Lösningsförslag till övningsdugga 2

Uppgift 1 (1,0 poäng)

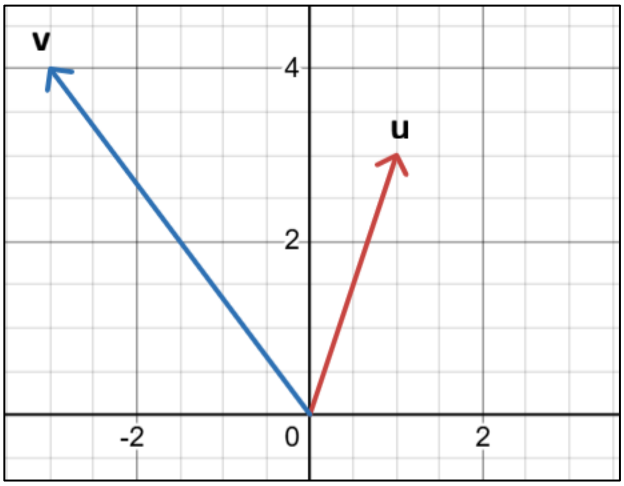
Du har två vektorer $u = (1; 2)$ samt $v = (-3; 4)$.

a) Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
b) Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
c) Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v.
d) Beräkna en tredje vektor $w = 2u - v$.

Lösning

a) Vi ritar upp vektorerna i ett koordinatsystem:

- Vektor $u = (1; 2)$ har x-koordinat 1 samt y-koordinat 2.
- Vektor $v = (-3; 4)$ har x-koordinat -3 samt y-koordinat 4.



Figur 1: Vektorer u samt v i ett koordinatsystem.

b) Vektorernas absolutbelopp är lika med deras respektive hypotenusa och beräknas därmed enkelt med Pythagoras sats, där x- och y-koordinaterna utgör närliggande respektive motstående katet.

Vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$ beräknas enligt nedan:

$$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

$$|v| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

c) För att beräkna vektorernas vinklar kan vi använda oss utav tangens:

$$\tan v = \frac{y}{x},$$

där

- $y =$ vektorns y-koordinat,
- $x =$ vektorns x-koordinat.

För att beräkna vinkeln v lägger vi till tan^{-1} i respektive led. Eftersom tangens repeteras efter ett halvt varv lägger vi till $\pm 180°$:

$$v = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm 180°$$

Vi kan därmed enkelt beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v:

$$v_u = tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) \approx 63{,}4°$$

samt

$$v_v = tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) \approx -53{,}1°$$

Vi adderar $180°$ till vinkel v_v för att erhålla motsvarande vinkel i den andra kvadranten:

$$v_v \approx -53{,}1° + 180° = 126{,}9°$$

d) Vi beräknar vektor w algebraisk genom att sätta in värdena av vektorer $u = (1; 2)$ samt $v = (-3; 4)$ i given formel:

$$w = 2u - v = 2(1; 2) - (-3; 4),$$

där

$$2(1; 2) = (2 * 1;\ 2 * 2) = (2; 4)$$

Därmed gäller att

$$w = (2; 4) - (-3; 4),$$

där

$$-(-3; 4) = (3, -4),$$

vilket innebär att

$$w = (2; 4) + (3; -4)$$

För att slutföra beräkningen summerar vi ihop x- och y-värdena och ser då att $w = (5; 0)$, då

$$w = (2 + 3; 4 + (-4)\ ) = (5; 0)$$

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x-värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Lösning

För att ta reda på potentiella otillåtna x-värden undersöker vi när nämnaren blir noll. Funktionen $f(x)$ har en nollnämnare när $x = 2$, vilket innebär att x inte kan anta detta värde:

$$x \neq 2$$

Förtydligande: Om $x = 2$ skulle $f(2)$ vara odefinierad, då:

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{4 - 2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Vi förenklar sedan uttrycket genom att faktorisera täljaren. Vi hittar nollställena för $x^2 - x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

som kan transformeras till

$$x^2 = x + 2$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2},$$

vilket kan förenklas till

$$x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 0{,}5 \pm 1{,}5$$

Därmed gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5 + 1{,}5 = 2 \\ x_2 = 0{,}5 - 1{,}5 = -1 \end{cases}$$

Via de beräknade nollställena kan täljaren faktoriseras:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

Vi sätter in detta i den givna funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$

För $x \neq 2$ kan vi förkorta faktorn $(x-2)$:

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = (x+1) * \frac{x-2}{x-2} = x + 1$$

Därmed gäller att

$$f(x) = x + 1 \ för\ x \neq 2$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen $u(t)$ kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t) =$ spänningen över kondensatorn vid tiden t,
- $U_0 =$ begynnelsespänningen i V,
- $RC =$ kretsens tidskonstant i sekunder,
- $t =$ tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen $470\ \mu F$ är ansluten till ett motstånd på $10\ k\Omega$. Den är initialt laddad till $12\ V$ och börjar urladdas vid tiden $t = 0$.

a) Beräkna spänningen efter fem sekunder.
b) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet $0 - 20$ sekunder.
c) Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till hälften av sitt ursprungliga värde.

Lösning

a) Med angivna värden kan ovanstående formel skrivas om enligt nedan:

$$u(t) = 12e^{-t/(470\mu * 10k)} = 12e^{-t/4{,}7}\ V$$

Vi beräknar $u(5)$ för att beräkna spänningen efter fem sekunder:

$$u(5) = 12e^{-5/4{,}7} \approx 4{,}14\ V$$

b) Definitionsmängden är given i uppgiftsbeskrivningen:

$$0 \leq t \leq 20\ s$$

Värdemängden erhålls genom att beräkna $u(0)$ samt $u(20)$:

$$u(0) = 12e^{-0/4,7} = 12 * e^0 = 12\ V$$

$$u(20) = 12e^{-20/4,7} \approx 0,17\ V$$

Därmed gäller att

$$0,17\ V \leq u(t) \leq 12\ V$$

c) För att beräkna efter hur lång tid t som spänningen har halverats sätter vi $u(t)$ till hälften av begynnelsevärdet, alltså $6V$. Funktionen $u(t)$ kan sedan användas för att beräkna tiden t:

$$u(t) = 12e^{-t/4,7} = 6$$

Genom att dividera med 12 i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$e^{-t/4,7} = 0,5$$

För att få lösa ut t använder vi oss utav den naturliga logaritmen ln, då

$$\ln e^{-t/4,7} = -\frac{t}{4,7} * \ln e = -\frac{t}{4,7}$$

Vi tar den naturliga logaritmen i båda led:

$$-\frac{t}{4,7} = \ln 0,5$$

Genom att multiplicera med $-4,7$ i båda led kan t beräknas till ca 3,26 sekunder, då

$$t = -4,7 * \ln 0,5 \approx 3,26\ s$$

Efter ungefär 3,26 sekunder har alltså spänningen halverats.

Uppgift 4 (1,0 poäng)

En växelspänning har amplituden $5\ V$, frekvensen $100\ Hz$ samt fasen 90°.

a) Bestäm växelspänningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.

b) Rita växelspänningens sinuskurva över en period T.

Lösning

a) Formeln för en växelspänning $u(t)$ är följande:

$$u(t) = |U| \sin(wt + \delta),$$

där $|U|$ är amplituden (toppvärdet), w är vinkelhastigheten, t är tiden och δ är fasen.

Sinuskurvans amplitud/toppvärde $|U|$ är enligt uppgift lika med $5\ V$:

$$|U| = 5\ V$$

Sinuskurvans frekvens f är enligt uppgift lika med $100\ Hz$:

$$f = 100\ Hz$$

Motsvarande vinkelhastighet w är därmed lika med $200\pi\ rad/s$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 100 = 200\pi\ rad/s$$

Fasen δ är enligt uppgift lika med 90°, vilket motsvarar $\pi/2\ rad$, då

$$\delta_{rad} = \delta_{deg} * \frac{\pi}{180°} = 90 * \frac{\pi}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

För växelspänningen $u(t)$ gäller därmed följande:

$$u(t) = 5\sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ V$$

b) Vi utgår från sinuskurvans attribut. Eftersom frekvensen f är lika med $100\ Hz$ gäller att periodtiden T är $10\ ms$, då

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0{,}01\ s = 10\ ms$$

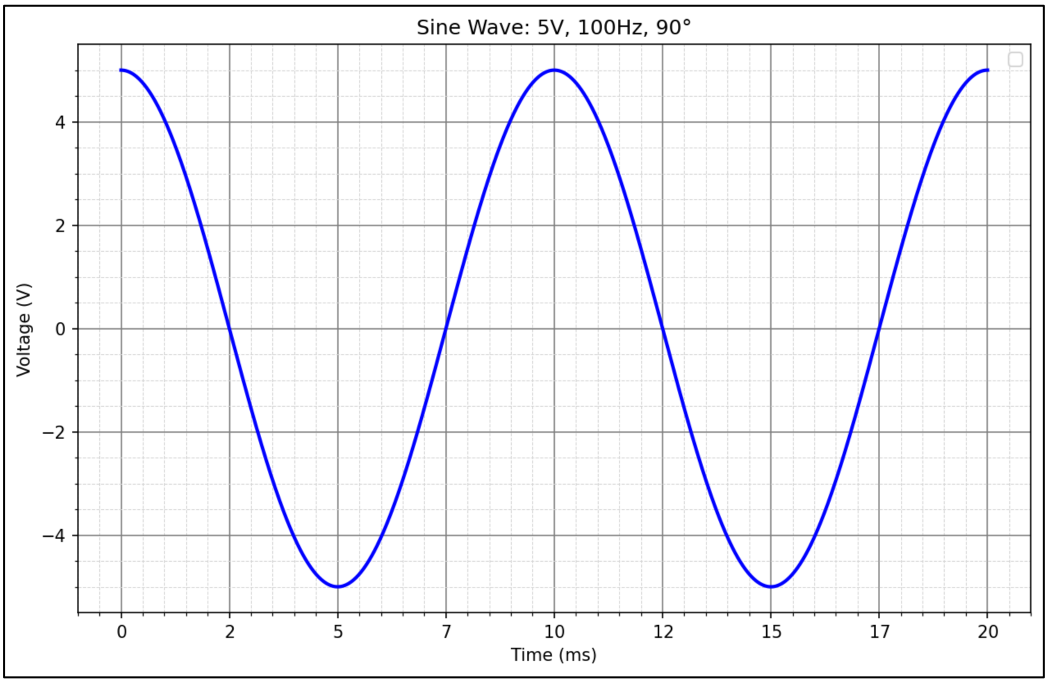
Vi ska då rita ut en sinuskurva som repeteras var 10:e millisekund. För en sinuskurva gäller följande:

- Spänningen är lika med 0 i början av varje varv samt efter ett halvt varv.
- Spännings maximivärde $|U| = 5\ V$ nås efter en fjärdedel av ett varv.
- Spännings minimivärde $-|U| = -5\ V$ nås efter tre fjärdedelar av ett varv.

Fasen δ är lika med 90°, vilket innebär att kurvan är $90°/360° = 1/4$, alltså en fjärdedel av ett varv ”före” i x-axeln. Detta motsvarar 2,5 ms, då

$$\frac{T}{4} = \frac{10m}{4} = 2{,}5\ ms$$

Vi ritar därmed upp sinuskurvan med periodtiden $T = 10\ ms$:



Figur 2: Växelspänningen u(t) = 5sin(200πt + π/2) V.

Uppgift 5 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på $32\ dB$. Hur många gångers spänningsförstärkning motsvarar det?

Lösning

Vi bestämmer ett uttryck för den linjära förstärkningen G_{lin} ur följande formel:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin}$$

Genom att dividera med 20 i båda led samt vända på uttrycket kan ovanstående ekvation omvandlas till

$$\log_{10} G_{lin} = \frac{G_{dB}}{20}$$

Vi upphöjer sedan båda led med basen 10 för att isolera G_{lin} i vänsterledet, då

$$10^{\log_{10} G_{lin}} = G_{lin}$$

Därmed gäller att

$$G_{lin} = 10^{\left(\frac{G_{dB}}{20}\right)}$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att den linjära förstärkningen uppgår till ca 39,8:

$$G_{lin} = 10^{\left(\frac{G_{dB}}{20}\right)} = 10^{\left(\frac{32}{20}\right)} = 10^{1,6} \approx 39,8$$