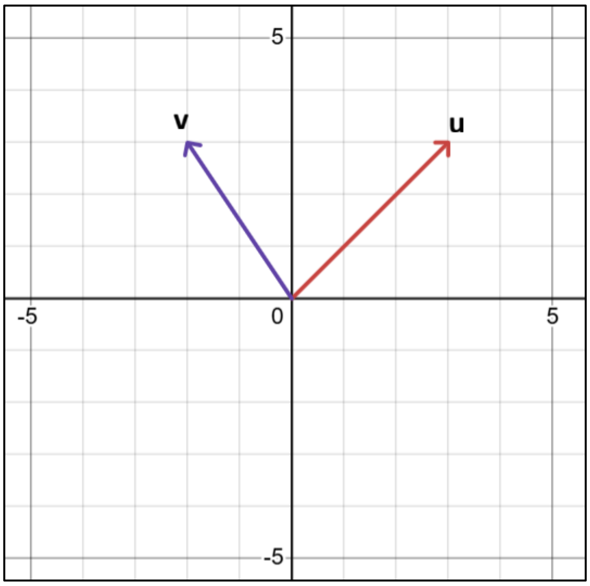
L07 – Typexempel med lösningsförslag

1. Två vektorer u samt v visas i nedanstående figur.

a) Ta reda på vektorernas koordinater.
b) Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
c) Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v.
d) Beräkna vinkeln mellan vektorer u samt v.
e) Beräkna en tredje vektor $w = u + 2v$.
f) Bestäm en vektor med längden 5 som är motsatt riktad u.



Figur 1: Vektorer u samt v.

Lösningar

a) Genom att kolla i figuren ser vi att vektor u har x-koordinaten 3 samt y-koordinaten 3. Därmed gäller att

$$u = (3; 3)$$

Vi ser också att vektor v har x-koordinaten -2 samt y-koordinaten 3. Därmed gäller att

$$v = (-2; 3)$$

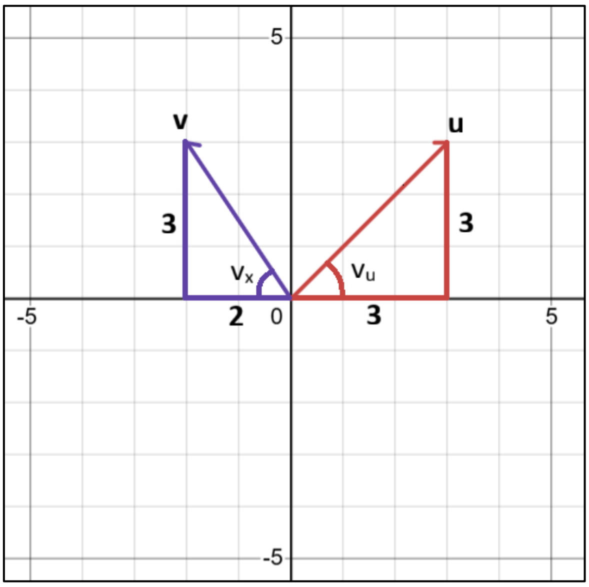
b) Vektorernas absolutbelopp är lika med deras respektive hypotenusa och beräknas därmed enkelt med Pythagoras sats.

Detta kan visualiseras genom att rita ut respektive vektor som en triangel, se figuren till höger.

Vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$ beräknas enligt nedan:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}24$$

$$|v| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$$



Figur 2: Vektorer u samt x visualiserade som trianglar.

c) För att beräkna vektorernas vinklar kan vi använda oss utav tangens. Återigen ser vi vektorernas som trianglar.

För vektor $u = (3; 3)$ gäller att både motstående samt närliggande katet är lika med 3.

Därmed gäller att:

$$\tan(v_u) = \frac{3}{3} = 1,$$

vilket kan transformeras till

$$v_u = \tan^{-1}(1) = 45°$$

För vektor v, som har ett negativt x-värde, kan motsvarande triangel ritas ut såsom visas i ovanstående figur. Notera att vi i detta fall har markerat en vinkel v_x, som är den supplementära vinkeln till v_y:

$$v_v + v_x = 180°,$$

vilket innebär att

$$v_v = 180° - v_x$$

Om vi beräknar vinkel v_x kan vi därmed enkelt beräkna vinkel v_v. Vinkel v_x beräknas enkelt med tangens, då motsvarande triangel har en motstående katet som är lika med 3 samt en närliggande katet som är lika med 2. Därmed gäller att

$$\tan(v_x) = \frac{3}{2} = 1{,}5 => v_x = \tan^{-1}(1{,}5) \approx 56{,}3°$$

Vi kan sedan enkelt beräkna vinkel v_v:

$$v_v = 180° - v_x = 180° - 56{,}3° = 123{,}7°$$

d) För att beräkna vinkeln Δv mellan v samt u beräknar vi differensen mellan deras respektive vinklar v_v samt v_u:

$$\Delta v = v_v - v_u$$

Vi sätter in värden i formeln och ser då att vinkeln mellan vektorerna är ca 78,7°, då

$$\Delta v = v_v - v_u = 123{,}7° - 45° \approx 78{,}7°$$

e) Vi beräknar vektor w algebraisk genom att sätta in värdena av vektorer $u = (3; 3)$ samt $v = (-2; 3)$ i given formel:

$$w = u + 2v = (3; 3) + 2(-2; 3),$$

där

$$2(-2; 3) = (2 * (-2); 2 * 3) = (-4; 6)$$

Därmed gäller att

$$w = (3; 3) + (-4; 6)$$

För att slutföra beräkningen summerar vi ihop x- och y-värdena och ser då att $w = (-1; 9)$, då

$$w = (3 - 4; 3 + 6) = (-1; 9)$$

f) Vi kan rita ut en vektor motsatt riktad u med längden 5. Låt oss kalla denna vektor a. Att vektorn är motriktad innebär att den är vänd 180°, alltså ett halvt varv från u. För dess vinkel v_a gäller därmed att

$$v_a = v_u + 180°$$

Eftersom vinkel v_u tidigare beräknades till 45° gäller att vektor a:s vinkel v_a är lika med 225°, då

$$v_a = 45° + 180° = 225°$$

För en given vektorn gäller att dess längd är lika med dess absolutbelopp. Därmed gäller att absolutbeloppet $|a|$ av vektorn a är lika med 5:

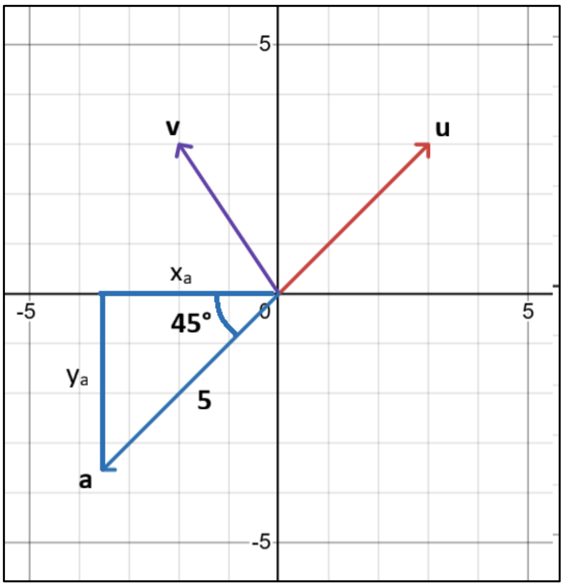
$$|a| = 5$$

Vi kan sedan beräkna vektor a via två metoder, grafiskt eller algebraiskt.

Metod 1 – Grafisk lösning

Som vi såg tidigare gäller att vektorn kan ritas ut som en triangel, där dess hypotenusa är lika med dess absolutbelopp. Eftersom denna vektor är vänd ett halvt från vektor u kan vi rita vektor a som en triangel med vinkel 45° sett från 180°, dvs. vänt ett halvt varv.

Med denna information kan vi rita ut vektor a såsom visas till höger.



Figur 3: Visualisering av vektor a som en triangel.

Vi kan beräkna absolutbeloppet $|x_a|$ vektor a:s närliggande katet x_a med cosinus:

$$\cos 45° = \frac{|x_a|}{5},$$

vilket innebär att

$$|x_a| = 5 * \cos 45° \approx 3{,}54$$

Eftersom x_a är placerad till vänster om origo är x_a negativ. Därmed gäller att

$$x_a = -\approx 3{,}54$$

Vi kan också beräkna absolutbeloppet $|y_a|$ av vektor a:s motstående katet y_a med sinus:

$$\sin 45° = \frac{|y_a|}{5},$$

vilket innebär att

$$|y_a| = 5 * \sin 45° \approx 3{,}54$$

Eftersom y_a är placerad under origo är y_a negativ. Därmed gäller att

$$y_a = -\approx 3{,}54$$

Via beräknade värden kan sedan vektor a bestämmas:

$$a \approx (-3{,}54; -3{,}54)$$

Metod 2 – Algebraisk lösning

Vi såg tidigare att vektor a:s vinkel v_a är lika med 225°, då denna är vänd ett halvt varv (180°) från vektor u, vars vinkel v_u tidigare har beräknats till 45°:

$$v_a = v_u + 180° = 45° + 180° = 225°$$

Vektorns absolutbelopp $|a|$, som är lika med dess längd, specificerades också till 5 i uppgiftsbeskrivningen:

$$|a| = 5$$

Vi kan enkelt beräkna vektorns x- och y-värde via cosinus samt sinus. Vi börjar med att beräkna vektorns x-värde x_a:

$$\cos v_a = \frac{x_a}{|a|},$$

vilket är ekvivalent med att

$$x_a = |a| * \cos v_a$$

Genom att sätta in värden i ovanstående formel ser vi att vektorns x-värde x_a är lika med -3,54, då

$$x_a = 5 * \cos 225° \approx -3{,}54$$

Vi kan sedan beräkna vektor a:s y-värde y_a med sinus:

$$\sin v_a = \frac{y_a}{|a|},$$

vilket är ekvivalent med att

$$y_a = |a| * \sin v_a$$

Genom att sätta in värden i ovanstående formel ser vi att även vektor a:s y-värde y_a är lika med -3.54, då

$$y = 5 * \sin 225° \approx -3.54$$

Därmed gäller att

$$a = (-3{,}54; -3{,}54)$$