

Övningar, Exponentialfunktioner och Logaritmer

Exempel:

Lös ekvationen $1,2^x = 46$

Svara med 3 värdesiffror.

Lösning:

Ekvation:	$1,2^x = 46$
Skriv 1,2 som en 10-potens och 46 som en 10-potens	$(10^{\lg 1,2})^x = 10^{\lg 46}$
Skriv vänsterledet utan parentes. Du minns väl regeln $(a^m)^n = a^{mn}$	$10^{x \cdot \lg 1,2} = 10^{\lg 46}$
Basen är 10 i både vänster och höger led. Vänstra och högra ledet är lika. Då måste exponenterna vara lika!	$x \cdot \lg 1,2 = \lg 46$
Dela med $\lg 1,2$ på båda sidor	$x = \lg 46 / \lg 1,2$
Beräkna ett närmevärde på dosan Avrunda till 3 värdesiffror.	$x \approx 20,999$ $x \approx 21,0$ Svar: $x \approx 21,0$

Exempel:

Lös ekvationen $5 \cdot 1,2^{2x} = 46$

Svara med 2 värdesiffror.

Lösning:

Ekvation:	$5 \cdot 1,2^{2x} = 46$
Dela med 5 på båda sidor:	$1,2^{2x} = 9,2$
Skriv 1,2 som en 10-potens och 9,2 som en 10-potens	$(10^{\lg 1,2})^{2x} = 10^{\lg 9,2}$
Skriv vänsterledet utan parentes. Använd regeln $(a^m)^n = a^{mn}$	$10^{2x \cdot \lg 1,2} = 10^{\lg 9,2}$
Samma bas i vänster och höger led.	$2x \cdot \lg 1,2 = \lg 9,2$

Exponenterna är lika!	
Lös ut x (Dela med $2 \cdot \lg 1,2$ på båda sidor)	$x = \frac{\lg 9,2}{2 \cdot \lg 1,2}$
Beräkna ett närmevärde Avrunda till 2 värdesiffror.	$x \approx 6,086$ $x \approx 6,1$ <p>Svar: $x \approx 6,1$</p>

Lösning med naturliga logaritmer \ln med basen e

Exempel:

Lös ekvationen $1,2^x = 46$
Svara med 3 värdesiffror.

Lösning:

Ekvation:	$1,2^x = 46$
Skriv 1,2 som en potens av talet e och 46 som en potens av talet e	$(e^{\ln 1,2})^x = e^{\ln 46}$
Skriv vänsterledet utan parentes. Du minns väl regeln $(a^m)^n = a^{mn}$	$e^{x \cdot \ln 1,2} = e^{\ln 46}$
Basen är e i både vänster och höger led. Vänstra och högra ledet är lika. Då måste exponenterna vara lika!	$x \cdot \ln 1,2 = \ln 46$
Dela med $\ln 1,2$ på båda sidor	$x = \ln 46 / \ln 1,2$
Beräkna ett närmevärde på dosan Avrunda till 3 värdesiffror.	$x \approx 20,999$ $x \approx 21,0$ <p>Svar: $x \approx 21,0$</p>

Övning:

Med hjälp av logaritmer kan vi lösa följande typ av problem:

Jag sätter in 400 kr på banken mot 7% ränta. Hur länge skall pengarna stå inne för att de skall ha vuxit till 1000 kr? Lösningen blir: Om y är kapital efter x år får vi sambandet

$$y = 400 \cdot 1.07^x$$

Vi kan naturligtvis genom prövning finna att

$x = 13 \Rightarrow y \approx 964$ och $x = 14 \Rightarrow y \approx 1031$ så att x bör ligga mellan 13 och 14.

Matematiskt kan vi lösa ekvationen $400 \cdot 1.07^x = 1000$ genom att först dela den med 400 och sedan ta logaritmen av båda sidor dvs

$$400 \cdot 1.07^x = 1000 \Leftrightarrow 1.07^x = \frac{1000}{400} \Leftrightarrow 1.07^x = 2.5 \Leftrightarrow \lg(1.07^x) = \lg 2.5 \text{ (enl. iii) ovan}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \lg 1.07 = \lg 2.5 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 2.5}{\lg 1.07} \approx 13.54$$

Drygt 13.5 år skall alltså kapitalet stå inne.

Övningar:

- Lös ekvationerna: (Svara dels exakt, dels med tre gällande siffror)
 $a. 1.07^x = 1.5$ $b. 320 \cdot 1.10^x - 50 = 560$ $c. 210 \cdot 0.83^{3x} = 107$
 $\frac{\lg(1.5)}{\lg(1.07)} \approx 5.99$ $\frac{\lg(61/32)}{\lg(1.1)} \approx 6.77$ $\frac{\lg(107/210)}{\lg(0.83) \cdot 3} \approx 1.21$
- Hur många år skall 500 kr stå inne på ett konto för att man skall ha 750 kr, om räntesatsen är 3.1%?
 $\frac{\lg(1.5)}{\lg(1.031)} \approx 13.28 \text{ år}$
- En bakteriekultur växer exponentiellt så att 500 st. efter 12 dygn vuxit till 860. Efter hur lång tid har man fått 1000 st. bakterier?
15.34 dygn
- Halveringstiden för ett radioaktivt preparat är 36 dygn. Efter hur lång tid har mängden minskat till 25% av det ursprungliga?
ytterligare 36 dygn
- Halveringstiden för ett radioaktivt preparat är 42 sekunder. Efter hur lång tid har mängden minskat till 20% av det ursprungliga?
97.5 s
- En person sätter in 200 kr på banken 31/12 2000 och ytterligare 400 kr efter ett år. Den 1/1 år 2003 kan hon lyfta 624.18 kr. Hur många procents ränta fick hon?
3.0 %

Logaritmer Lösningar

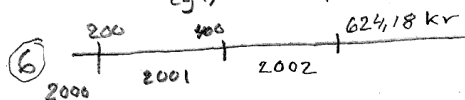
① a) $1,07^x = 1,5$
 $\lg 1,07^x = \lg 1,5$
 $x \lg 1,07 = \lg 1,5$
 $x = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,07} = \frac{0,176}{0,029} \approx 6,0$

b) $320 \cdot 1,10^x - 50 = 560$
 $320 \cdot 1,10^x = 610$
 $1,10^x = \frac{610}{320}$
 $1,10^x \approx 1,9$
 $\lg 1,10^x = \lg 1,9$
 $x = \frac{\lg 1,9}{\lg 1,1} \approx \frac{0,279}{0,041} \approx 6,8$

c) $210 \cdot 0,83^{3x} = 107$
 $0,83^{3x} = \frac{107}{210}$
 $\lg 0,83^{3x} = \lg \left(\frac{107}{210} \right)$
 $3x \cdot \lg 0,83 = \lg \left(\frac{107}{210} \right)$
 $x = \frac{\lg \left(\frac{107}{210} \right)}{3 \cdot \lg 0,83} \approx \frac{-0,29}{3 \cdot (-0,08)} \approx 1,21$

② $750 = 500 \cdot 1,031^x$
 $1,5 = 1,031^x$
 $\lg 1,5 = x \lg 1,031$
 $x = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,031} \approx 13,28 \text{ år}$

③ Beräkna tillväxtfaktor
 $500 \cdot x^{12} = 860$
 $x^{12} = \frac{860}{500}$
 $x^{12} = 1,72 \quad x \approx 1,046$
 $1000 = 500 \cdot 1,046^x$
 $2 = 1,046^x$
 $x = \frac{\lg 2}{\lg 1,046} \approx \frac{0,3}{0,0195} \approx 15,38$



$(200(r+1) + 400)(r+1)$
 efter 2 år

efter 2 år
 $200(r+2)^2 + 400(r+1) = 624,18 \text{ kr}$

$200r^2 + 400r + 200 + 400r + 400 = 624,18$

④ $0,5 = 1 \cdot x^{36}$
 $x = 0,5^{1/36}$
 $x \approx 0,981$ minskning

$0,25 = 1 \cdot 0,981^x$
 $\lg 0,25 = x \cdot \lg 0,981$
 $x = \frac{\lg 0,25}{\lg 0,981} \approx \frac{-0,6}{-0,003} \approx 72$
 Dvs $72 - 36 = 36$
 efter ytterligare 36 dygn

⑤ $0,5 = 1 \cdot x^{42}$
 $x = 0,5^{1/42} \approx 0,9836$ minskn.

$0,2 = 1 \cdot 0,9836^x$
 $x = \frac{\lg 0,2}{\lg 0,9836} \approx \frac{-0,6989}{-0,003} \approx 97,35$

$r^2 + 4r - 24,18 = 0$

$r = -2 \pm \sqrt{4,1209}$

$r = -2 \pm 2,03 \quad r = 0,03$
3%

Övningar, decibel

- a) Hur många dB mindre än 1 W är 1 mW?
- b) Hur många dB större än 10 W är 1000 W?
- c) Hur många dB större än 3 000 W är 10 000 W?
- d) Du har en 300 W förstärkare till ditt ljudsystem. Du vill ha en förstärkare som är 13 dB starkare. Hur många W behöver du?
- e) En audioförstärkare har max förstärkning $G=40$ dB. Hur många gånger förstärkning motsvarar det?
- f) En WiFi-router har uteffekten 200 mW. Ange uteffekten i dBm.
- g) Två bullerkällor med 70 dB vardera sätts bredvid varandra. Bestäm totala ljudnivån i dB.

Svar:

- a) 30 dB mindre (-30 dB)
- b) 20 dB
- c) 5 dB
- d) 6000 W
- e) 10000 ggr
- f) 23 dBm
- g) 73 dB