

Övningstenta

Tillåtna hjälpmedel

- Skrivmaterial och valfri miniräknare.
- En hand- eller datorskriven formelsamling på A4-sida (båda sidor).
- En handskreven A4-sida (båda sidor) med valfria anteckningar.

OBS! Mobiltelefoner får inte användas under den tid som tentamen pågår och ska placeras på angiven plats.

Poäng

Totalt 25 poäng, varav upp till 1,5 bonuspoäng från dugga 1 – 3.

Betygsgränser

- **IG** < 10 poäng
- **G** ≥ 17,5 poäng
- **VG** ≥ 17,5 poäng

Övrigt

Alla uppgifter kräver lösningar/motiveringar med redovisat svar (inklusive enhet där det är aktuellt). Du måste alltså förklara hur du kom fram till dina resultat! Lycka till!

Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer R_1 , R_2 , R_3 och R_4 kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen R om $R_3 = R_4 = 2,2 \text{ k}\Omega$ och $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$. Ange svaret i $\text{k}\Omega$ med en värdesiffra.

Notering: Ω är enheten för resistans och utläses 'Ohm'.

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyn till ogiltiga värden på c :

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)}$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem. Svara exakt i bråkform.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Uppgift 4 (1,0 poäng)

a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning k samt vilovärde m .

b) Ekvationen $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning i intervallet mellan 180° och 270° . Hitta denna lösning och ange den i grader.

Uppgift 5 (2,0 poäng)

Lös följande ekvation:

$$8(x + 2)^2 - 5(x - 3)^2 = 4 - 20x$$

Ange svaret med två decimaler.

Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

Uppgift 6 (1,0 poäng)

Du har två vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$.

- Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
- Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
- Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v .
- Beräkna en tredje vektor $w = u - 2v$.

Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 3 000 000 kr idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1,05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 7 500 000 kr samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

- Ange en funktion som beskriver bostaden pris $f(x)$ efter x år.
- Beräkna bostadens värde efter 5 år.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på 0 – 30 år.
- Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Uppgift 8 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x -värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

Uppgift 9 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen $u(t)$ kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t)$ = spänningen över kondensatorn vid tiden t ,
- U_0 = begynnelsespänningen i V,
- RC = kretsens tidskonstant i sekunder,
- t = tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen $680 \mu F$ är ansluten till ett motstånd på $10 k\Omega$. Den är initialt laddad till $10 V$ och börjar urladdas vid tiden $t = 0$.

- Beräkna spänningen efter tre sekunder.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet 0 – 10 sekunder.
- Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till 40 % av sitt ursprungliga värde.

Uppgift 10 (1,5 poäng)

En växelspanning har amplituden 5 V , frekvensen 100 Hz samt fasen 90° .

- a) Bestäm växelspanningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.
- b) Rita växelspanningens sinuskurva över en period T .

Uppgift 11 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på 54 dB . Hur många gånger spänningsförstärkning motsvarar det?

Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal

Uppgift 12 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Uppgift 13 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$ = spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t ,
 - t = tiden i sekunder.
- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
 - Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 3$ s.
 - Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 3$ s.

Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera följande funktioner:

- $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$
- $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$
- $u(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) V$

Uppgift 15 (1,0 poäng)

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där t är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A (Ampere).

Laddningen uppgår till $2 C$ vid start, dvs. $q(0) = 2$.

- Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t)$.
- Bestäm ett uttryck för laddningen $q(t)$ i kondensatorn som en funktion av tiden.
- Bestäm integrationskonstanten C .
- Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

Uppgift 16 (2,0 poäng)

En krets matas med spänningen $U = 3 - j4 V$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2 \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Uppgift 17 (2,0 poäng)

En ström $i(t)$ i en växelströmskrets kan representeras av en fasor I , som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5 \text{ mA}$$

- Rita ut fasorn I i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Uttryck fasorn I på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
- Anta att strömmens frekvens $f = 10 \text{ Hz}$. Bestäm vinkelhastigheten ω .
- Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(\omega t + \delta)}$.

Uppgift 18 (2,0 poäng)

Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.

- Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
- Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
- Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $|2a - 3c|$.
- Bestäm vektorernas vinklar.
- Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a .

Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 1,5 \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ V}$$

Den totala spänningen i kretsen U_{tot} beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

- Skriv om spänningarna $u_1(t)$, $u_2(t)$ samt $u_3(t)$ till fasor U_1 , U_2 samt U_3 i komplex rektangulär form.
- Beräkna fasorsumman $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$.
- Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(\omega t + \delta_{tot})$$