L08 – Typexempel med lösningsförslag

1. Ersättningen $f(x)$ för ett godtyckligt uppdrag kan beräknas via följande funktion:

$$f(x) = kx + m,$$

där k är antalet arbetade timmar och m representerar grundarvodet, dvs. ersättningen som utbetalas enbart för att anta uppdraget.

Efter förhandlingar har grundarvodet satts till $20\ 000\ kr$ och timarvodet satts till $800\ kr$. Arbetet är begränsat till maximalt 100 timmar enligt den fastställda budgetramen, vilket innebär att projektet måste slutföras inom denna tidsallokering.

a) Bestäm funktionens definitionsmängd.
b) Beräkna funktionens värdemängd i tusentals kronor.
c) Rita upp funktionens graf i tusentals kronor.
d) Hur högt hade timarvodet behövt vara för att ersättningen ska uppgå till $60\ 000\ kr$ efter 40 arbetade timmar? Anta att grundarvodet är oförändrat. Rita upp motsvarande graf med definitionsmängden beräknad i a).

Lösningar

a) Det minsta antalet arbetade timmar $x = 0$ (x kan rimligtvis ej understiga 0), vilket sätter definitionsmängdens minimivärde. Arbetet är också tidsbegränsat till 1000 timmar, vilket sätter definitionsmängdens maximivärde. Därmed gäller att

$$0 \leq x \leq 100\ h$$

b) Med givna värden i tusentals kronor gäller att timlönen $k = 0{,}8$ samt grundarvodet $m = 20$. Funktionen kan då skrivas så som visas nedan:

$$f(x) = 0{,}8x + 20$$

Eftersom funktionen är linjär gäller att värdemängdens minimi- och maximivärde erhålls via motsvarande minimi- och maximivärde i definitionsmängden. Värdemängdens minimivärde beräknas därmed via motsvarande minimivärde i definitionsmängden, alltså $x = 0$. Vi beräknar därmed $f(0)$:

$$f(0) = 0{,}8 * 0 + 20 = 20$$

Värdemängdens maximivärde beräknas via motsvarande maximivärde i definitionsmängden, alltså $x = 100$. Vi beräknar därmed $f(100)$:

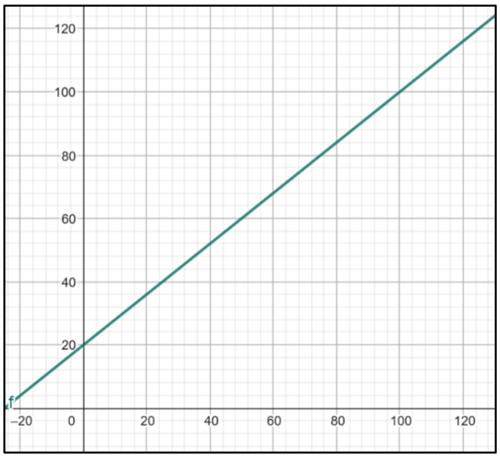
$$f(100) = 0{,}8 * 100 + 20 = 80 + 20 = 100$$

För funktionens värdemängd gäller då att

$$20 \leq f(x) \leq 100,$$

vilket kan utläsas som att ersättningen som minst kommer uppgå till $20\ 000\ kr$ och som mest $100\ 000\ kr$.

c) Vi ritar motsvarande graf för definitionsmängden $0 \leq x \leq 100$, där k utgör lutningen och m utgör vilovärdet, se figuren nedan.



Figur 1: Funktionen f(x) = 0,8x + 20.

d) Vi genomför beräkningen i tusentals kronor. I detta fall gäller att ersättningen $f(x) = 60$, grundarvodet $m = 20$ och antalet arbetade timmar $x = 40$. Vad som söks är timarvodet k. Vi skriver ut den nya funktionens formel:

$$f(x) = 40k + 20 = 60,$$

vilket kan transformeras till

$$40k = 40$$

Genom att dividera med 40 i båda led ser vi att timlönen hade behövt uppgå till 1000 kr, då

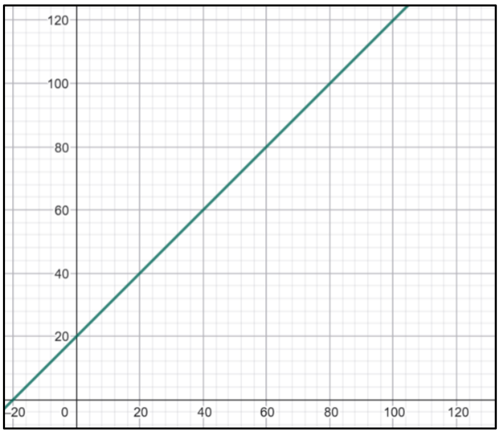
$$k = 1$$

och k är timlönen i tusentals kronor.

Med denna timlön kan ersättningen $f(x)$ beskrivas såsom visas nedan:

$$f(x) = 1 * x + 20 = x + 20$$

Motsvarande graf visas nedan för definitionsmängden $0 \leq x \leq 100$:



Figur 2: Funktionen f(x) = x + 20.

2. Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 4 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 2 500 000 kr idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$f(x) = 2{,}5 * 10^6 * 1{,}04^x \text{ .}$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 6 000 000 kr samt att den årliga prisökningen är 3 %.

a) Ange en funktion som beskriver bostaden pris $f(x)$ efter x år.

b) Beräkna bostadens värde efter 5 år.

c) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på $0 - 20$ år.

d) Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Lösningar

a) Vi utgår från given exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x$$

För aktuell bostad gäller att ursprungspriset $C = 6 * 10^6\ kr$ samt att tillväxthastigheten $a = 1{,}03$, vilket motsvarar en prisökning på 3 % per år. Bostadens pris $f(x)$ kan då beskrivas enligt nedan:

$$f(x) = 6 * 10^6 * 1{,}03^x$$

b) För att beräkna bostadens värde efter 5 år beräknar vi $f(5)$. Vi ersätter då samtliga x med 5 i funktionen:

$$f(5) = 6 * 10^6 * 1{,}03^5 \approx 6{,}96 * 10^6\ kr$$

Bostadens pris om 5 år estimeras därmed att uppgå till ca 6 960 000 kr.

c) Definitionsmängden är given i uppgiften:

$$0 \leq x \leq 20 \text{ år}$$

För att beräkna motsvarande värdemängd beräknar vi $f(0)$ samt $f(20)$:

$$f(0) = 6 * 10^6 * 1{,}03^0 = 6 * 10^6\ kr$$

$$f(20) = 6 * 10^6 * 1{,}03^{20} \approx 10{,}8 * 10^6\ kr$$

Vi kan därmed bestämma värdemängden:

$$6 * 10^6\ kr \leq f(x) \leq 10{,}8 * 10^6\ kr$$

d) För att beräkna efter hur många år x som bostadens värde fördubblats sätter vi $f(x)$ till dubbla ursprungspriset, alltså $2C$. Funktionen $f(x)$ kan sedan användas för att beräkna x:

$$f(x) = C * 1{,}03^x = 2C$$

Genom att dividera med C i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$1{,}03^x = 2$$

För att få lösa ut x använder vi oss utav logaritmer, då

$$\log 1{,}03^x = x * \log 1{,}03$$

Vi tar logaritmen av båda sidor:

$$x * \log 1{,}03 = \log 2$$

Genom att dividera med $\log 1{,}03$ i båda led kan x beräknas till ca 23 år och 6 månader, då

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} \approx 23{,}5$$