2025 年春 · 线性代数作业

截止日期：2025 年 3 月 18 日（含）

手写扫描/导出为 PDF 或用 LaTeX 排版编译为 PDF 并发送至：`wangyupei@mail.bnu.edu.cn`

1. 思考并回答下面关于线性组合的问题：

- 图1展示了 $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}$ 的终点. 请在图中分别画出 $\frac{3}{4}\boldsymbol{v}+\frac{1}{4}\boldsymbol{w}$；$\frac{1}{4}\boldsymbol{v}+\frac{1}{4}\boldsymbol{w}$ ；$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 三者的终点；
- 画出 $-\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$ 以及其他所有使得 $c+d=1$ 成立的线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 的终点. 这些点组成了什么图形?
- 画出 $\frac{1}{3}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\boldsymbol{w}$ 和 $\frac{2}{3}\boldsymbol{v}+\frac{2}{3}\boldsymbol{w}$ 的终点位置. 线性组合 $c\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}$ 表达了一条什么样的直线?
- 当限制 $0\le c\le 1$ 和 $0\le d\le 1$ 时, 把所有线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 的结果涂灰；
- 当限制 $c\ge 0$ 和 $d\ge 0$ 时，画出所有 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 构成的锥形.

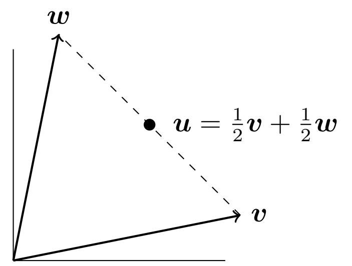

图 1: 第一题图：平面向量的线性组合

2. 考虑向量 $\boldsymbol{v}_1=(1,2,0)$ 和 $\boldsymbol{v}_2=(2,3,0)$. 回答下列问题：

- 它们是线性无关的吗？为什么?
- 它们是某个空间的基吗？为什么?
- 它们张成的空间 V 是什么样的?
- V 的维数是多少？为什么?
- 符合什么条件的矩阵 A 的列空间是 V?
- 描述能与 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 一起构成 $\mathbb{R}^3$ 的基的向量 $\boldsymbol{v}_3$ 应该满足的条件.

3. 考虑矩阵 W:

$$W=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

- 写出这个矩阵的三个列向量 $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$；
- 这三个向量是线性相关的还是线性无关的?
- 写出至少两组满足 $y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2 + y_3\boldsymbol{c}_3 = \mathbf{0}$ 的 (y_1, y_2, y_3) 的具体数值;
- 矩阵 W 的列向量组的最大线性无关组中的向量数量是多少?
- 矩阵 W 的行向量组的最大线性无关组中的向量数量是多少?
- 这个矩阵的秩是多少?

4. 将 $2x + 3y + z + 5t = 8$ 写成矩阵形式，即用矩阵 A (思考一下应该有多少行?) 乘以一个列向量 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ 来得到 $\boldsymbol{b}$ 的形式. 方程的解 $\boldsymbol{x}$ 所处的空间是什么样的? 维数又是多少?

5. 存在三个不同的向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. 如何构造一个矩阵 A，使得方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ 和 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ 有解，但方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$ 无解? 这时 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 需满足什么条件?

6. 计算题:

- 矩阵 A 是 3×5 的，矩阵 B 是 5×3 的，矩阵 C 是 5×1 的，矩阵 D 是 3×1 的，每个矩阵中的所有位置都是 1. 请问下面计算中合法的有哪些? 结果分别是什么?

$$BA \qquad AB \qquad ABD \qquad DC \qquad A(B+C)$$

- 假设下面的计算都合法，那么各算式中矩阵的哪些行或列参与了下面各对象的计算（本问各矩阵和上一问无关，各小问之间的矩阵也无关）:

  (1) AB 的第二列

  (2) AB 的第一行

  (3) AB 的第三行第五列的元素

  (4) CDE 中第一行第一列的元素

- 当 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

  (1) 计算 $AB + AC$ 并和 $A(B+C)$ 比较结果;

  (2) 计算 $A(BC)$ 并和 $(AB)C$ 比较结果.

- 当 $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 计算 A^2 和 A^3. 猜一下 A^5 和 A^n 的结果. 如果 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 呢?

- 验证: $(A+B)^2$ 不等于 $A^2 + 2AB + B^2$，当

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

  写下正确的公式: $(A+B)(A+B) = A^2 + \underline{\qquad\qquad} + B^2$.

7. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$:

- 求矩阵 A 的特征值 λ_1, λ_2 及其对应特征向量；
- 求矩阵 A^2 的特征值和特征向量；
- 求矩阵 A^{-1} 的特征值和特征向量；
- 求矩阵 $A + 4I$ 的特征值和特征向量；
- 方形矩阵的**迹 (trace)** 指的是其对角线上元素之和，即 $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$（其中 a_{ii} 代表矩阵的第 i 行 i 列上的元素的值）. 求矩阵 A 的迹，并指出其和 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的关系；
- 计算矩阵 A 的行列式，并指出其和 $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ 的关系.