

## Lösningsförslag till övningsdugga 3

### Uppgift 1 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen  $f(x)$  och bestäm uttrycket för  $f'(x)$ .
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös  $f'(x) = 0$ .
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till  $f(x)$  för intervallet  $0 \leq x \leq 5$ . Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

### Lösning

- a) Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2x - 4$$

- b) Vi beräknar  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 2x - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2x = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då  $x = 2$ , då

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

- c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan  $f'(x)$ :

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla  $x$ , inklusive när  $x = 2$ , ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när  $x = 2$ , dvs.  $f''(2)$ , varvid vi skriver ut denna:

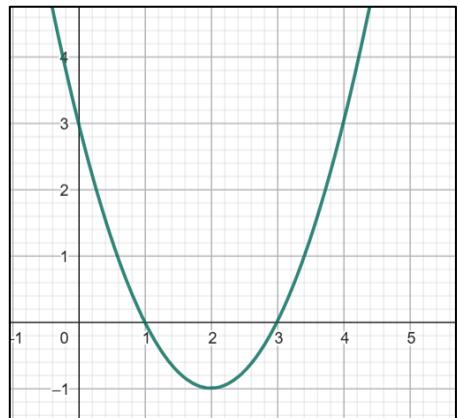
$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

- d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in  $x = 2$  i funktionen, dvs. vi beräknar  $f(2)$ :

$$f(2) = 2^2 - 4 * 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i  $(2; -1)$ .

- e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten  $(2; -1)$  beräknades  $f(0) = 3$  samt  $f(4) = 3$  för att rita grafen.



Figur 1: Graf till funktionen  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

## Uppgift 2 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$  = spänningsfallet över kondensatoren vid tiden  $t$ ,
- $t$  = tiden i sekunder.

- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för  $u'(t)$ .
- Beräkna  $u'(t)$  vid tiden  $t = 3$  s.
- Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden  $t = 3$  s.

### Lösning

- Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

- Vi utvecklar  $u(t)$ :

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}) = 15 - 15e^{-0,2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet  $u(t)$  för att beräkna  $u'(t)$ :

$$u'(t) = -0,2 * (-15e^{-0,2t}) = 3e^{-0,2t} \text{ V/s}$$

- Vi beräknar  $u'(t)$  då tiden  $t = 3$  s, dvs.  $u'(3)$ :

$$u'(3) = 3e^{-0,2*3} = 3e^{-0,6} \approx 1,65 \text{ V/s}$$

- Vi beräknar  $u''(t)$  genom att derivera  $u'(t)$ :

$$u''(t) = -0,2 * 3e^{-0,2t} = -0,6e^{-0,2t} \text{ V/s}^2$$

Vi beräknar sedan  $u''(3)$ :

$$u''(3) = -0,6e^{-0,2*3} = -0,6e^{-0,6} \approx -0,33 \text{ V/s}^2$$

Spänningsökningen minskar, då  $u''(3) < 0$ .

### Uppgift 3 (1,0 poäng)

Laddningen  $q(t)$  som passerar genom en ledare inom ett tidsintervall  $(0, t)$  kan beräknas via följande funktion:

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = [I(t)]_0^t,$$

där

- $q(t)$  är laddningen genom ledaren i  $C$  (*Coulomb*),
- $i(t)$  är strömmen som passerar genom ledaren i  $A$  (*Ampere*),
- $I(t)$  är den primitiva funktionen (obestämda integralen) av  $i(t)$ .

Strömmen  $i(t)$  i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där  $t$  är tiden i sekunder. Laddningen uppgår till  $2 C$  vid start, dvs.  $q(0) = 2$ .

- a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen  $I(t)$ .
- b) Bestäm ett uttryck för laddningen  $q(t)$  i kondensatorn som en funktion av tiden.
- c) Bestäm integrationskonstanten  $C$ .
- d) Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

### Lösning

- a) Vi bestämmer den primitiva funktionen  $I(t)$  genom att integrera  $i(t)$  utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t) dt = \int (2e^{-0,5t}) dt = 2 \int (e^{-0,5t}) dt = 2 \left( \frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

- b) Vi integrerar strömmen  $i(t)$  för intervallet  $(0, t)$ :

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar  $q(t)$ :

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5*0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - C = -4e^{-0,5t}$$

- c) För att bestämma integrationskonstanten  $C$  bestämmer vi  $q(0)$ :

$$q(0) = -4e^{-0,5*0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start  $q(0) = 2 C$ . Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten  $C = 6$ , då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan laddningen  $q(t)$  efter en viss tid  $t$  beräknas med följande formel:

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

- d) Laddningen efter 2 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna  $q(2)$ :

$$q(2) = -4e^{-0,5 \cdot 2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4,53 \text{ C}$$

Efter 2 sekunder har alltså ca 4,53 C flödat in i kondensatorn.

#### Uppgift 4 (1,0 poäng)

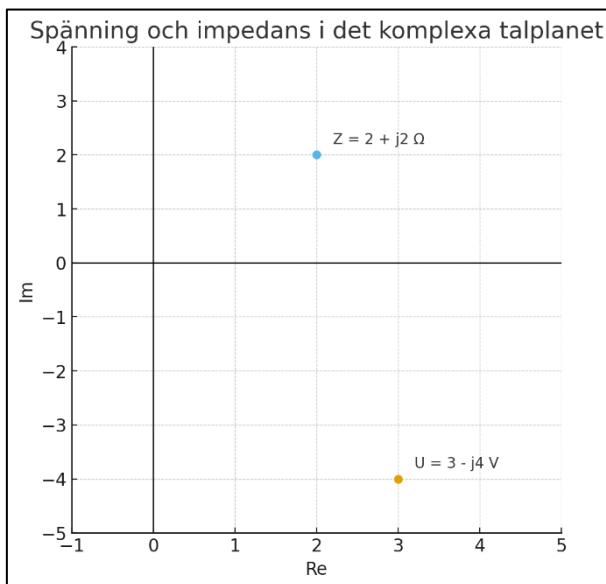
En krets matas med spänningen  $U = 3 - j4 \text{ V}$ . Kretsen har impedansen  $Z = 2 + j2 \Omega$ . Beräkna strömmen  $I$  som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

#### Lösning

För att beräkna strömmen  $I$  måste spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 2: Spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen  $U$ , vars absolutbelopp  $|U|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel  $\delta_u$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $U$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$ ) samt att  $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_u$  korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad V}$$

## Elteknisk matematik

Vi omvandlar sedan impedansen  $Z$ , vars absolutbelopp  $|Z|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel  $\delta_z$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $Z$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_z$  korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen  $I$  på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad A}$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad A},$$

där

- strömmens absolutbelopp  $|I| = 1,8 \text{ A}$ ,
- strömmens fasvinkel  $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$ .

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- $I_{re}$  = strömmens reella del,
- $I_{im}$  = strömmens imaginära del (indikerad via  $j$ ).

Vi beräknar först strömmens reella del  $I_{re}$  med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 \text{ A}$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del  $I_{im}$  med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 \text{ A}$$

Strömmen  $I$  kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 \text{ A}$$

### Uppgift 5 (1,0 poäng)

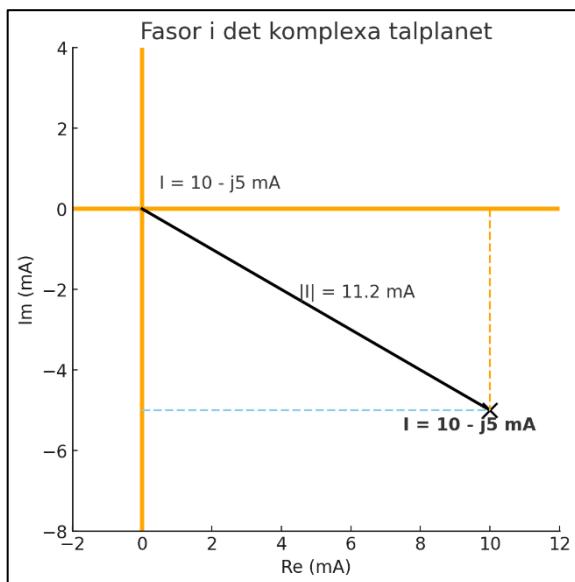
En ström  $i(t)$  i en växelströmskrets kan representeras av en fasor  $I$ , som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5 \text{ mA}$$

- Rita ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Uttryck fasorn  $I$  på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet  $|I|$  samt fasvinkeln  $\delta$  så att  $I = |I|e^{j\delta}$ .
- Anta att strömmens frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ . Bestäm vinkelhastigheten  $w$ .
- Skriv  $i(t)$  som en tidsberoende funktion  $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$ .

### Lösning

- Vi ritar ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen  $I = 10 - j5 \text{ mA}$  i det komplexa talplanet.

- Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp  $|I|$  med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln  $\delta$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $I$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$ ) samt att  $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta$  korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn  $I$  med Eulers form:

$$I \approx 11,2e^{-j0,46} \text{ mA}$$

- Vinkelhastigheten  $w$  beräknas med hjälp av frekvensen  $f = 50 \text{ Hz}$ :

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

- Vi sätter in tidskomponenten  $wt$ , där  $w = 100\pi \text{ rad/s}$ , i uttrycket för fasorn  $I$  och erhåller då följande:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$