可能呈链状结构，时间复杂性与环节点个数相关，为 O(n)。

例如：echo 协议，即应答协议，主要用于调试和检测中，是路由也是网络中最常用的数

据包，可以通过发送 echo 包知道当前的连接节点有哪些些路径，并且通过往返时间能得

出路径长度。echo 算法的实现，如果转发消息同步进行，则对应 1-time 时间复杂性，为

O(D)；如果不同步转发消息，网络路径可能呈链状结构，即对应时间复杂度 O(N)。

Note：考虑时间复杂度，任一节点可以在 O(d)时间内将询问包发送到网络上的其它节点，但却可能需要 O(N)的时间接收其它节点发来的响应包。

8.对于同步环，在一个均匀的 leader 选举算法中，为什么一个 id 为 i 的 msg 是以2^i速率被转发的？其目的是什么？

答：

同步环的 leader 选举算法是选最小的 id,不同的 id 的 msg 以 2^id 速率转发时，leader 的 msg 的转发速率(延时)最小，则可以使得其他非 leader 的转发 msg 被淹没，降低消息复杂度。

9.设 F(x)是一个 MC 算法，若 F(x)以大于 1/2 的概率返回 ture,且放回 ture 时算法正确，则下述算法 F2(x)是偏真的还是偏假的？请分析 F2(x)的出错概率至多是多少？

```
F2(x)
{
    If F(x) then
        return ture;
    else return F(x);
}
```

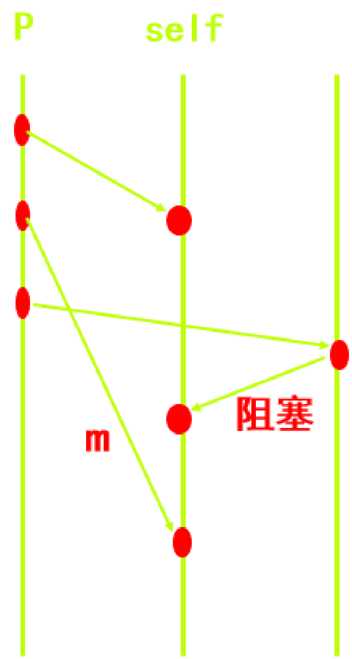
答：

偏真；第一次 F(x)返回 false，第二次也放回 false 则 1/2*1/2=1/4

10.试举例说明 Casual Msg delivery 算法可能出现的死锁情况，并分析为什么该算法通常被应用于组播通信的一部分？

答：若一节点长时间不发送你要的 msg，则会发生死锁。

本地节点的初始化在本地节点完成，有处理阻塞的机制。



二． 算法题

1、设网络的生成树已经建立，各个节点 Pi 的 id 为 i，并持有初值 xi，且 id 和持有的初值均互不相同，试写一个分布式算法使得根节点知道树中持有初值最大的节点，以及持有初值最小的节点。

答：生成树上的 leader(初值最大，最小)选举算法

节点 i 拥有局部变量 max,min,max_x,min_x,lx,id(i)，拥有所有子节点的集合 child(i)，拥有父节点 parent(i)

设有 n 个节点，root 节点 id=0,则算法如下：

```
Code for Pi,     0<=i<=n-1
var child(i)[],parent(i),id(i),max=id(i),min=id(i),lx,max_x=lx,min_x=lx;
if (i!=0)
```

```
{
    upon receiving<max,min,max_x,min_x> from child Pj
        将受到的值与本地值比较,重新赋值 max,min,max_x,min_x；
        child(i)[]=child(i)[]-Pj；//将 Pj 从 child 中删去
        if child(i)[]为空
            send<max,min,max_x,min_x> to parent(i);
}
if(i==0)
{
    upon receiving<max,min,max_x,min_x> from child Pj
        将受到的值与本地值比较,重新赋值 max,min,max_x,min_x；
        child(i)[]=child(i)[]-Pj；//将 Pj 从 child 中删去
}
if(i 为叶子节点)
{
    send<max,min,max_x,min_x> to parent(i);
}
```

2.设集合 S 和 T 中各有 n 个互不相同的元素，要求：

(1)写一 Monte Carlo 算法判定 S 和 T 是否相等

(2)分析算法出错的概率

(3)算法是否有偏，若有偏，偏什么？

答：

(1)

```
STequal(S,T)
{
    a=uniform(S);
    for i from 1 to n
    {
      if a=T[i];
          return ture;
    }
    return false;
}
```

(2)设有 x 个元素相同

x/n

(3)偏假

3.设一个同步匿名的单向环有 n 个节点，每个节点均知道 n，每个节点初始状态相同，每个节点上的程序开始于同一时刻。

（1）请问是否存在一个确定的算法选出一个 leader，请简述理由

（2）试设计一个概率的 leader 选举算法。提示：该算法由若干个 phase 构成，

每个 phase 包括 n 轮，可用 phase 和轮控制算法流程。每个节点可以设置一个随机数发生器 uniform（1..m），这里 m 是局部变量，初值等于 n。
（3）请问你设计的概率算法属于哪一类算法？
答：
(1)由 Lemma3.1 可得。(同步匿名非均匀)
假设 R 是大小为 n>1 的环（非均匀），A 是其上的一个匿名算法，它选中某处理器为 leader。因为环是同步的且只有一种初始配置，故在 R 上 A 只有唯一的合法执行。
Lemma3.1： 在环 R 上算法 A 的容许执行里，对于每轮 k，所有处理器的状态在第 k 轮结束时是相同的。Note：每个处理器同时宣布自己是 Leader！
(2)
n 个节点每个节点随机产生一个(1-n)的随机数作为自己的 id，然后将它发送，若绕场一周后回到了该节点，该节点就用那个 id;
否则重新产生随机数，直到绕场一周回到该点；
对于每个节点若收到的 msg 中的 id 和自己产生的 id 一样就没收它，反之转发该 msg;
每个节点重复上述过程直至 n 节点的 id 均不相同；
于是得到一个同步非匿名环，可选举一个 id 最大的 leader.
(3)

4.量子运动的随机聚合过程可用量子读博来描述。其规则是：
a)开始时，A 和 B 的赌本分别是 x 和 y
b)每次通过一枚神奇的硬币来决定输赢，设正面 A 赢，反面 B 赢，但每次扔出硬币的正反面概率正比于 A 和 B 当前的赌本
c)每次的输家按固定的比例 k 从自己的赌本中付给赢家
d)设最小的赌本单位为 1，若输家当前的赌本小于等于 1，他付出自己的赌本后，游戏结束。
要求：
（1） 写一算法实现赌博游戏
（2） A 和 B 最终的输赢取决于什么？
（3） 请分析 A、B 最终输赢的概率
答：
```
while(x>1and y>1)
{
  a=uniform(1,x+y);
  If(a<=x)
  {
    x=x+0.1y;
    y=0.9y;
  }
  else
  {
    y=y+0.1x;
    x=0.9x;
  }
}//end while

If(x<=1)
{
  y=y+x;
}
If(y<=1)
{
  x=y+x;
}
```