L10 – Typexempel med lösningsförslag

1. Omvandla följande vinklar till radianer:
a) 45°
b) 90°
c) 270°
d) -60°
e) 135°

Lösning

Vi använder följande formel för samtliga uträkningar:

$$v_{rad} = v_{deg} * \frac{\pi}{180°},$$

där v_{rad} är vinkeln i radianer och v_{deg} är vinkeln i grader.

Ovanstående formel kan ses som en funktion $f(x)$, där vinkeln i radianer $f(x)$ utgör en funktion av vinkeln i grader x:

$$f(x) = x * \frac{\pi}{180}$$

a) Vi omvandlar vinkeln 45° till radianer genom att beräkna $f(45)$:

$$f(45) = 45 * \frac{\pi}{180} = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

b) Vi omvandlar vinkeln 90° till radianer genom att beräkna $f(90)$:

$$f(90) = 90 * \frac{\pi}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

c) Vi omvandlar vinkeln 270° till radianer genom att beräkna $f(270)$:

$$f(270) = 270 * \frac{\pi}{180} = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$$

d) Vi omvandlar vinkeln -60° till radianer genom att beräkna $f(-60)$:

$$f(-60) = -60 * \frac{\pi}{180} = -\frac{60\pi}{180} = -\frac{\pi}{3}$$

e) Vi omvandlar vinkeln 135° till radianer genom att beräkna $f(135)$:

$$f(135) = 135 * \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

2. Omvandla följande vinklar till grader:
a) π
b) $\pi/5$
c) $4\pi/3$
d) -2
e) $1{,}5$

Vi använder tidigare följande formel för att omvandla en vinkel från grader till radianer:

$$v_{rad} = v_{deg} * \frac{\pi}{180°},$$

där v_{rad} är vinkeln i radianer och v_{deg} är vinkeln i grader.

Ovanstående formel kan omvandlas till

$$v_{deg} = v_{rad} * \frac{180°}{\pi}$$

Denna formel kan ses som en funktion $f(x)$, där vinkeln i grader $f(x)$ utgör en funktion av vinkeln i radianer x:

$$f(x) = x * \frac{180}{\pi}$$

a) Vi omvandlar vinkeln π till grader genom att beräkna $f(\pi)$:

$$f(\pi) = \pi * \frac{180}{\pi} = \frac{180\pi}{\pi} = 180°$$

b) Vi omvandlar vinkeln $\pi/5$ till grader genom att beräkna $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5} * \frac{180}{\pi} = \frac{180\pi}{5\pi} = 36°$$

c) Vi omvandlar vinkeln $4\pi/3$ till grader genom att beräkna $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} * \frac{180}{\pi} = \frac{4 * 180\pi}{3\pi} = 240°$$

d) Vi omvandlar vinkeln -2 till grader genom att beräkna $f(-2)$:

$$f(-2) = -2 * \frac{180}{\pi} = -\frac{2 * 180}{\pi} \approx -114{,}6°$$

e) Vi omvandlar vinkeln 1,5 till grader genom att beräkna $f(1{,}5)$:

$$f(1{,}5) = 1{,}5 * \frac{180}{\pi} = \frac{1{,}5 * 180\pi}{\pi} \approx 86{,}0°$$

3. Sinuskurvan för en växelspänning visas nedan. Bestäm följande:

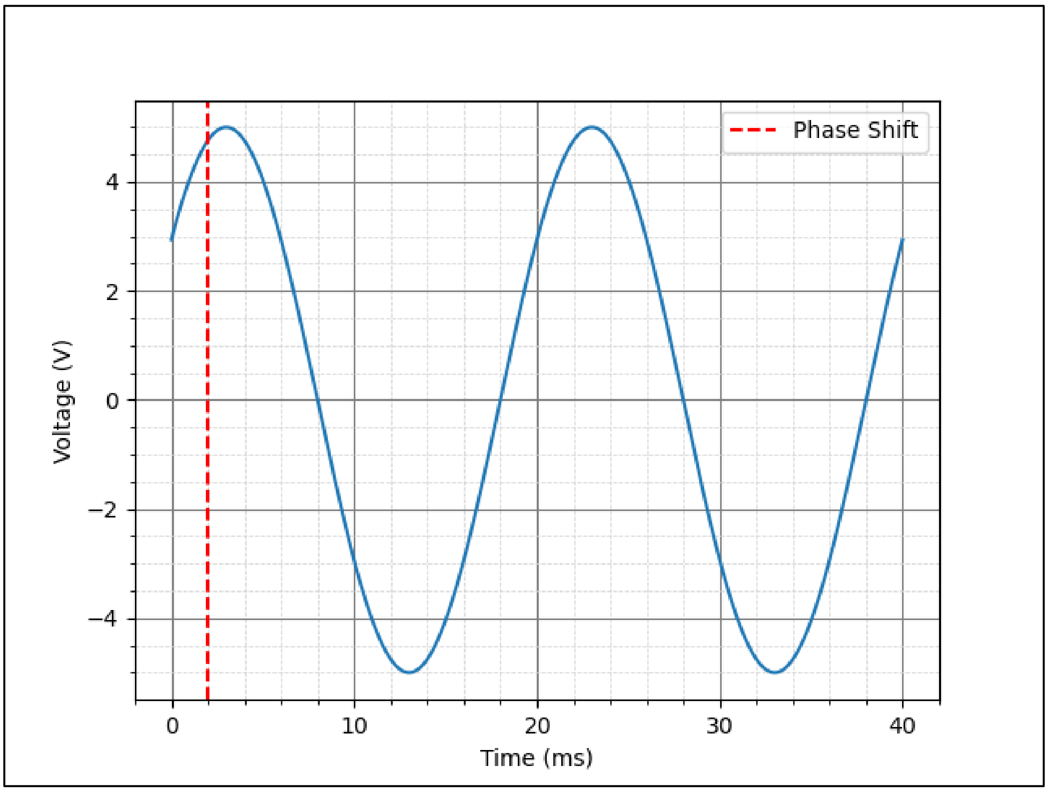
a) Spänningens amplitud $|U|$ i V.

b) Spänningens frekvens f i Hz.

c) Spänningens vinkelhastighet w i rad/s.

d) Spänningens fas φ i radianer.

e) Spänningens ekvation på formen $u(t) = |U| \sin(wt + \delta)$.



Figur 1: Växelspänning, vars ekvation ska bestämmas.

Lösning

a) Genom att analysera grafen ser vi att växelspänningens toppvärde är 5 V. För amplituden $|U|$ gäller därmed att

$$|U| = 5\ V$$

b) Genom att analysera grafen ser vi att växelspänningen upprepas var tjugonde millisekund, se exempelvis vid tiden $t_1 = 0$ samt $t_2 = 20\ ms$. Vi kan därmed beräkna periodtiden T:

$$T = \Delta t = t_2 - t_1 = 20m - 0 = 20\ ms$$

Eftersom frekvensen f är inversen till periodtiden T gäller därmed att

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20m} = \frac{1}{0{,}02} = 50\ Hz$$

c) Spänningens vinkelhastighet w beräknas enkelt via beräknad frekvens f:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi\ rad/s$$

d) Genom att analysera grafen ser vi att grafens stegvärde i x-led är värde 2 ms. Eftersom periodtiden $T = 20\ ms$ motsvarar stegvärdet $\frac{2m}{20m} = 10\ \%$ av ett varv. Eftersom ett varv motsvarar 2π radianer gäller att stegvärdet motsvarar $\frac{\pi}{5}$ radianer, då

$$\frac{2m}{20m} * 2\pi = \frac{2 * \pi}{10} = \frac{\pi}{5}\ rad$$

Vi noterar också i grafen att växelspänningen befinner sig ett steg, vilket motsvarar 2 ms eller $\frac{\pi}{5}$ radianer, ”före” i x-axeln. Som exempelvis ser vi att minivärdet inte nås efter halva periodtiden $\frac{T}{2} = 10\ ms$, utan före. För fasen δ gäller därmed att

$$\delta = \frac{\pi}{5}\ rad$$

e) Vi lägger till våra beräknade värden i given formel:

$$u(t) = |U|\sin(wt + \delta) = 5\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{5}\right)\ V$$

4. En växelspänning har amplituden 2 V, frekvensen 10 Hz samt fasen $-90°$.

a) Bestäm växelspänningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.

b) Rita växelspänningens sinuskurva över en period T.

Lösning

a) Formeln för en växelspänning $u(t)$ är följande:

$$u(t) = |U|\sin(wt + \delta),$$

där $|U|$ är amplituden (toppvärdet), w är vinkelhastigheten, t är tiden och δ är fasen.

Sinuskurvans amplitud/toppvärde $|U|$ är enligt uppgift lika med 2 V:

$$|U| = 2\ V$$

Sinuskurvans frekvens f är enligt uppgift lika med 10 Hz:

$$f = 10\ Hz$$

Motsvarande vinkelhastighet w är därmed lika med $20\pi\ rad/s$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 10 = 20\pi\ rad/s$$

Fasen δ är enligt uppgift lika med $-90°$, vilket motsvarar $-\pi/2\ rad$, då

$$\delta_{rad} = \delta_{deg} * \frac{\pi}{180°} = -90 * \frac{\pi}{180} = -\frac{90\pi}{180} = -\frac{\pi}{2}\ rad$$

För växelspänningen $u(t)$ gäller därmed följande:

$$u(t) = 2\sin\left(20\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Vi utgår från sinuskurvans attribut. Eftersom frekvensen f är lika med 10 Hz gäller att periodtiden T är 100 ms, då

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10} = 0{,}1\ s = 100\ ms$$

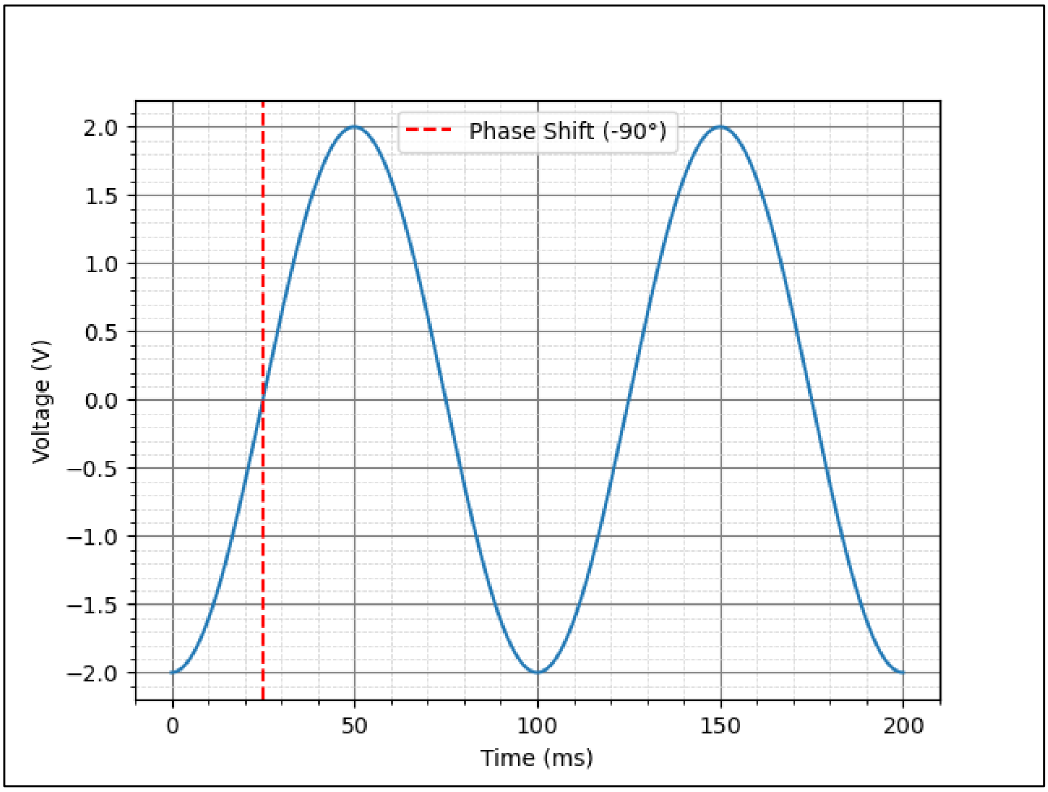
Vi ska då rita ut en sinuskurva som repeteras var 100:e millisekund. För en sinuskurva gäller följande:

- Spänningen är lika med 0 i början av varje varv samt efter ett halvt varv.
- Spännings maximivärde $|U| = 2\ V$ nås efter en fjärdedel av ett varv.
- Spännings minimivärde $-|U| = -2\ V$ nås efter tre fjärdedelar av ett varv.

Fasen δ är lika med $-90°$, vilket innebär att kurvan är $90°/360° = 1/4$, alltså en fjärdedel av ett varv ”efter” i x-axeln. Detta motsvarar 25 ms, då

$$\frac{T}{4} = \frac{100m}{4} = 25\ ms$$

Vi ritar därmed upp sinuskurvan med periodtiden $T = 100\ ms$, där sinuskurvan ”börjar” när tiden $T = 25\ ms$:



*Figur 2: Växelspänningen u(t) = 2sin(2π*10t + π/2) V.*

5. Ekvationen för en växelspänning $u(t)$ visas nedan:

$$u(t) = 4\sin(40\pi t + \delta)$$

Beräkna fasen δ om spänningen $u(t) = 3\ V$ vid tiden $t = 30\ ms$.

Lösning

Vi kan skriva en ekvation utefter ovanstående uppgifter. Eftersom frekvensen f mäts i Hz i vanlig ordning beräknar vi med tiden t i sekunder:

$$u(0.03) = 4\sin(40\pi * 0.03 + \delta) = 3,$$

som kan utvecklas till

$$4\sin(1{,}2\pi + \delta) = 3$$

Genom att dividera med 4 i respektive led kan ovanstående ekvation omvandlas till

$$\sin(1{,}2\pi + \delta) = 0{,}75$$

Eftersom sinusvärden har två rötter sätter använder vi beteckningen x:

$$x = 1{,}2\pi + \delta$$

Ovanstående ekvation kan då skrivas om till följande:

$$\sin(x) = 0{,}75$$

Via $arcsin$ kan vi sedan beräkna rötterna x_1 samt x_2:

$$x_1 = \sin^{-1} 0{,}75 \approx 0{,}85\, rad$$

$$x_2 = \pi - \sin^{-1} 0{,}75 \approx 2{,}29\, rad$$

Via de beräknade rötterna x_1 samt x_2 kan vi sedan beräkna motsvarande faser δ_1 samt δ_2. Vi börjar mer att beräkna δ_1:

$$x_1 = 1{,}2\pi + \delta_1,$$

vilket innebär att

$$\delta_1 = x_1 - 1{,}2\pi \approx 0{,}85 - 1{,}2\pi \approx -2{,}92\, rad$$

Vi beräknar sedan δ_2:

$$x_2 = 1{,}2\pi + \delta_2,$$

vilket innebär att

$$\delta_2 = x_2 - 1{,}2\pi \approx 2{,}29 - 1{,}2\pi \approx -1{,}48\, rad$$

Vi kontrollräknar sedan våra svar. Vi börjar med δ_1:

$$u(0.03) = 4\sin(40\pi * 0.03 - 2{,}92) \approx 4\sin 0{,}85 = 3 => OK$$

Vi testar sedan med δ_2:

$$u(0.03) = 4\sin(40\pi * 0.03 - 1{,}48) \approx 4\sin 2{,}29 = 3 => OK$$