Lösningsförslag till övningsdugga 3

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

a) Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
b) Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
c) Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
d) Beräkna funktionens minsta/största värde, dvs. bestäm $f(x)$ i punkten då funktionen är stationär.
e) Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Lösning

a) Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2\mathrm{x} - 4$$

b) Vi beräknar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2\mathrm{x} - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2\mathrm{x} = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då $x = 2$, då

$$\mathrm{x} = \frac{4}{2} = 2$$

c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan $f'(x)$:

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla x, inklusive när $x = 2$, ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när $x = 2$, dvs. $f''(2)$, varvid vi skriver ut denna:

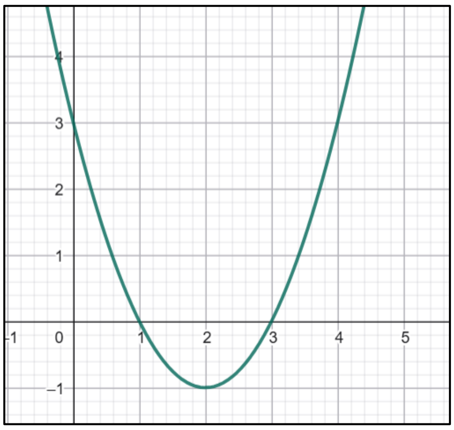
$$f''(2) = 2 > 0 => minimipunkt$$

d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in $x = 2$ i funktionen, dvs. vi beräknar $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 * 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i $(2; -1)$.

e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten $(2; -1)$ beräknades $f(0) = 3$ samt $f(4) = 3$ för att rita grafen.



Figur 1: Graf till funktionen f(x) = x² – 4x + 3.

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t) =$ spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t,
- $t =$ tiden i sekunder.

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.

b) Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 3\ s$, dvs. beräkna $u'(3)$.

c) Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 3\ s$, dvs. beräkna $u''(3)$.

Lösning

a) Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

a) Vi utvecklar $u(t)$:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}) = 15 - 15e^{-0,2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -0,2 * (-15e^{-0,2t}) = 3e^{-0,2t}\ V/s$$

b) Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 3\ s$, dvs. $u'(3)$:

$$u'(3) = 3e^{-0,2*3} = 3e^{-0,6} \approx 1,65\ V/s$$

c) Vi beräknar $u''(t)$ genom att derivera $u'(t)$:

$$u''(t) = -0,2 * 3e^{-0,2t} = -0,6e^{-0,2t}\ V/s^2$$

Vi beräknar sedan $u''(3)$:

$$u''(3) = -0,6e^{-0,2*3} = -0,6e^{-0,6} \approx -0,33\ V/s^2$$

Spänningsökningen minskar, då $u''(3)\ < 0$.

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Laddningen $q(t)$ som passerar genom en ledare inom ett tidsintervall $(0, t)$ kan beräknas via följande funktion:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\, dt = [I(t)]_0^t,$$

där

- $q(t)$ är laddningen genom ledaren i C $(Coulomb)$,
- $i(t)$ är strömmen som passerar genom ledaren i A $(Ampere)$,
- $I(t)$ är den primitiva funktionen (obestämda integralen) av $i(t)$.

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där t är tiden i sekunder. Laddningen uppgår till 2 C vid start, dvs. $q(0) = 2$.

a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t) = \int i(t)\, dt$, dvs. integrera utan att ange några gränser.
b) Bestäm ett uttryck för kondensatorns laddning $q(t)$ genom att integrera över intervallet $[0, t]$.
c) Bestäm integrationskonstanten C samt en formel för den totala laddningen $q_{tot}(t)$ i kondensatorn.
d) Hur stor total laddning (inklusive startladdningen) har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

Lösning

a) Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t)\, dt = \int (2e^{-0,5t}\,)\, dt = 2\int (e^{-0,5t}\,)\, dt = 2\left(\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

b) Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5*0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - (-4 + C) = -4e^{-0,5t} + 4$$

c) Integrationskonstanten kan tolkas på två sätt, som ger samma resultat.

Antingen tolkar vi integrationskonstanten som C i den primitiva funktionen $I(t)$, där

$$q(t) = I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

Vi kan då bestämma $q(0) = I(0)$:

$$q(0) = I(0) = -4e^{-0,5*0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 2\ C$. Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten $C = 6$, då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan den totala laddningen $q_{tot}(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q_{tot}(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

Om vi i stället tolkar integrationskonstanten som startladdningen $q(0) = 2$, dvs. $C = 2$ och lägger till detta detta i formeln för $q(t)$ härledd i b), som inte innehåller startladdningen, så får vi samma resultat:

$$q_{tot} = q(t) + C = -4e^{-0,5t} + 4 + 2 = -4e^{-0,5t} + 6$$

d) Laddningen efter 2 sekunder, inklusive startladdningen, beräknas enkelt genom att beräkna $q_{tot}(2)$:

$$q_{tot}(2) = -4e^{-0,5*2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4{,}53\ C$$

Efter 2 sekunder har alltså ca $4,53\ C$ flödat in i kondensatorn.

Uppgift 4 (1,0 poäng)

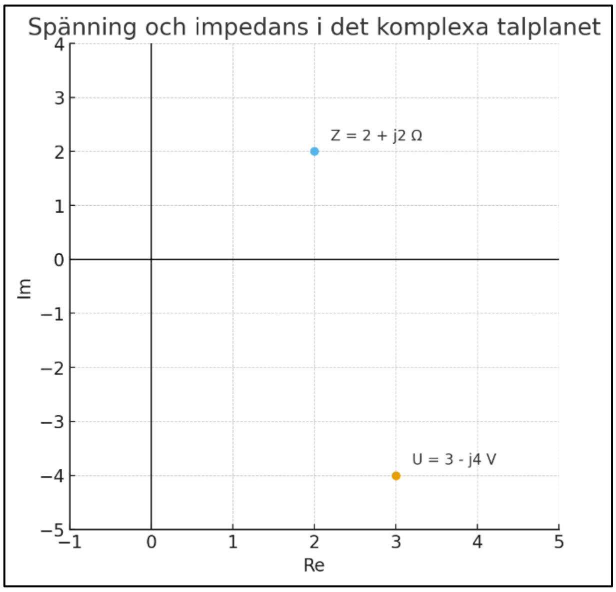
En krets matas med spänningen $U = 3 - j4\ V$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2\ \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med ”Ohms lag”, dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning

För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 2: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U, vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ V$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med tan^{-1}:

$$\delta_u = tan^{-1}\frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0{,}9 \pm k\pi\ \ rad \approx -53{,}1° \pm k * 180°$$

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta_u \leq 360°)$ samt att $-53{,}1° = 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5\angle - 0{,}9\, rad\ V$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z, vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\ \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med tan^{-1}:

$$\delta_z = tan^{-1}\frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0{,}8 \pm k\pi\ \ rad = 45° \pm k * 180°$$

Eftersom Z ligger i första kvadranten ($0° \leq \delta_z \leq 90°$) är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2{,}8 \angle\ 0{,}8\ \mathrm{rad}\ \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0{,}9}{2{,}8 \angle\ 0{,}8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2{,}8} \angle\ (-0{,}9 - 0{,}8) \approx 1{,}8 \angle -1{,}7\ rad\ A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1{,}8 \angle -1{,}7\ rad\ A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1{,}8\ A$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1{,}7\ rad\ \ \approx -98{,}1°$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1{,}8 * \cos\ (-1{,}7) = -0{,}25\ A$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1{,}8 * \sin\ (-1{,}7) \approx -1{,}75\ A$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0{,}25 - j1{,}75\ A$$

Uppgift 5 (1,0 poäng)

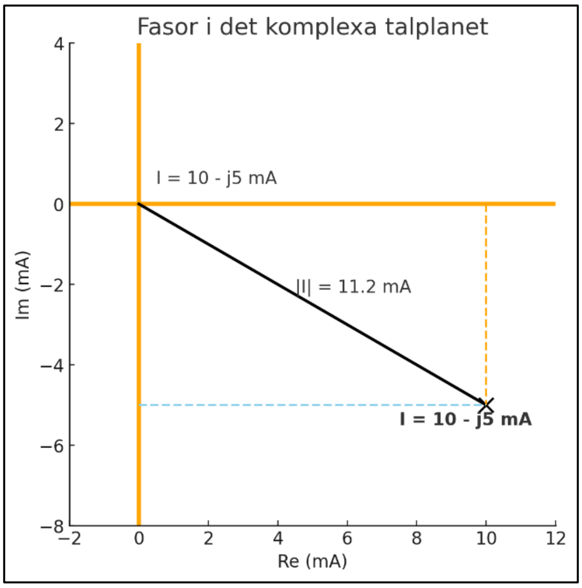
En ström $i(t)$ i en växelströmskrets kan representeras av en fasor I, som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5\ mA$$

a) Rita ut fasorn I i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
b) Uttryck fasorn I på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
c) Anta att strömmens frekvens $f = 50\ Hz$. Bestäm vinkelhastigheten w.
d) Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Lösning

a) Vi ritar ut fasorn I det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen I = 10 – j5 mA i det komplexa talplanet.

b) Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11{,}2\ mA$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med tan^{-1}:

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0{,}46 \pm k\pi\ rad \approx -26{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom I ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta \leq 360°)$ samt att $-26{,}6° = 360° - 26{,}6° = 333{,}4°$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn I med Eulers form:

$$I \approx 11{,}2e^{-j0{,}46}\ mA$$

c) Vinkelhastigheten w beräknas med hjälp av frekvensen $f = 50\ Hz$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi\ rad/s$$

d) Vi sätter in tidskomponenten wt, där $w = 100\pi\ rad/s$, i uttrycket för fasorn I och erhåller då följande:

$$i(t) \approx 11{,}2e^{j(100\pi t - 0{,}46)}\ mA$$