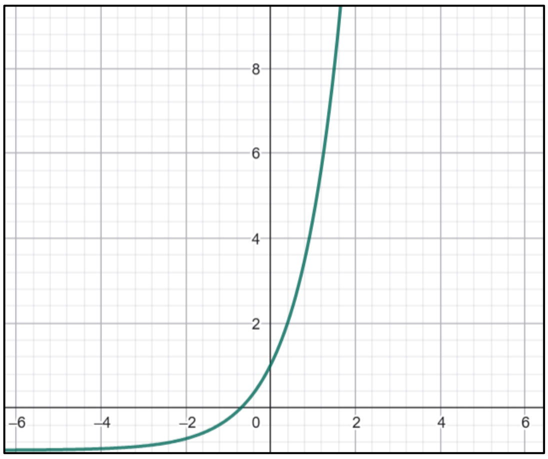
L09 – Typexempel med lösningsförslag

1. Till höger visas grafen för exponentialfunktionen $f(x) = 2e^x - 1$. Funktionen har definitionsmängden $-5 \leq x \leq 5$.

a) Beräkna $f(0)$.
b) Beräkna funktionens värdemängd.
c) Beräkna för vilket värde på x som $f(x) = 0$.



Figur 1: Funktionen f(x)=2eˣ – 1.

Lösningar

a) Vi beräknar $f(0)$ genom att ersätta samtliga x med 0 i den angivna formeln:

$$f(0) = 2e^0 - 1 = 2 * 1 - 1 = 1$$

b) $f(x)$ växer i proportion med x, vilket medför att det lägsta x-värdet i definitionsmängden ger funktionens minimipunkt. Vi beräknar därmed $f(-5)$:

$$f(-5) = 2e^{-5} - 1 \approx 2 * 0 - 1 = -1$$

Notering: När x går mot minus oändligheten närmar sig e^x värdet 0:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Detta är tydligt redan när $x = -5$, då

$$e^{-5} \approx 0,$$

Det högsta x-värdet i definitionsmängden ger funktionens maximipunkt. Vi beräknar därmed $f(5)$:

$$f(5) = 2e^5 - 1 \approx 2 * 148{,}4 - 1 \approx 295{,}8$$

c) För att beräkna för vilket värde på x som $f(x) = 0$ ersätter vi $f(x)$ med 0 i ovanstående ekvation:

$$f(x) = 2e^x - 1 = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$2e^x = 1$$

Genom att dividera med 2 i båda led kan följande uttryck erhållas:

$$e^x = 0{,}5$$

För att eliminera e i vänsterledet lägger vi till den naturliga logaritmen ln i båda led, då

$$\ln e = 1$$

samt

$$\ln e^x = x$$

Därmed ser vi att $f(x) = 0$ när x är ungefär lika med -0,69:

$$x = \ln 0{,}5 \approx -0{,}69$$

2. En polynomfunktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ har definitionsmängden $-4 \leq x \leq 4$.

a) Beräkna följande värden via ovanstående ekvation:

- $f(-4)$
- $f(-2)$
- $f(0)$
- $f(2)$
- $f(4)$

b) Rita funktionens graf utefter de beräknade värdena i a).

c) Beräkna för vilka värden på x som $f(x) = 10$.

Lösningar

a) Vi beräknar respektive värde genom att ersätta x med aktuellt x-värde i den givna formeln:

$$f(-4) = 0{,}5 * (-4)^2 - 2 \;= 0.5 * 16 - 2 = 8 - 2 = 6$$

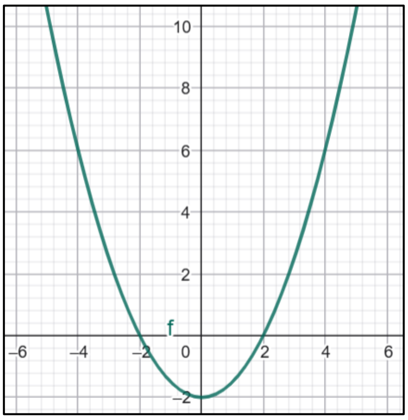
$$f(-2) = 0{,}5 * (-2)^2 - 2 \;= 0.5 * 4 - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$f(0) = 0{,}5 * (0)^2 - 2 \;= 0.5 * 0 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(2) = 0{,}5 * (2)^2 - 2 \;= 0.5 * 4 - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$f(4) = 0{,}5 * (4)^2 - 2 \;= 0.5 * 16 - 2 = 8 - 2 = 6$$

b) Via de beräknade värdena i a) kan funktionens graf ritas upp såsom visas till höger.



Figur 2: Funktionen f(x) = 0,5x^2 – 2.

c) Vi sätter $f(x) = 10$ i den givna formeln för att därigenom beräkna värdet på x:

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2 = 10,$$

vilket kan transformeras till

$$0{,}5x^2 = 12$$

Genom att dividera med 0.5 i båda led kan följande uttryck erhållas:

$$x^2 = \frac{12}{0{,}5} = 24$$

Därmed ser vi att $f(x) = 10$ när x är ungefär lika med ±4,9, då

$$x = \pm\sqrt{24} \approx \pm 4{,}9$$

3. Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x-värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7}$$

Lösningar

För att ta reda på potentiella otillåtna x-värden undersöker vi när nämnaren blir noll. Funktionen $f(x)$ har en nollnämnare när $x = -7$, vilket innebär att x inte kan anta detta värde:

$$x \neq -7$$

Förtydligande: Om $x = -7$ skulle $f(-7)$ vara odefinierad, då:

$$f(-7) = \frac{(-7)^2 + 6 * 7 - 7}{-7 + 7} = \frac{49 + 42 - 7}{0} = \frac{0}{0}$$

Vi förenklar sedan uttrycket genom att faktorisera täljaren. Vi hittar nollställena för $x^2 + 6x - 7$:

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

som kan transformeras till

$$x^2 = -6x + 7$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 + 7},$$

vilket kan förenklas till

$$x = -3 \pm \sqrt{9 + 7} = -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4$$

Därmed gäller att

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 4 = 1 \\ x_2 = -3 - 4 = -7 \end{cases}$$

Via de beräknade nollställena kan täljaren faktoriseras:

$$x^2 + 6x - 7 = (x + 7)(x - 1)$$

Vi sätter in detta i det givna uttrycket:

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7} = \frac{(x + 7)(x - 1)}{x + 7}$$

För $x \neq -7$ kan vi förkorta faktorn $(x + 7)$:

$$\frac{(x + 7)(x - 1)}{x + 7} = \frac{x + 7}{x + 7} * (x - 1) = 1 * (x - 1) = x - 1$$

Därmed gäller att

$$f(x) = x - 1 \; för \; x \neq -7$$