Lösningsförslag till övningstentamen

Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer R_1, R_2, R_3 och R_4 kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen R om $R_1 = R_2 = 2{,}2\ k\Omega$ och $R_3 = R_4 = 10\ k\Omega$. Ange svaret i $k\Omega$ med en värdesiffra.

Lösning

Vi sätter in givna värden i den givna formeln för att beräkna $\frac{1}{R}$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2{,}2k} + \frac{1}{2{,}2k} + \frac{1}{10k} + \frac{1}{10k},$$

där

$$\frac{1}{2{,}2k} + \frac{1}{2{,}2k} = \frac{2}{2{,}2k} = \frac{1}{1{,}1k}$$

samt

$$\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k} = \frac{2}{10k} = \frac{1}{5k}$$

Därmed kan ovanstående uttryck förenklas till

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1{,}1k} + \frac{1}{5k}$$

Lösningen går att direkt beräkna via miniräknare. Alternativt förenklar vi genom att se till att båda tal i högerledet har en gemensam nämnare:

$$\frac{1}{1{,}1k} + \frac{1}{5k} = \frac{1 * 5k}{1{,}1k * 5k} + \frac{1 * 1{,}1k}{5k * 1{,}1k} = \frac{5 + 1{,}1k}{5k * 1{,}1k} = \frac{6{,}1k}{5{,}5M} = \frac{6{,}1}{5{,}5k}$$

Därmed gäller att

$$\frac{1}{R} = \frac{6{,}1}{5{,}5k}$$

Genom att invertera båda leden ser vi att parallellresistansen $R \approx 0{,}9\ k\Omega$, då

$$R = \frac{5{,}5k}{6{,}1} \approx 0{,}9\ k\Omega$$

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyns till ogiltiga värden på c:

$$\frac{\left(\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}\right)}{c(c^2 - 4)}$$

Lösning

Vi börjar med att förenkla täljaren:

$$\frac{c^8 - 16c^4}{c^2} = c^{8-2} - 16c^{4-2} = c^6 - 16c^2$$

Vidare gäller att

$$c^6 - 16c^2 = c^2(c^4 - 16),$$

där

$$c^4 - 16 = (c^2 + 4)(c^2 - 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = \frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4))}{c(c^2 - 4)}$$

Eftersom vi har c^2 i täljaren samt c i nämnaren kan följande förenkling genomföras:

$$\frac{c^2}{c} = c,$$

vilket innebär att

$$\frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4))}{c(c^2 - 4)} = \frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4))}{c^2 - 4}$$

Vi har nu $c^2 - 4$ både i täljaren och nämnaren. Dessa tar ut varandra, vilket innebär att

$$\frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4))}{c^2 - 4} = c(c^2 + 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = c(c^2 + 4)$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Lösning

Vi börjar med att härleda en formel för x via den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6$$

vilket kan skrivas om till

$$6x = -4y - 6$$

Genom att dividera med 6 i respektive led erhålls följande formel för x:

$$x = \frac{-4y - 6}{6} = -\frac{2y}{3} - 1$$

Vi sätter in ovanstående formel för x i den andra ekvationen:

$$3y + 6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) + 9 = 0,$$

där

$$6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) = -\frac{6 * 2y}{3} - 6 = -4y - 6$$

Därmed kan formeln ovan förenklas till följande:

$$3y - 4y - 6 + 9 = 0,$$

som kan skrivas om till

$$-y + 3 = 0$$

Genom att addera y i respektive led ser vi att $y = 3$:

$$y = 3$$

Vi sätter in det beräknade värdet för y i tidigare härledd formel för x och erhåller då följande:

$$x = -\frac{2y}{3} - 1 = -\frac{2 * 3}{3} - 1$$

Vi ser därmed att $x = -3$:

$$x = -2 - 1 = -3$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera erhållna värden. Vi börjar med den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6,$$

där vänsterledet är lika med 12, då

$$4y = 4 * 3 = 12$$

Samtidigt gäller att högerledet är lika med 12, då

$$-6x - 6 = -6 * (-3) - 6 = 18 - 6 = 12$$

Vi testar sedan den andra ekvationen:

$$3y + 6x + 9 = 0,$$

där vänsterledet är lika med 0, då

$$3y + 6x + 9 = 3 * 3 + 6 * (-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

Uppgift 4 (1,0 poäng)

a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning *k* samt vilovärde *m.*

b) Ekvationen $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning i intervallet mellan $180°$ och $270°$. Hitta denna lösning och ange den i grader.

Lösning

a) Den första ekvationen visas nedan:

$$4y = -6x - 6 = 0$$

Den räta linjens ekvation har följande form:

$$y = kx + m$$

Genom att dividera med 4 i båda led erhålls följande formel:

$$y = \frac{-6x - 6}{4} = -1{,}5x - 1{,}5$$

Därmed gäller att

$$k = -1{,}5; m = -1{,}5$$

b) För att beräkna vinkeln v använder vi sin^{-1}:

$$\sin(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2} => v_1 = sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60°$$

För sinus gäller att

$$v_2 = 180° - v_1$$

Därmed gäller att lösningen i intervallet mellan $180°$ och $270°$ är $240°$, då

$$v_2 = 180° - (-60°) = 240°$$

Uppgift 5 (2,0 poäng)
Lös följande ekvation:

$$(x+2)^2 + 2(x-2)^2 = 45 - 6x$$

Lösning
Vi börjar med att förenkla respektive faktor i vänsterledet:

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

samt

$$2(x-2)^2 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2 - 8x + 8$$

Därmed gäller för vänsterledet att

$$(x+2)^2 + 2(x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 8x + 8,$$

vilket kan förenklas till

$$3x^2 - 4x + 12$$

Därmed gäller att

$$3x^2 - 4x + 12 = 45 - 6x,$$

vilket kan transformeras till följande:

$$3x^2 + 2x - 33 = 0$$

Genom att dividera med 3 i både led erhålls följande ekvation:

$$x^2 + \frac{2x}{3} - 11 = 0,$$

som kan skrivas om till

$$x^2 = -\frac{2x}{3} + 11$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\right)^2 + 11},$$

där

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Därmed gäller att

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 11} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}$$

Därmed gäller att

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{10}{3}$$

Vi kan därmed bestämma rötterna för x

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Kontrollräkning genom att sätta in de bestämda rötterna för x indikerar att rötterna är korrekta.

Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

Uppgift 6 (1,0 poäng)

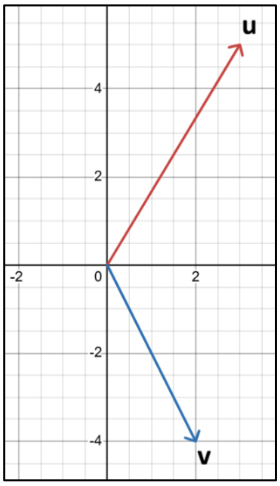
Du har två vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$.

a) Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
b) Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
c) Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v.
d) Beräkna en tredje vektor $w = u - 2v$.

Lösning

a) Vi ritar upp vektorerna i ett koordinatsystem:

- Vektor $u = (3; 5)$ har x-koordinat 3 samt y-koordinat 5.
- Vektor $v = (2; -4)$ har x-koordinat 2 samt y-koordinat -4.



Figur 1: Vektorer u samt v i ett koordinatsystem.

b) Vektorernas absolutbelopp är lika med deras respektive hypotenusa och beräknas därmed enkelt med Pythagoras sats, där x- och y-koordinaterna utgör närliggande respektive motstående katet.

Vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$ beräknas enligt nedan:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$$

$$|v| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$$

c) För att beräkna vektorernas vinklar kan vi använda oss utav tangens:

$$\tan v = \frac{y}{x},$$

där

- $y =$ vektorns y-koordinat,
- $x =$ vektorns x-koordinat.

För att beräkna vinkeln v lägger vi till tan^{-1} i respektive led. Eftersom tangens repeteras efter ett halvt varv lägger vi till $\pm\, k * 180°$, där $k = 0{,}1{,}2 \ldots n$:

$$v = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm k * 180°$$

Vi kan därmed enkelt beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v. Vi börjar med v_u:

$$v_u = tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \pm k * 180° \approx 59{,}0° \pm k * 180°$$

Eftersom u ligger i första kvadranten ($0° \leq v_u \leq 90°$) är den beräknade vinkeln v_u korrekt.

Vi beräknar sedan v_v:

$$v_v = tan^{-1}\left(\frac{-4}{2}\right) \pm k * 180° \approx -63{,}4° \pm k * 180°$$

Eftersom v ligger i fjärde kvadranten ($270° \leq v_v \leq 360°$) samt att $-63{,}4° = 360° - 64{,}3° = 296{,}6°$ är den beräknade vinkeln v_v korrekt.

d) Vi beräknar vektor w algebraisk genom att sätta in värdena av vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$ i given formel:

$$w = u - 2v = (3; 5) - 2(2; -4),$$

där

$$2(2; -4) = (2 * 2;\ 2 * (-4)) = (4; -8)$$

Därmed gäller att

$$w = (3; 5) - (4; -8),$$

där

$$-(4; -8) = (-4; 8),$$

vilket innebär att

$$w = (3; 5) + (-4; 8)$$

Vi söker koordinater $(w_x; w_y)$ för vektor w. Vi bestämmer dessa genom att summera x- samt y-koordinaterna:

$$w_x = 3 - 4 = -1$$

$$w_y = -5 + 8 = 13$$

Därmed gäller att

$$w = (-1; 13)$$

Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar $3\ 000\ 000\ kr$ idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1{,}05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är $7\ 500\ 000\ kr$ samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

a) Ange en funktion som beskriver bostaden pris $f(x)$ efter x år.
b) Beräkna bostadens värde efter 5 år.
c) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på $0 - 30$ år.
d) Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Lösningar

a) Vi utgår från given exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x$$

För aktuell bostad gäller att ursprungspriset $C = 7{,}5 * 10^6$ kr samt att tillväxthastigheten $a = 1{,}025$, vilket motsvarar en prisökning på 2,5 % per år. Bostadens pris $f(x)$ kan då beskrivas enligt nedan:

$$f(x) = 7{,}5 * 10^6 * 1{,}025^x$$

b) För att beräkna bostadens värde efter 5 år beräknar vi $f(5)$. Vi ersätter då samtliga x med 5 i funktionen:

$$f(5) = 7{,}5 * 10^6 * 1{,}025^5 \approx 8{,}49 * 10^6\ kr$$

Bostadens pris om 5 år estimeras därmed att uppgå till ca $8\ 490\ 000\ kr$.

c) Definitionsmängden är given i uppgiften:

$$0 \leq x \leq 30\ år$$

För att beräkna motsvarande värdemängd beräknar vi $f(0)$ samt $f(30)$:

$$f(0) = 7{,}5 * 10^6 * 1{,}025^0 = 7{,}5 * 10^6\ kr$$

$$f(30) = 7{,}5 * 10^6 * 1{,}025^{30} \approx 15{,}7 * 10^6\ kr$$

Vi kan därmed bestämma värdemängden:

$$7{,}5 * 10^6\ kr \leq f(x) \leq 15{,}7 * 10^6\ kr$$

d) För att beräkna efter hur många år x som bostadens värde fördubblats sätter vi $f(x)$ till dubbla ursprungspriset, alltså $2C$. Funktionen $f(x)$ kan sedan användas för att beräkna x:

$$f(x) = C * 1{,}025^x = 2C$$

Genom att dividera med C i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$1{,}025^x = 2$$

För att få lösa ut x använder vi oss utav logaritmer, då

$$\log 1{,}025^x = x * \log 1{,}025$$

Vi tar logaritmen av båda sidor:

$$x * \log 1{,}025 = \log 2$$

Genom att dividera med $\log 1{,}025$ i båda led kan x beräknas till ca 28 år, då

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}025} \approx 28{,}1$$

Uppgift 8 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x-värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

Lösning

För att ta reda på potentiella otillåtna x-värden undersöker vi när nämnaren blir noll. Vi faktoriserar därmed nämnaren genom att beräkna dess nollställen:

$$x^2 - 9 = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$x^2 = 9$$

Genom att ta roten ur respektive led kan vi beräkna rötterna:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Funktionen $f(x)$ har nollnämnare när $x = \pm 3$, vilket innebär att x inte kan anta dessa värden:

$$x \neq \pm 3$$

Vidare såg vi via ovanstående faktorisering att

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Vi faktoriserar även täljaren genom att beräkna dess nollställen:

$$3(x^2 - x - 12) = 0$$

Vi börjar med att dividera med 3 i respektive led:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Ovanstående uttryck kan i sin tur transformeras till

$$x^2 = x + 12$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12},$$

vilket kan förenklas till

$$x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 12} = 0{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 0{,}5 \pm 3{,}5$$

Därmed gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5 + 3{,}5 = 4 \\ x_2 = 0{,}5 - 3{,}5 = -3 \end{cases}$$

Via de beräknade nollställena kan täljaren faktoriseras:

$$3(x^2 - x - 12) = 3(x + 3)(x - 4)$$

Vi sätter in den faktoriserade täljaren och nämnaren i den givna funktionen:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9} = \frac{3(x + 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$$

För $x \neq \pm 3$ kan vi förkorta faktorn $(x + 3)$, som förekommer både i täljaren och nämnaren. Därmed gäller att

$$f(x) = \frac{3(x - 4)}{(x - 3)} \; för \; x \neq \pm 3$$

Uppgift 9 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen $u(t)$ kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t) =$ spänningen över kondensatorn vid tiden t,
- $U_0 =$ begynnelsespänningen i V,
- $RC =$ kretsens tidskonstant i sekunder,
- $t =$ tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen $680\ \mu F$ är ansluten till ett motstånd på $10\ k\Omega$. Den är initialt laddad till $10\ V$ och börjar urladdas vid tiden $t = 0$.

a) Beräkna spänningen efter tre sekunder.
b) Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet $0 - 10$ sekunder.
c) Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till $40\ \%$ av sitt ursprungliga värde.

Lösning

a) Med angivna värden kan ovanstående formel skrivas om enligt nedan:

$$u(t) = 10e^{-t/(680\mu * 10k)} = 10e^{-t/6{,}8}\ V$$

Vi beräknar $u(3)$ för att beräkna spänningen efter tre sekunder:

$$u(3) = 10e^{-3/6{,}8} \approx 6{,}43\ V$$

b) Definitionsmängden är given i uppgiftsbeskrivningen:

$$0 \leq t \leq 10\ s$$

Värdemängden erhålls genom att beräkna $u(0)$ samt $u(10)$:

$$u(0) = 10e^{-0/6{,}8} = 10 * e^0 = 10\ V$$

$$u(10) = 10e^{-10/6{,}8} \approx 2{,}30\ V$$

Därmed gäller att

$$2{,}30\ V \leq u(t) \leq 10\ V$$

c) För att beräkna efter hur lång tid t som spänningen har minskat till $40\ \%$ av ursprungsvärdet $10\ V$ sätter vi $u(t) = 10 * 0{,}4 = 4\ V$. Funktionen $u(t)$ kan sedan användas för att beräkna tiden t:

$$u(t) = 10e^{-t/6{,}8} = 4$$

Genom att dividera med 10 i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$e^{-t/6{,}8} = 0{,}4$$

För att få lösa ut t använder vi oss utav den naturliga logaritmen ln, då

$$\ln e^{-t/6{,}8} = -\frac{t}{6{,}8} * \ln e = -\frac{t}{6{,}8}$$

Vi tar den naturliga logaritmen i båda led:

$$-\frac{t}{6,8} = \ln 0,4$$

Genom att multiplicera med $-6,8$ i båda led kan t beräknas till ca 3,26 sekunder, då

$$t = -6,8 * \ln 0,4 \approx 6,23\ s$$

Efter ungefär $6,23$ sekunder har alltså spänningen minskat till $40\ \%$ av ursprungsvärdet.

Uppgift 10 (1,5 poäng)

En växelspänning har amplituden $5\ V$, frekvensen $100\ Hz$ samt fasen 90°.

a) Bestäm växelspänningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.

b) Rita växelspänningens sinuskurva över en period T.

Lösning

a) Formeln för en växelspänning $u(t)$ är följande:

$$u(t) = |U| \sin(wt + \delta),$$

där $|U|$ är amplituden (toppvärdet), w är vinkelhastigheten, t är tiden och δ är fasen.

Sinuskurvans amplitud/toppvärde $|U|$ är enligt uppgift lika med $5\ V$:

$$|U| = 5\ V$$

Sinuskurvans frekvens f är enligt uppgift lika med $100\ Hz$:

$$f = 100\ Hz$$

Motsvarande vinkelhastighet w är därmed lika med $200\pi\ rad/s$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 100 = 200\pi\ rad/s$$

Fasen δ är enligt uppgift lika med 90°, vilket motsvarar $\pi/2\ rad$, då

$$\delta_{rad} = \delta_{deg} * \frac{\pi}{180°} = 90 * \frac{\pi}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

För växelspänningen $u(t)$ gäller därmed följande:

$$u(t) = 5 \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ V$$

b) Vi utgår från sinuskurvans attribut. Eftersom frekvensen f är lika med $100\ Hz$ gäller att periodtiden T är $10\ ms$, då

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0{,}01\ s = 10\ ms$$

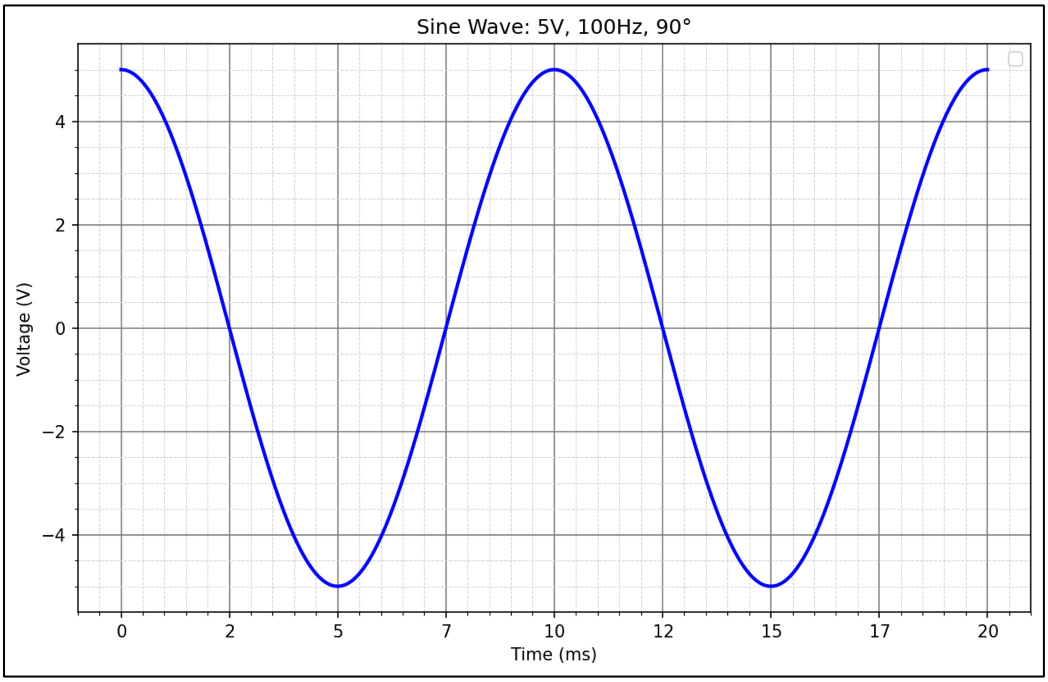
Vi ska då rita ut en sinuskurva som repeteras var 10:e millisekund. För en sinuskurva gäller följande:

- Spänningen är lika med 0 i början av varje varv samt efter ett halvt varv.
- Spännings maximivärde $|U| = 5\ V$ nås efter en fjärdedel av ett varv.
- Spännings minimivärde $-|U| = -5\ V$ nås efter tre fjärdedelar av ett varv.

Fasen δ är lika med 90°, vilket innebär att kurvan är $90°/360° = 1/4$, alltså en fjärdedel av ett varv ”före” i x-axeln. Detta motsvarar $2{,}5\ ms$, då

$$\frac{T}{4} = \frac{10m}{4} = 2{,}5\ ms$$

Vi ritar därmed upp sinuskurvan med periodtiden $T = 10\ ms$:



Figur 2: Växelspänningen u(t) = 5sin(200πt + π/2) V.

Uppgift 11 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på $54\ dB$. Hur många gångers spänningsförstärkning motsvarar det?

Lösning

Vi bestämmer ett uttryck för den linjära förstärkningen G_{lin} ur följande formel:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin} = 54$$

Genom att dividera med 20 i båda led samt vända på uttrycket kan ovanstående ekvation omvandlas till

$$\log_{10} G_{lin} = \frac{54}{20} = 2{,}7$$

Vi upphöjer sedan båda led med basen 10 för att isolera G_{lin} i vänsterledet, då

$$10^{\log_{10} G_{lin}} = G_{lin}$$

Därmed gäller att

$$G_{lin} = 10^{2{,}7} \approx 501$$

Spänningsförstärkningen uppgår därmed till en faktor omkring 500.

Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal

Uppgift 12 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

a) Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
b) Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
c) Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
d) Beräkna funktionens minsta/största värde.
e) Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Lösning

a) Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2\text{x} - 4$$

b) Vi beräknar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2\text{x} - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2\text{x} = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då $x = 2$, då

$$\text{x} = \frac{4}{2} = 2$$

c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan $f'(x)$:

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla x, inklusive när $x = 2$, ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när $x = 2$, dvs. $f''(2)$, varvid vi skriver ut denna:

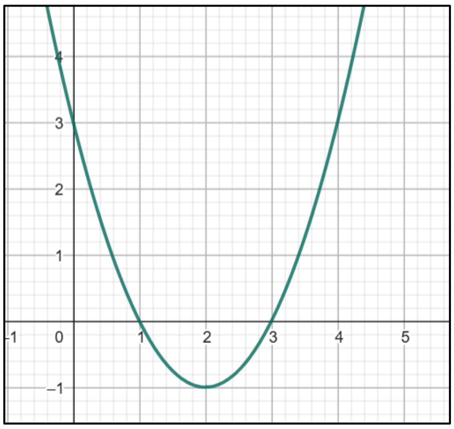
$$f''(2) = 2 > 0 => minimipunkt$$

d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in $x = 2$ i funktionen, dvs. vi beräknar $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 * 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i $(2; -1)$.

e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten $(2; -1)$ beräknades $f(0) = 3$ samt $f(4) = 3$ för att rita grafen.



Figur 3: Graf till funktionen f(x) = x² – 4x + 3.

Uppgift 13 (1,0 poäng)
Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 10(1 - e^{-0,5t}),$$

där
- $u(t) =$ spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t,
- $t =$ tiden i sekunder.

a) Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
b) Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 2\ s$, dvs. beräkna $u'(2)$.
c) Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 2\ s$, dvs. beräkna $u'(2)$.

Lösning
a) Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

a) Vi utvecklar $u(t)$:

$$u(t) = 10(1 - e^{-0,2t}) = 10 - 10e^{-0,5t}$$

Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -0,5 * (-10e^{-0,5t}) = 5e^{-0,5t}\ V/s$$

b) Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 2\ s$, dvs. $u'(2)$:

$$u'(2) = 5e^{-0,5*2} = 5e^{-1} \approx 1,84\ V/s$$

c) Vi beräknar $u''(t)$ genom att derivera $u'(t)$:

$$u''(t) = -0,5 * 5e^{-0,5t} = -2,5e^{-0,5t}\ V/s^2$$

Vi beräknar sedan $u''(2)$:

$$u''(2) = -2,5e^{-0,5*1} = -2,5e^{-1} \approx -0,92\ V/s^2$$

Spänningsökningen minskar, då $u''(2) < 0$.

Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$

c) $u(t) = 5\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ V$

Lösning

a) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$f'(x) = (e^{2x} * \ln x^2)' = (e^{2x})' * \ln x^2 + e^{2x} * (\ln x^2)',$$

där kedjeregeln ger att

$$(e^{2x})' = e^{2x} * (2x)' = 2e^{2x}$$

samt

$$(\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} * (x^2)' = \frac{1}{x^2} * 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + e^{2x} * \frac{2}{x},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + \frac{2e^{2x}}{x}$$

Vi kan sedan bryta ut $2e^{2x}$:

$$f'(x) = 2e^{2x}\left(\ln x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Vidare gäller att

$$ln\, x^2 = 2\, ln\, |x|$$

Därmed kan det slutgiltiga uttrycket bestämmas:

$$f'^{(x)} = 2e^{2x}\left(2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)$$

b) Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2}{\ln x}\right)' = \frac{(3x^2)' * \ln x - 3x^2 * (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

där

$$(3x^2)' = 6x$$

samt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x^2 * \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

där

$$3x^2 * \frac{1}{x} = 3x$$

Detta innebär att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x}{(\ln x)^2},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = \frac{3x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

c) Vi applicerar kedjeregeln för att lösa uppgiften:

$$\frac{d}{dx}[\cos ax + \delta] = -\sin ax * (ax + \delta)' = -a * \sin ax$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) * \left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)',$$

där

$$\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)' = 100\pi,$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) * 100\pi,$$

vilket kan skrivas om till

$$u'(t) = -500\pi\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ V/s$$

Uppgift 15 (1,0 poäng)

Laddningen $q(t)$ som passerar genom en ledare inom ett tidsintervall $(0, t)$ kan beräknas via följande funktion:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt = [I(t)]_0^t,$$

där

- $q(t)$ är laddningen genom ledaren i $C\ (Coulomb)$,
- $i(t)$ är strömmen som passerar genom ledaren i $A\ (Ampere)$,
- $I(t)$ är den primitiva funktionen (obestämda integralen) av $i(t)$.

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 0{,}5e^{-0{,}1t}$$

där t är tiden i sekunder. Laddningen uppgår till $1\ C$ vid start, dvs. $q(0) = 1$.

a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t) = \int i(t)\,dt$, dvs. integrera utan att ange några gränser.
b) Bestäm ett uttryck för kondensatorns laddning $q(t)$ genom att integrera över intervallet $[0, t]$.
c) Bestäm en formel för den totala laddningen $q_{tot}(t)$ i kondensatorn, inklusive startladdningen $q(0)$.
d) Hur stor total laddning (inklusive startladdningen) har flödat in i kondensatorn efter 4 sekunder?

Lösning

a) Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t)\,dt = \int (0{,}5e^{-0{,}1t})\,dt = 0{,}5\int (e^{-0{,}1t})\,dt = 0{,}5\left(\frac{e^{-0{,}1t}}{-0{,}1}\right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -5e^{-0{,}1t} + C$$

b) Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt = [I(t)]_0^t = [-5e^{-0{,}1t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (-5e^{-0{,}1t} + C) - (-5e^{-0{,}1*0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -5e^{-0{,}1t} + C - (-5 + C) = -5e^{-0{,}1t} + 5$$

c) För att bestämma en formel för den laddningen $q_{tot}(t)$ måste vi ta reda på integrationskonstanten C. Integrationskonstanten kan tolkas på två sätt, som ger samma resultat.

Antingen tolkar vi integrationskonstanten som C i den primitiva funktionen $I(t)$, där

$$q(t) = I(t) = -5e^{-0{,}1t} + C$$

Vi kan då bestämma $q(0) = I(0)$:

$$q(0) = I(0) = -5e^{-0{,}1*0} + C = -5 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 1\ C$. Därmed gäller att

$$q(0) = -5 + C = 1$$

Genom att addera 5 i respektive led ser vi att integrationskonstanten $C = 6$, då

$$C = 1 + 5 = 6$$

Därmed kan den totala laddningen $q_{tot}(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q_{tot}(t) = -5e^{-0,1t} + 6$$

Om vi i stället tolkar integrationskonstanten som startladdningen $q(0) = 1$, dvs. $C = 1$, och lägger till detta i formeln för $q(t)$ utan startladdning härledd i b) får vi samma resultat:

$$q_{tot}(t) = q(t) + C = -5e^{-0,1t} + 5 + 1 = -5e^{-0,1t} + 6$$

d) Den totala laddningen efter 4 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna $q_{tot}(4)$:

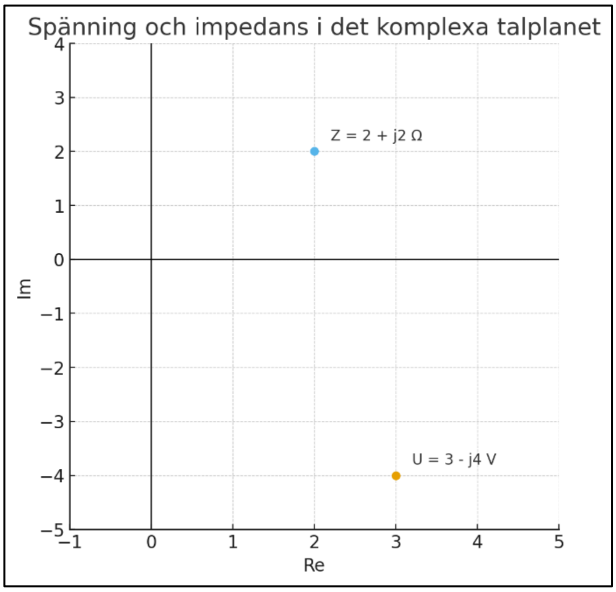
$$q_{tot}(4) = -5e^{-0,1*4} + 6 = -5e^{-0,4} + 6 \approx 2,65\ C$$

Uppgift 16 (2,0 poäng)
En krets matas med spänningen $U = 3 - j4\ V$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2\ \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med ”Ohms lag”, dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning
För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 4: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U, vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ V$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med tan^{-1}:

$$\delta_u = tan^{-1}\frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0{,}9 \pm k\pi\ \ rad \approx -53{,}1° \pm k * 180°$$

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta_u \leq 360°)$ samt att $-53{,}1° = 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5\angle - 0{,}9\, rad\ V$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z, vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\ \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med tan^{-1}:

$$\delta_z = tan^{-1}\frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0{,}8 \pm k\pi\ \ rad = 45° \pm k * 180°$$

Eftersom Z ligger i första kvadranten ($0° \leq \delta_z \leq 90°$) är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2{,}8 \angle 0{,}8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0{,}9}{2{,}8 \angle 0{,}8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2{,}8} \angle (-0{,}9 - 0{,}8) \approx 1{,}8 \angle -1{,}7 \; rad \; A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1{,}8 \angle -1{,}7 \; rad \; A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1{,}8 \; A$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1{,}7 \; rad \; \approx -98{,}1°$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1{,}8 * \cos(-1{,}7) = -0{,}25 \; A$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1{,}8 * \sin(-1{,}7) \approx -1{,}75 \; A$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0{,}25 - j1{,}75 \; A$$

Uppgift 17 (2,0 poäng)

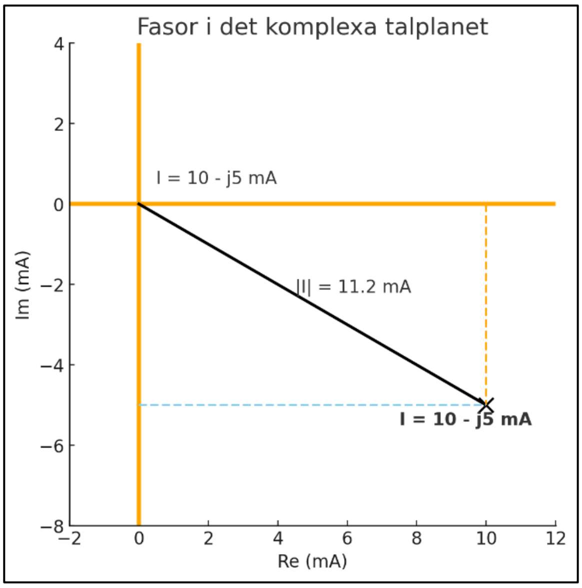
En ström $i(t)$ i en växelströmskrets kan representeras av en fasor I, som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5\ mA$$

a) Rita ut fasorn I i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
b) Uttryck fasorn I på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
c) Anta att strömmens frekvens $f = 10\ Hz$. Bestäm vinkelhastigheten w.
d) Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Lösning

a) Vi ritar ut fasorn I det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 5: Strömmen I = 10 – j5 mA i det komplexa talplanet.

b) Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11{,}2\ mA$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med tan^{-1}:

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0{,}46 \pm k\pi\ rad \approx -26{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom I ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta \leq 360°)$ samt att $-26{,}6° = 360° - 26{,}6° = 333{,}4°$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn I med Eulers form:

$$I \approx 11{,}2e^{-j0{,}46}\ mA$$

c) Vinkelhastigheten w beräknas med hjälp av frekvensen $f = 10\ Hz$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 10 = 20\pi\ rad/s$$

d) Vi sätter in tidskomponenten wt, där $w = 20\pi\ rad/s$, i uttrycket för fasorn I och erhåller då följande:

$$i(t) \approx 11{,}2e^{j(20\pi t - 0{,}46)}\ mA$$

Uppgift 18 (2,0 poäng)

Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.

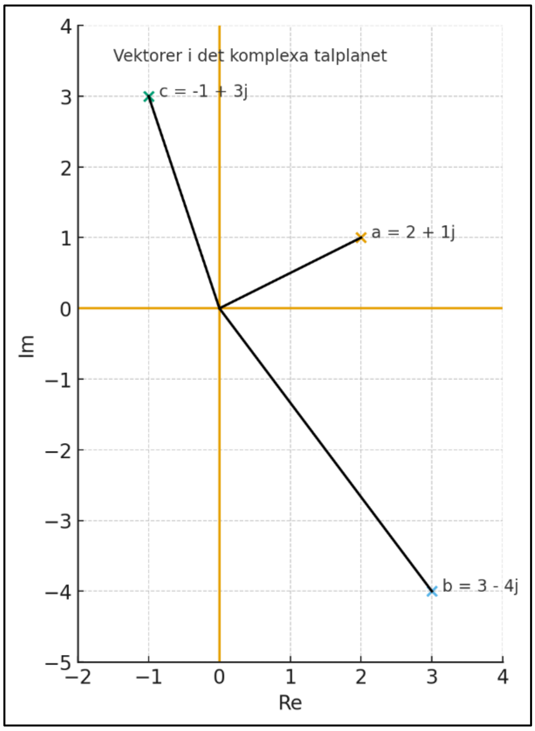
a) Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
b) Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
c) Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
d) Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $\lfloor 2a - 3c \rfloor$.
e) Bestäm vektorernas vinklar.
f) Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a.

Lösning

a) Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

b) Vi ritar ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 6: Vektorer a, b och c i det komplexa talplanet.

c) Vi beräknar vektorernas längd genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

d) Vi bestämmer först $2a - 3c$:

$$2a - 3c = 2(2 + j) - 3(-1 + j3),$$

där

$$2(2 + j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1 + j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet $\lfloor 2a - 3c \rfloor$:

$$\lfloor 2a - 3c \rfloor = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 * 49} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}9$$

e) Vi beräknar vinklarna med tan^{-1}. Vi börjar med δ_a:

$$\delta_a = tan^{-1}\frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0{,}46 \pm k\pi\, rad \approx 26{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom a ligger i första kvadranten ($0° \leq \delta_a \leq 90°$) är den beräknade fasvinkeln δ_a korrekt.

Vi fortsätter sedan med δ_b:

$$\delta_b = tan^{-1}\frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0{,}93 \pm k\pi\, rad \approx -53{,}1° \pm k * 180°$$

Eftersom b ligger i fjärde kvadranten ($270° \leq \delta_b \leq 360°$) samt att $-53{,}1° = 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$ är den beräknade fasvinkeln δ_b korrekt.

Vi avslutar med δ_c:

$$\delta_c = tan^{-1}\frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1{,}25 \pm k\pi\, rad \approx -71{,}6° \pm k * 180°$$

Eftersom c ligger i andra kvadranten ($90° \leq \delta_c \leq 180°$) adderar vi $\pi =\ 180°$ för att erhålla rätt vinkel:

$$\delta_c \approx -1{,}25 + 1 * \pi \approx 1{,}89\, rad \approx 108{,}3°$$

f) Den nya vektorn d är motsatt riktad a, vilket innebär att dess fasvinkel $\delta_d = \delta_a + \pi$:

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0{,}46 + \pi \approx 3{,}6\, rad \ \approx 206{,}6°$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp $|d| = 7$. Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + jd_{im},$$

där

- d_{re} = den reella delen,
- d_{im} = den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen d_{re} med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos{(3{,}6)} \approx -6{,}26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen d_{im} med sinus:

$$\sin\delta_d = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin\delta_d \approx 7 * \sin(3{,}6) \approx -3{,}13$$

Därmed kan vektor d skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6{,}26 - j3{,}13$$

Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2\sin(wt + 25°)\ V$$

$$u_2(t) = 5\sin(wt - 45°)\ V$$

$$u_3(t) = 1{,}5\sin(wt + 36°)\ V$$

Den totala spänningen i kretsen U_{tot} beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

a) Skriv om spänningarna $u_1(t)$, $u_2(t)$ samt $u_3(t)$ till fasor U_1, U_2 samt U_3 i komplex rektangulär form.
b) Beräkna fasorsumman $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$.
c) Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
d) Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}|\sin(wt + \delta_{tot})$$

Lösning

a) Vi omvandlar sinusspänningarna till motsvarande fasor en efter en:

$$U_1 = 2\cos(25°) + j2\sin(25°) \approx 1{,}81 + j0{,}85\ V$$

$$U_2 = 5\cos(-45°) + j5\sin(-45°) \approx 3{,}54 - j3{,}54\ V$$

$$U_3 = 1{,}5\cos(36°) + j1{,}5\sin(36°) \approx 1{,}21 + j0{,}88\ V$$

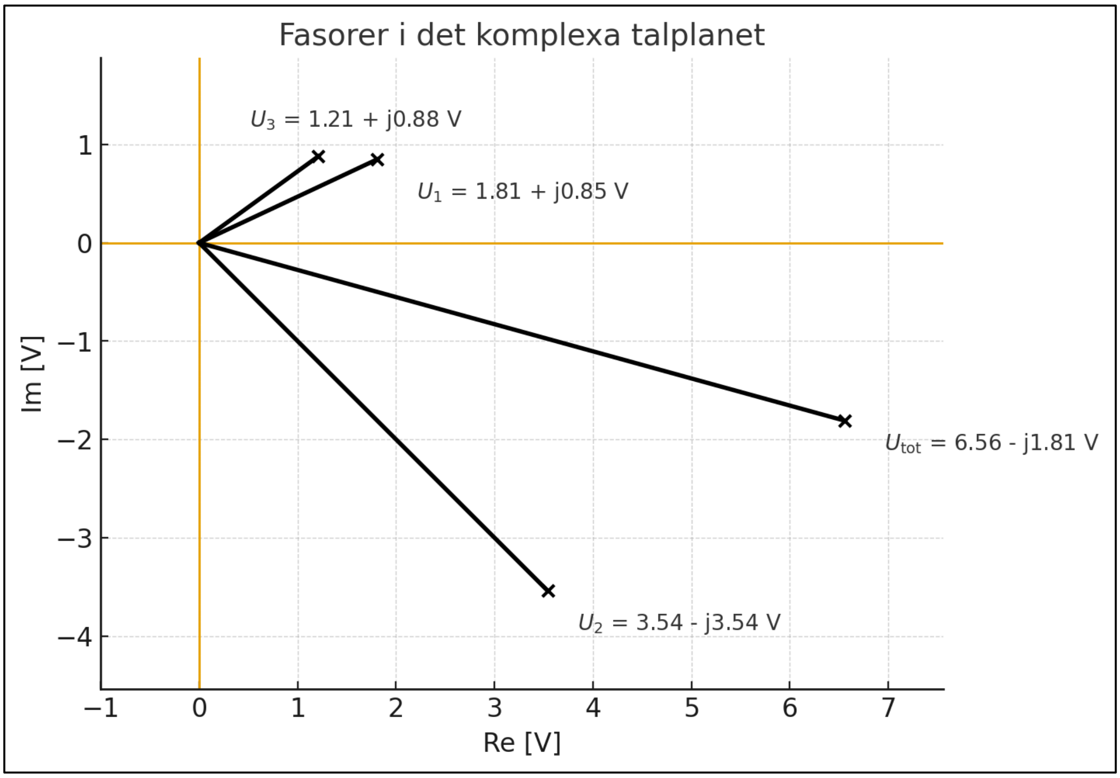
b) Vi beräknar fasorsumman U_{tot} genom att addera de beräknade fasorerna U_1, U_2 samt U_3:

$$U_{tot} \approx 1{,}81 + j0{,}85 + 3{,}54 - j3{,}54 + 1{,}21 + j0{,}88,$$

vilket kan skrivas om till

$$U_{tot} \approx 6{,}56 - j1{,}81\ V$$

c) Vi ritar ut fasorerna i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 7: Fasorer U_1, U_2, U_3 samt U_{tot} i det komplexa talplanet.

d) Vi omvandlar fasorsumman U_{tot} till motsvarande sinusformad spänning i tidsdomänen:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}|\sin(wt + \delta_{tot}),$$

där

$$|U_{tot}| \approx \sqrt{6{,}56^2 + (-1{,}81)^2} \approx 6{,}81\ V$$

samt

$$\delta_{tot} = tan^{-1}\frac{-1{,}81}{6{,}56} \pm k\pi \approx -0{,}26 \pm k\pi\ rad \approx -14{,}9° \pm k * 180°$$

där

$$k = 0{,}1{,}2 \ldots n$$

Eftersom U_{tot} ligger i fjärde kvadranten $(270° \leq \delta_{tot} \leq 360°)$ samt att $-14{,}9° = 360° - 14{,}9° = 345{,}1°$ är den beräknade fasvinkeln δ_{tot} korrekt.

Därmed kan sinusspänningen $u_{tot}(t)$ uttryckas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) \approx 6{,}81\sin(wt - 14{,}9°)\ V$$