Primer examen parcial
TI. Solitones

Problema 1.

Encuentre las soluciones para las ecuaciones diferenciales:

a. Korteweg - De Vries (KdV) modificada:

$$U_t + 6U^2 U_x + U_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

con condiciones de frontera: $U \to 0$, $U_x \to 0$, $U_{xx} \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$.

b. Kinks en la teoría ϕ^4:

$$U_{tt} - U_{xx} + 2U(U^2 - 1) = 0 \tag{1.2}$$

con condiciones de frontera:

$U \to -1$, $U_x \to 0$, $U_t \to 0$, cuando $x \to -\infty$,

$U \to +1$, $U_x \to 0$, $U_t \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son del tipo onda viajera, es decir, tienen la forma funcional:

$$U(x,t) = F(x - vt) = F(y(x,t)) \tag{1.3}$$

$$y = x - vt, \tag{1.4}$$

con v la velocidad de la onda.

Inciso a.

Sustituimos la solución $F(y)$ en la ecuación (1.1).

$$U_t = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} = F'(-v) = -vF'(y)$$

$$U_x = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = F'(1) = F'(y)$$

$$U_{xx} = F''(y), \quad U_{xxx} = F'''(y)$$

$U^2 = F^2$

$-vF' + 6F^2F' + F''' = 0$

$(6F^2 - v)F' + F''' = 0$

$$F''' + (6F^2 - v)F' = 0. \qquad (1.5)$$

Las condiciones a la frontera ahora son:

$u = F \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$ $(=)$ $F \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$,

$U_x = F' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$ $(=)$ $F' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$,

$U_{xx} = F'' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$ $(=)$ $F'' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$.

Le bajamos un orden a la ecuación (1.5) mediante integración.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + (6F^2 - v)\frac{dF}{dy} = 0 \qquad 1: \int dy$$

$$\int \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) dy + \int (6F^2 - v)\frac{dF}{dy}\, dy = C_1$$

$$\int d\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + \int (6F^2 - v)\, dF = C_1 .$$

En el paso anterior simplemente completamos los diferenciales. C_1 es una constante de integración de la que más adelante obtendremos su valor utilizando las condiciones a la frontera. Integrando obtenemos:

$$\frac{d^2F}{dy^2} + 2F^3 - vF = C_1$$

$$F'' + F(2F^2 - v) = C_1.$$

Haciendo el límite cuando $x \to \pm\infty$, entonces $F \to 0$ y $F'' \to 0$, así pues:

$$0 + 0(2(0)^2 - v) = 0 = C_1$$

$$C_1 = 0.$$

Resulta la ecuación diferencial de segundo orden:

$$F'' + F(2F^2 - v) = 0. \qquad (1.6)$$

Para resolver la ecuación (1.6) multiplicamos por $\frac{dF}{dy} dy = dF$ para completar diferenciales e integramos.

$$\frac{d}{dy}\frac{dF}{dy} + F(2F^2 - v) = 0 \quad |: \quad \frac{dF}{dy} dy = dF$$

$$\left(\frac{d}{dy}\frac{dF}{dy}\right)\left(dy\frac{dF}{dy}\right) + F(2F^2 - v)\,dF = 0$$

$$\frac{dF}{dy}\, d\left(\frac{dF}{dy}\right) + F(2F^2 - v)\,dF = 0 \quad |: \int$$

$$\int F'\,dF' + \int (2F^3 - vF)\,dF = C_2$$

$$\frac{1}{2}(F')^2 + \frac{1}{2}F^4 - \frac{v}{2}F^2 = C_2 \quad /: (2)$$

$$(F')^2 + F^2(F^2 - v) = 2C_2.$$

Aplicando el límite cuando $x \to \pm\infty$, resulta:

$$(0)^2 + (0)^2((0)^2 - v) = 0 = 2C_2$$

$$C_2 = 0.$$

Llegamos así a la ecuación de primer orden:

$$(F')^2 + F^2(F^2 - v) = 0. \tag{1.7}$$

La ecuación (1.7) se puede resolver fácilmente mediante integración.

$$(F')^2 = F^2(v - F^2) \quad /: \sqrt{\ }$$

$$F' = \frac{dF}{dy} = \pm F\sqrt{v - F^2}$$

$$\frac{1}{F\sqrt{v-F^2}}\frac{dF}{dy} = \pm 1 \quad /: \int dy$$

$$\int \frac{1}{F\sqrt{v-F^2}}\frac{dF}{dy}\,dy = \pm\int dy + C_3$$

$$\int \frac{dF}{F\sqrt{v-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{v}}\int \frac{dF}{F\sqrt{1 - F^2/v}} = \pm y + C_3 \quad (1.8)$$

Escaneado con CamScanner

Calculamos la integral utilizando el siguiente cambio de variable:

$$w = (1 - F^2/V)^{1/2}$$

$$(=)\ dw = -\frac{F}{V}(1 - F^2/V)^{-1/2}\, dF$$

$$(=) -\frac{V}{F}\, dw = \frac{dF}{\sqrt{1 - F^2/V}}$$

es decir, el integrando se puede escribir como:

$$\frac{dF}{F\sqrt{1-F^2/V}} = -\frac{V}{F^2}\, dw$$

donde

$$w^2 = 1 - \frac{F^2}{V}$$

$$(=)\ F^2 = V(1 - w^2)$$

de esta manera el integrando en términos de w es:

$$-\frac{\cancel{V}\, dw}{\cancel{V}(1-w^2)} = -\frac{dw}{1-w^2}$$

y la integral a resolver es conocida de tablas de integración:

$$\int \frac{dF}{F\sqrt{1-F^2/V}} = -\int \frac{dw}{1-w^2} = -\,tgh^{-1}(w)$$

$$= -\,tgh^{-1}\left[\sqrt{1 - \frac{F^2}{V}}\right].$$

Así pues, llegamos a la solución deseada:

$$-\frac{1}{\sqrt{V}}\, tgh^{-1}\left[\sqrt{1 - \frac{F^2}{V}}\right] = \pm y + C_3$$

$$\text{tgh}^{-1}\left[\sqrt{1-\frac{F^2}{V}}\right] = \sqrt{V}(\mp y - C_3) = \sqrt{V}(\pm y - C_3) \quad | : \text{tgh}$$

$$\sqrt{1-\frac{F^2}{V}} = \text{tgh}\left[\sqrt{V}(\pm y - C_3)\right]$$

$$1-\frac{F^2}{V} = \text{tgh}^2\left[\sqrt{V}(\pm y - C_3)\right]$$

$$\frac{F^2}{V} = 1-\text{tgh}^2\left[\sqrt{V}(\pm y - C_3)\right] = \text{sech}^2\left[\sqrt{V}(\pm y - C_3)\right]$$

ya que $1-\text{tgh}^2(x) = \text{sech}^2(x)$. Renombramos $C_3 = x_0$ y recordamos que $y = x - vt$, obteniendo:

$$F^2 = v\,\text{sech}^2\left[\sqrt{v}(\pm(x-vt) - x_0)\right] \quad | : \sqrt{\ }$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x-vt) = u(x,t) &= \sqrt{v}\,\text{sech}\left[\sqrt{v}(\pm(x-vt) - x_0)\right]. \\ &= \sqrt{v}\,\text{sech}\left[\pm\sqrt{v}(x-vt-x_0)\right] \\ &= \sqrt{v}\,\text{sech}\left[\sqrt{v}(x-vt-x_0)\right] \end{aligned}} \quad (1.8)$$

donde hemos utilizado el hecho de que la constante de desplazamiento x_0 es arbitraria y la función secante hiperbólica es par.

Inciso b.

Sustituimos la solución $F(y)$ en la ecuación (1.2).

$$u_t = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} = F'(-v) = -vF'(y)$$

$$u_{tt} = \frac{d}{dy}(-vF')\frac{dy}{dt} = -vF''(-v) = v^2 F''(y)$$

$$u_x = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = F'(1) = F'(y)$$

$$u_{xx} = F''(y)$$

$$u = F, \quad u^2 = F^2$$

$$v^2 F'' - F'' + 2F(F^2-1) = 0$$

$$(v^2-1)F'' + 2F(F^2-1) = 0 \qquad (1.9)$$

Las condiciones de frontera ahora son:

$u = F \to -1$, cuando $x \to -\infty \iff F \to -1$, cuando $x \to -\infty$,

$u = F \to 1$, cuando $x \to \infty \iff F \to 1$, cuando $x \to \infty$,

$u_x = F' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty \iff F' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$,

$u_t = -vF' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty \iff F' \to 0$, cuando $x \to \pm\infty$, La ecuación de segundo orden (1.9) es similar a la ecuación (1.6). Para resolverla seguimos la misma metodología.

$$(v^2-1)\frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dy}\right)+2F(F^2-1)=0 \quad \Big| : \frac{dF}{dy}dy=dF$$

$$(v^2-1)\frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dy}\right)dy\frac{dF}{dy}+2F(F^2-1)dF=0$$

$$(v^2-1)\frac{dF}{dy}d\left(\frac{dF}{dy}\right)+2F(F^2-1)dF=0 \quad \Big| : \int$$

$$(v^2-1)\int F'\,dF'+2\int(F^3-F)\,dF=C_1$$

$$\frac{(v^2-1)}{2}(F')^2+\frac{1}{2}F^4-F^2=C_1 \quad \Big| : (2)$$

$$(v^2-1)(F')^2+F^2(F^2-2)=2C_1. \quad \Big| : \frac{1}{(1-v^2)}$$

$$-(F')^2+\frac{1}{1-v^2}F^2(F^2-2)=\frac{2C_1}{(1-v^2)}$$

$$(F')^2=\frac{1}{1-v^2}\left[F^2(F^2-2)-2C_1\right]$$

$$(F')^2=\frac{1}{1-v^2}\left[F^2(F^2-2)+C\right] \quad \Big| \quad \text{con } C=-2C_1.$$

Realizamos el límite cuando $x\to\pm\infty$:

$$(0)^2 = \frac{1}{1-v^2}\left[(\pm 1)^2((\pm 1)^2-2)+C\right]$$

$$0 = -1 + C$$

$$C = 1.$$

Con esto, resulta la ecuación de primer orden siguiente:

$$(F')^2 = \frac{1}{1-v^2}\left[F^2(F^2-2)+1\right]$$

$$F^2(F^2-2)+1 = F^4-2F^2+1 = (F^2-1)^2$$

$$(F')^2 = \frac{1}{1-v^2}(F^2-1)^2 \qquad /: \sqrt{\ }$$

$$F' = \frac{dF}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(F^2-1) = \mp\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-F^2)$$

$$F' = \frac{dF}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-F^2). \qquad (1.10)$$

Resolvemos la ecuación (1.10) mediante integración.

$$\frac{dF}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-F^2) \qquad /\cdot dy$$

$$\frac{dF}{dy}dy = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-F^2)dy$$

$$\sqrt{1-v^2}\ \frac{dF}{(1-F^2)} = \pm\, dy \quad /:\int$$

$$\sqrt{1-v^2}\int \frac{dF}{(1-F^2)} = \pm \int dy - x_0 = \pm\, y - x_0$$

donde x_0 es el desplazamiento inicial de la onda.
El valor de la integral es ya conocido de tablas de integración:

$$\sqrt{1-v^2}\ tgh^{-1}(F) = \pm\, y - x_0$$

$$tgh^{-1}(F) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-v^2}}(y - x_0) \quad /:\ tgh$$

$$F(y) = tgh\left[\pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(y-x_0)\right]$$

La solución, por lo tanto, es:

$$\boxed{F(y) = F(x-vt) = u(x,t) = tgh\left[\pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x-vt-x_0)\right]} \qquad (1.11)$$

ya que $y = x - vt$.

Problema 2.

Considere un sine-Gordon-kink que se mueve con una velocidad v:

$$u(x,t) = 4\arctan\left(\exp\left(\frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right). \qquad (2.1)$$

i. Calcule su carga topológica conservada, la energía y el momento. Verifique que los resultados no dependen del tiempo.

ii. Pruebe que para el caso en que $v \ll 1$ la energía y el momento toman la forma:

$$E = M + \frac{Mv^2}{2} + O(v^4), \qquad P = Mv + O(v^3), \qquad (2.2)$$

donde la masa M es la energía del kink estático que aparece en el límite de Bogomol'nyi.

Número i.

Para realizar los cálculos solicitados recordemos las siguientes cantidades.

Corriente:

$$j^{\kappa} = \frac{1}{2V}\epsilon^{\kappa\nu}\partial_\nu u = \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\nu}\partial_\nu u(x,t) \qquad (2.3)$$

pues para el kink propuesto $V = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} = 1$. y $m = \lambda = 1$.

Carga:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2}\epsilon^{0\nu}\partial_\nu u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\underbrace{\epsilon^{00}}_{=0}\partial_t u + \underbrace{\epsilon^{01}}_{=1}\partial_x u)dx$$

$$Q = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx \qquad (2.4)$$

Densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu u\,\partial^\mu u - V(u)$$

Para sine-Gordon:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu u\,\partial^\mu u - \frac{2m^4}{\lambda}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2m}u\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu u\,\partial^\mu u - 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \qquad (2.5)$$

Tensor energía-momento:

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu u)}\partial_\mu u - \mathcal{L}\,\delta^\nu_\mu \qquad (2.6)$$

Energía:

$$E = \int_V d^3x\, T^0_0 \qquad (2.7)$$

Momento:

$$P_i = -\int_V d^3x\, T^0_i \qquad (2.8)$$

Comenzamos calculando la carga topológica conservada a partir de (2.4).

Con $y = \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}$:

$$u(x,t) = F(y) = 4\,tg^{-1}(e^y)$$

$$u_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4e^y}{1+e^{2y}} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}^{=\gamma} = \frac{2\gamma}{\frac{e^{-y}+e^y}{2}} = \frac{2\gamma}{\cosh(y)}$$

$$u_x = 2\gamma\,\mathrm{sech}(y)$$

$$dy = \gamma\, dx \iff dx = \gamma^{-1} dy$$

si $x \to \pm\infty \iff y \to \pm\infty$.

Así pues:

$$Q = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x\, dx = \frac{1}{\cancel{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2}\cancel{\gamma}\,\mathrm{sech}(y)\,\cancel{\gamma^{-1}}\, dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}(y)\,dy = tg^{-1}(\sinh(y))\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\boxed{Q = \pi.} \qquad (2.9)$$

Calculamos ahora la energía, utilizando el resultado obtenido en clase para la componente T^0_0 del tensor de energía momento.

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + V(u)$$

para sine-Gordon:

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

con:

$$u_t = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{4e^y}{1+e^{2y}}(-v\gamma) = 2\,\mathrm{sech}(y)(-v\gamma) = -2v\gamma\,\mathrm{sech}(y)$$

obtenemos:

$$T^0_{\ 0} = \frac{1}{2}\left[\overset{2}{4}\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x) + \overset{2}{4} v^2\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x)\right] + 2\sin^2\left(\overset{2}{\frac{4}{2}} tg^{-1}(e^x)\right)$$

$$= 2\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x)\left[1+v^2\right] + 2\sin^2(2\, tg^{-1}(e^x)).$$

Utilizando Wolfram Alpha encontramos que una forma alternativa de escribir el término de la derecha es

$$\sin^2(2\, tg^{-1}(e^x)) = \operatorname{sech}^2(x)$$

lo cual se puede corroborar al graficar. Sustituyendo este término llegamos a lo siguiente:

$$T^0_{\ 0} = 2\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x)\left[1+v^2\right] + 2\operatorname{sech}^2(x)$$

$$= 2\operatorname{sech}^2(x)\left[1 + \frac{1+v^2}{1-v^2}\right] = 2\operatorname{sech}^2(x)\left[\frac{1-v^2+1+v^2}{1-v^2}\right] =$$

$$= 4\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x)$$

$$T^0_{\ 0} = 4\gamma^2 \operatorname{sech}^3(x).$$

De esta manera, la energía es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} T^0_{\ 0}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4\gamma^2 \operatorname{sech}^2(x)\gamma^{-1} dy = 4\gamma\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x)\, dy$$

$$= 4\gamma\, tgh(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 4\gamma(1-(-1)) = 4\gamma(2) = 8\gamma$$

$$\boxed{E = 8\gamma = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.} \qquad (2.10)$$

Finalmente, calculamos el momento. Siendo:

$$T^0_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 u)} \partial_i u - \mathcal{L} \cancel{\delta^0_i}^{=0} \quad , \quad i=1,2,3$$

$$T^0_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 u)} \partial_i u$$

ya que $\partial_y u = \partial_z u = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 u)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 u)} (\underbrace{\eta^{00}}_{=-1} \partial_0 u \partial_0 u) =$

$= \partial_0 u = \partial_t u = u_t$, el momento es:

$$P = P_x = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x \, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} (-2v\gamma \operatorname{sech}(y))(2\gamma \operatorname{sech}(y)) \gamma^{-1} dy =$$

$$= 4v\gamma \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(y) \, dy}_{=2} = 8v\gamma$$

$$\boxed{P = 8v\gamma = \frac{8v}{\sqrt{1-v^2}}} . \quad (2.11)$$

Como puede apreciarse, ninguno de los resultados anteriores (Q, E, P) dependen del tiempo.

Número ii.

Para realizar las aproximaciones utilizaremos el binomio generalizado de Newton:

$$(1-x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} (-1)^k x^k \quad , \text{ con } r \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

con

$$\binom{r}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} (r-n) = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} . \quad (2.13)$$

Para el caso $x \ll 1$ la serie se suele truncar hasta primer grado:

$$(1-x)^r = 1 - rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \cdots = 1 - rx + O(x^2).$$

Para la energía truncamos hasta grado 4 en V.

$$E = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}} = 8(1-v^2)^{-1/2} \quad , \quad r = -\frac{1}{2} \quad x = v^2 \quad M = 8$$

$$\boxed{E = M\left(1 - \frac{1}{2}v^2 + O(v^4)\right) = M - \frac{Mv^2}{2} + O(v^4).} \qquad (2.14)$$

Mientras que para el momento se trunca hasta grado 3 en v.

$$P = \frac{8v}{\sqrt{1-v^2}} = 8v(1-v^2)^{-1/2} \quad , \quad r = -\frac{1}{2} \quad x = v^2 \quad M = 8$$

$$\boxed{P = Mv\left(1 + O(v^2)\right) = Mv + O(v^3)} \qquad (2.15)$$

Problema 3.

La ecuación de KdV describe una onda viajera

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Es conocido que una solución exacta para KdV tiene la forma:

$$u(x,t) = \frac{2}{\cosh^2(x - vt)}. \quad (3.2)$$

a.- Pruebe que lo anterior es cierto si y solo sí $v = 4$.

Inciso a.

Utilizamos el cambio de variable $y = x - vt$ para escribir

$$u(x,t) = F(x - vt) = F(y) = \frac{2}{\cosh^2(y)} = 2\operatorname{sech}^2(y)$$

Realizamos las derivadas parciales u_t, u_x, u_{xxx} y las sustituimos en la ecuación (3.1), obteniendo lo siguiente:

$$u_t = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} = F'(-v) = -vF' = -v(-4\operatorname{sech}^2(y)\operatorname{tgh}(y)) =$$
$$= 4v\operatorname{sech}^2(y)\operatorname{tgh}(y)$$

$$u_x = \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = F'(1) = F' = -4\operatorname{sech}^2(y)\operatorname{tgh}(y)$$

$$u_{xx} = F'' = 8\operatorname{sech}^2(y)\operatorname{tgh}^2(y) - 4\operatorname{sech}^4(y)$$
$$= 4\operatorname{sech}^2(y)[2\operatorname{tgh}^2(y) - \operatorname{sech}^2(y)]$$

Escaneado con CamScanner

$$U_{xxx} = f''' = -8\,\text{sech}^2(x)\,\text{tgh}(x)\left[2\,\text{tgh}^2(x) - \text{sech}^2(x)\right] + \ldots$$
$$\ldots + 4\,\text{sech}^2(x)\left[4\,\text{sech}^2(x)\,\text{tgh}(x) + 2\,\text{sech}^2(x)\,\text{tgh}(x)\right]$$
$$= 8\,\text{sech}^2(x)\,\text{tgh}(x)\left[4\,\text{sech}^2(x) - 2\,\text{tgh}^2(x)\right]$$

$$\cancel{4}v\,\cancel{\text{sech}^2(x)}\,\cancel{\text{tgh}(x)} + 6(-\overset{2}{\cancel{8}})\,\text{sech}^{\overset{2}{\cancel{4}}}(x)\,\cancel{\text{tgh}(x)} + \overset{2}{\cancel{8}}\,\cancel{\text{sech}^2(x)}\,\cancel{\text{tgh}(x)}\left[4\,\text{sech}^2(x) - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - 2\,\text{tgh}^2(x)\right] = 0$$

$$v - 12\,\text{sech}^2(x) + 2\left[4\,\text{sech}^2(x) - 2\,\text{tgh}^2(x)\right] = 0$$

$$v - 12\,\text{sech}^2(x) + 8\,\text{sech}^2(x) - 4\,\text{tgh}^2(x) = 0$$

$$v - 4\,\text{sech}^2(x) - 4\,\text{tgh}^2(x) = 0$$

$$v - 4(\underbrace{\text{sech}^2(x) + \text{tgh}^2(x)}_{=1}) = 0$$

$$v - 4 = 0$$

$$\boxed{v = 4\,.} \qquad (3.3)$$

6.- Implemente un código numérico en Python capaz de dado un perfil inicial, evolucione en el tiempo el mismo.

Formulación.

Reescribimos la ecuación (3.1) como:

$$U_t + (F(u))_x + U_{xxx} = 0 \qquad (3.4)$$

con:

$$F(u) = 3u^2. \qquad (3.5)$$

Haremos uso de las siguientes fórmulas de derivación numérica:

Diferenciación central, 2do orden.

$$(U_t)_i^j = \frac{1}{2\Delta t}\left[U_i^{j+1} - U_i^{j-1}\right] \qquad (3.6)$$

donde el índice i corresponde a la variable espacial y el índice j a la variable espacial. Éstos corren desde 0 hasta Nx y Nt, respectivamente.

$$(U_x)_i^j = \frac{1}{2\Delta x}\left[U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right] \qquad (3.7)$$

$$F_x(U_i^j) = \frac{1}{2\Delta x}\left[F(U_{i+1}^j) - F(U_{i-1}^j)\right] \qquad (3.8)$$

$$(U_{xxx})_i^j = \frac{1}{2(\Delta x)^3}\left[U_{i+2}^j - 2U_{i+1}^j + 2U_{i-1}^j - U_{i-2}^j\right] \qquad (3.9)$$

$$(U_{tt})_i^j = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}\right]. \qquad (3.10)$$

Diferenciación hacia atrás, 2do orden.

$$(U_{xxx})_i^j = \frac{1}{2(\Delta x)^3}\left[5U_i^j - 18U_{i-1}^j + 24U_{i-2}^j - 14U_{i-3}^j + 3U_{i-4}^j\right]. \qquad (3.11)$$

Diferenciación hacia adelante, 2do orden.

$$(U_{xxx})_i^j = \frac{1}{2(\Delta x)^3}\left[-3U_{i+4}^j + 14U_{i+3}^j - 24U_{i+2}^j + 18U_{i+1}^j - 5U_i^j\right]. \qquad (3.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.8) en (3.4) obtenemos:

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[U_i^{j+1}-U_i^{j-1}\right]+\frac{1}{2\Delta x}\left[F(U_{i+1}^{j})-F(U_{i-1}^{j})\right]+(U_{xxx})_i^j=0 \quad | \cdot (2\Delta t)$$

$$U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_{i+1}^{j})-F(U_{i-1}^{j})\right]+2\Delta t(U_{xxx})_i^j=0$$

$$\boxed{U_i^{j+1}=U_i^{j-1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_{i+1}^{j})-F(U_{i-1}^{j})\right]+2\Delta t(U_{xxx})_i^j.} \qquad (3.13)$$

La fórmula (3.13) es la que se implementará, teniendo cuidado de utilizar diferenciación hacia adelante en la 3^er derivada espacial U_{xxx} para los valores U_1^{j+1} (fórmula 3.12), y diferenciación hacia atrás para los valores U_{Nx-1}^{j+1} (fórmula 3.11). Para el resto de los valores se puede usar diferenciación central en U_{xxx} (fórmula 3.9).

Los datos iniciales son los dados por el inciso c del problema.

$$U_i^0 = U_0(X_i). \qquad (3.14)$$

Mientras que las condiciones a la frontera son:

$$U_0^j = U_{N_x}^j = 0. \qquad (3.15)$$

La ecuación (3.13) tiene un problema para $j=0$, pues no conocemos U_i^{-1} sin embargo lo podemos obtener conociendo el valor de $U_{tt}(x,0)$, que supondremos por simplicidad como 0. Así, de (3.10) obtenemos:

$$(U_{tt})_i^0 = 0 = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[U_i^1 - 2U_i^0 + U_i^{-1} \right]$$

$$U_i^1 - 2U_i^0 + U_i^{-1} = 0$$

$$U_i^{-1} = 2U_i^0 - U_i^1 . \qquad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.13) con $j=0$, obtenemos el primer paso:

$$U_i^1 = 2U_i^0 - U_i^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_{i+1}^0) - F(U_{i-1}^0)\right] - 2\Delta t\,(U_{xxx})_i^0$$

$$\boxed{U_i^1 = U_i^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[F(U_{i+1}^0) - F(U_{i-1}^0)\right] - \Delta t\,(U_{xxx})_i^0} \qquad (3.17)$$