L16 – Typexempel med lösningsförslag

Former av komplexa tal

Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- x utgör den reella delen av talet,
- y utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

- $|z|$ = absolutbeloppet (längden) => $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- δ = talets vinkel (fasvinkeln) => $\delta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \pm k\pi$ för $k = 0, 1, 2 \ldots n$.

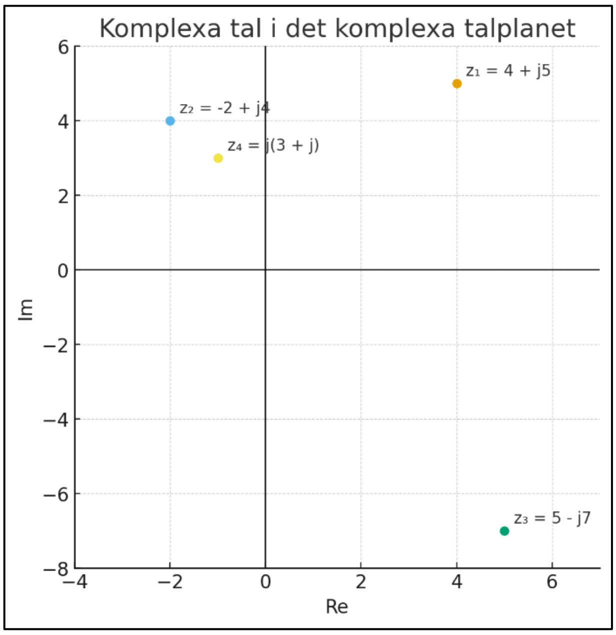
Notering: Vinkeln δ kan vara negativ eller ligga i andra kvadranter. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

1. Markera följande komplexa tal som punkter i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del). Beräkna också absolutbeloppet $|z|$ och skriv talet i polär form ($|z| \angle \delta$), med fasvinkeln i radianer. Avrunda till en decimal.

a) $z_1 = 4 + j5$
b) $z_2 = -2 + j4$
c) $z_3 = 5 - j7$
d) $z_4 = j(3 + j)$

Lösning

Samtliga komplexa tal $z_1 - z_4$ har markerats i det komplexa talplanet nedan:



Figur 1: $z_1 - z_4$ markerade i det komplexa talplanet.

Elteknisk matematik

a) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_1|$ med Pythagoras sats:

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_1 med tan^{-1}:

$$\delta_1 = tan^{-1}\frac{5}{4} \pm k\pi \approx 0{,}9 \pm k\pi \ \ rad \approx 51{,}3° \pm k * 180°$$

Eftersom z_1 ligger i första kvadranten $(0° \leq \delta_1 \leq 90°)$ är den beräknade fasvinkeln δ_1 korrekt.

Därmed gäller att

$$z_1 = 4 + j5 \approx 6{,}4 \angle 0{,}9 \text{ rad}$$

b) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_2|$ med Pythagoras sats:

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_2 med tan^{-1}:

$$\delta_2 = tan^{-1}\frac{4}{-2} \pm k\pi \approx -1{,}1 \pm k\pi\, rad \approx -63{,}4° \pm k * 180°$$

Eftersom z_2 ligger i andra kvadranten $(90° \leq \delta_2 \leq 180°)$ adderar vi $\pi = \ 180°$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_2 \approx -1{,}1 + 1 * \pi \approx 2{,}0\, rad \approx 116{,}6°$$

Därmed gäller att

$$z_2 = -2 + j4 \approx 4{,}5 \angle 2{,}0 \text{ rad}$$

c) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_3|$ med Pythagoras sats:

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{60} \approx 8{,}6$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_3 med tan^{-1}:

$$\delta_3 = tan^{-1}\frac{-7}{5} \pm k\pi \approx -1{,}0 \pm k\pi\, rad \approx -54{,}5° \pm k * 180°$$

Eftersom z_3 ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta_3 \leq 360°)$ samt att $-54{,}5° = 360° - 54{,}5° = 305{,}5°$ är den beräknade fasvinkeln δ_3 korrekt.

Därmed gäller att

$$z_3 = 5 - j7 \approx 8{,}6 \angle -1{,}0$$

d) Först och främst utvecklar vi det givna uttrycket:

$$z_4 = j(3 + j) = j3 + j^2$$

Enligt definitionen av imaginära tal gäller att $j = \sqrt{-1}$, vilket innebär att

$$j^2 = -1$$

Därmed kan z_4 skrivas om till

$$z_4 = j3 + (-1),$$

Vilket är ekvivalent med

$$z_4 = -1 + j3$$

Vi beräknar absolutbeloppet $|z_4|$ med Pythagoras sats:

$$|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}2$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_4 med tan^{-1}:

$$\delta_4 = tan^{-1}\frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1{,}2 \pm k\pi\ rad \approx -71{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom z_4 ligger i andra kvadranten ($90° \leq \delta_4 \leq 180°$) adderar vi $\pi = 180°$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_4 \approx -1{,}2 + 1 * \pi \approx 1{,}9\ rad \approx 108{,}4°$$

Därmed gäller att

$$z_4 = -1 + j3 \approx 3{,}2 \angle 1{,}9 \text{ rad}$$

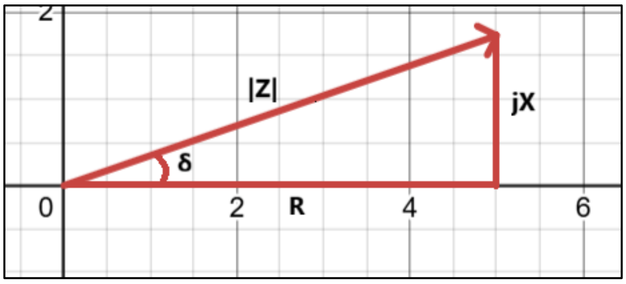
2. Inom elektroteknik är impedans $Z = R + jX$ ett motstånd bestående av en resistiv respektive reaktiv del:

- Den resistiva delen R är ej frekvensberoende och utgörs av motstånd från resistorer. R är reell och ligger i det reella talplanet (x-led).
- Den reaktiva delen X är frekvensberoende och utgörs av motstånd från kondensatorer och spolar. X är imaginär (därav j:et) och ligger i det imaginära talplanet (y-led).

Omvandla impedansen $Z = 10\angle\frac{\pi}{3}\ k\Omega$ till rektangulär form.

Lösning

Enligt uppgift är impedansens absolutbelopp $|Z| = 10\ k\Omega$. Vi känner också till impedansens fasvinkel δ, vilket medför att impedansen kan visualiserar som en triangel såsom visas nedan:



Figur 2: Impedansen Z visualiserad som en triangel.

Som synes kan den resistiva delen R samt den reaktiva delen jX beräknas trigonometriskt (via cosinus samt sinus).

Vi beräknar först den resistiva delen R med cosinus:

$$\cos\delta = \frac{R}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$R = |Z| * \cos\delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att $R = 5\ k\Omega$, då

$$R = 10 * \cos\frac{\pi}{3} = 5\ k\Omega$$

Vi beräknar sedan den reaktiva delen X med sinus:

$$\sin\delta = \frac{X}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$X = |Z| * \sin\delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att $X \approx 8{,}7\ k\Omega$, då

$$X = 10 * \sin\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3}\ k\Omega \approx 8{,}7\ k\Omega$$

Därmed kan impedansen Z skrivas på rektangulär form som visas nedan:

$$Z \approx 5 + j8{,}7\ k\Omega$$

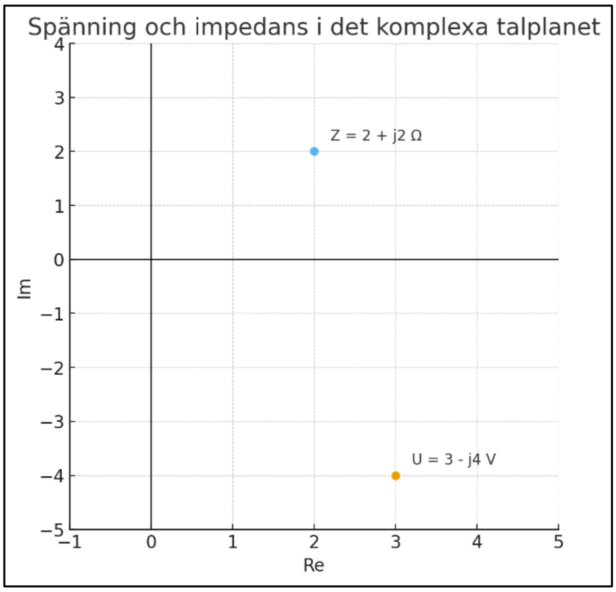
3. En krets matas med spänningen $U = 3 - j4\ V$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2\ \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning

För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 3: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U, vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ V$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med tan^{-1}:

$$\delta_u = tan^{-1}\frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0{,}9 \pm k\pi\ \ rad \approx -53{,}1° \pm k * 180°$$

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta_3 \leq 360°)$ samt att $-53{,}1° = 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle - 0{,}9\ rad\ V$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z, vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\ \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med tan^{-1}:

$$\delta_z = tan^{-1}\frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0{,}8 \pm k\pi\ \ rad = 45° \pm k * 180°$$

Eftersom Z ligger i första kvadranten $(0° \leq \delta_z \leq 90°)$ är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2{,}8 \angle\ 0{,}8\ \text{rad}\ \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle - 0{,}9}{2{,}8 \angle\ 0{,}8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2{,}8} \angle\ (-0{,}9 - 0{,}8) \approx 1{,}8 \angle - 1{,}7\ rad\ A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1{,}8 \angle - 1{,}7\ rad\ A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1{,}8\ A$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1{,}7\ rad\ \approx -98{,}1°$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form såsom visades i uppgift 2. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1{,}8 * \cos(-1{,}7) = -0{,}25\ A$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1{,}8 * \sin(-1{,}7) \approx -1{,}75\ A$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0{,}25 - j1{,}75\ A$$