

## Lösningsförslag till övningstenta

### Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

#### Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  och  $R_4$  kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen  $R$  om  $R_1 = R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega$  och  $R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ . Ange svaret i  $\text{k}\Omega$  med en värdesiffra.

**Notering:**  $\Omega$  är enheten för resistans och utläses 'Ohm').

#### Lösning

Vi sätter in givna värden i den givna formeln för att beräkna  $\frac{1}{R}$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2,2k} + \frac{1}{2,2k} + \frac{1}{10k} + \frac{1}{10k},$$

där

$$\frac{1}{2,2k} + \frac{1}{2,2k} = \frac{2}{2,2k} = \frac{1}{1,1k}$$

samt

$$\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k} = \frac{2}{10k} = \frac{1}{5k}$$

Därmed kan ovanstående uttryck förenklas till

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1,1k} + \frac{1}{5k}$$

Lösningen går att direkt beräkna via miniräknare. Alternativt förenklar vi genom att se till att båda tal i högerledet har en gemensam nämnare:

$$\frac{1}{1,1k} + \frac{1}{5k} = \frac{1 * 5k}{1,1k * 5k} + \frac{1 * 1,1k}{5k * 1,1k} = \frac{5 + 1,1k}{5k * 1,1k} = \frac{6,1k}{5,5M} = \frac{6,1}{5,5k}$$

Därmed gäller att

$$\frac{1}{R} = \frac{6,1}{5,5k}$$

Genom att invertera båda leden ser vi att parallellresistansen  $R \approx 0,9 \text{ k}\Omega$ , då

$$R = \frac{5,5k}{6,1} \approx 0,9 \text{ k}\Omega$$

## Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyn till ogiltiga värden på  $c$ :

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)}$$

### Lösning

Vi börjar med att förenkla täljaren:

$$\frac{c^8 - 16c^4}{c^2} = c^{8-2} - 16c^{4-2} = c^6 - 16c^2$$

Vidare gäller att

$$c^6 - 16c^2 = c^2(c^4 - 16),$$

där

$$c^4 - 16 = (c^2 + 4)(c^2 - 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = \frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c(c^2 - 4)}$$

Eftersom vi har  $c^2$  i täljaren samt  $c$  i nämnaren kan följande förenkling genomföras:

$$\frac{c^2}{c} = c,$$

vilket innebär att

$$\frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c(c^2 - 4)} = \frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c^2 - 4}$$

Vi har nu  $c^2 - 4$  både i täljaren och nämnaren. Dessa tar ut varandra, vilket innebär att

$$\frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c^2 - 4} = c(c^2 + 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = c(c^2 + 4)$$

### Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem. Svara exakt i bråkform.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

#### Lösning

Vi börjar med att härleda en formel för  $x$  via den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6$$

vilket kan skrivas om till

$$6x = -4y - 6$$

Genom att dividera med 6 i respektive led erhålls följande formel för  $x$ :

$$x = \frac{-4y - 6}{6} = -\frac{2y}{3} - 1$$

Vi sätter in ovanstående formel för  $x$  i den andras ekvationen:

$$3y + 6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) + 9 = 0,$$

där

$$6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) = -\frac{6 * 2y}{3} - 6 = -4y - 6$$

Därmed kan formeln ovan förenklas till följande:

$$3y - 4y - 6 + 9 = 0,$$

som kan skrivas om till

$$-y + 3 = 0$$

Genom att addera  $y$  i respektive led ser vi att  $y = 3$ :

$$y = 3$$

Vi sätter in det beräknade värdet för  $y$  i tidigare härledd formel för  $x$  och erhåller då följande:

$$x = -\frac{2y}{3} - 1 = -\frac{2 * 3}{3} - 1$$

Vi ser därmed att  $x = -3$ :

$$x = -2 - 1 = -3$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera erhållna värden. Vi börjar med den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6,$$

där vänsterledet är lika med 12, då

$$4y = 4 * 3 = 12$$

Samtidigt gäller att högerledet är lika med 12, då

$$-6x - 6 = -6 * (-3) - 6 = 18 - 6 = 12$$

Vi testar sedan den andra ekvationen:

$$3y + 6x + 9 = 0,$$

där vänsterledet är lika med 0, då

$$3y + 6x + 9 = 3 * 3 + 6 * (-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

#### Uppgift 4 (1,0 poäng)

- a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning  $k$  samt vilovärde  $m$ .
- b) Ekvationen  $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  har en lösning i intervallet mellan  $180^\circ$  och  $270^\circ$ . Hitta denna lösning och ange den i grader.

#### Lösning

- a) Den första ekvationen visas nedan:

$$4y = -6x - 6 = 0$$

Den räta linjens ekvation har följande form:

$$y = kx + m$$

Genom att dividera med 4 i båda led erhålls följande formel:

$$y = \frac{-6x - 6}{4} = -1,5x - 1,5$$

Därmed gäller att

$$k = -1,5; m = -1,5$$

- b) För att beräkna vinkeln  $v$  använder vi  $\sin^{-1}$ :

$$\sin(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60^\circ$$

För sinus gäller att

$$v_2 = 180^\circ - v_1$$

Därmed gäller att lösningen i intervallet mellan  $180^\circ$  och  $270^\circ$  är  $240^\circ$ , då

$$v_2 = 180^\circ - (-60^\circ) = 240^\circ$$

### Uppgift 5 (2,0 poäng)

Lös följande ekvation:

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 4 - 20x$$

Ange svaret med två decimaler.

#### Lösning

Vi börjar med att förenkla respektive faktor i vänsterledet:

$$8(x+2)^2 = 8(x^2 + 4x + 4) = 8x^2 + 32x + 32$$

samt

$$5(x-3)^2 = 5(x^2 - 6x + 9) = 5x^2 - 30x + 45$$

Därmed gäller för vänsterledet att

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8x^2 + 32x + 32 - (5x^2 - 30x + 45),$$

vilket kan förenklas till

$$8x^2 + 32x + 32 - 5x^2 + 30x - 45,$$

vilket är ekvivalent med

$$3x^2 + 62x - 13$$

Därmed gäller att

$$3x^2 + 62x - 13 = 4 - 20x,$$

vilket kan transformeras till följande:

$$3x^2 + 82x - 17 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -82x + 17$$

Genom att dividera med 3 i både led erhålls följande ekvation:

$$x^2 = -\frac{82x}{3} + \frac{17}{3}$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{-82}{3}\right)\right)^2 + \frac{17}{3}}$$

Eftersom

$$\frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} = -\frac{82}{6} = -\frac{41}{3}$$

gäller att

$$x = -\frac{41}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{41}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}} \approx -\frac{41}{3} \pm 13,87$$

Vi kan därmed erhålla följande värden för x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{41}{3} + 13,87 \approx 0,21 \\ x_2 = -\frac{41}{3} - 13,87 \approx -27,54 \end{cases}$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera svaren. Vi börjar med  $x_1$ . Vänsterledet är ungefär lika med -0,11, då

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8 * (0,21+2)^2 - 5 * (0,21-3)^2 \approx -0,11$$

## Elteknisk matematik

Högerledet är också lika med -0,11, då

$$4 - 20x = 4 - 20 * 0,21 \approx -0,11$$

Vi kollar också  $x_2$ . Vänsterledet är ungefär lika med -554,8, då

$$8(x + 2)^2 - 5(x - 3)^2 = 8 * ((-27,54) + 2)^2 - 5 * ((-27,54) - 3)^2 \approx 554,8$$

Högerledet är också lika med 554,8 då

$$4 - 20x = 4 - 20 * (-27,54) \approx 554,8$$

## Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

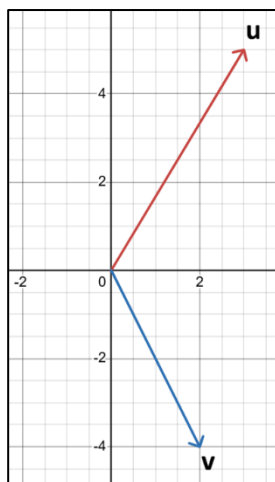
### Uppgift 6 (1,0 poäng)

Du har två vektorer  $u = (3; 5)$  samt  $v = (2; -4)$ .

- Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
- Beräkna vektorernas absolutbelopp  $|u|$  samt  $|v|$ .
- Beräkna vektorernas vinklar  $v_u$  samt  $v_v$ .
- Beräkna en tredje vektor  $w = u - 2v$ .

### Lösning

- Vi ritar upp vektorerna i ett koordinatsystem:
  - Vektor  $u = (3; 5)$  har x-koordinat 3 samt y-koordinat 5.
  - Vektor  $v = (2; -4)$  har x-koordinat 2 samt y-koordinat  $-4$ .



Figur 1: Vektorer  $u$  samt  $v$  i ett koordinatsystem.

- Vektorernas absolutbelopp är lika med deras respektive hypotenusor och beräknas därmed enkelt med Pythagoras sats, där x- och y-koordinaterna utgör närliggande respektive motstående katet.

Vektorernas absolutbelopp  $|u|$  samt  $|v|$  beräknas enligt nedan:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5,83$$

$$|v| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

- För att beräkna vektorernas vinklar kan vi använda oss utav tangens:

$$\tan v = \frac{y}{x},$$

där

- $y$  = vektorns y-koordinat,
- $x$  = vektorns x-koordinat.

För att beräkna vinkeln  $v$  lägger vi till  $\tan^{-1}$  i respektive led. Eftersom tangens repeteras efter ett halvt varv lägger vi till  $\pm 180^\circ$ :

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm 180^\circ$$

Vi kan därmed enkelt beräkna vektorernas vinklar  $v_u$  samt  $v_v$ :

$$v_u = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59,0^\circ$$

samt

$$v_v = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{2}\right) \approx -63,43^\circ$$

d) Vi beräknar vektor  $w$  algebraisk genom att sätta in värdena av vektorer  $u = (3; 5)$  samt  $v = (2; -4)$  i given formel:

$$w = u - 2v = (3; 5) - 2(2; -4),$$

där

$$2(2; -4) = (2 * 2; 2 * (-4)) = (4; -8)$$

Därmed gäller att

$$w = (3; 5) - (4; -8),$$

där

$$-(4; -8) = (-4; 8),$$

vilket innebär att

$$w = (3; 5) + (-4; 8)$$

För att slutföra beräkningen summerar vi ihop x- och y-värdena och ser då att  $w = (-1; 13)$ , då

$$w = (3 - 4; 5 + 8) = (-1; 13)$$



### Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset  $f(x)$  för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där  $C$  är ursprungspriset,  $a$  är den årliga prisökningstakten och  $x$  är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 3 000 000 kr idag efter  $x$  år är värd  $f(x)$  kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1,05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 7 500 000 kr samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

- Ange en funktion som beskriver bostadens pris  $f(x)$  efter  $x$  år.
- Beräkna bostadens värde efter 5 år.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på 0 – 30 år.
- Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

### Lösningar

- Vi utgår från given exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x$$

För aktuell bostad gäller att ursprungspriset  $C = 7,5 * 10^6$  kr samt att tillväxthastigheten  $a = 1,025$ , vilket motsvarar en prisökning på 2,5 % per år. Bostadens pris  $f(x)$  kan då beskrivas enligt nedan:

$$f(x) = 7,5 * 10^6 * 1,025^x$$

- För att beräkna bostadens värde efter 5 år beräknar vi  $f(5)$ . Vi ersätter då samtliga  $x$  med 5 i funktionen:

$$f(5) = 7,5 * 10^6 * 1,025^5 \approx 8,49 * 10^6 \text{ kr}$$

Bostadens pris om 5 år estimeras därmed att uppgå till ca 8 490 000 kr.

- Definitionsmängden är given i uppgiften:

$$0 \leq x \leq 30 \text{ år}$$

För att beräkna motsvarande värdemängd beräknar vi  $f(0)$  samt  $f(30)$ :

$$f(0) = 7,5 * 10^6 * 1,025^0 = 7,5 * 10^6 \text{ kr}$$

$$f(30) = 7,5 * 10^6 * 1,025^{30} \approx 15,7 * 10^6 \text{ kr}$$

Vi kan därmed bestämma värdemängden:

$$7,5 * 10^6 \text{ kr} \leq f(x) \leq 15,7 * 10^6 \text{ kr}$$

- För att beräkna efter hur många år  $x$  som bostadens värde fördubblats sätter vi  $f(x)$  till dubbla ursprungspriset, alltså  $2C$ . Funktionen  $f(x)$  kan sedan användas för att beräkna  $x$ :

$$f(x) = C * 1,025^x = 2C$$

Genom att dividera med C i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$1,025^x = 2$$

För att få lösa ut  $x$  använder vi oss utav logaritmer, då

$$\log 1,025^x = x * \log 1,025$$

Vi tar logaritmen av båda sidor:

$$x * \log 1,025 = \log 2$$

Genom att dividera med  $\log 1,025$  i båda led kan  $x$  beräknas till ca 28 år, då

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,025} \approx 28,1$$

**Uppgift 8 (1,0 poäng)**

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka  $x$ -värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

**Lösning**

För att ta reda på potentiella otillåtna  $x$ -värden undersöker vi när nämnaren blir noll. Vi faktorerar därmed nämnaren genom att beräkna dess nollställan:

$$x^2 - 9 = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$x^2 = 9$$

Genom att ta roten ur respektive led kan vi beräkna rötterna:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Funktionen  $f(x)$  har nollnämnamare när  $x = \pm 3$ , vilket innebär att  $x$  inte kan anta dessa värden

$$x \neq \pm 3$$

Vidare såg vi via ovanstående faktorisering att

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Vi faktorerar även täljaren genom att beräkna dess nollställan:

$$3(x^2 - x - 12) = 0$$

Vi börjar med att dividera med 3 i respektive led:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Ovanstående uttryck kan i sin tur transformeras till

$$x^2 = x + 12$$

Vi kan sedan beräkna  $x$  med PQ-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12},$$

vilket kan förenklas till

$$x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 12} = 0,5 \pm \sqrt{12,25} = 0,5 \pm 3,5$$

Därmed gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 0,5 + 3,5 = 4 \\ x_2 = 0,5 - 3,5 = -3 \end{cases}$$

Via de beräknade nollställena kan täljaren faktoriseras:

$$3(x^2 - x - 12) = 3(x + 3)(x - 4)$$

Vi sätter in den faktorerade täljaren och nämnaren i den givna funktionen:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9} = \frac{3(x + 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$$

För  $x \neq \pm 3$  kan vi förkorta faktorn  $(x + 3)$ , som förekommer både i täljaren och nämnaren. Därmed gäller att

$$f(x) = \frac{3(x - 4)}{(x - 3)} \text{ för } x \neq \pm 3$$

**Uppgift 9 (1,0 poäng)**

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen  $u(t)$  kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t)$  = spänningen över kondensatorn vid tiden  $t$ ,
- $U_0$  = begynnelsepotentialen i  $V$ ,
- $RC$  = kretsens tidskonstant i sekunder,
- $t$  = tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen  $680 \mu F$  är ansluten till ett motstånd på  $10 k\Omega$ . Den är initialt laddad till  $10 V$  och börjar urladdas vid tiden  $t = 0$ .

- Beräkna spänningen efter tre sekunder.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet  $0 - 10$  sekunder.
- Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till 40 % av sitt ursprungliga värde.

**Lösning**

- Med angivna värden kan ovanstående formel skrivas om enligt nedan:

$$u(t) = 10e^{-t/(680\mu * 10k)} = 10e^{-t/6,8} V$$

Vi beräknar  $u(3)$  för att beräkna spänningen efter tre sekunder:

$$u(3) = 10e^{-3/6,8} \approx 6,43 V$$

- Definitionsmängden är given i uppgiftsbeskrivningen:

$$0 \leq t \leq 10 s$$

Värdemängden erhålls genom att beräkna  $u(0)$  samt  $u(10)$ :

$$u(0) = 10e^{-0/6,8} = 10 * e^0 = 10 V$$

$$u(10) = 10e^{-10/6,8} \approx 2,30 V$$

Därmed gäller att

$$2,30 V \leq u(t) \leq 10 V$$

- För att beräkna efter hur lång tid  $t$  som spänningen har minskat till 40 % av ursprungsvärdet  $10 V$  sätter vi  $u(t) = 10 * 0,4 = 4 V$ . Funktionen  $u(t)$  kan sedan användas för att beräkna tiden  $t$ :

$$u(t) = 10e^{-t/6,8} = 4$$

Genom att dividera med 10 i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$e^{-t/6,8} = 0,4$$

För att få lösa ut  $t$  använder vi oss utav den naturliga logaritmen  $\ln$ , då

$$\ln e^{-t/6,8} = -\frac{t}{6,8} * \ln e = -\frac{t}{6,8}$$

Vi tar den naturliga logaritmen i båda led:

$$-\frac{t}{6,8} = \ln 0,4$$

Genom att multiplicera med  $-6,8$  i båda led kan  $t$  beräknas till ca 3,26 sekunder, då

$$t = -6,8 * \ln 0,4 \approx 6,23 \text{ s}$$

Efter ungefär 6,23 sekunder har alltså spänningen minskat till 40 % av ursprungsvärdet.

### Uppgift 10 (1,5 poäng)

En växelspänning har amplituden  $5\text{ V}$ , frekvensen  $100\text{ Hz}$  samt fasen  $90^\circ$ .

- Bestäm växelspänningens ekvation  $u(t)$ . Ange fasen i radianer.
- Rita växelspänningens sinuskurva över en period  $T$ .

### Lösning

- Formeln för en växelspänning  $u(t)$  är följande:

$$u(t) = |U| \sin(\omega t + \delta),$$

där  $|U|$  är amplituden (toppvärdet),  $\omega$  är vinkelhastigheten,  $t$  är tiden och  $\delta$  är fasen.

Sinuskurvans amplitud/toppvärde  $|U|$  är enligt uppgift lika med  $5\text{ V}$ :

$$|U| = 5\text{ V}$$

Sinuskurvans frekvens  $f$  är enligt uppgift lika med  $100\text{ Hz}$ :

$$f = 100\text{ Hz}$$

Motsvarande vinkelhastighet  $\omega$  är därmed lika med  $200\pi\text{ rad/s}$ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 100 = 200\pi\text{ rad/s}$$

Fasen  $\delta$  är enligt uppgift lika med  $90^\circ$ , vilket motsvarar  $\pi/2\text{ rad}$ , då

$$\delta_{\text{rad}} = \delta_{\text{deg}} * \frac{\pi}{180^\circ} = 90 * \frac{\pi}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

För växelspänningen  $u(t)$  gäller därmed följande:

$$u(t) = 5 \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\text{ V}$$

- Vi utgår från sinuskurvans attribut. Eftersom frekvensen  $f$  är lika med  $100\text{ Hz}$  gäller att periodtiden  $T$  är  $10\text{ ms}$ , då

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01\text{ s} = 10\text{ ms}$$

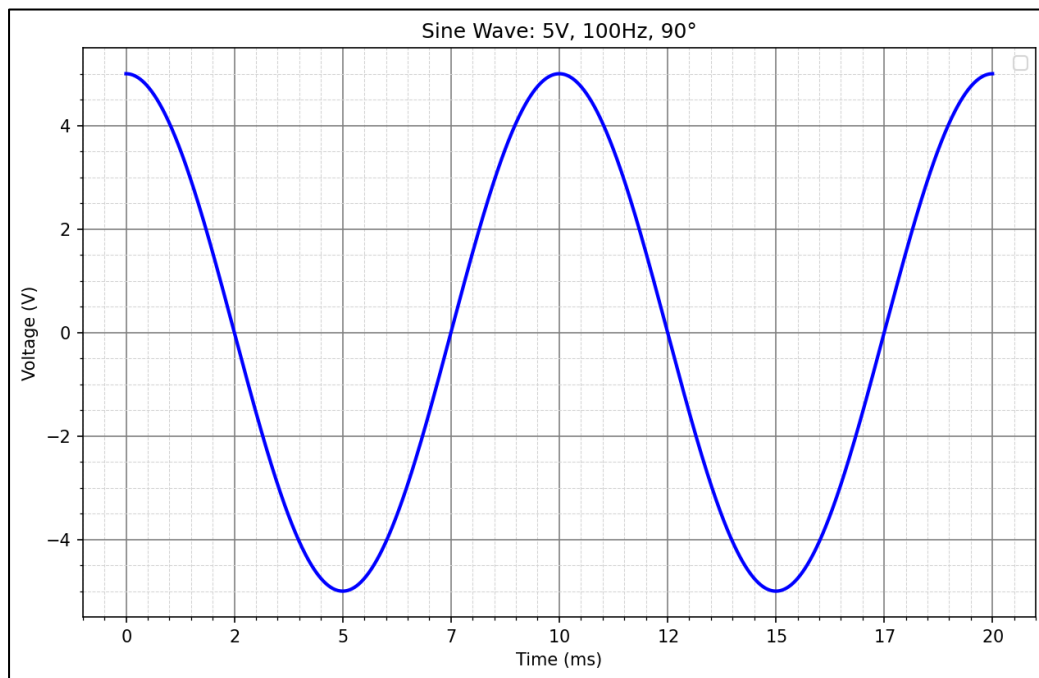
Vi ska då rita ut en sinuskurva som repeteras var 10:e millisekund. För en sinuskurva gäller följande:

- Spänningen är lika med 0 i början av varje varv samt efter ett halvt varv.
- Spännings maximivärde  $|U| = 5\text{ V}$  nås efter en fjärdedel av ett varv.
- Spännings minimivärde  $-|U| = -5\text{ V}$  nås efter tre fjärdedelar av ett varv.

Fasen  $\delta$  är lika med  $90^\circ$ , vilket innebär att kurvan är  $90^\circ/360^\circ = 1/4$ , alltså en fjärdedel av ett varv "före" i x-axeln. Detta motsvarar  $2,5\text{ ms}$ , då

$$\frac{T}{4} = \frac{10\text{ ms}}{4} = 2,5\text{ ms}$$

Vi ritar därmed upp sinuskurvan med periodtiden  $T = 10 \text{ ms}$ :



Figur 2: Växelspänningen  $u(t) = 5\sin(200\pi t + \pi/2) \text{ V}$ .

### Uppgift 11 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på 54 dB. Hur många gåingers spänningsförstärkning motsvarar det?

### Lösning

Vi bestämmer ett uttryck för den linjära förstärkningen  $G_{lin}$  ur följande formel:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin} = 54$$

Genom att dividera med 20 i båda led samt vända på uttrycket kan ovanstående ekvation omvandlas till

$$\log_{10} G_{lin} = \frac{54}{20} = 2,7$$

Vi upphöjer sedan båda led med basen 10 för att isolera  $G_{lin}$  i vänsterledet, då

$$10^{\log_{10} G_{lin}} = G_{lin}$$

Därmed gäller att

$$G_{lin} = 10^{2,7} \approx 501$$

Spänningsförstärkningen uppgår därmed till en faktor omkring 500.



**Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal****Uppgift 12 (1,0 poäng)**

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen  $f(x)$  och bestäm uttrycket för  $f'(x)$ .
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös  $f'(x) = 0$ .
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till  $f(x)$  för intervallet  $0 \leq x \leq 5$ . Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

**Lösning**

- a) Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2x - 4$$

- b) Vi beräknar  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 2x - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2x = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då  $x = 2$ , då

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

- c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan  $f'(x)$ :

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla  $x$ , inklusive när  $x = 2$ , ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när  $x = 2$ , dvs.  $f''(2)$ , varvid vi skriver ut denna:

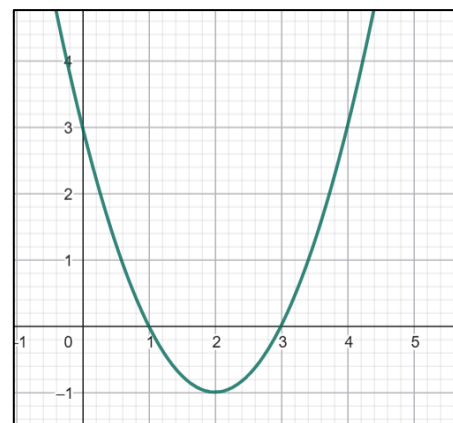
$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

- d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in  $x = 2$  i funktionen, dvs. vi beräknar  $f(2)$ :

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i  $(2; -1)$ .

- e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten  $(2; -1)$  beräknades  $f(0) = 3$  samt  $f(4) = 3$  för att rita grafen.



Figur 3: Graf till funktionen  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

### Uppgift 13 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$  = spänningsfallet över kondensatorn vid tiden  $t$ ,
- $t$  = tiden i sekunder.

- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för  $u'(t)$ .
- Beräkna  $u'(t)$  vid tiden  $t = 3$  s.
- Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden  $t = 3$  s.

### Lösning

- Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

- Vi utvecklar  $u(t)$ :

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}) = 15 - 15e^{-0,2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet  $u(t)$  för att beräkna  $u'(t)$ :

$$u'(t) = -0,2 * (-15e^{-0,2t}) = 3e^{-0,2t} \text{ V/s}$$

- Vi beräknar  $u'(t)$  då tiden  $t = 3$  s, dvs.  $u'(3)$ :

$$u'(3) = 3e^{-0,2*3} = 3e^{-0,6} \approx 1,65 \text{ V/s}$$

- Vi beräknar  $u''(t)$  genom att derivera  $u'(t)$ :

$$u''(t) = -0,2 * 3e^{-0,2t} = -0,6e^{-0,2t} \text{ V/s}^2$$

Vi beräknar sedan  $u''(3)$ :

$$u''(3) = -0,6e^{-0,2*3} = -0,6e^{-0,6} \approx -0,33 \text{ V/s}^2$$

Spänningsökningen minskar, då  $u''(3) < 0$ .

### Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera följande funktioner:

a)  $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$

b)  $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$

c)  $u(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) V$

### Lösning

a) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$f'(x) = (e^{2x} * \ln x^2)' = (e^{2x})' * \ln x^2 + e^{2x} * (\ln x^2)',$$

där kedjeregeln ger att

$$(e^{2x})' = e^{2x} * (2x)' = 2e^{2x}$$

samt

$$(\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} * (x^2)' = \frac{1}{x^2} * 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + e^{2x} * \frac{2}{x},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + \frac{2e^{2x}}{x}$$

Vi kan sedan bryta ut  $2e^{2x}$ :

$$f'(x) = 2e^{2x} \left( \ln x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

Vidare gäller att

$$\ln x^2 = 2 \ln |x|$$

Därmed kan det slutgiltiga uttrycket bestämmas:

$$f'(x) = 2e^{2x} \left( 2 \ln |x| + \frac{1}{x} \right)$$

b) Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$f'(x) = \left( \frac{3x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(3x^2)' * \ln x - 3x^2 * (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

där

$$(3x^2)' = 6x$$

samt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x^2 * \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

där

$$3x^2 * \frac{1}{x} = 3x$$

Detta innebär att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x}{(\ln x)^2},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = \frac{3x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

c) Vi applicerar kedjeregeln för att lösa uppgiften:

$$\frac{d}{dx} [\cos ax + \delta] = -\sin ax * (ax + \delta)' = -a * \sin ax$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5 \sin \left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) * \left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)',$$

där

$$\left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)' = 100\pi,$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5 \sin \left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) * 100\pi,$$

vilket kan skrivas om till

$$u'(t) = -500\pi \sin \left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ V/s}$$

### Uppgift 15 (1,0 poäng)

Strömmen  $i(t)$  i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där  $t$  är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten  $A$  (Ampere).

Laddningen uppgår till  $2 C$  vid start, dvs.  $q(0) = 2$ .

- Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen  $I(t)$ .
- Bestäm ett uttryck för laddningen  $q(t)$  i kondensatorn som en funktion av tiden.
- Bestäm integrationskonstanten  $C$ .
- Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

### Lösning

- Vi bestämmer den primitiva funktionen  $I(t)$  genom att integrera  $i(t)$  utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t) dt = \int (2e^{-0,5t}) dt = 2 \int (e^{-0,5t}) dt = 2 \left( \frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

- Vi integrerar strömmen  $i(t)$  för intervallet  $(0, t)$ :

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar  $q(t)$ :

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5 \cdot 0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - C = -4e^{-0,5t}$$

- För att bestämma integrationskonstanten  $C$  bestämmer vi  $q(0)$ :

$$q(0) = -4e^{-0,5 \cdot 0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start  $q(0) = 2 C$ . Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten  $C = 6$ , då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan laddningen  $q(t)$  efter en viss tid  $t$  beräknas med följande formel:

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

- Laddningen efter 2 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna  $q(2)$ :

$$q(2) = -4e^{-0,5 \cdot 2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4,53 C$$

Efter 2 sekunder har alltså ca  $4,53 C$  flödat in i kondensatorn.

**Uppgift 16 (2,0 poäng)**

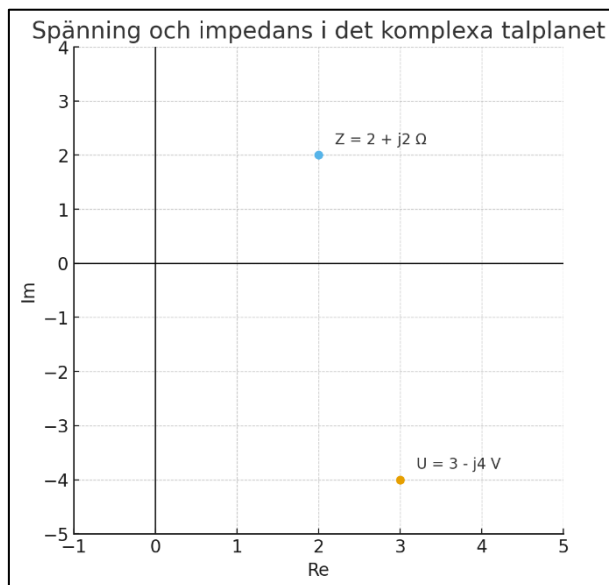
En krets matas med spänningen  $U = 3 - j4 \text{ V}$ . Kretsen har impedansen  $Z = 2 + j2 \Omega$ . Beräkna strömmen  $I$  som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

**Lösning**

För att beräkna strömmen  $I$  måste spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 2: Spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen  $U$ , vars absolutbelopp  $|U|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel  $\delta_u$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $U$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$ ) samt att  $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_u$  korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad V}$$

Vi omvandlar sedan impedansen  $Z$ , vars absolutbelopp  $|Z|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel  $\delta_z$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $Z$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_z$  korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen  $I$  på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A,$$

där

- strömmens absolutbelopp  $|I| = 1,8 A$ ,
- strömmens fasvinkel  $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$ .

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- $I_{re}$  = strömmens reella del,
- $I_{im}$  = strömmens imaginära del (indikerad via  $j$ ).

Vi beräknar först strömmens reella del  $I_{re}$  med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 A$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del  $I_{im}$  med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 A$$

Strömmen  $I$  kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 A$$

**Uppgift 17 (2,0 poäng)**

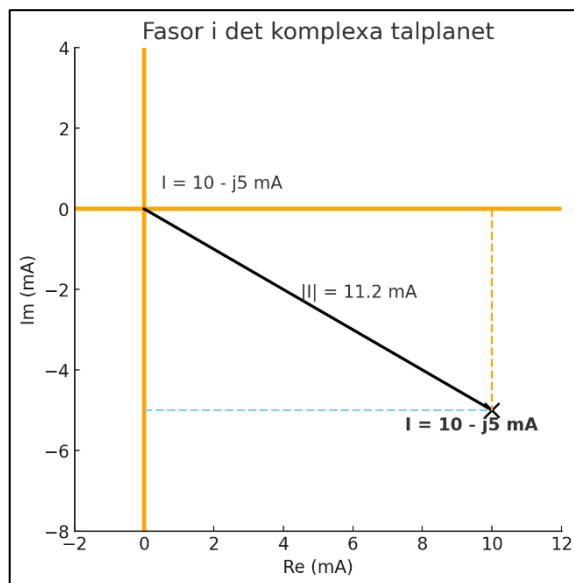
En ström  $i(t)$  i en växelströmskrets kan representeras av en fasor  $I$ , som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5 \text{ mA}$$

- Rita ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Uttryck fasorn  $I$  på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet  $|I|$  samt fasvinkeln  $\delta$  så att  $I = |I|e^{j\delta}$ .
- Anta att strömmens frekvens  $f = 10 \text{ Hz}$ . Bestäm vinkelhastigheten  $\omega$ .
- Skriv  $i(t)$  som en tidsberoende funktion  $i(t) = |I| * e^{j(\omega t + \delta)}$ .

**Lösning**

- Vi ritar ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen  $I = 10 - j5 \text{ mA}$  i det komplexa talplanet.

- Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp  $|I|$  med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln  $\delta$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $I$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$ ) samt att  $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta$  korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn  $I$  med Eulers form:

$$I \approx 11,2e^{-j0,46} \text{ mA}$$

- Vinkelhastigheten  $\omega$  beräknas med hjälp av frekvensen  $f = 10 \text{ Hz}$ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 10 = 20\pi \text{ rad/s}$$

- Vi sätter in tidskomponenten  $\omega t$ , där  $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ , i uttrycket för fasorn  $I$  och erhåller då följande:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(20\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$



**Uppgift 18 (2,0 poäng)**

Du har följande vektorer:  $a = (2; 1)$ ,  $b = (3; -4)$  samt  $c = (-1; 3)$ . I uppgifterna nedan ska varje vektor  $(x; y)$  tolkas som ett komplext tal  $z = x + jy$ .

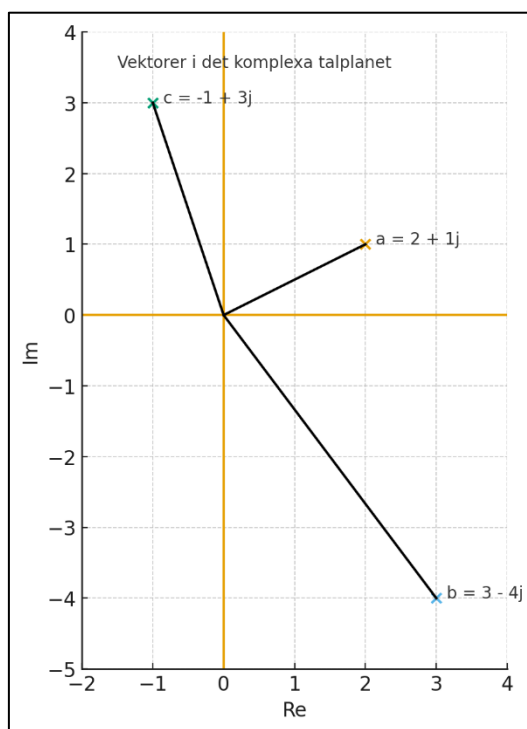
- Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
- Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
- Bestäm längden (absolutbeloppet) av  $2a - 3c$ , dvs.  $|2a - 3c|$ .
- Bestäm vektorernas vinklar.
- Bestäm en vektor  $d$  med längden 7 som är motsatt riktad  $a$ .

**Lösning**

- a) Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

- b) Vi ritat ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 4: Vektorer  $a$ ,  $b$  och  $c$  i det komplexa talplanet.

- c) Vi beräknar vektorernas längd genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

d) Vi bestämmer först  $2a - 3c$ :

$$2a - 3c = 2(2 + j) - 3(-1 + j3),$$

där

$$2(2 + j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1 + j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet  $|2a - 3c|$ :

$$|2a - 3c| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 * 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,9$$

e) Vi beräknar vinklarna med  $\tan^{-1}$ . Vi börjar med  $\delta_a$ :

$$\delta_a = \tan^{-1} \frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx 26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $a$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_a \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_a$  korrekt.

Vi fortsätter sedan med  $\delta_b$ :

$$\delta_b = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,93 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $b$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$ ) samt att  $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_b$  korrekt.

Vi avslutar med  $\delta_c$ :

$$\delta_c = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,25 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $c$  ligger i andra kvadranten ( $90^\circ \leq \delta_c \leq 180^\circ$ ) adderar vi  $\pi = 180^\circ$ . Vi sätter därmed  $k$  till 1:

$$\delta_c \approx -1,25 + 1 * \pi \approx 1,89 \text{ rad} \approx 108,3^\circ$$

f) Den nya vektorn  $d$  är motsatt riktad  $a$ , vilket innebär att dess fasvinkel  $\delta_d = \delta_a + \pi$ :

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0,46 + \pi \approx 3,6 \text{ rad} \approx 206,6^\circ$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp  $|d| = 7$ . Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + jd_{im},$$

där

- $d_{re}$  = den reella delen,
- $d_{im}$  = den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen  $d_{re}$  med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos (3,6) \approx -6,26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen  $d_{im}$  med sinus:

$$\sin \delta_a = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin \delta_a \approx 7 * \sin (3,6) \approx -3,13$$

Därmed kan vektor  $d$  skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6,26 - j3,13$$

### Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 1,5 \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ V}$$

Den totala spänningen i kretsen  $U_{tot}$  beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

- Skriv om spänningarna  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  samt  $u_3(t)$  till fasor  $U_1$ ,  $U_2$  samt  $U_3$  i komplex rektangulär form.
- Beräkna fasorsumman  $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$ .
- Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(\omega t + \delta_{tot})$$

### Lösning

- a) Vi omvandlar sinusspänningarna till motsvarande fasor en efter en:

$$U_1 = 2 \cos(25^\circ) + j2 \sin(25^\circ) \approx 1,81 + j0,85 \text{ V}$$

$$U_2 = 5 \cos(-45^\circ) + j5 \sin(-45^\circ) \approx 3,54 - j3,54 \text{ V}$$

$$U_3 = 1,5 \cos(36^\circ) + j1,5 \sin(36^\circ) \approx 1,21 + j0,88 \text{ V}$$

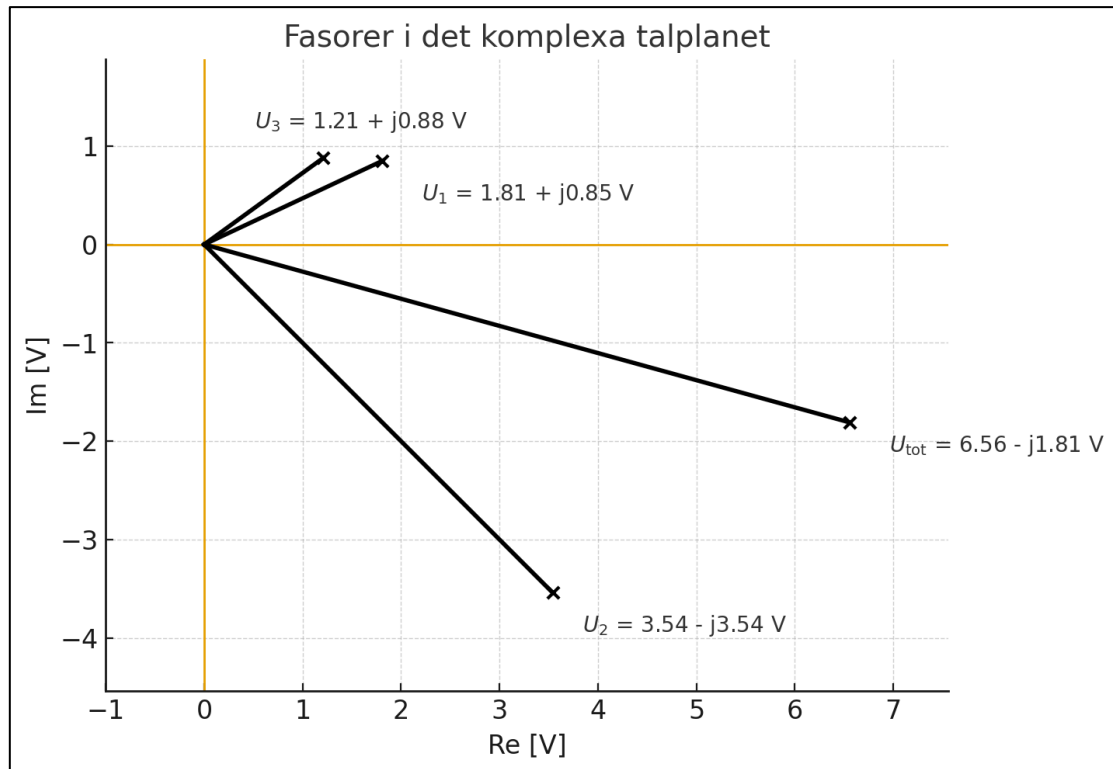
- b) Vi beräknar fasorsumman  $U_{tot}$  genom att addera de beräknade fasorerna  $U_1$ ,  $U_2$  samt  $U_3$ :

$$U_{tot} \approx 1,81 + j0,85 + 3,54 - j3,54 + 1,21 + j0,88,$$

vilket kan skrivas om till

$$U_{tot} \approx 6,56 - j1,81 \text{ V}$$

c) Vi ritat ut fasorerna i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 1: Fasorer  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  samt  $U_{tot}$  i det komplexa talplanet.

d) Vi omvandlar fasorsumman  $U_{tot}$  till motsvarande sinusformad spänning i tidsdomänen:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(\omega t + \delta_{tot}),$$

där

$$|U_{tot}| \approx \sqrt{6,56^2 + (-1,81)^2} \approx 6,81 \text{ V}$$

samt

$$\delta_{tot} = \tan^{-1} \frac{-1,81}{6,56} \pm k\pi \approx -14,9^\circ \pm k\pi$$

där

$$k = 0, 1, 2 \dots n$$

Eftersom  $U_{tot}$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$ ) samt att  $-14,9^\circ = 360^\circ - 14,9^\circ = 345,1^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_{tot}$  korrekt.

Därmed kan sinusspänningen  $u_{tot}(t)$  uttryckas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) \approx 6,81 \sin(\omega t - 14,9^\circ) \text{ V}$$