近似算法作业

SA23011253 任永文

问题1：假设给定 n 个指定的城市在一个平面图上，想要在不同的城市选择 k 个城市建立 k 个仓库，目标是最小化每个城市到最近仓库的最大距离。这意味着找到一组 k 个顶点的集合，任意点到其集合中顶点的最大距离最小。给定一个算法来确定这 k 个顶点的位置，该算法最多是最优解的 3 倍，并且运行时间是 O(n)。

> **答案：** 如下所示是设计的算法，易知在给定任意两个城市距离的情况下，运行时间是$O(nk^2)$，若n远大于k则近似为$O(n)$

```
# 定义：一个点到集合的距离为该点到集合中所有点的最近距离
1. 建立集合I表示需求点，集合C表示仓库点，初始时n个城市全在集合I中（|I∪C|=n，|I∩C|=0）
2. 从集合I中随机选择一个城市建立仓库，将该点从I中移除加入C
3. 对于i=2到k
    a. 从集合I中选择距离集合C最远的一个点建立仓库，将该点从I中移除加入C
```

问题2：我们有 n 个不同处理时间的作业 J1，J2，...，Jn，需要在 m 个相同的机器上进行调度。给出一个算法，该算法将作业分配给机器，其完成时间最多为最优解的 3 倍，并且运行时间为 O(n)。

> **答案：** 如下所示是设计的算法，易知运行时间是$O(n)$，设n个作业的平均处理时间为$J^* = \frac{\sum J_i}{2k+m}$，由于经过第二轮的机器$L_i > J^*$，因此算法结束时$i \leq 2k + 2m$，且$L_i \leq J^* + max_{J_n}$，因此完成时间最多为最优解的倍。

```
1. 将机器编号，快速机器放在慢速机器前，变量i表示当前选择的机器的编号，变量l_i表示机器i的负载，集合L_i表示分配给机器i的作业，初始化为i=0,l_i=0,L_i=空集
2. 对于j=1到n
    a. 如果i<=k
        如果L_i+J_j/2<=J*，把j分配给i，L_i+=J_j/2
        如果L_i+J_j/2>J*，i+=1，把j分配给i，L_i+=J_j/2
    b. 如果k<i<=k+m
        如果L_i+J_j<=J*，把j分配给i，L_i+=J_j
        如果L_i+J_j>J*，i+=1，把j分配给i，L_i+=J_j
    c. 如果k+m<i<=2k+m
        如果L_i<=J*，把j分配给i，L_i+=J_j/2
        如果L_i>J*，i+=1，把j分配给i，L_i+=J_j/2
    d. 如果2k+m<i<=2k+2m
        如果L_i<=J*，把j分配给i，L_i+=J_j
        如果L_i>J*，i+=1，把j分配给i，L_i+=J_j
```

问题3：证明以下命题：

命题 1：TSP 问题是 NP-hard 问题

> **答案：** **目标：** 给定一个哈密尔顿圈的实例G=(V,E)，创建一个TSP问题（完全图）实例。**方法：** 将在E中的边长度定义为1，不在E中的边长度定义为2。**结论：** 则TSP问题有一个长度≤n的旅游路线当且仅当G中含有一个哈密尔顿圈。哈密尔顿圈问题归约到TSP问题，又因为哈密尔顿圈问题是NP-hard问题，所以TSP问题是NP-hard问题。

命题 2：最大加权独立集问题是 NP-hard 问题

> **答案：** **目标：** 给定一个3-SAT问题的实例ϕ，构造出一个图G=(V,E)的加权独立集问题的实例。**方法：** ϕ中的每个子句用G中三个顶点构成的三角形表示，顶点的权重都为1，在不同三角形冲突的顶点之间添加一条边。**结论：** 则3-SAT问题有解，当且仅当G中有个大小为|ϕ|的加权独立集。3-SAT问题归约到最大加权独立集问题，又因为3-SAT问题是NP-hard问题，所以最大加权独立集问题是NP-hard问题。