Övningstentamen

Tillåtna hjälpmedel

- Skrivmaterial och valfri miniräknare.
- En hand- eller datorskriven formelsamling på A4-sida (båda sidor).
- En handskriven A4-sida (båda sidor) med valfria anteckningar.

***OBS!** Mobiltelefoner får inte användas under den tid som tentamen pågår och ska placeras på angiven plats.*

Poäng

Totalt 25 poäng, varav upp till 1,5 bonuspoäng från dugga 1 – 3.

Betygsgränser

- **IG** < 10 poäng
- **G** >= 17,5 poäng
- **VG** >= 17,5 poäng

Övrigt

Alla uppgifter kräver lösningar/motiveringar med redovisat svar (inklusive enhet där det är aktuellt). Du måste alltså förklara hur du kom fram till dina resultat! Lycka till!

Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer R_1, R_2, R_3 och R_4 kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen R om $R_1 = R_2 = 2{,}2\ k\Omega$ och $R_3 = R_4 = 10\ k\Omega$. Ange svaret i $k\Omega$ med en värdesiffra.

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyns till ogiltiga värden på c:

$$\frac{\left(\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}\right)}{c(c^2 - 4)}$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Uppgift 4 (1,0 poäng)

a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning *k* samt vilovärde *m.*

b) Ekvationen $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning i intervallet mellan $180°$ och $270°$. Hitta denna lösning och ange den i grader.

Uppgift 5 (2,0 poäng)

Lös följande ekvation:

$$(x+2)^2 + 2(x-2)^2 = 45 - 6x$$

Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

Uppgift 6 (1,0 poäng)

Du har två vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$.

a) Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
b) Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
c) Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v.
d) Beräkna en tredje vektor $w = u - 2v$.

Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar $3\,000\,000\ kr$ idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1{,}05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är $7\,500\,000\ kr$ samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

a) Ange en funktion som beskriver bostaden pris $f(x)$ efter x år.
b) Beräkna bostadens värde efter 5 år.
c) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på $0 - 30$ år.
d) Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Uppgift 8 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x-värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

Uppgift 9 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen $u(t)$ kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t) =$ spänningen över kondensatorn vid tiden t,
- $U_0 =$ begynnelsespänningen i V,
- $RC =$ kretsens tidskonstant i sekunder,
- $t =$ tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen $680\ \mu F$ är ansluten till ett motstånd på $10\ k\Omega$. Den är initialt laddad till $10\ V$ och börjar urladdas vid tiden $t = 0$.

a) Beräkna spänningen efter tre sekunder.
b) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet $0 - 10$ sekunder.
c) Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till 40 % av sitt ursprungliga värde.

Uppgift 10 (1,5 poäng)

En växelspänning har amplituden $5\ V$, frekvensen $100\ Hz$ samt fasen $90°$.

a) Bestäm växelspänningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.

b) Rita växelspänningens sinuskurva över en period T.

Uppgift 11 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på $54\ dB$. Hur många gångers spänningsförstärkning motsvarar det?

Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal

Uppgift 12 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

a) Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
b) Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
c) Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
d) Beräkna funktionens minsta/största värde, dvs. bestäm $f(x)$ i punkten då funktionen är stationär.
e) Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Uppgift 13 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 10(1 - e^{-0,5t}),$$

där

- $u(t) =$ spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t,
- $t =$ tiden i sekunder.

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
b) Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 2\ s$, dvs. beräkna $u'(2)$.
c) Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 2\ s$, dvs. beräkna $u'(2)$.

Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$

c) $u(t) = 5\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ V$

Uppgift 15 (1,0 poäng)

Laddningen $q(t)$ som passerar genom en ledare inom ett tidsintervall $(0, t)$ kan beräknas via följande funktion:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\ dt = [I(t)]_0^t,$$

där

- $q(t)$ är laddningen genom ledaren i C $(Coulomb)$,
- $i(t)$ är strömmen som passerar genom ledaren i A $(Ampere)$,
- $I(t)$ är den primitiva funktionen (obestämda integralen) av $i(t)$.

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 0,5e^{-0,1t}$$

där t är tiden i sekunder. Laddningen uppgår till $1\ C$ vid start, dvs. $q(0) = 1$.

a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t) = \int i(t)\ dt$, dvs. integrera utan att ange några gränser.
b) Bestäm ett uttryck för kondensatorns laddning $q(t)$ genom att integrera över intervallet $[0, t]$.
c) Bestäm en formel för den totala laddningen $q_{tot}(t)$ i kondensatorn, inklusive startladdningen $q(0)$.
d) Hur stor total laddning (inklusive startladdningen) har flödat in i kondensatorn efter 4 sekunder?

Uppgift 16 (2,0 poäng)

En krets matas med spänningen $U = 3 - j4\ V$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2\ \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med ”Ohms lag”, dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Uppgift 17 (2,0 poäng)

En ström $i(t)$ i en växelströmskrets kan representeras av en fasor I, som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5\ mA$$

a) Rita ut fasorn I i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
b) Uttryck fasorn I på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
c) Anta att strömmens frekvens $f = 10\ Hz$. Bestäm vinkelhastigheten w.
d) Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Uppgift 18 (2,0 poäng)

Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.

a) Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
b) Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
c) Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
d) Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $\lfloor 2a - 3c \rfloor$.
e) Bestäm vektorernas vinklar.
f) Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a.

Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2\sin(wt + 25°)\ V$$

$$u_2(t) = 5\sin(wt - 45°)\ V$$

$$u_3(t) = 1{,}5\sin(wt + 36°)\ V$$

Den totala spänningen i kretsen U_{tot} beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

a) Skriv om spänningarna $u_1(t)$, $u_2(t)$ samt $u_3(t)$ till fasor U_1, U_2 samt U_3 i komplex rektangulär form.
b) Beräkna fasorsumman $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$.
c) Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
d) Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}|\sin(wt + \delta_{tot})$$