Методы Якоби, Зейделя и верхней релаксации

Гайдученко Николай, Лашинин Олег

Теория. Метод простой итерации

Рассматриваем СЛАУ

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

Представим матрицу A в виде суммы $A = B + C$, причем $\det B \neq 0$. Тогда

$$B\vec{u} = \vec{f} - C\vec{u}$$

и

$$\vec{u} = \underbrace{-B^{-1}C}_{G}\vec{u} + \underbrace{B^{-1}\vec{f}}_{\vec{g}} = G\vec{u} + \vec{g}$$

Выбрав произвольный вектор $\vec{u}^{(0)}$ за начальное приближение, метод простой итерации (МПИ) строится путем уточнения начального приближения $\vec{u}^{(0)}$ по рекуррентному соотношению

$$\vec{u}^{(k+1)} = G\vec{u}^{(k)} + \vec{g}$$

Метод сходится, если сходится итерационный процесс, то есть существует $\lim\limits_{k} \vec{u}^{(k)}$.

Теория. Метод простой итерации

Ответ на вопрос сходимости МПИ к точному решению дают следующие теоремы (здесь и далее точное решение СЛАУ будем обозначать $\overrightarrow{u}^*$)

Теорема 1 (достаточное условие сходимости МПИ): *если* $\|G\| = q < 1$, *то существует единственное решение* $\overrightarrow{u}^*$ *уравнения* $\overrightarrow{u} = G\overrightarrow{u} + \overrightarrow{g}$ *при любом начальном приближении* $\overrightarrow{u}^{(0)}$, *причем*

$$\|\overrightarrow{u}^{(k)} - \overrightarrow{u}^*\| \leq q^k \|\overrightarrow{u}^{(0)} - \overrightarrow{u}^*\|$$

Теорема 2 (критерий сходимости МПИ): *для сходимости итерационного процесса* $\overrightarrow{u}^{(k+1)} = G\overrightarrow{u}^{(k)} + \overrightarrow{g}$ *к* $\overrightarrow{u}^*$ *необходимо и достаточно, чтобы* $|\lambda_i(G)| < 1$.

Теория. Метод Гаусса-Якоби.

Представим матрицу A в виде

$$A = L + D + U,$$

где L и U — нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, D — диагональная матрица.

Построим итерационный метод Якоби:

$$D\overrightarrow{u}^{(k+1)} + (L+U)\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{G}\overrightarrow{u^{(k+1)}} + \underbrace{D^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Ответ на вопрос сходимости метода Якоби к точному решению дают следующие теоремы

Теория. Метод Гаусса-Якоби.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Якоби): *метод Якоби сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если выполнено условие* ***диагонального преобладания:***

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}|$$

Теорема 2 (критерий сходимости метода Якоби): *для сходимости метода Якоби к $\overrightarrow{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.

Теория. Метод Зейделя.

Матрица A разбивается так же, как и в методе Якоби, но итерационный процесс строится иначе:

$$(L+D)\overrightarrow{u}^{(k+1)} + U\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{G}\,\overrightarrow{u}^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Теория. Метод Зейделя.

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Зейделя): *метод Зейделя сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если исходная матрица A — вещественная, симметричная и положительно определенная.*

Теорема 2 (критерий сходимости метода Зейделя): *для сходимости метода Зейделя к $\overrightarrow{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.

Теория. Метод верхней релаксации.

Иногда для ускорения сходимости метода Зейделя прибегают к методу верхней релаксации. Для этого вводят показатель релаксации p $(0 < p < 1)$ и строят итерационный процесс:

$$L\overrightarrow{u}^{(k+1)} + D\frac{\overrightarrow{u}^{(k+1)} + p\overrightarrow{u}^{(k)}}{1+p} + U\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f}$$

С показателем релаксации связывают итерационный параметр $\tau = 1+p$. Часто итерационный параметр выбирают близким к оптимальному (см. пункт 1.3.1), откуда затем находят показатель релаксации.

Обзор проблем

(какие матрицы мы считаем?)

inter62.smtx

```
62 1
1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -
-1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000
1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -
-1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000
1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -
-1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000
1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -1.000000 1.000000 -
1.000000 -0.967213 0.935501 -0.904829 0.875163 -0.846469 0.818716 -
-0.740798 0.716509 -0.693017 0.670295 -0.648318 0.627062 -0.606503
0.548781 -0.530788 0.513385 -0.496553 0.480273 -0.464526 0.449296 -
-0.406536 0.393207 -0.380315 0.367845 -0.355785 0.344120 -0.332837
0.301161 -0.291287 0.281736 -0.272499 0.263565 -0.254923 0.246565 -
-0.223099 0.215784 -0.208710 0.201867 -0.195248 0.188846 -0.182655
0.165271 -0.159853 0.154612 -0.149542 0.144639 -0.139897 0.135310 -
1.000000 -0.934426 0.873152 -0.815896 0.762395 -0.712402 0.665687 -
-0.543132 0.507517 -0.474237 0.443139 -0.414081 0.386928 -0.361556
0.294992 -0.275648 0.257573 -0.240683 0.224901 -0.210153 0.196372 -
-0.160220 0.149713 -0.139896 0.130723 -0.122151 0.114141 -0.106656
0.087020 -0.081314 0.075982 -0.071000 0.066344 -0.061993 0.057928 -
-0.047264 0.044164 -0.041268 0.038562 -0.036033 0.033671 -0.031463
0.025670 -0.023987 0.022414 -0.020944 0.019571 -0.018288 0.017088 -
1.000000 -0.901639 0.812954 -0.732991 0.660893 -0.595887 0.537276 -
-0.393818 0.355082 -0.320156 0.288665 -0.260272 0.234671 -0.211589
0.155093 -0.139838 0.126083 -0.113682 0.102500 -0.092418 0.083328 -
-0.061078 0.055071 -0.049654 0.044770 -0.040366 0.036396 -0.032816
0.024054 -0.021688 0.019555 -0.017631 0.015897 -0.014333 0.012923 -
-0.009473 0.008541 -0.007701 0.006943 -0.006261 0.005645 -0.005090
0.003731 -0.003364 0.003033 -0.002734 0.002466 -0.002223 0.002004 -
1.000000 -0.868852 0.754905 -0.655901 0.569881 -0.495142 0.430206 -
-0.282172 0.245166 -0.213013 0.185077 -0.160805 0.139715 -0.121392
0.079621 -0.069179 0.060106 -0.052224 0.045375 -0.039424 0.034253 -
-0.022467 0.019520 -0.016960 0.014736 -0.012803 0.011124 -0.009665
0.006340 -0.005508 0.004786 -0.004158 0.003613 -0.003139 0.002727 -
-0.001789 0.001554 -0.001350 0.001173 -0.001019 0.000886 -0.000770
0.000505 -0.000439 0.000381 -0.000331 0.000288 -0.000250 0.000217 -
```

Решение СЛАУ методом верхней релаксации

Решить задачу методом верхней релаксации для нескольких значений релаксационного параметра.

- Постановка задачи, условия применимости метода, особенности реализации вашей программы.
- Для тестовых матриц и их правых частей найти решение x при $\varepsilon = 10^{-5}$ и предоставить в качестве результата норму невязки $r = Ax - f$. Сколько итераций потребовалось для достижения заданной точности?
- Провести эксперимент для нескольких (хотя бы трех) значений параметра. Выбрать значение параметра близкое к оптимальному, используя стандартную функцию вычисления собственного значения или программу для нахождения максимального собстенного значения.
- На примере одной задачи и одного выбранного параметра построить график зависимости $(\log \varepsilon_{n+1}, \log \varepsilon_n)$. Оценить по графику скорость сходимости.

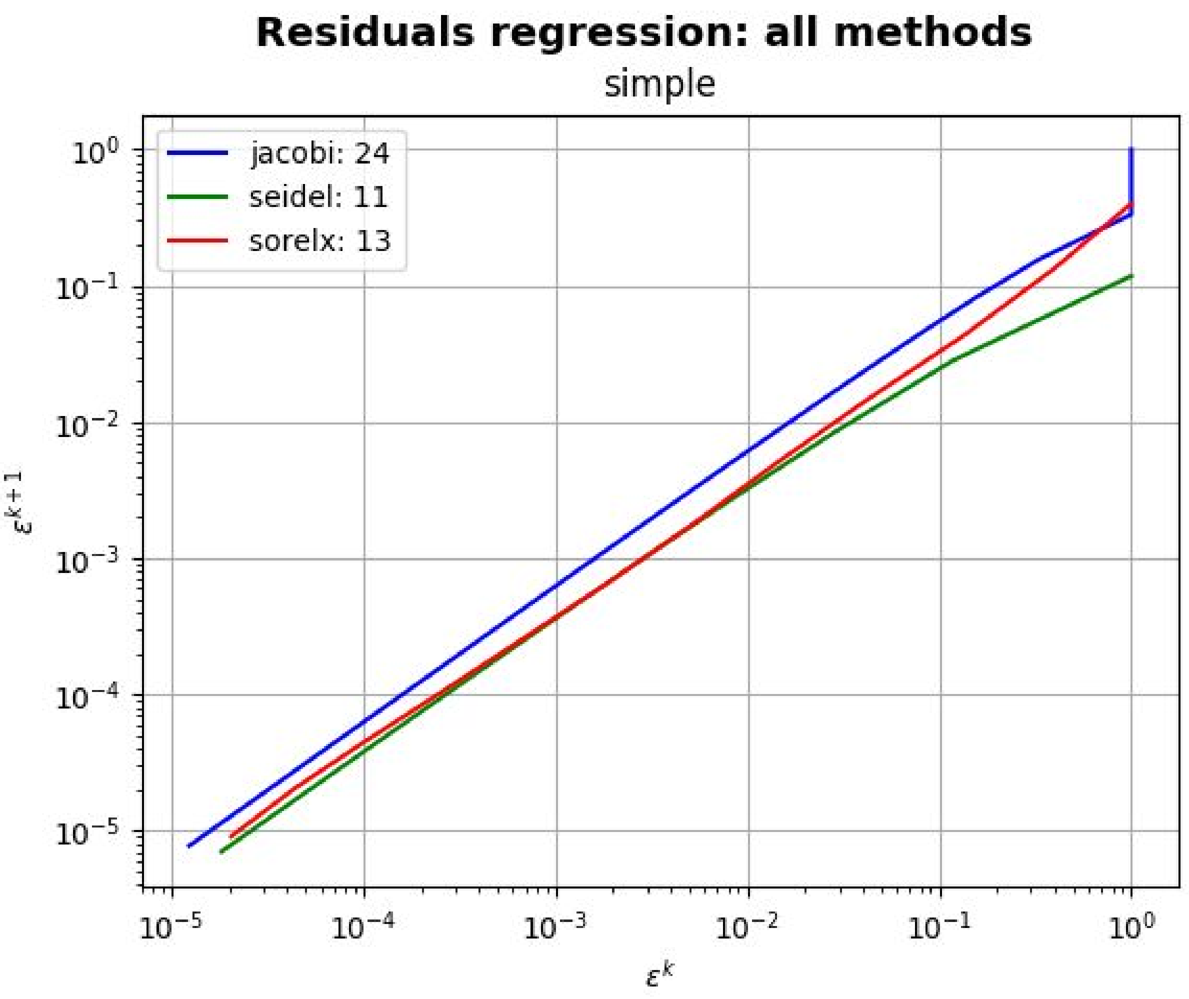
Решение СЛАУ методом Якоби и Зейделя

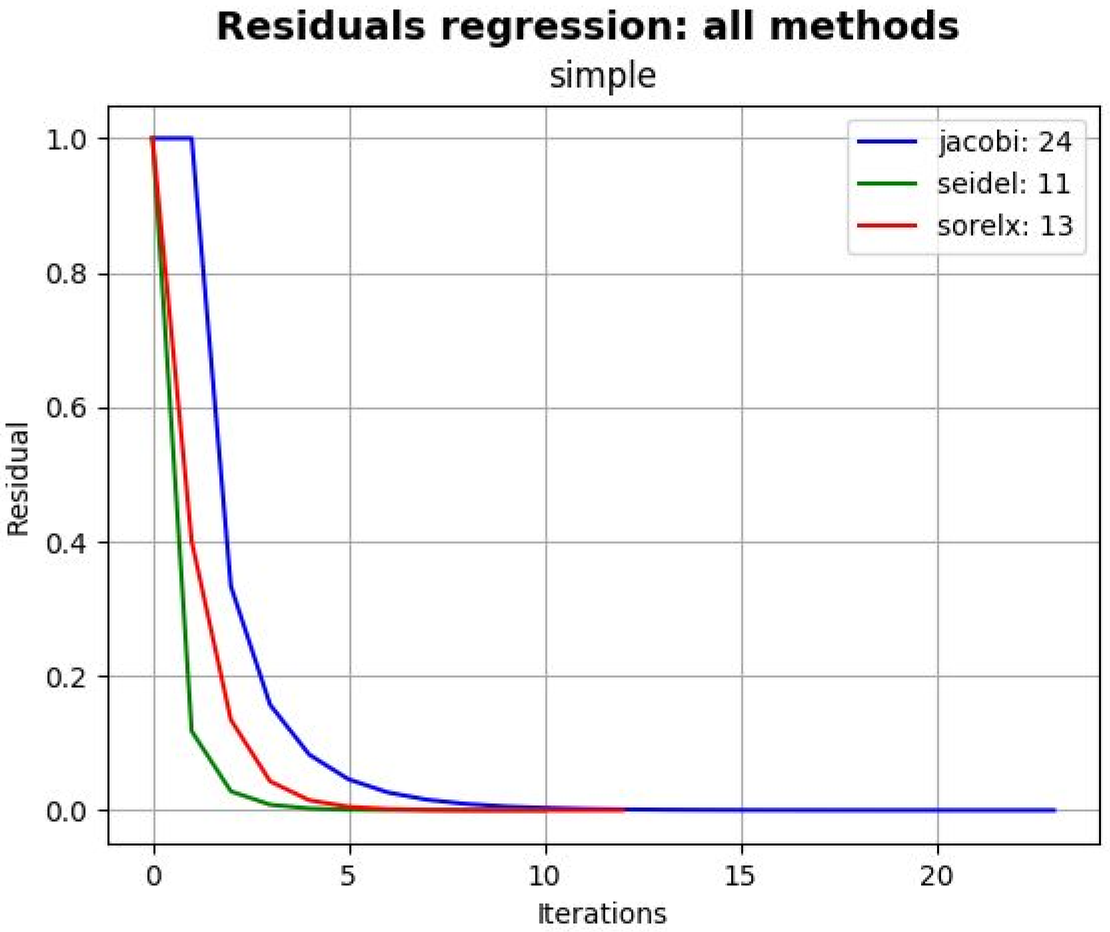
Реализовать решение СЛАУ с заданной точностью методами Якоби и Зейделя. Представить в качестве отчета для каждого метода:

- Постановка задачи, условия применимости метода, особенности реализации вашей программы.
- Для тестовых матриц и их правых частей найти решение x при $\varepsilon = 10^{-5}$ и предоставить в качестве результата норму невязки $r = Ax - f$. Сколько итераций потребовалось для достижения заданной точности?
- Для тестовых матриц и их правых частей попробовать найти решение x при $\varepsilon = 10^{-10}$ и предоставить в качестве результата норму невязки $r = Ax - f$. Сколько итераций потребовалось для достижения заданной точности?
- На примере одной задачи построить график зависимости $(\log \varepsilon_{n+1}, \log \varepsilon_n)$. Оценить по графику скорость сходимости.

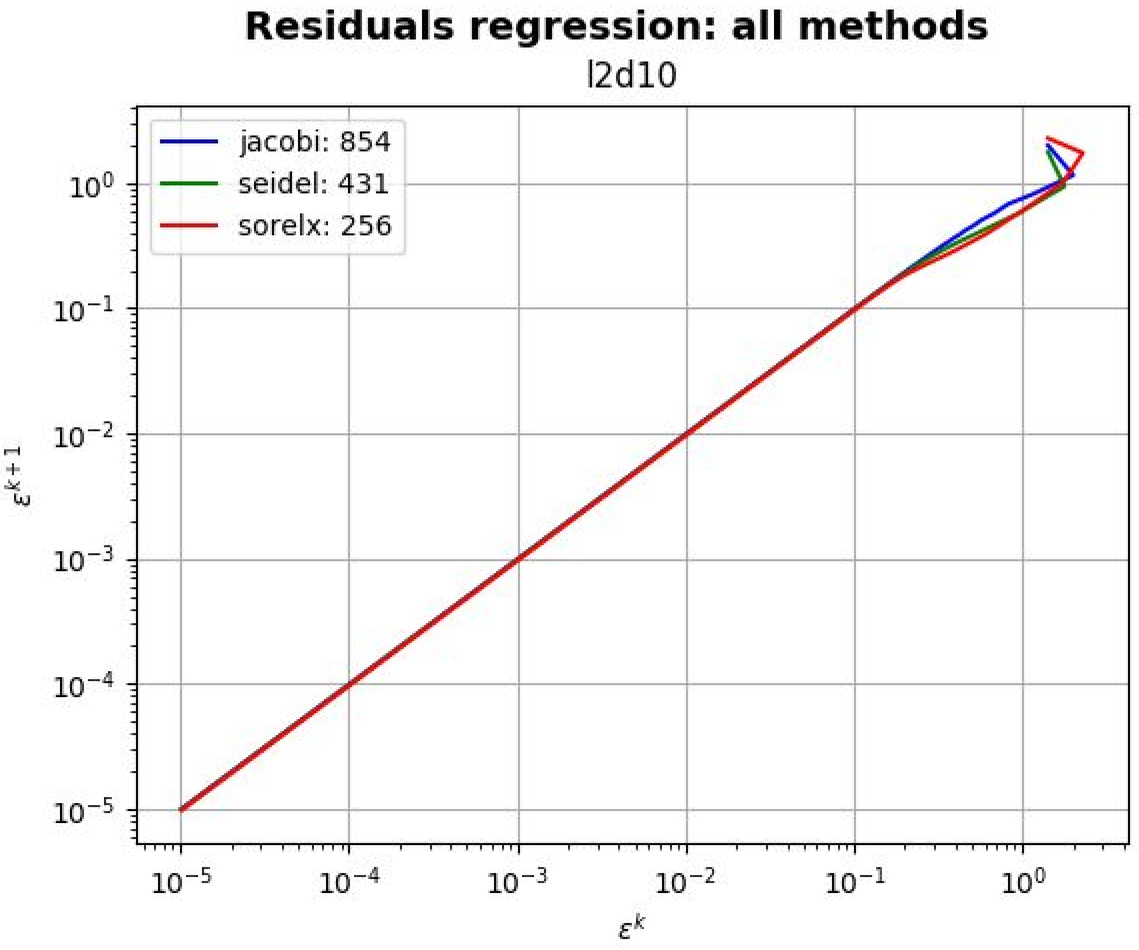
./matrix/1/simple.smtx

```
10 1
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
-1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -1.000000 3.000000 -1.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000
-1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
```

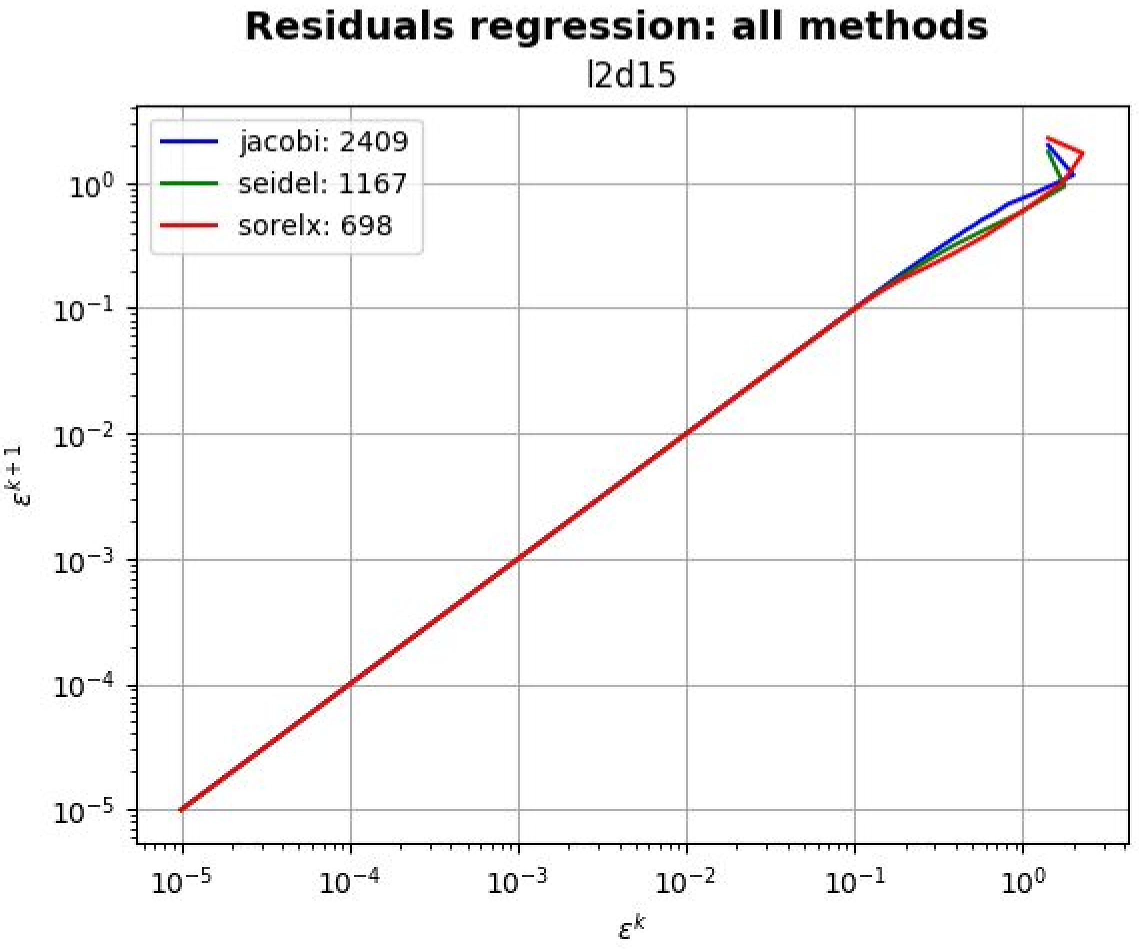

Residuals regression: all methods
simple
jacobi: 24
seidel: 11
sorelx: 13
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
ε^{k}

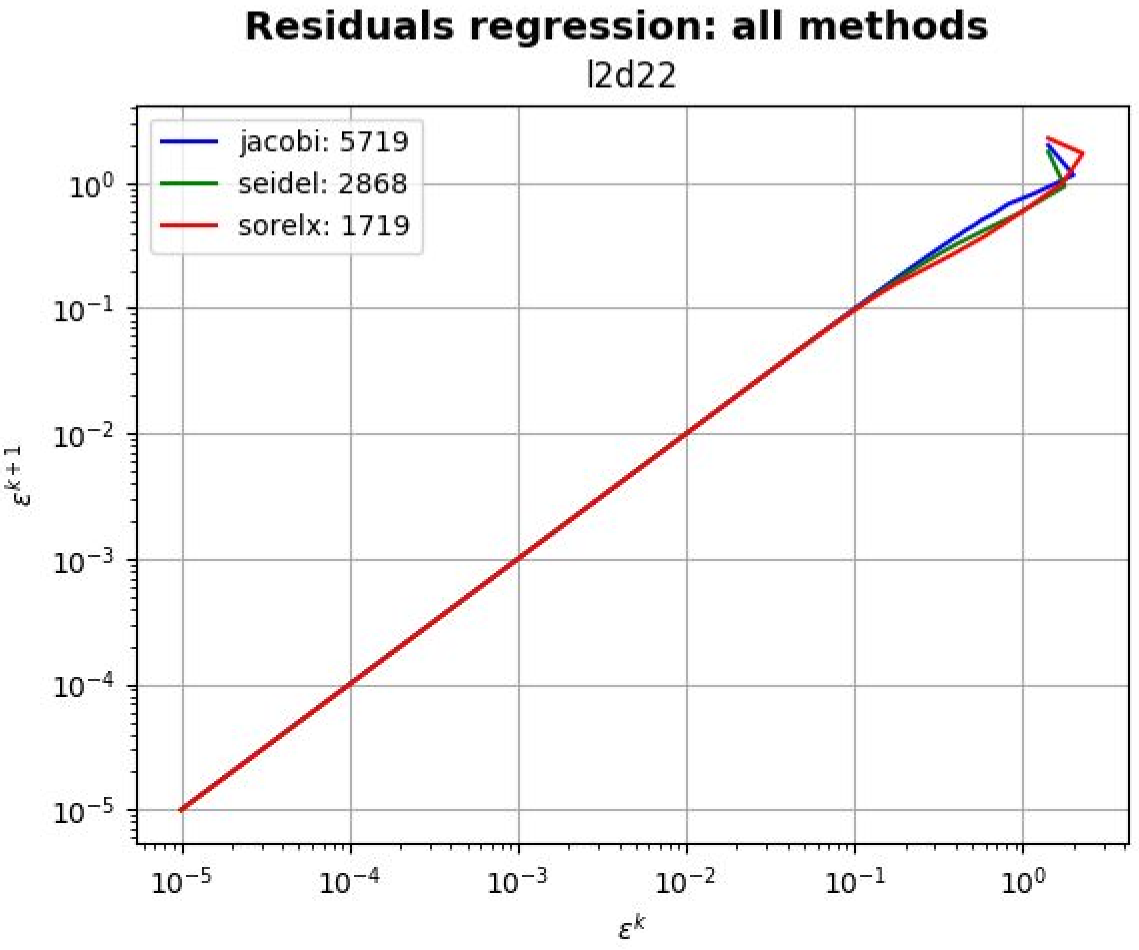

Residuals regression: all methods
simple
jacobi: 24
seidel: 11
sorelx: 13
Residual
Iterations
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20

./matrix/1/

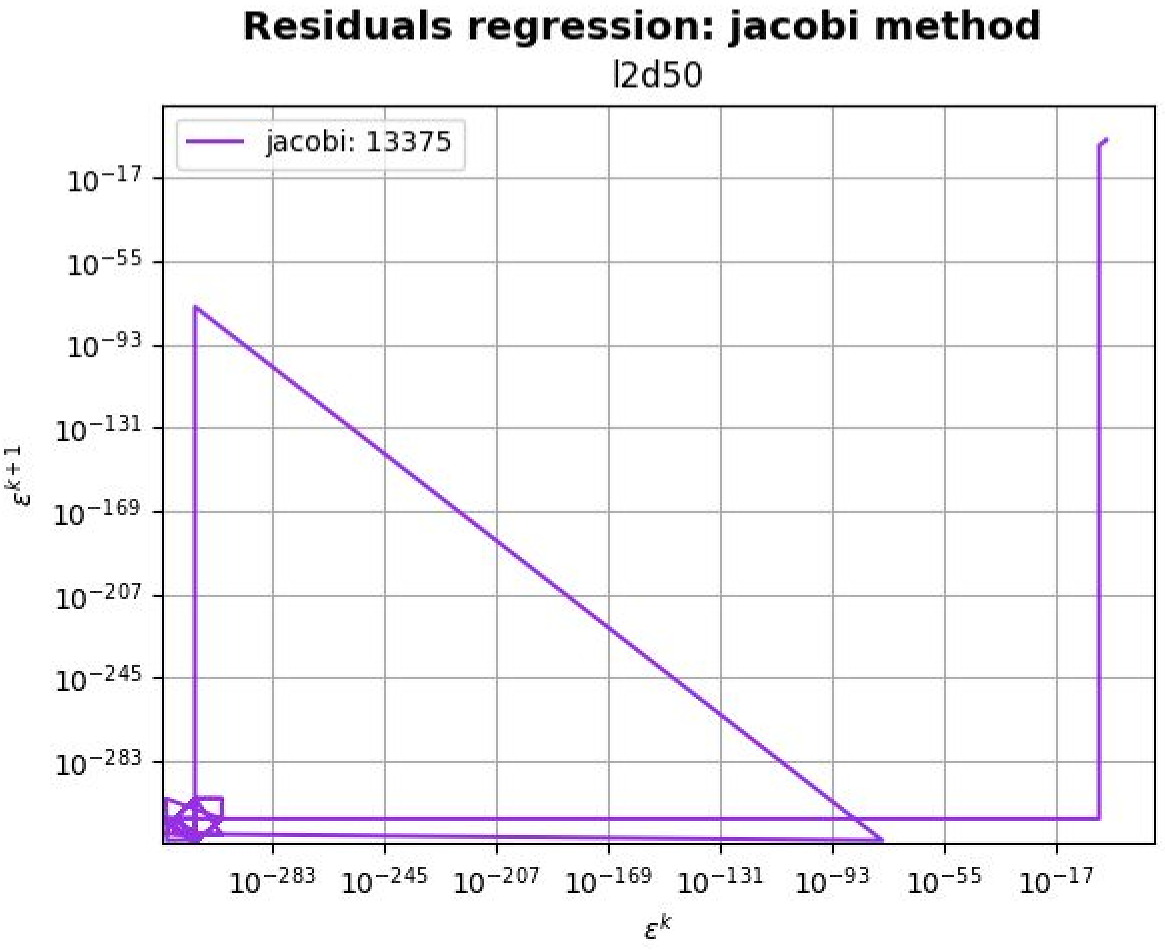


Residuals regression: all methods
l2d10
jacobi: 854
seidel: 431
sorelx: 256
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
ε^{k}


Residuals regression: all methods
l2d15
jacobi: 2409
seidel: 1167
sorelx: 698
ε^{k+1}
ε^{k}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}

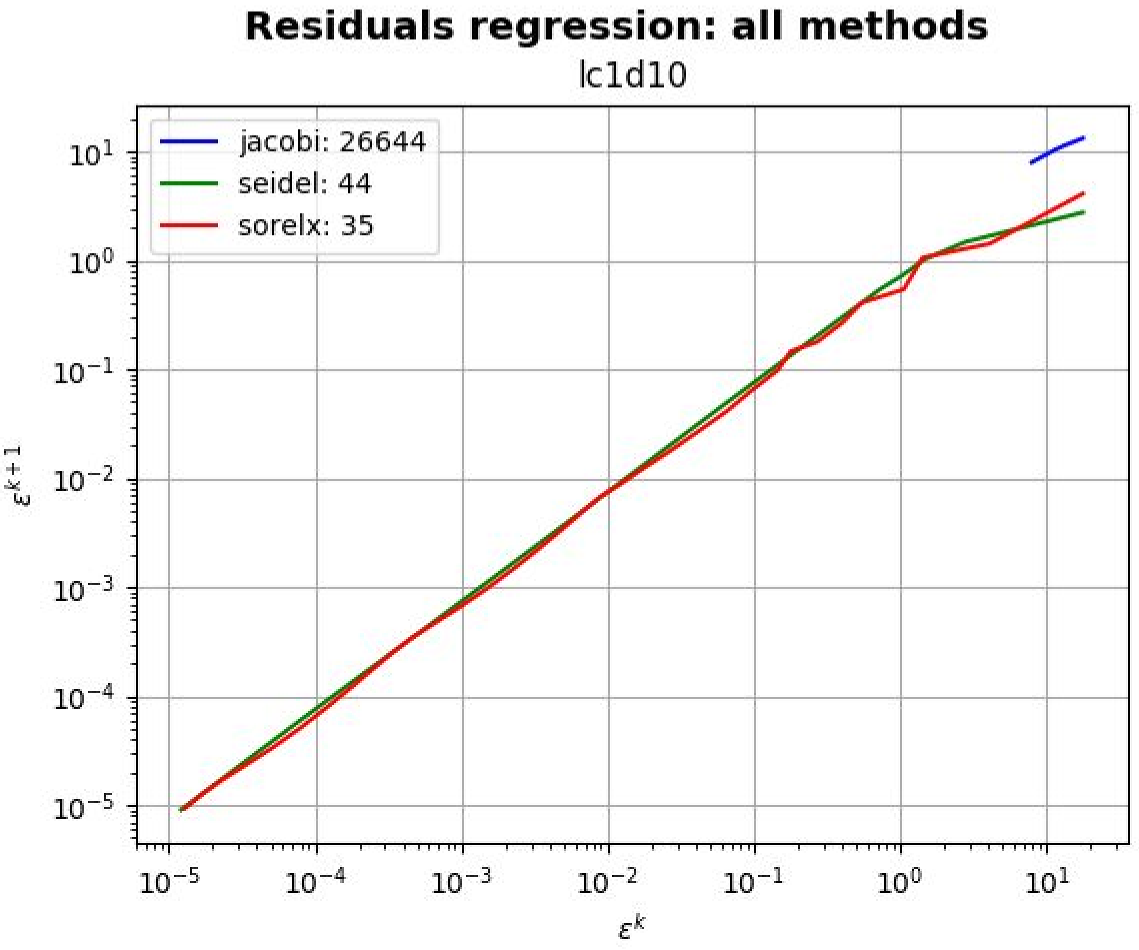


Residuals regression: all methods
l2d22
jacobi: 5719
seidel: 2868
sorelx: 1719
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
ε^k

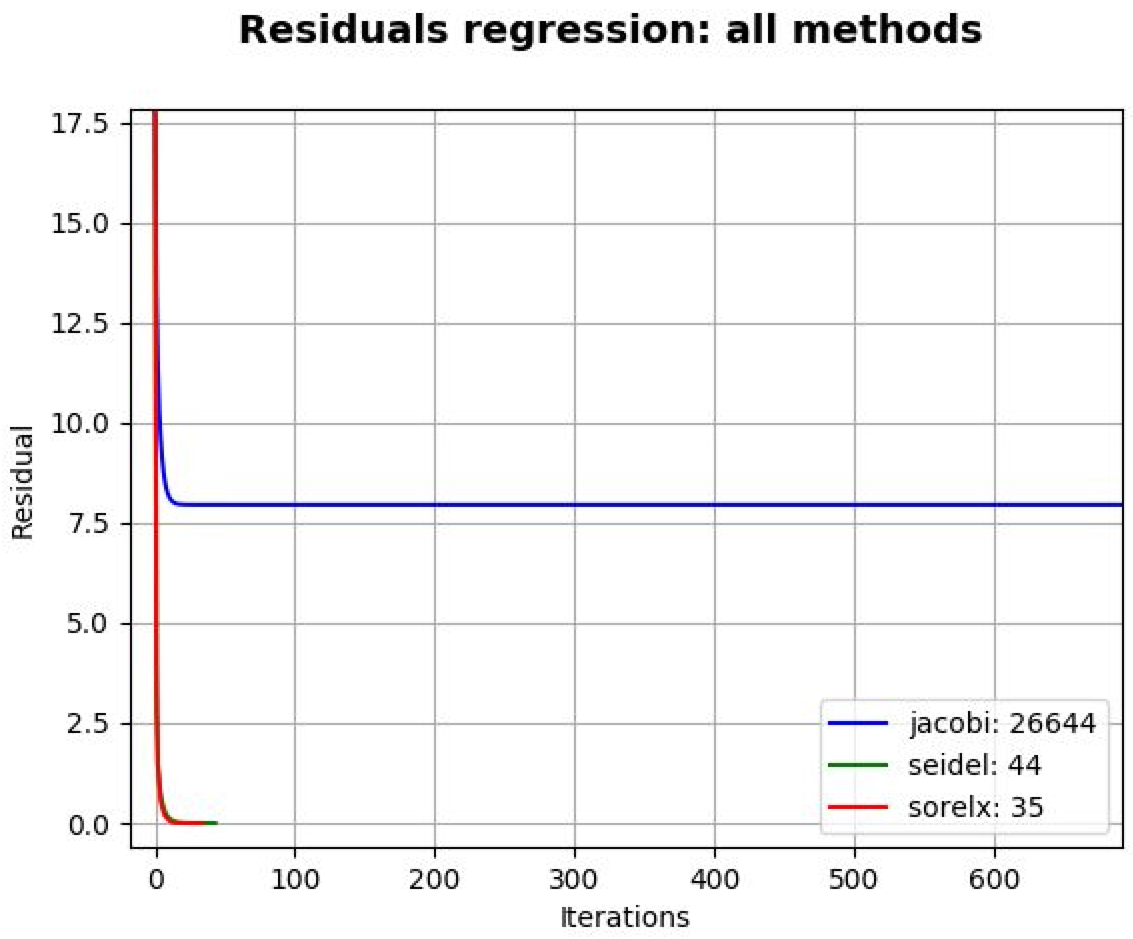


Residuals regression: jacobi method
l2d50
jacobi: 13375
10^{-17}
10^{-55}
10^{-93}
10^{-131}
10^{-169}
10^{-207}
10^{-245}
10^{-283}
ε^{k+1}
10^{-283} 10^{-245} 10^{-207} 10^{-169} 10^{-131} 10^{-93} 10^{-55} 10^{-17}
ε^{k}

./matrix/2/



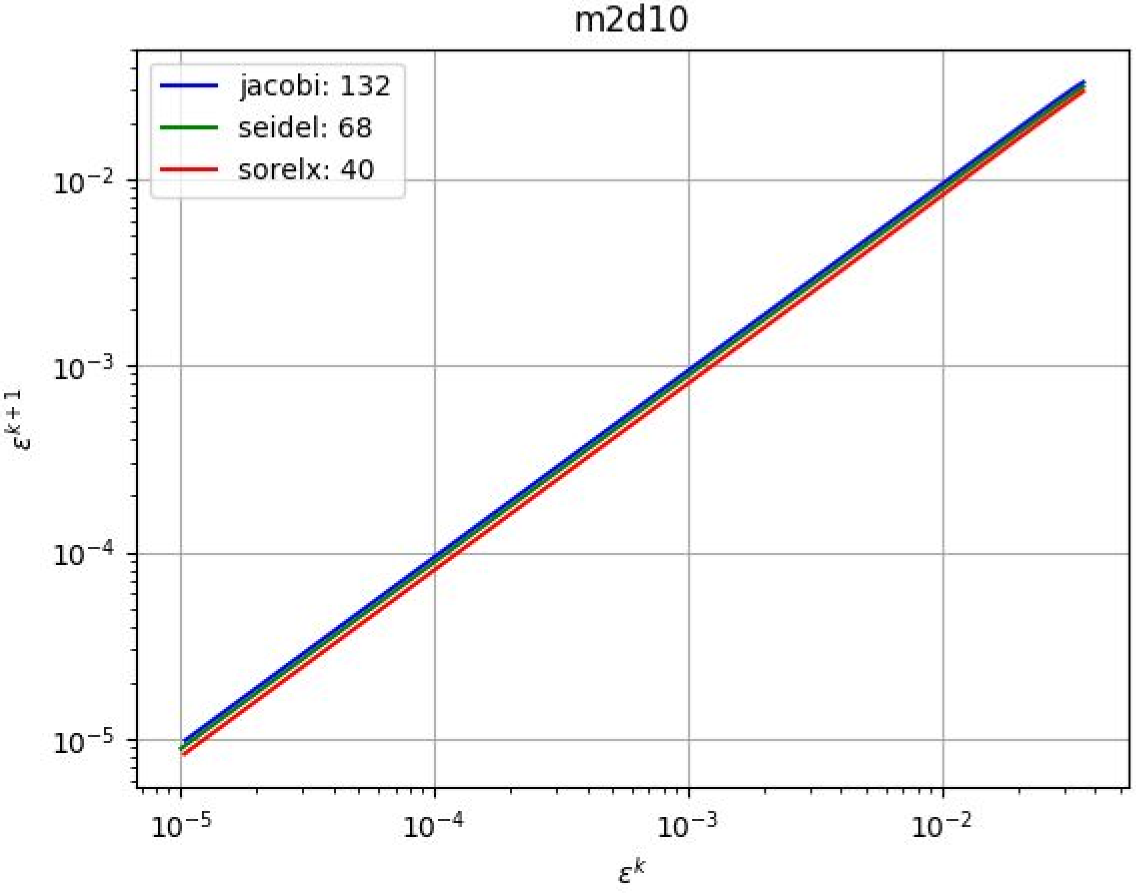
Residuals regression: all methods
lc1d10
jacobi: 26644
seidel: 44
sorelx: 35
ε^{k+1}
ε^{k}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}

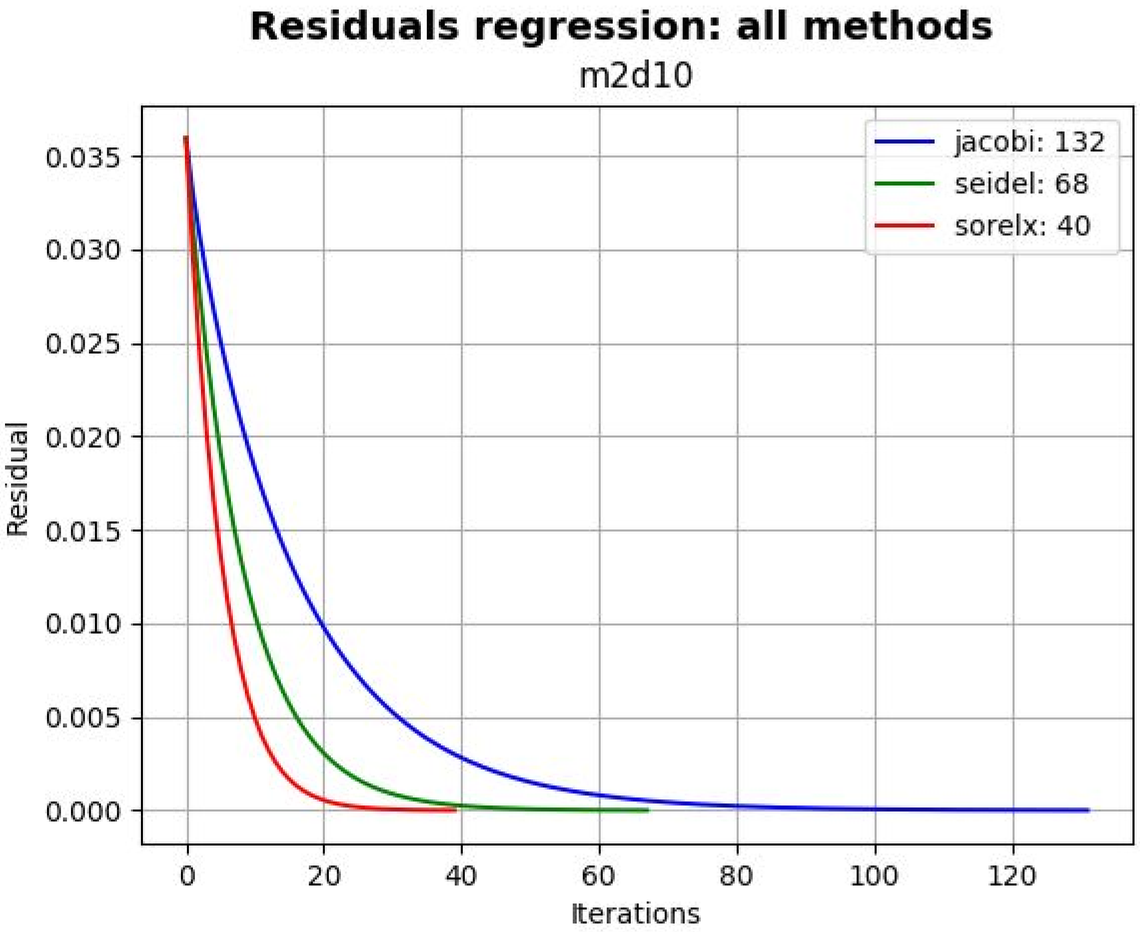


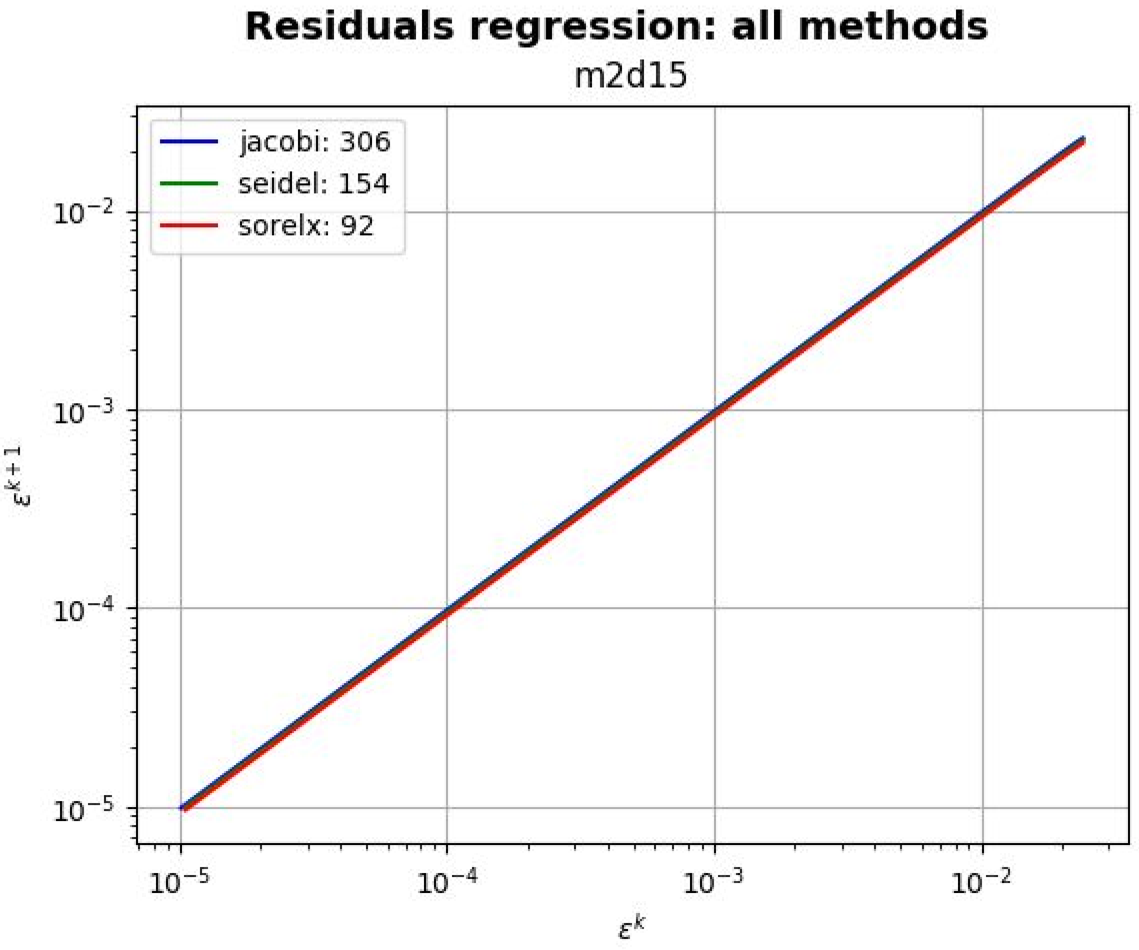
Residuals regression: all methods
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
Residual
0
100
200
300
400
500
600
Iterations
jacobi: 26644
seidel: 44
sorelx: 35

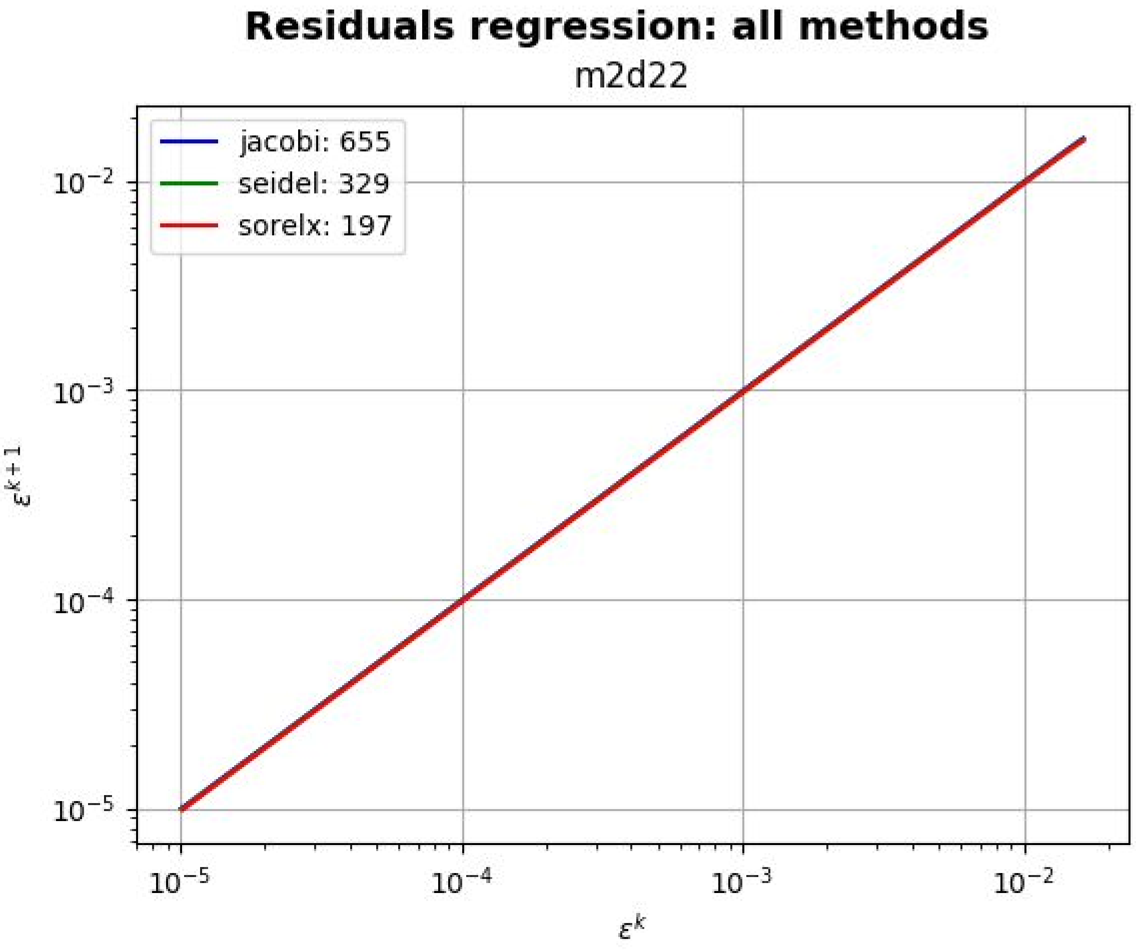
./matrix/3/

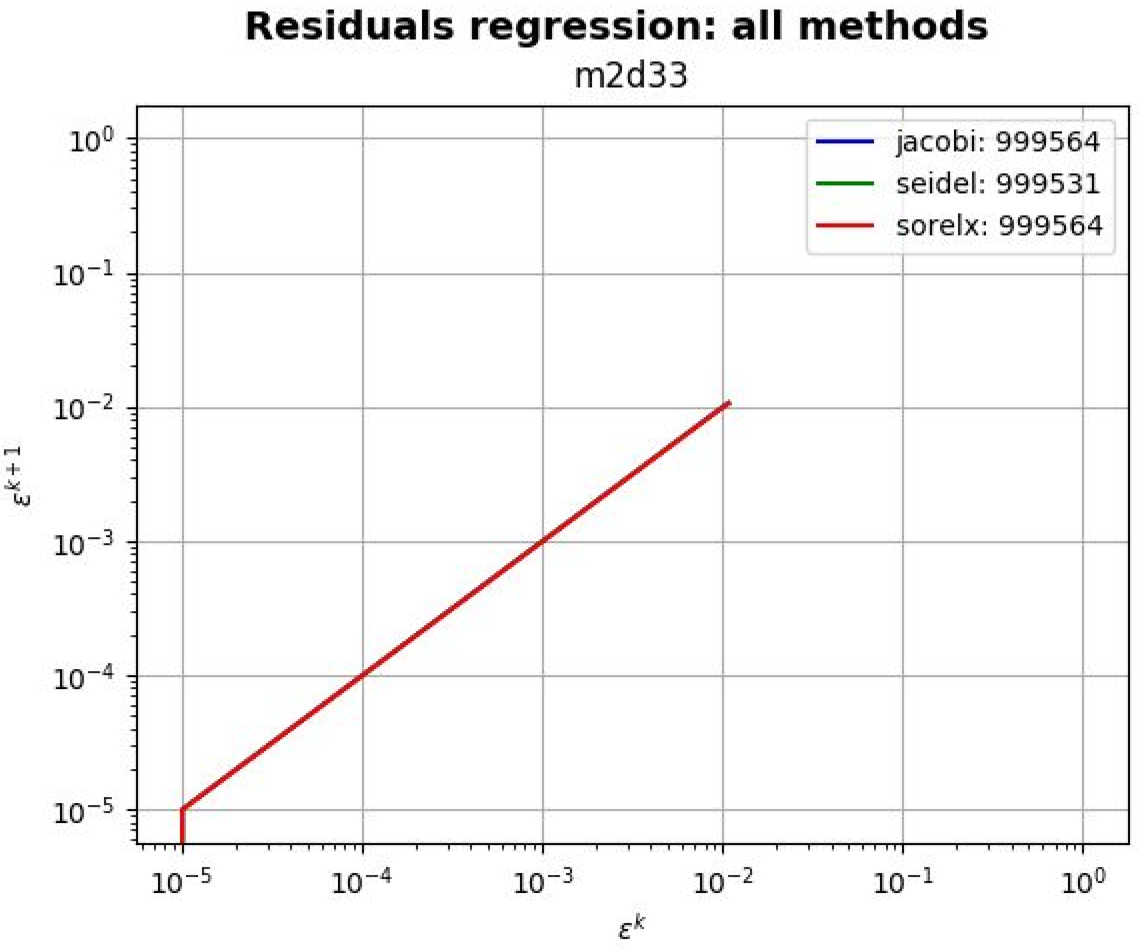
Residuals regression: all methods

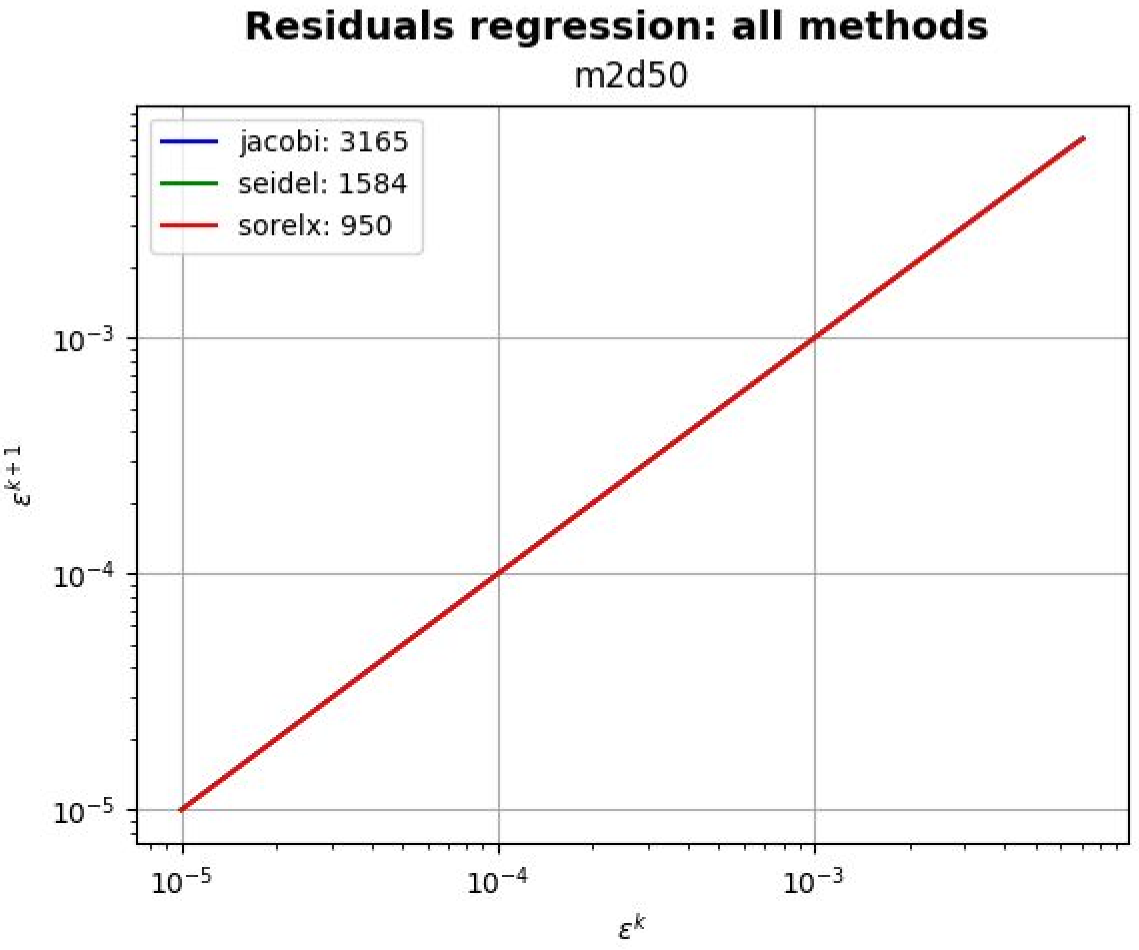



Residuals regression: all methods
m2d10
jacobi: 132
seidel: 68
sorelx: 40
Residual
Iterations
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
0
20
40
60
80
100
120

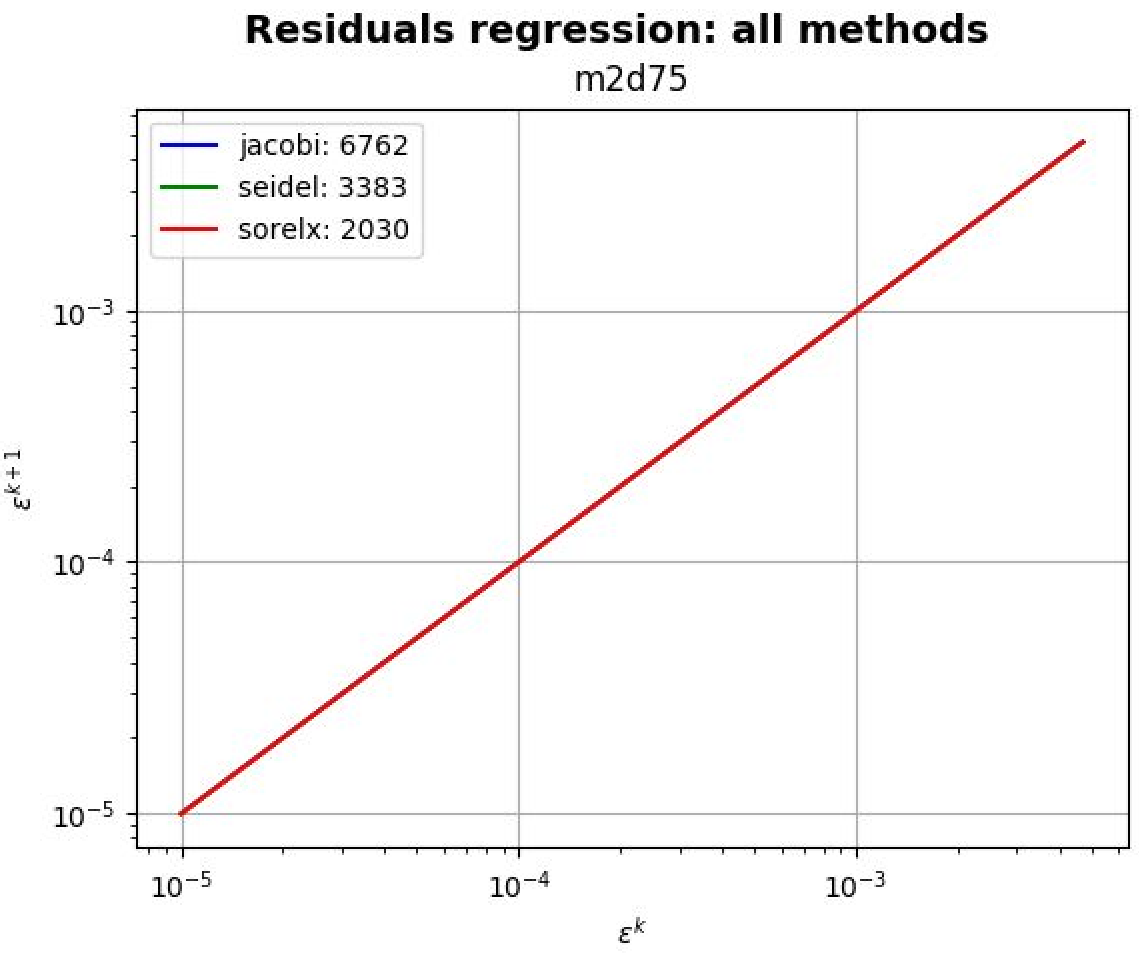

Residuals regression: all methods
m2d15
jacobi: 306
seidel: 154
sorelx: 92
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
ε^{k}


Residuals regression: all methods
m2d22
jacobi: 655
seidel: 329
sorelx: 197
ε^{k+1}
ε^{k}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}

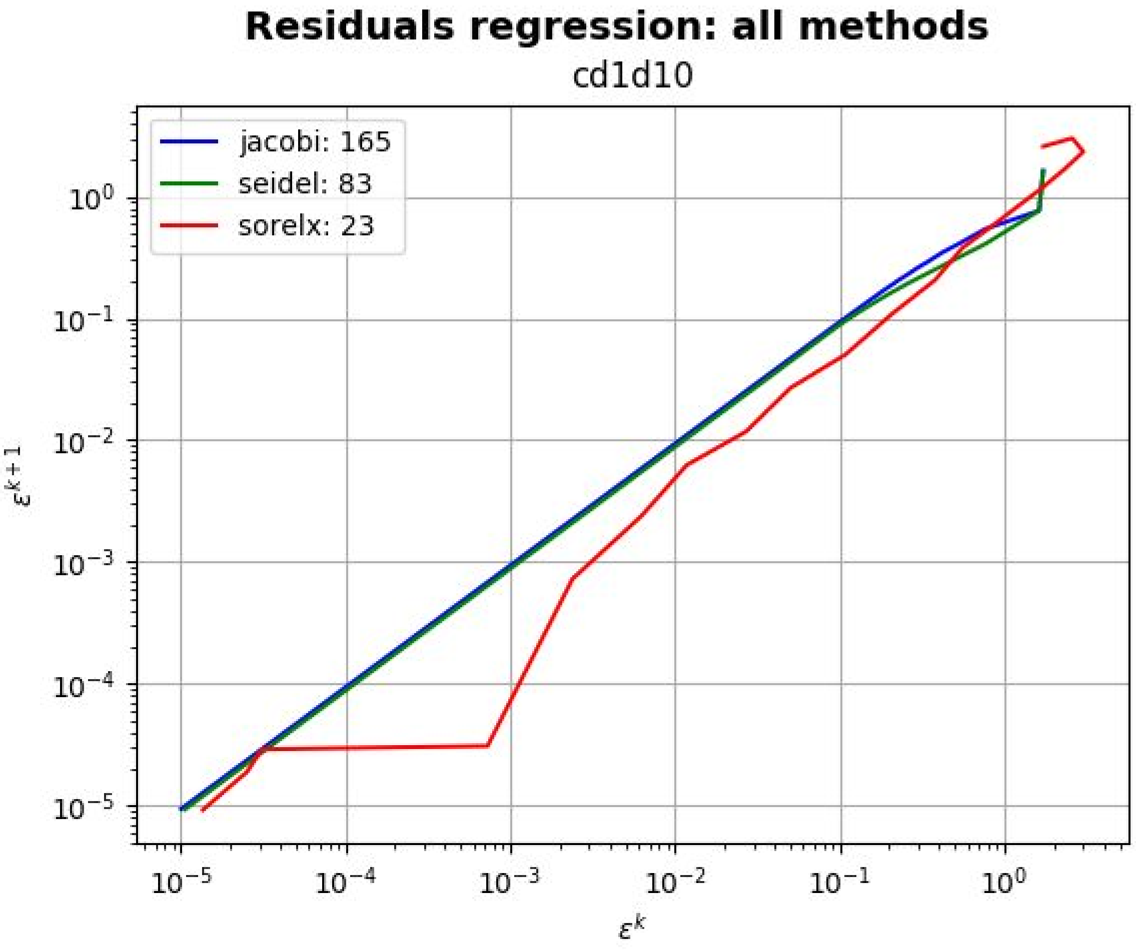

Residuals regression: all methods
m2d33
jacobi: 999564
seidel: 999531
sorelx: 999564
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
ε^k

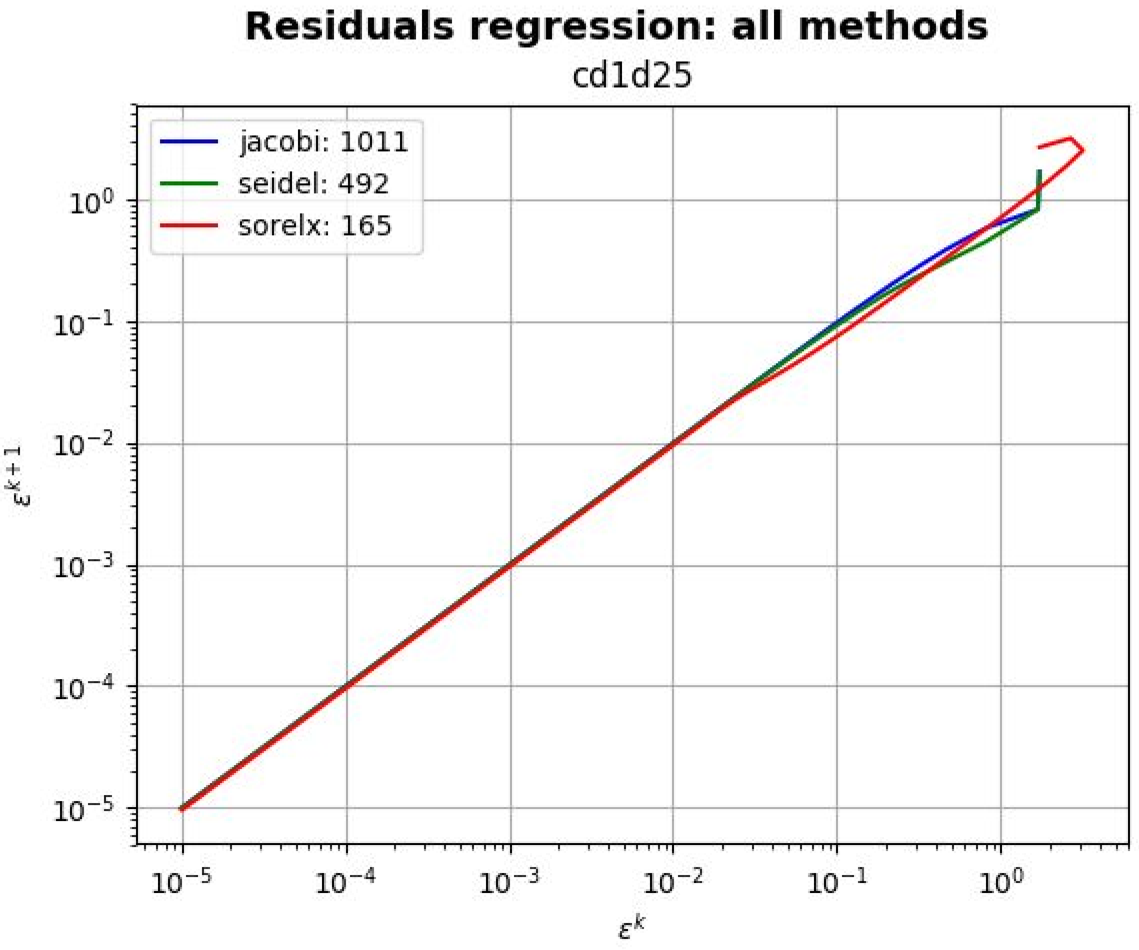


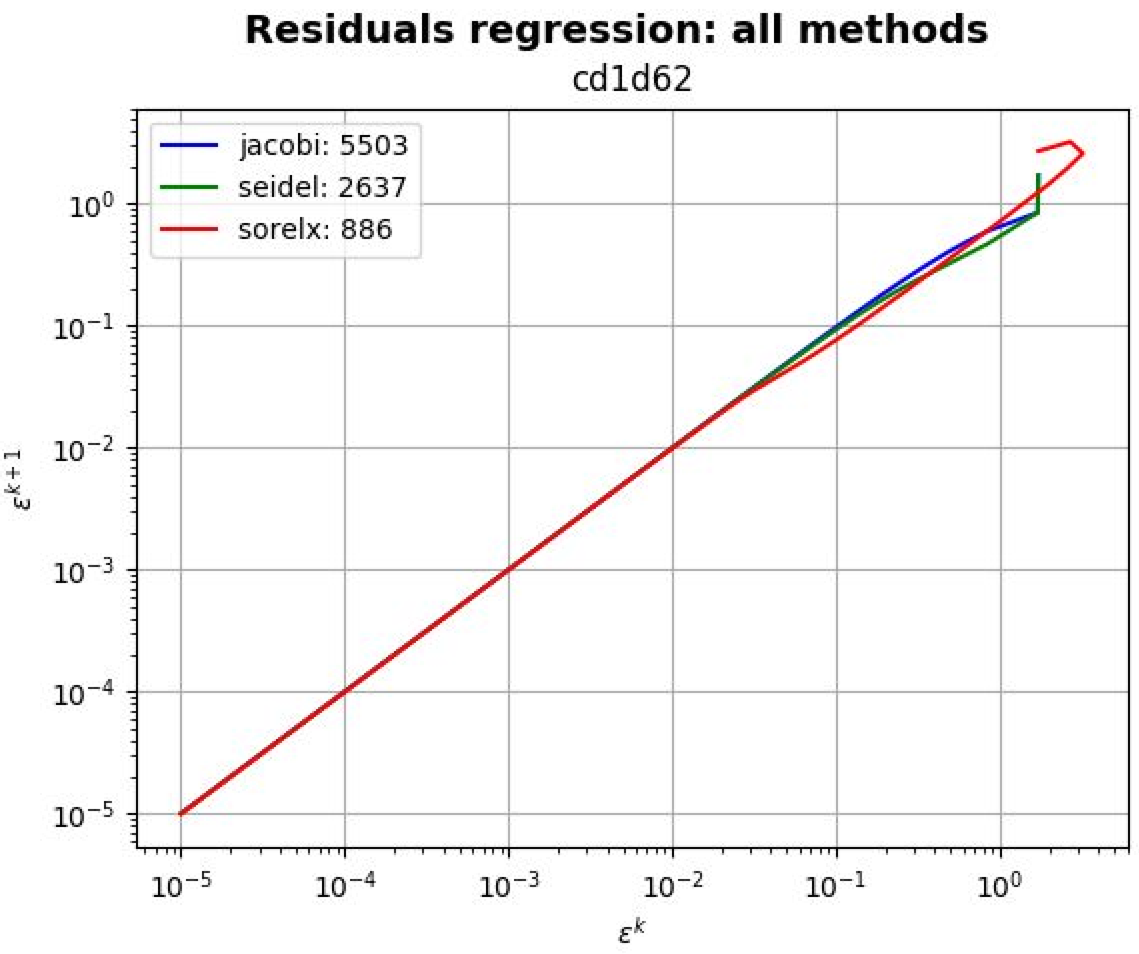
Residuals regression: all methods
m2d50
jacobi: 3165
seidel: 1584
sorelx: 950
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
ε^{k}


Residuals regression: all methods
m2d75
jacobi: 6762
seidel: 3383
sorelx: 2030
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
ε^{k}

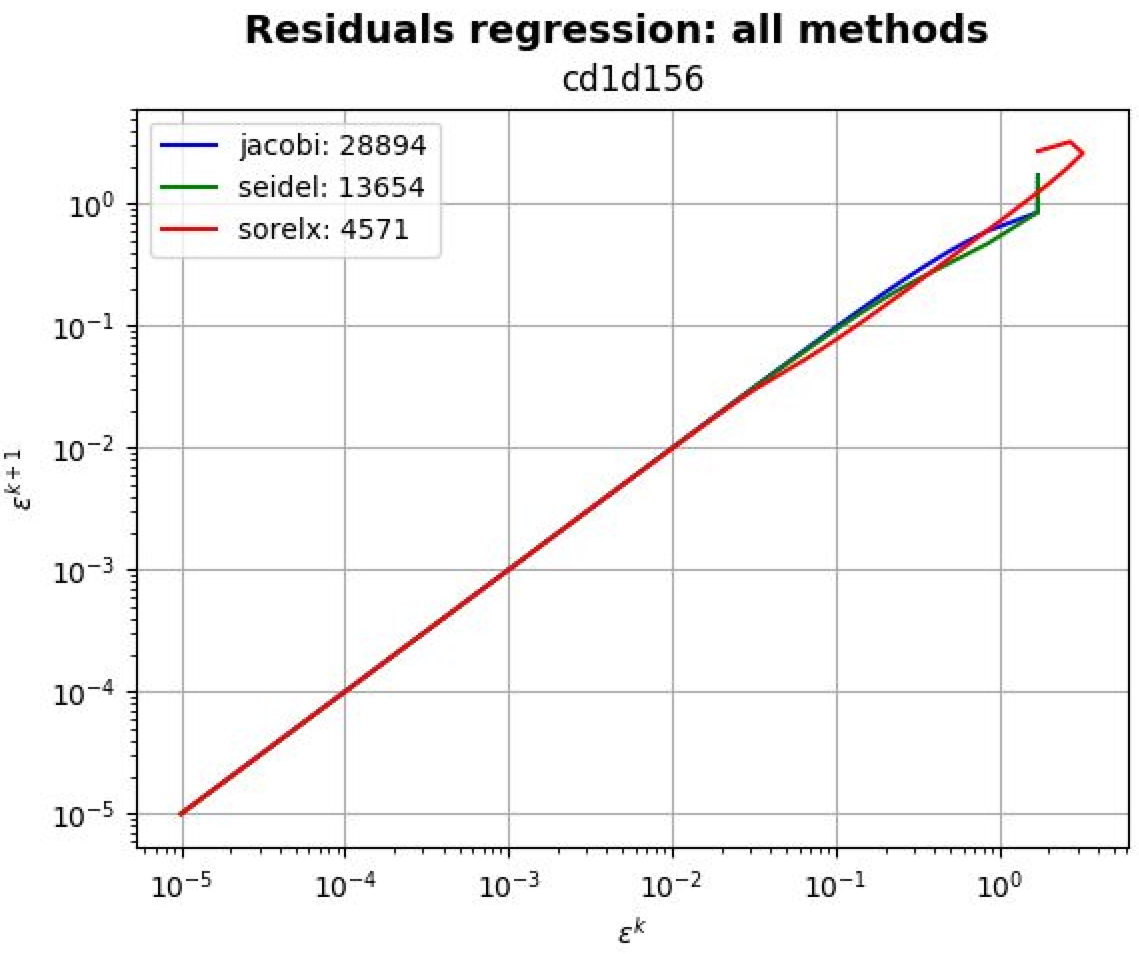
./matrix/5/


Residuals regression: all methods
cd1d10
jacobi: 165
seidel: 83
sorelx: 23
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
ε^{k}


Residuals regression: all methods
cd1d25
jacobi: 1011
seidel: 492
sorelx: 165
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
ε^k

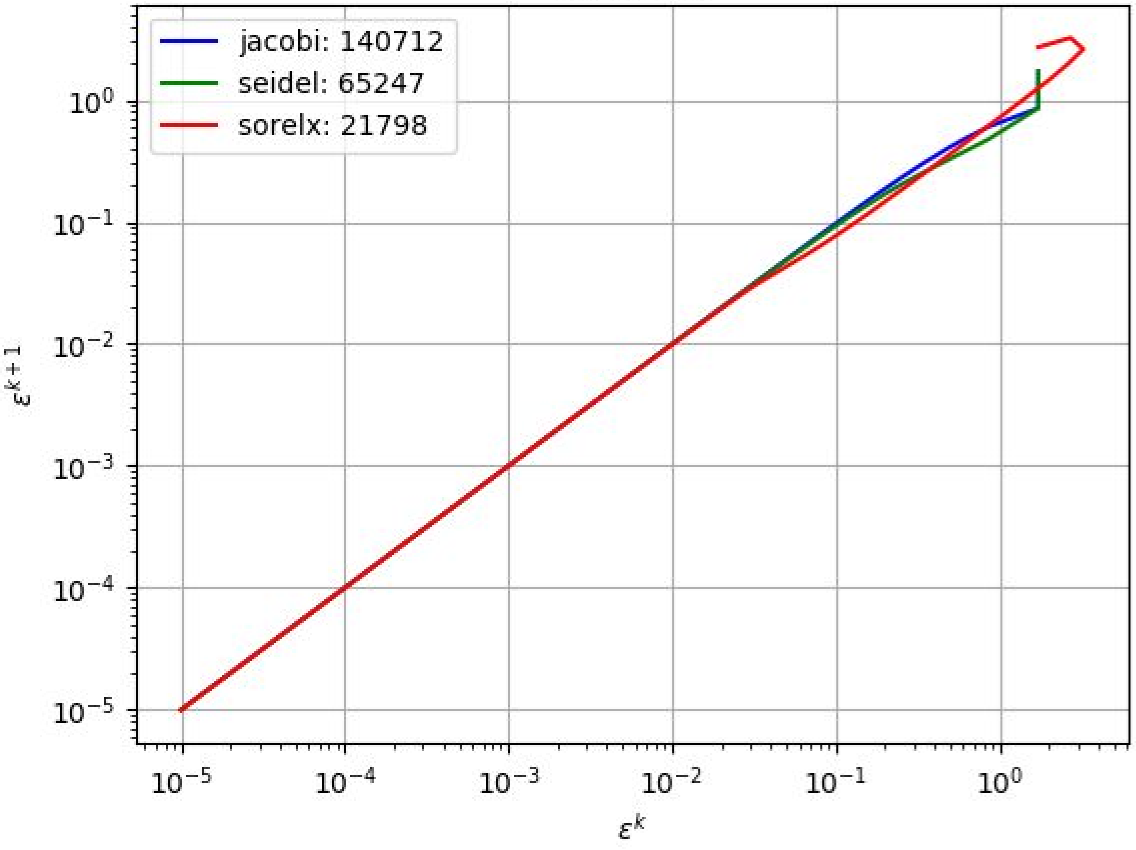


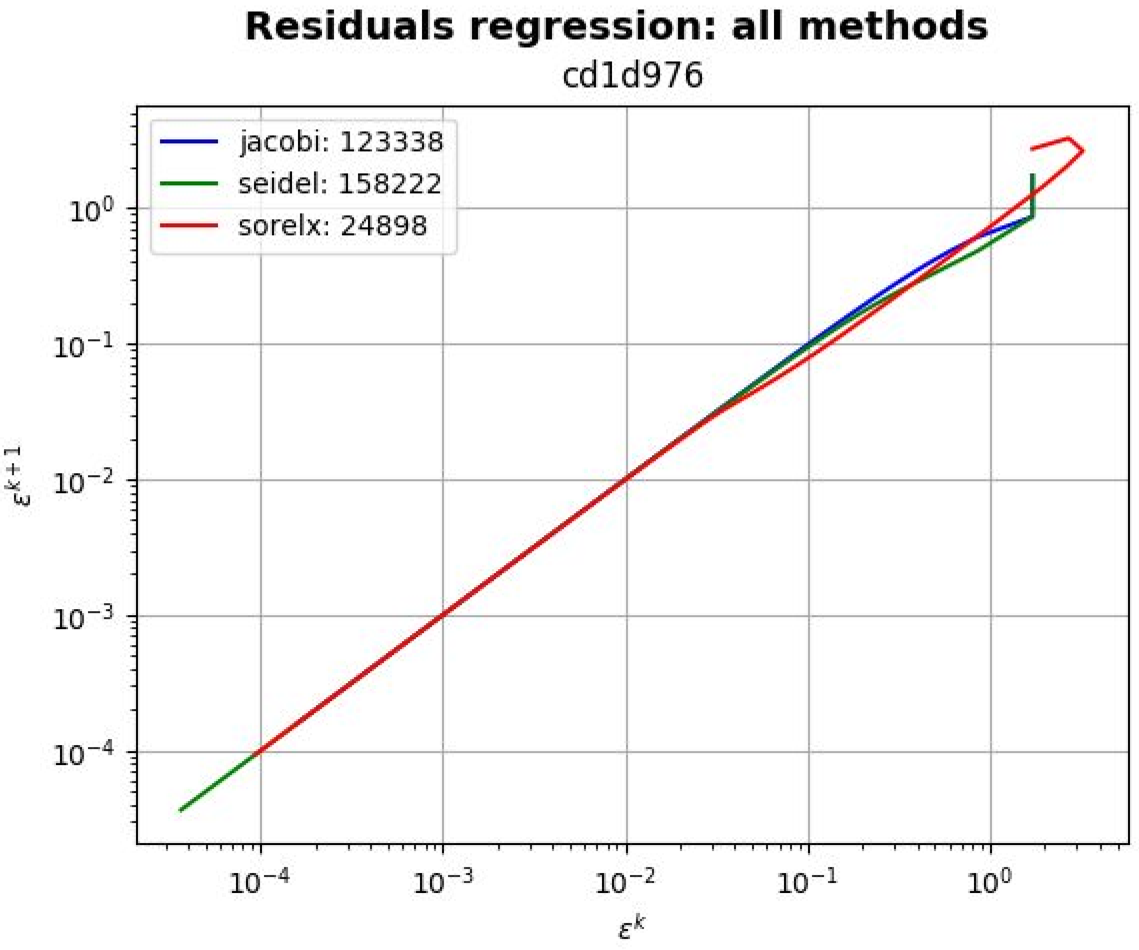
Residuals regression: all methods
cd1d62
jacobi: 5503
seidel: 2637
sorelx: 886
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
ε^k


Residuals regression: all methods
cd1d156
jacobi: 28894
seidel: 13654
sorelx: 4571
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
ε^k

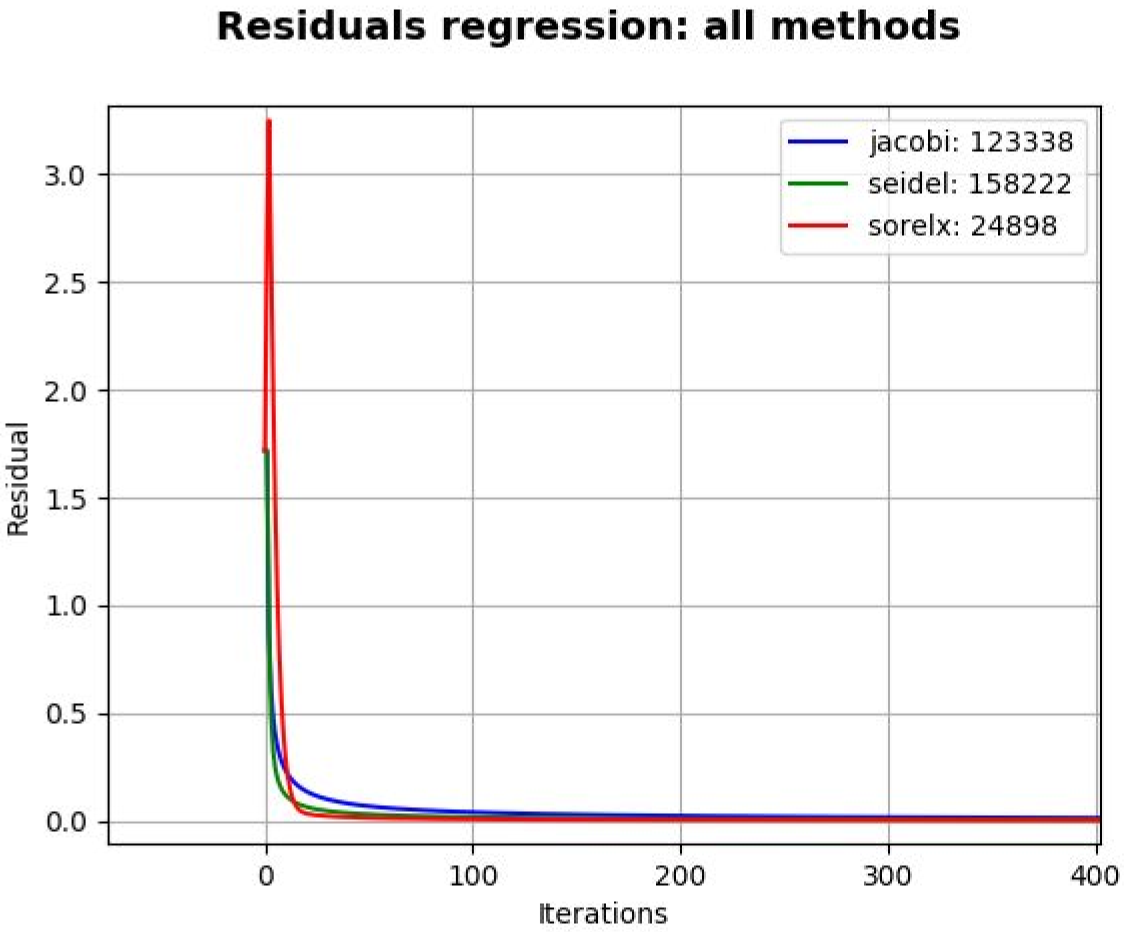
Residuals regression: all methods

cd1d390



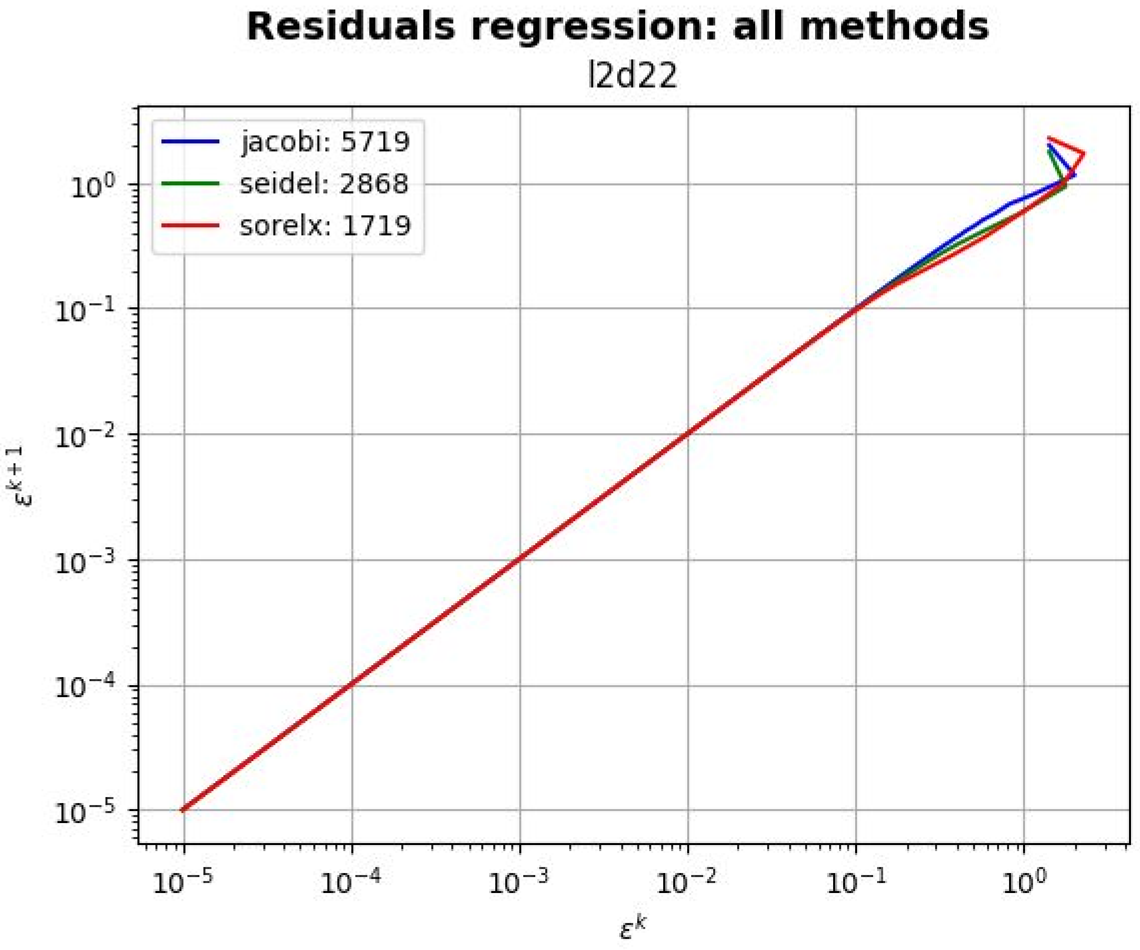


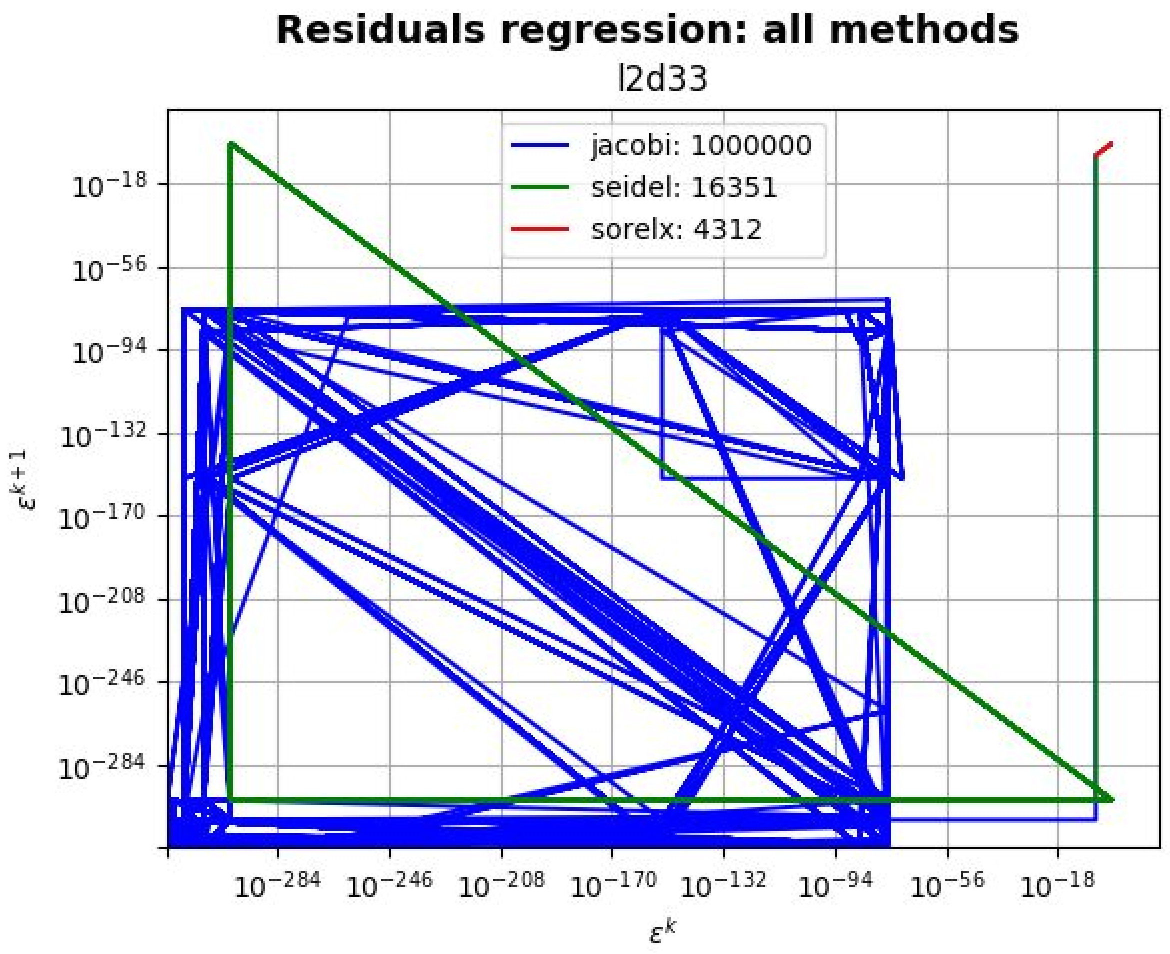
Residuals regression: all methods
cd1d976
jacobi: 123338
seidel: 158222
sorelx: 24898
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
ε^{k+1}
ε^{k}


Residuals regression: all methods
jacobi: 123338
seidel: 158222
sorelx: 24898
Residual
Iterations
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
100
200
300
400

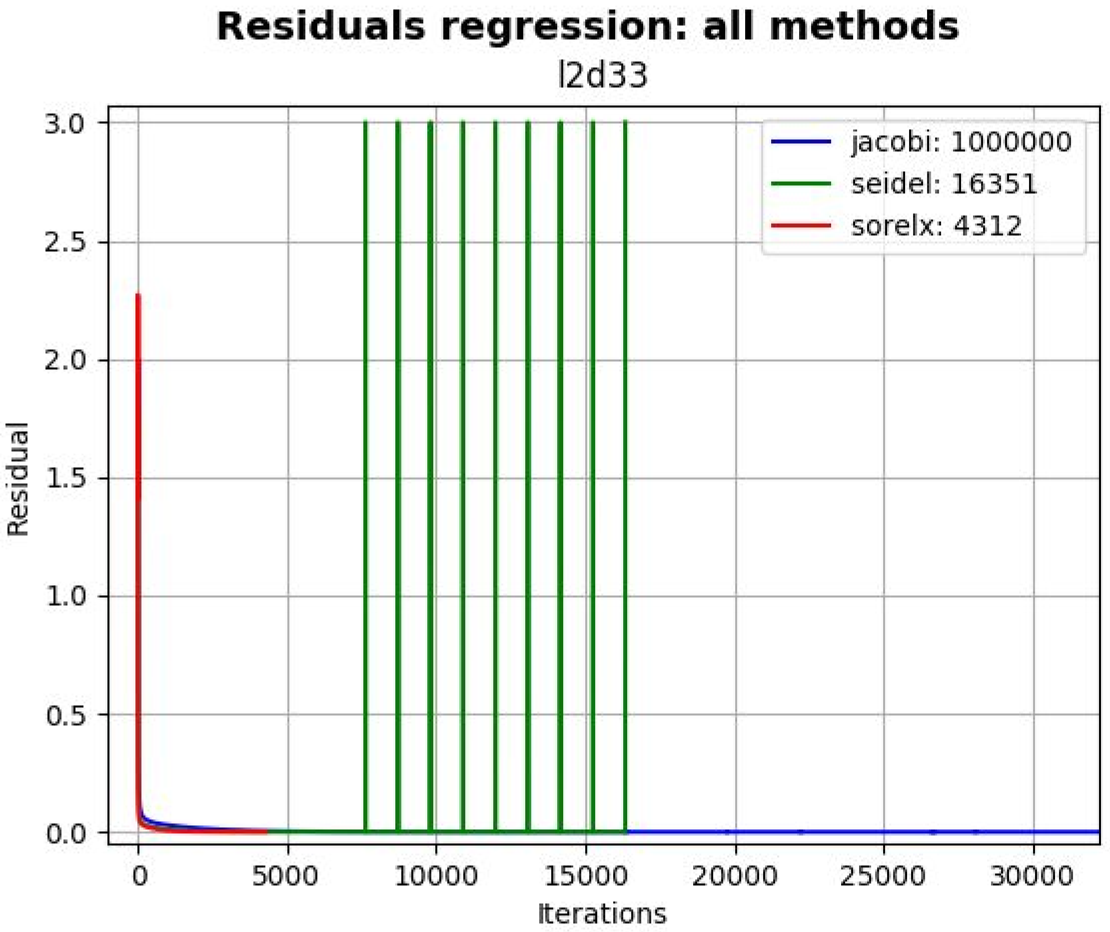
Благодарим за внимание

МФТИ, Долгопрудный, 2017


Residuals regression: all methods
l2d22
jacobi: 5719
seidel: 2868
sorelx: 1719
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
ε^{k+1}
ε^k



Residuals regression: all methods
l2d33
jacobi: 1000000
seidel: 16351
sorelx: 4312
10^{-18}
10^{-56}
10^{-94}
10^{-132}
10^{-170}
10^{-208}
10^{-246}
10^{-284}
ε^{k+1}
ε^{k}



Residuals regression: all methods
l2d33
jacobi: 1000000
seidel: 16351
sorelx: 4312
Residual
Iterations
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000