

Lösningsförslag till övningsdugga 3

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Lösning

- Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2x - 4$$

- Vi beräknar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2x = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då $x = 2$, då

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

- Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan $f'(x)$:

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla x , inklusive när $x = 2$, ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när $x = 2$, dvs. $f''(2)$, varvid vi skriver ut denna:

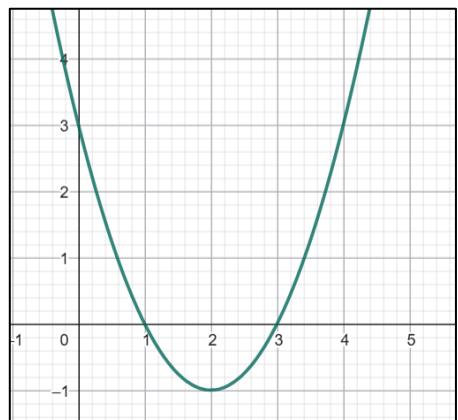
$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

- Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in $x = 2$ i funktionen, dvs. vi beräknar $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 * 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i $(2; -1)$.

- Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten $(2; -1)$ beräknades $f(0) = 3$ samt $f(4) = 3$ för att rita grafen.



Figur 1: Graf till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$ = spänningsfallet över kondensatoren vid tiden t ,
- t = tiden i sekunder.

- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
- Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 3 \text{ s}$.
- Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 3 \text{ s}$.

Lösning

- Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

- Vi utvecklar $u(t)$:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}) = 15 - 15e^{-0,2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -0,2 * (-15e^{-0,2t}) = 3e^{-0,2t} \text{ V/s}$$

- Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 3 \text{ s}$, dvs. $u'(3)$:

$$u'(3) = 3e^{-0,2*3} = 3e^{-0,6} \approx 1,65 \text{ V/s}$$

- Vi beräknar $u''(t)$ genom att derivera $u'(t)$:

$$u''(t) = -0,2 * 3e^{-0,2t} = -0,6e^{-0,2t} \text{ V/s}^2$$

Vi beräknar sedan $u''(3)$:

$$u''(3) = -0,6e^{-0,2*3} = -0,6e^{-0,6} \approx -0,33 \text{ V/s}^2$$

Spänningsökningen minskar, då $u''(3) < 0$.

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där t är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A (Ampere).

Laddningen uppgår till $2 C$ vid start, dvs. $q(0) = 2$.

- a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t)$.
- b) Bestäm ett uttryck för laddningen $q(t)$ i kondensatorn som en funktion av tiden.
- c) Bestäm integrationskonstanten C .
- d) Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

Lösning

- a) Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t) dt = \int (2e^{-0,5t}) dt = 2 \int (e^{-0,5t}) dt = 2 \left(\frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

- b) Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5*0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - C = -4e^{-0,5t}$$

- c) För att bestämma integrationskonstanten C bestämmer vi $q(0)$:

$$q(0) = -4e^{-0,5*0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 2 C$. Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten $C = 6$, då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan laddningen $q(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

- d) Laddningen efter 2 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna $q(2)$:

$$q(2) = -4e^{-0,5*2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4,53 C$$

Efter 2 sekunder har alltså ca $4,53 C$ flödat in i kondensatorn.

Uppgift 4 (1,0 poäng)

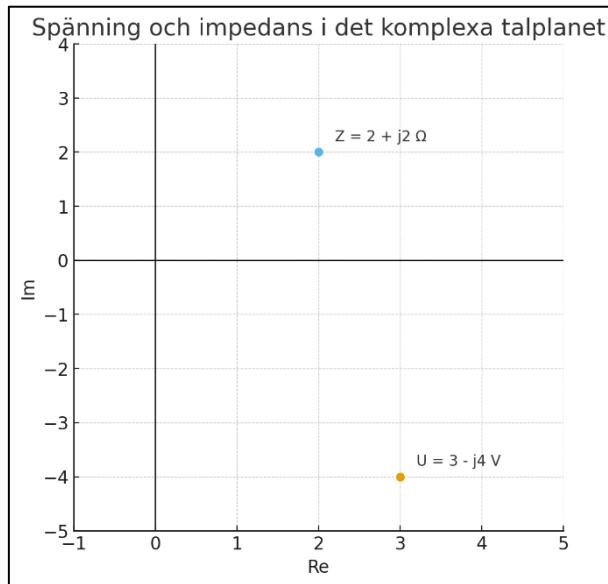
En krets matas med spänningen $U = 3 - j4 \text{ V}$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2 \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning

För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 2: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U , vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med \tan^{-1} :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$) samt att $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad V}$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z , vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med \tan^{-1} :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Elteknisk matematik

Eftersom Z ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1,8 \text{ A}$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 \text{ A}$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 \text{ A}$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 \text{ A}$$

Uppgift 5 (1,0 poäng)

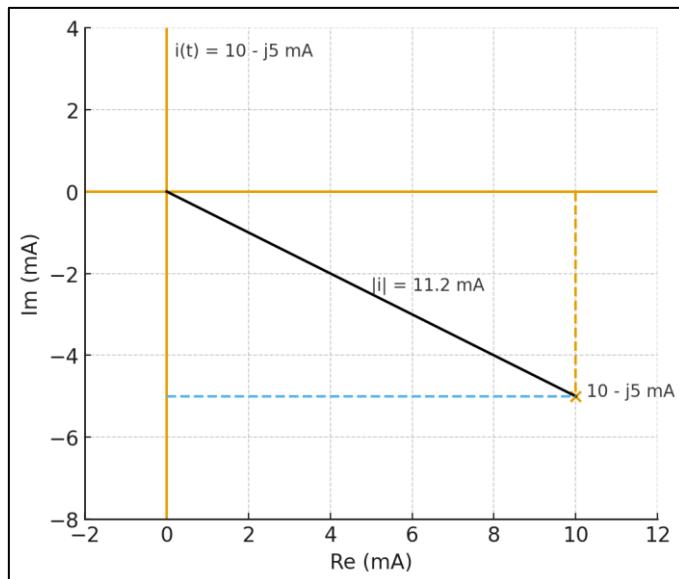
En ström $i(t)$ i en växelströmskrets skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$i(t) = 10 - j5 \text{ mA}$$

- a) Rita ut strömmen i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- b) Uttryck strömmen på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
- c) Anta att strömmens frekvens $f = 50 \text{ Hz}$. Bestäm vinkelhastigheten w .
- d) Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Lösning

- a) Vi ritar ut strömmen i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen $i(t) = 10 - j5 \text{ mA}$ i det komplexa talplanet.

- b) Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med \tan^{-1} :

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom $i(t)$ ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$) samt att $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka strömmen $i(t)$ med Eulers form:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(\omega t - 0,46)} \text{ mA}$$

- c) Vinkelhastigheten w beräknas med hjälp av frekvensen $f = 50 \text{ Hz}$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

- d) Vi sätter in den bestämda vinkelhastigheten w i det bestämda uttrycket för $i(t)$:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$