L13 – Typexempel med lösningsförslag

1. Spänningsfallet över en spole kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = 6\cos(100t)\,V,$$

där

- $u(t) =$ spänningsfallet över spolen vid tiden t,
- $t =$ tiden i sekunder.

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
b) Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 0{,}02\ s$ och tolka resultatet.

Lösning

Vi använder följande deriveringsregel för att lösa uppgiften:

$$\frac{d}{dx}[\cos ax] = -a * \sin ax$$

a) Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -6 * 100 * \sin(100t) = -600\sin(100t)\ \ V/s$$

b) Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 0{,}02\ s$, dvs. $u'(0{,}02)$:

$$u'(0{,}02) = -600\sin(100 * 0{,}02) = -600 * \sin(2) \approx -545{,}6\,V/s$$

Spänningen avtar vid tiden $t = 0{,}02\ s$, då $u'(0{,}02) < 0$.

2. Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0{,}2t}),$$

där

- $u(t) =$ spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t,
- $t =$ tiden i sekunder.

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
b) Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 3\ s$.
c) Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 3\ s$.

Lösning

a) Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

a) Vi utvecklar $u(t)$:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0{,}2t}) = 15 - 15e^{-0{,}2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -0{,}2 * (-15e^{-0{,}2t}) = 3e^{-0{,}2t}\ V/s$$

b) Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 3\ s$, dvs. $u'(3)$:

$$u'(3) = 3e^{-0{,}2*3} = 3e^{-0{,}6} \approx 1{,}65\ V/s$$

c) Vi beräknar $u''(t)$ genom att derivera $u'(t)$:

$$u''(t) = -0{,}2 * 3e^{-0{,}2t} = -0{,}6e^{-0{,}2t}\ V/s^2$$

Vi beräknar sedan $u''(3)$:

$$u''(3) = -0{,}6e^{-0{,}2*3} = -0{,}6e^{-0{,}6} \approx -0{,}33\ V/s^2$$

Spänningsökningen minskar, då $u''(3) < 0$.

3. En viss förstärkare kan beskrivas med följande formel:

$$G(x) = 20log_{10}(x+3)\ dB,$$

där

- $G(x) =$ förstärkningen,
- $x =$ given insignal (exempelvis en spänning eller ström).

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $G'(x)$.
b) Beräkna för vilket värde på x som förstärkningen $G(x) = 1\ dB$.
c) Beräkna förstärkningshastigheten då $G(x) = 1\ dB$.

Lösning

Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften:

$$\frac{d}{dx}[\log_{10} x] = \frac{1}{\ln 10 * x}$$

a) Vi bestämmer derivatan $G'(x)$ enligt nedan:

$$G'(x) = 20 * \frac{1}{\ln 10 * (x+3)} = \frac{20}{\ln 10 * (x+3)}$$

b) Vi beräknar för vilket värde på x som förstärkningen $G(x)$ är lika med 1:

$$G(x) = 20log_{10}(x+3) = 1$$

Vi börjar med att dividera med 20 i båda led:

$$log_{10}(x+3) = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

För att få bort log ur vänsterledet förlänger vi med basen 10 i båda led, då

$$10^{log_{10}(x+3)} = (x+3) * 10^{log_{10}} = x+3$$

Ovanstående funktion kan därmed skrivas om till följande:

$$x + 3 = 10^{0{,}05}$$

Slutligen subtraherar vi med 3 i respektive led för att beräkna x:

$$x = 10^{0{,}05} - 3 \approx -1{,}9$$

c) Vi beräknar sedan $G'(-1{,}9)$ för att bestämma förstärkningshastigheten när $G(x) = 1$:

$$G'(-1{,}9) = \frac{20}{\ln 10 * (-1{,}9+3)} \approx 7{,}74\ dB/s$$