Lösningsförslag övningsuppgifter 2025-02-14

1. I nedanstående uppgifter ska 4-bitars 2-komplement användas:

a) Omvandla -6_{10} till dess 4-bitars binära motsvarighet.

b) Omvandla det signerade binära talet 1001_2 till dess decimala motsvarighet.

Lösning

Förhållandet mellan ett signerat decimal tal i och motsvarande osignerade tal u är följande:

$$\begin{cases} MSB = 0 => i = u \\ MSB = 1 => i = u - 2^n, \end{cases}$$

där n är antalet bitar och 2^n utgör det så kallade 2-komplementet. För 4-bitars tal utgör 2-komplementet $2^4 = 16$.

a) Omvandla först -6_{10} till motsvarande osignerade 4-bitars tal:

$$i = u - 2^n => u = i + 2^n = -6 + 2^4 = 10_{10}$$

Omvandla sedan det osignerade talet 10_{10} till binär form, så ser vi att $-6_{10} = 1010_2$:

$$10_{10} = 8 + 2 = 1010_2$$

b) Omvandla först det binära talet 1001_2 till decimal osignerad form:

$$1001_2 = 8 + 1 = 9_{10}$$

Eftersom MSB = 1 är talet negativt på signerad form och ska därmed subtraheras med 2-komplementet, i detta fall 2^4. Omvandla det osignerade decimala talet till motsvarande signerade tal med 2-komlementet, så ser vi att $1001_2 = -7_{10}$:

$$MSB = 1 => \ i = u - 2^n = 9 - 2^4 = -7_{10}$$

2. I nedanstående uppgifter ska 8-bitars 2-komplement användas:

a) Omvandla -104_{10} till dess 8-bitars binära motsvarighet.

b) Omvandla det signerade binära talet $1001\ 0100_2$ till dess decimala motsvarighet.

Lösning

Samma metodik som ovan, med skillnaden att 2-komplementet nu är $2^8 = 255$.

a) Omvandla först -104_{10} till motsvarande osignerade 8-bitars tal:

$$i = u - 2^n => u = i + 2^n = -104 + 2^8 = 152_{10}$$

Omvandla sedan det osignerade talet 152_{10} till binär form:

$$152_{10} = 128 + 16 + 8 = 1001\ 1000_2$$

Därmed gäller att $--104_{10} = 1001\ 1000_2$.

b) Omvandla först det binära talet $1001\ 0100_2$ till decimal osignerad form:

$$1001\ 0100_2 = 128 + 16 + 4 = 148_{10}$$

Eftersom MSB = 1 är talet negativt på signerad form och ska därmed subtraheras med 2-komplementet, i detta fall 2^8:

$$MSB = 1 => \ i = u - 2^n = 148 - 2^8 = -108_{10}$$

Därmed gäller att $1001\ 0100_2 = -108_{10}$.

3. Realisera minimerade grindnät för följande logiska funktioner:

a) X = AB + C’

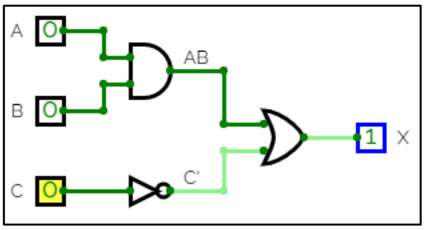
b) X = (A + B)’ * C’D

c) X = AB * AB’ + C

d) X = AB + AB’ + AC

Lösning

a) Ekvationen går inte att förenkla ytterligare. Därmed ritar vi upp grindnätet direkt:



Figur 1: Realisering av grindnät för X = AB + C’.

b) Vi börjar med att förenkla ekvationen så långt det går:

$$X = (A + B)' + C'D = A'B' + C'D,$$

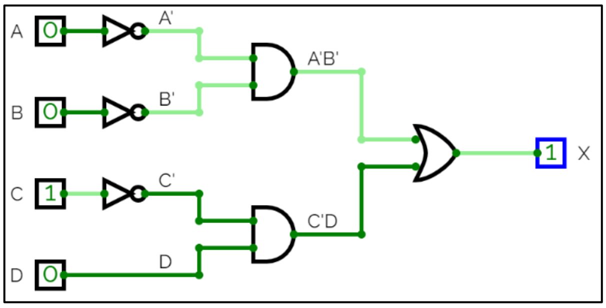
där De Morgans teorem ger oss att

$$(A + B)' = A'B'$$

Därmed gäller att

$$X = (A + B)' + C'D = A'B' + C'D$$

Slutligen ritar vi grindnätet:



Figur 2: Realisering av grindnät för X = A’B’ + C’D.

c) Vi börjar med att förenkla ekvationen så långt det går:

$$X = AB * AB' + C = A(B + B') + C,$$

där (B + B') kan strykas, då

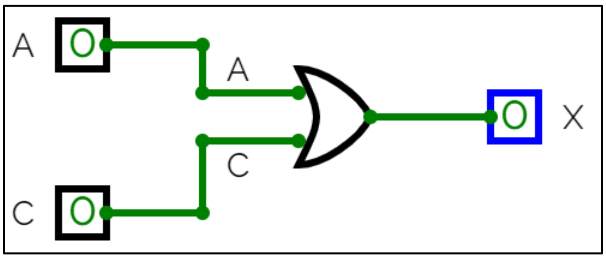
$$B + B' = 1 + 0 = 1 => A(B + B') = A * 1 = A$$

Därmed gäller att

$$X = A + C$$

Grindnätet kan alltså realiseras via en OR-grind med A och C som insignaler.

Slutligen ritar vi grindnätet:



Figur 3: Realisering av grindnät för ekvationen X = A + C.

d) Vi börjar med att förenkla ekvationen så långt det går:

$$X = AB + AB' + AC$$

Eftersom samtliga termer innehåller A kan ekvationen förenklas till följande:

$$X = A(B + B' + C),$$

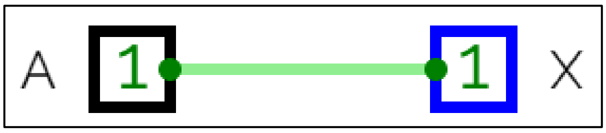
där (B + B' + C) kan strykas, då (B + B') är lika med 1:

$$B + B' + C = 1 + 0 + C = 1$$

Därmed gäller att

$$X = A$$

Därmed behövs inga grindar i detta fall; det räcker med att koppla insignal A direkt till X:



Figur 4: Realisering av "grindnät" för ekvationen X = A.

4. Härled en minimerad logisk ekvation för utsignal X ur nedanstående sanningstabell och realisera grindnätet.

ABC	X
000	1
001	0
010	1
011	0
100	0
101	0
110	1
111	1

Sanningstabell 1: Sanningstabell för uppgift 3.

Lösning

X = 1 för kombinationer ABC = 000, 010, 110 samt 111, vilket kan utryckas i en boolesk ekvation:

$$X = A'B'C' + A'BC' + ABC' + ABC$$

De två första termerna har A'C' gemensamt, medan de två andra termerna har AB gemensamt. Genom att bryta ut likheterna kan ovanstående ekvation förenklas till följande:

$$X = A'C'(B' + B) + AB(C' + C),$$

där

$$B' + B = 1 + 0 = 1$$

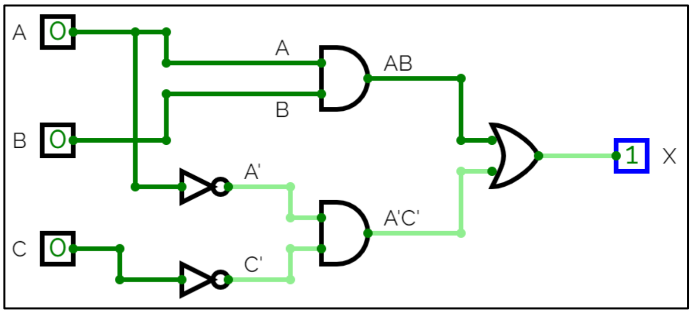
samt

$$C' + C = 1 + 0 = 1,$$

vilket innebär följande minimerade ekvation:

$$X = A'C' + AB$$

Slutligen ritar vi grindnätet:



Figur 5: Realisering av grindnät för ekvationen X = A'C' + AB.

5. Härled en minimerad logisk ekvation för utsignal X ur nedanstående sanningstabell och realisera grindnätet.

ABCD	X
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	0
0110	0
0111	0
1000	0
1001	1
1010	0
1011	1
1100	1
1101	0
1110	1
1111	0

Sanningstabell 2: Sanningstabell för uppgift 4.

Lösning

X = 1 för kombinationer ABCD = 0001, 0011, 1001, 1011, 1100 samt 1110, vilket kan utryckas i en boolesk ekvation:

$$X = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + ABC'D' + ABCD'$$

De två första termerna har A'B'D gemensamt, de två andra termerna har AB'D gemensamt och de två sista termerna har ABD' gemensamt. Genom att bryta ut likheterna kan ovanstående ekvation förenklas till följande:

$$X = A'B'D(C' + C) + AB'D(C + C') + ABD'(C' + C),$$

där

$$C' + C = 1 + 0 = 1,$$

vilket innebär följande minimerade ekvation:

$$X = A'B'D + AB'D + ABD'$$

De två första termerna har B'D gemensamt. Vi bryter ut detta och erhåller då följande:

$$X = B'D(A' + A) + ABD',$$

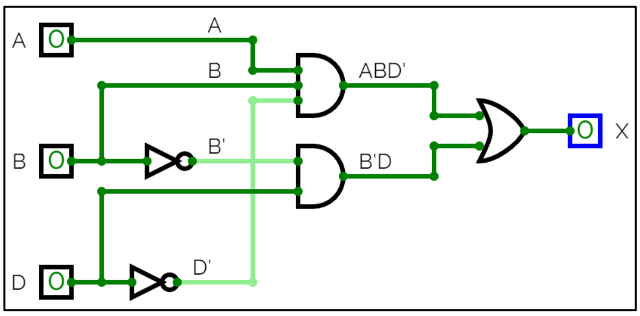
där

$$A' + A = 1 + 0 = 1,$$

vilket innebär följande minimerade ekvation:

$$X = B'D + ABD'$$

Slutligen ritar vi grindnätet:



Figur 6: Realisering av grindnät för ekvationen X = B'D + ABD'.

6. Rita upp en OR-grind med CMOS-transistorer och visa spänningsfallen i kretsen för samtliga kombinationer 00 – 11 av insignaler A och B.

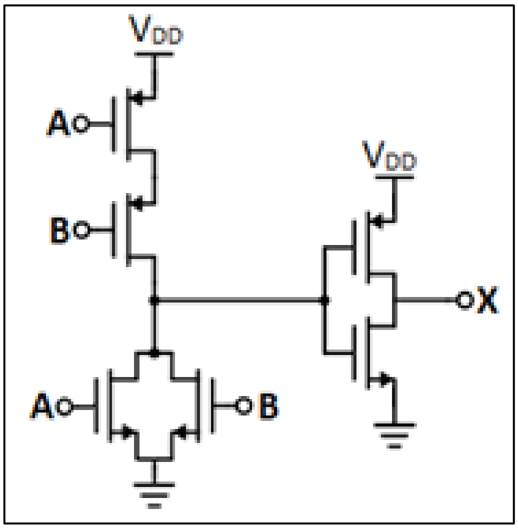
Lösning

Steg för att konstruera OR-grinden:

a) Placera NMOS-transistorerna i ett OR-mönster (parallellt), så att det nedre nätet leder om A eller B är hög.

b) Placera PMOS-transistorerna tvärtom, alltså i ett AND-mönster (seriellt), så att det övre nätet enbart leder om både A och B är låga.

c) Eftersom transistorswitchar inverterar i sin natur så har nu en NOR-grind konstruerats. Lägg till en NOT-grind på utgången för att invertera utsignalen och därigenom erhålla en OR-grind.

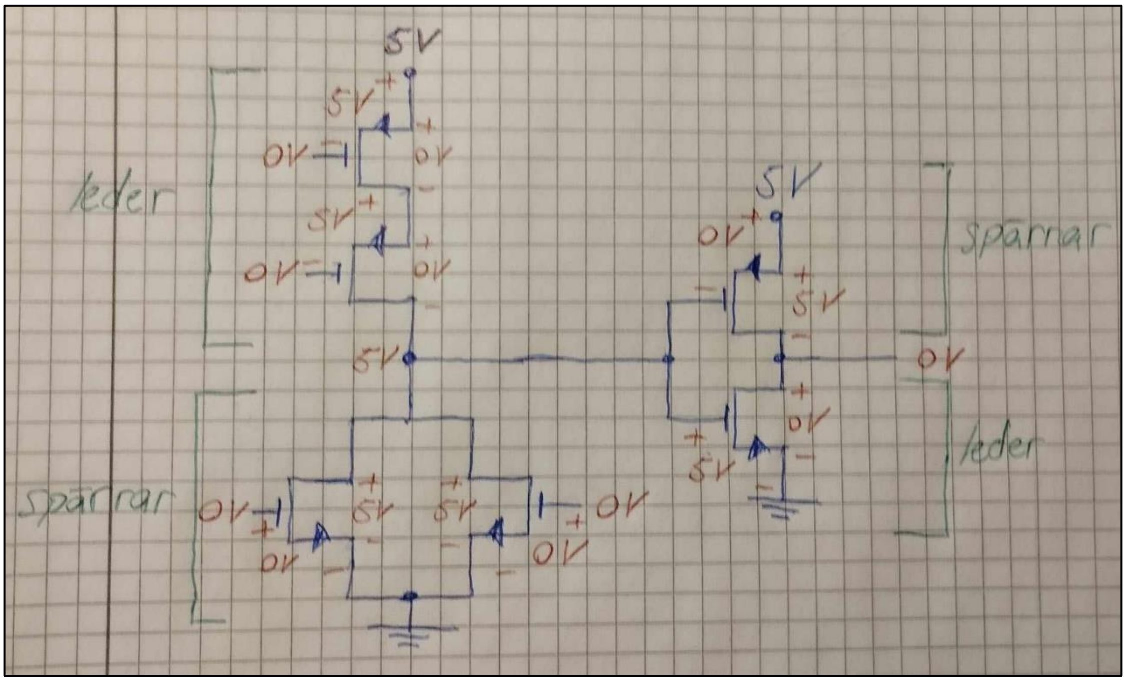


Figur 7: OR-grind konstruerad med CMOS-transistorer.

Vi antar att matningsspänningen V_{DD} är lika med 5 V, vilket motsvarar en logisk etta (och 0 V motsvarar en logisk nolla):

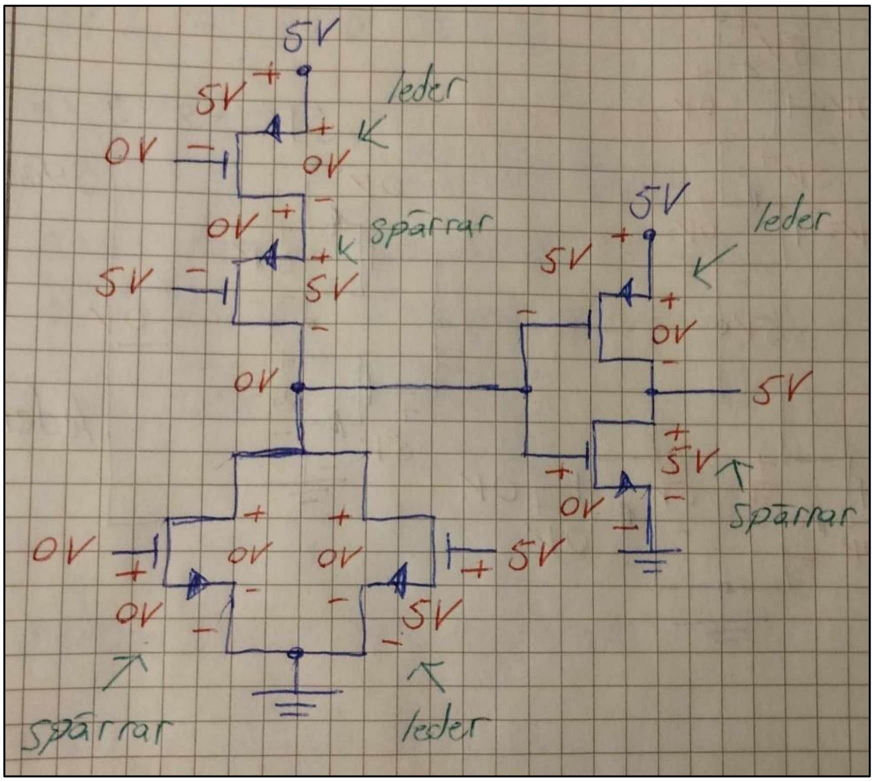
$$V_{DD} = 5\ V$$

Vi börjar med att rita ut spänningarna i kretsen för kombinationen AB = 00. Utsignal X blir i detta fall lika med 0:



Figur 8: Spänningsfall i OR-grinden för insignal AB = 00.

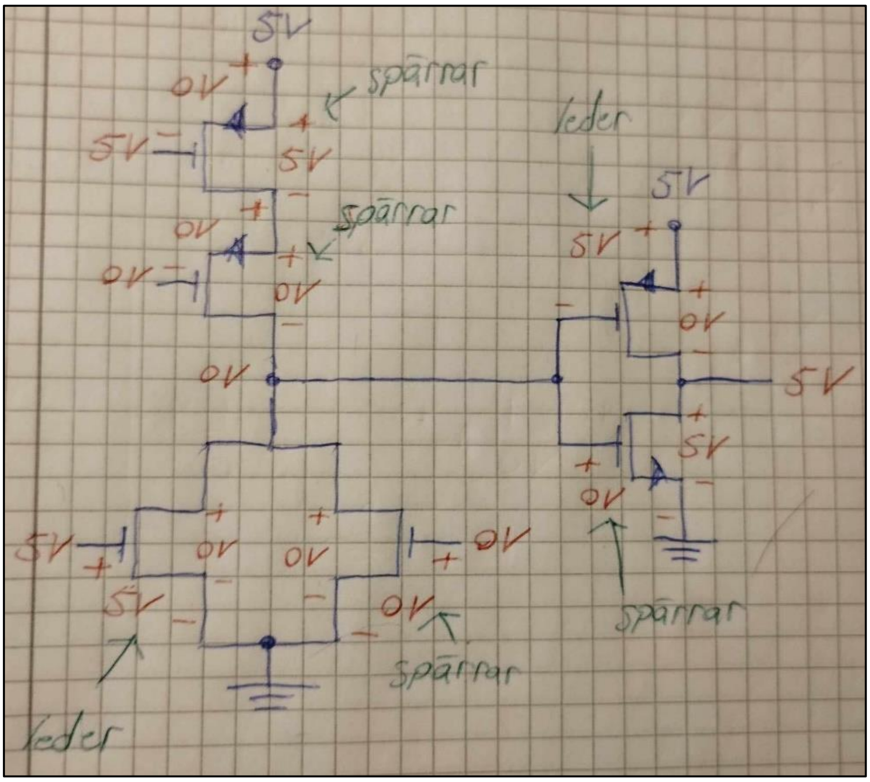
Vi ritar sedan ut spänningarna i kretsen för kombinationen AB = 01. Utsignal X blir i detta fall lika med 1:



Figur 9: Spänningsfall i OR-grinden för insignal AB = 01.

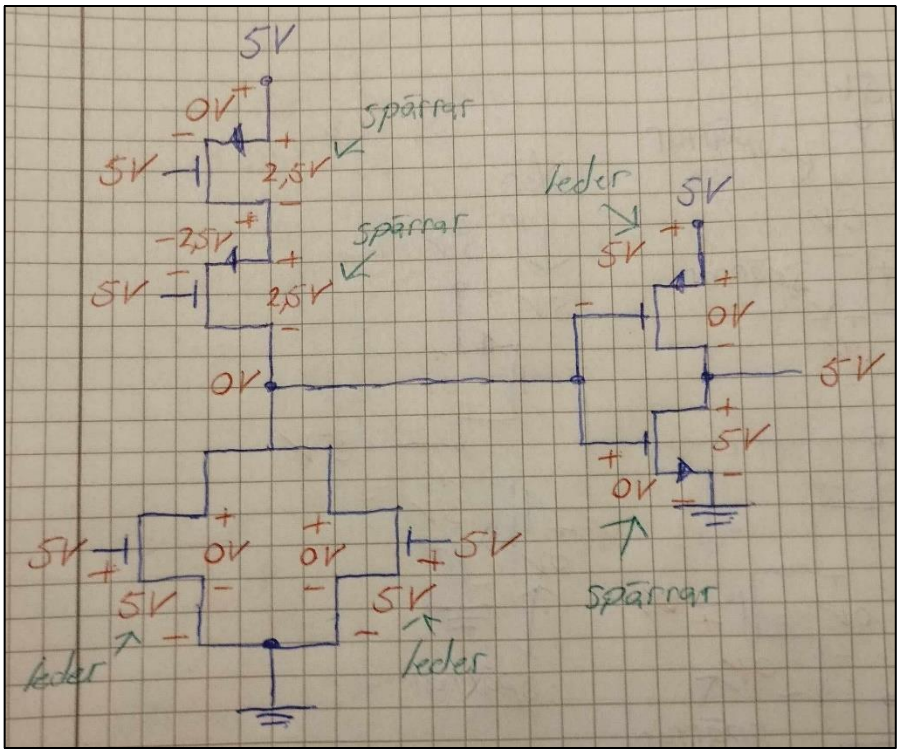
Vi ritar sedan ut spänningarna i kretsen för kombinationen AB = 10. Även i detta fall blir utsignal X lika med 1*.

*Den nedersta transistorn i det övre nätet spärrar, trots att insignal B är lika med 0, då spänningsfallet över den ovanstående transistorn blir 5 V när den spärrar.



Figur 10: Spänningsfall i OR-grinden för insignal AB = 10.

Slutligen ritar vi ut spänningarna i kretsen för kombinationen AB = 11. Även i detta fall blir utsignal X lika med 1:



Figur 11: Spänningsfall i OR-grinden för insignal AB = 11.