L17 – Typexempel med lösningsförslag

Former av komplexa tal

Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- x utgör den reella delen av talet,
- y utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

- $|z|$ = absolutbeloppet (längden) => $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- δ = talets vinkel (fasvinkeln) => $\delta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm k\pi$ för $k = 0, 1, 2 \ldots n$.

Notering: Vinkeln δ kan vara negativ eller ligga i andra kvadranter. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

Eulers formel

Ett komplext tal kan uttryckas med Eulers formel som:

$$z = e^{jv} = \cos v + j \sin v = x + jy,$$

där

- $e^{jv} =$ talet z uttryckt med Eulers form,
- $\cos v = x$ utgör den reella delen av talet,
- $\sin v = y$ utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

1. Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.

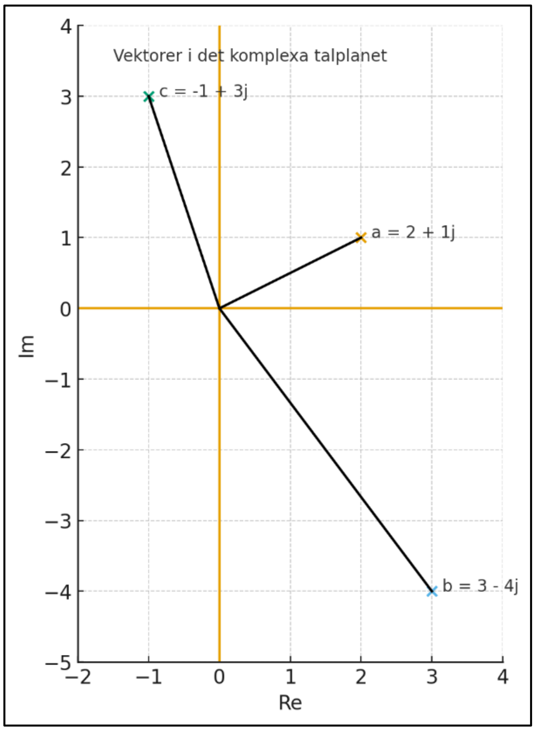
a) Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
b) Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
c) Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
d) Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $|2a - 3c|$.
e) Bestäm vektorernas vinklar.
f) Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a.

Lösning

a) Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

b) Vi ritar ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 1: Vektorer a, b och c i det komplexa talplanet.

c) Vi beräknar vektorernas längd genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

d) Vi bestämmer först $2a - 3c$:

$$2a - 3c = 2(2+j) - 3(-1+j3),$$

där

$$2(2+j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1+j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet $\lfloor 2a - 3c \rfloor$:

$$\lfloor 2a - 3c \rfloor = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 * 49} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}9$$

e) Vi beräknar vinklarna med tan^{-1}. Vi börjar med δ_a:

$$\delta_a = tan^{-1}\frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0{,}46 \pm k\pi\ rad \approx 26{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom a ligger i första kvadranten ($0° \leq \delta_a \leq 90°$) är den beräknade fasvinkeln δ_a korrekt.

Vi fortsätter sedan med δ_b:

$$\delta_b = tan^{-1}\frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0{,}93 \pm k\pi\, rad \approx -53{,}1° \pm k * 180°$$

Eftersom b ligger i fjärde kvadranten ($270° \leq \delta_b \leq 360°$) samt att $-53{,}1° = 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$ är den beräknade fasvinkeln δ_b korrekt.

Vi avslutar med δ_c:

$$\delta_c = tan^{-1}\frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1{,}25 \pm k\pi\, rad \approx -71{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom c ligger i andra kvadranten ($90° \leq \delta_c \leq 180°$) adderar vi $\pi = 180°$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_c \approx -1{,}25 + 1 * \pi \approx 1{,}89\, rad \approx 108{,}3°$$

f) Den nya vektorn d är motsatt riktar a, vilket innebär att dess fasvinkel $\delta_d = \delta_a + \pi$:

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0{,}46 + \pi \approx 3{,}6\, rad \approx 206{,}6°$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp $|d| = 7$. Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + jd_{im},$$

där

- $d_{re} =$ den reella delen,
- $d_{im} =$ den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen d_{re} med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos(3{,}6) \approx -6{,}26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen d_{im} med sinus:

$$\sin \delta_d = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin \delta_d \approx 7 * \sin(3{,}6) \approx -3{,}13$$

Därmed kan vektor d skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6{,}26 - j3{,}13$$

2. En spänning $u(t)$ i en växelströmskrets skrivs på Eulers form enligt nedan:

$$u(t) = 5e^{j\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right)}\ V,$$

där $t =$ tiden i sekunder.

a) Skriv om $u(t)$ till rektangulär form via Eulers formel.
b) Beräkna spänningens värde vid tiden $t = 2\ ms$, dvs. $u(0{,}002)$.
c) Rita ut spänningens värde vid tiden $t = 2\ ms$ i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).

Lösning

a) Vi applicerar Eulers formel på $u(t)$:

$$u(t) = 5e^{j\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right)} = 5\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right) + j5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right)\ V$$

b) Vi beräknar $u(0{,}002)$ genom att sätta $t = 0{,}002$ det bestämda uttrycket:

$$u(0{,}002) = 5\cos\left(100\pi * 0{,}002 + \frac{\pi}{12}\right) + j5sin\left(100\pi * 0{,}002 + \frac{\pi}{12}\right),$$

vilket kan skrivas om till

$$(0{,}002) = 5\cos\left(0{,}2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + j5sin\left(0{,}2\pi + \frac{\pi}{12}\right),$$

där

$$\cos\left(0{,}2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}63$$

samt

$$\sin\left(0{,}2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}78$$

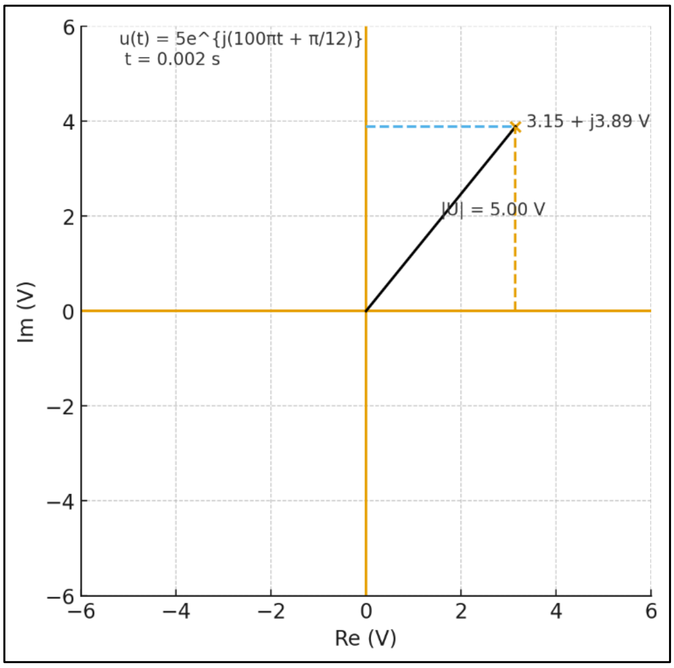
Därmed gäller att

$$u(0{,}002) \approx 5 * 0{,}63 + j5 * 0{,}78\ V,$$

vilket kan skrivas om till

$$u(0{,}002) \approx 3{,}15 + j3{,}89\ V$$

c) Vi ritar ut $u(0{,}002)$ i det komplexa talplanet, såsom visas i figuren nedan:



Figur 2: Spänningen u(0,002) i det komplexa talplanet.

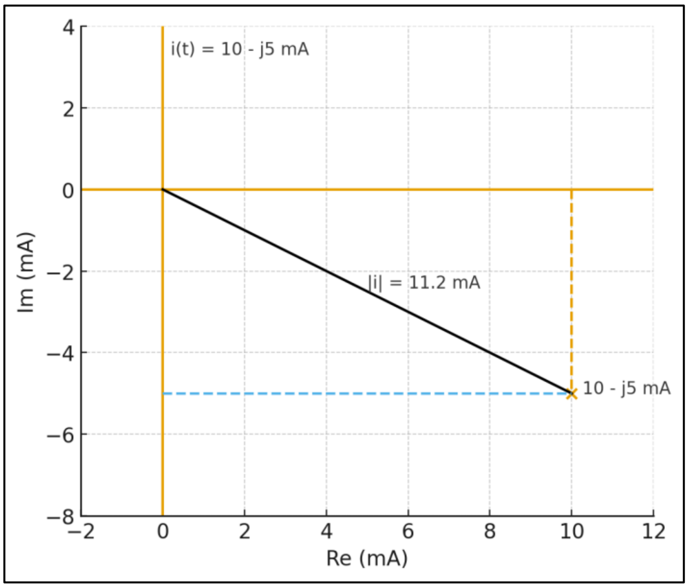
3. En ström $i(t)$ i en växelströmskrets skrivs på rektangulär form enligt nedan:

$$i(t) = 10 - j5\ mA$$

d) Rita ut strömmen i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
e) Uttryck strömmen på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
f) Anta att strömmens frekvens $f = 50\ Hz$. Bestäm vinkelhastigheten w.
g) Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Lösning

a) Vi ritar ut strömmen i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen i(t) = 10 – j5 mA i det komplexa talplanet.

b) Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11{,}2\ mA$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med tan^{-1}:

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0{,}46 \pm k\pi\ rad \approx -26{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom $i(t)$ ligger i fjärde kvadranten ($270° \leq \delta \leq 360°$) samt att $-26{,}6° = 360° - -26{,}6° = 333{,}4°$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka strömmen $i(t)$ med Eulers form:

$$i(t) \approx 11{,}2e^{j(wt-0{,}46)}\ mA$$

c) Vinkelhastigheten w beräknas med hjälp av frekvensen $f = 50\ Hz$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi\ rad/s$$

d) Vi sätter in den bestämda vinkelhastigheten w i det bestämda uttrycket för $i(t)$:

$$i(t) \approx 11{,}2e^{j(100\pi t-0{,}46)}\ mA$$