L12 – Typexempel med lösningsförslag

1. Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = 3x^2 + 8x - 4$

b) $f(x) = -5x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 3$

c) $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + \frac{x^2}{4} - x + 1$

Lösning

Notering för dessa uppgifter:

$$x^0 = 1$$

För ett givet tal c som inte är multiplicerat med x gäller att

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

a) Vi skriver ut exponenter för samtliga tal innehållande x:

$$f(x) = 3x^2 + 8x^1 - 4$$

Vi deriverar sedan funktionen:

$$f'(x) = 2 * 3 * x^{2-1} + 1 * 8 * x^{1-1},$$

som kan utvecklas till

$$f'(x) = 6x^1 + 8x^0,$$

vilket innebär att

$$f'(x) = 6x + 8$$

b) Vi skriver ut exponenter för samtliga tal innehållande x:

$$f(x) = -5x^3 - 3x^2 + \frac{x^1}{2} + 3$$

Vi deriverar sedan funktionen:

$$f'(x) = 3 * (-5) * x^{3-1} - 2 * 3 * x^{2-1} + 1 * \frac{x^{1-1}}{2},$$

som kan utvecklas till

$$f'(x) = -15x^2 - 6x^1 + \frac{x^0}{2}$$

vilket innebär att

$$f'(x) = -15x^2 - 6x + \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -15x^2 - 6x + \frac{1}{2}$$

2. Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

a) Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
b) Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
c) Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
d) Beräkna funktionens minsta/största värde.
e) Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Lösning

a) Vi beräknar derivatan av funktionen på samma sätt som funktionerna i uppgift 1 ovan:

$$f'(x) = 2\text{x} - 4$$

b) Vi beräknar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2\text{x} - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2\text{x} = 4$$

Genom division med 2 i både led ser vi att funktionen är stationär då $x = 2$, då

$$\text{x} = \frac{4}{2} = 2$$

c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan $f'(x)$:

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla x, inklusive när $x = 2$, ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när $x = 2$, dvs. $f''(2)$, varvid vi skriver ut denna:

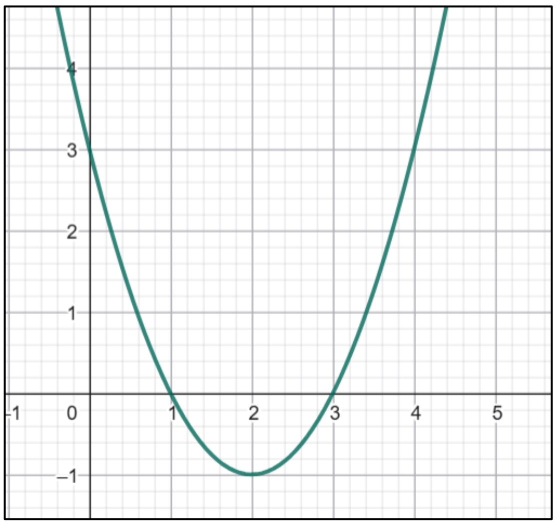
$$f''(2) = 2 > 0 => minimipunkt$$

d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in $x = 2$ i funktionen, dvs. vi beräknar $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 * 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i $(2; -1)$.

e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten $(2; -1)$ beräknades $f(0) = 3$ samt $f(4) = 3$ för att rita grafen.



Figur 1: Graf till funktionen f(x) = x² – 4x + 3.