

## L17 – Typexempel med lösningsförslag

### Former av komplexa tal

#### Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- $x$  utgör den reella delen av talet,
- $y$  utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet  $j$ ).

#### Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

- $|z|$  = absolutbeloppet (längden)  $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,
- $\delta$  = talets vinkel (fasvinkeln)  $\Rightarrow \delta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm k\pi$  för  $k = 0, 1, 2 \dots n$ .

**Notering:** Vinkeln  $\delta$  kan vara negativ eller ligga i andra kvadranten. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

#### Eulers formel

Ett komplext tal kan uttryckas med Eulers formel som:

$$z = e^{jv} = \cos v + j \sin v = x + jy,$$

där

- $e^{jv}$  = talet  $z$  uttryckt med Eulers form,
- $\cos v = x$  utgör den reella delen av talet,
- $\sin v = y$  utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet  $j$ ).

### Definition av fasor

En fasor är den tidsberoende delen av en komplex storhet. En spänning som skrivs  $u(t) = |U| * e^{j(\omega t + \delta)}$  har därmed motsvarande fasor  $U = |U| * e^{j\delta}$ . Notera att fasorn skrivs med stor bokstav.

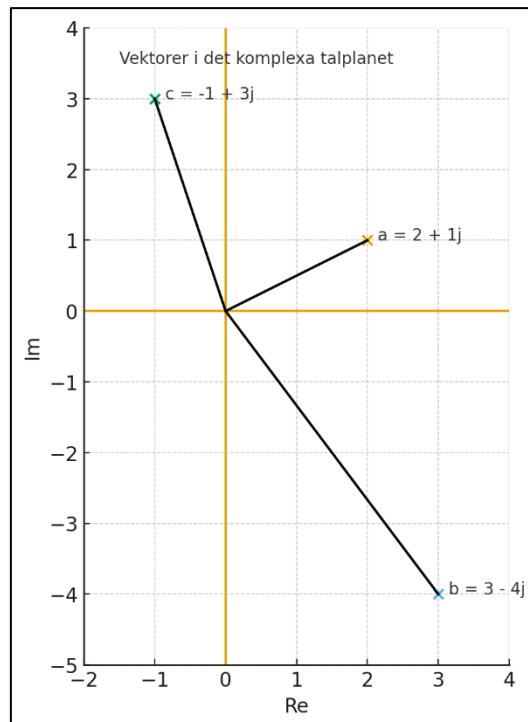
- Du har följande vektorer:  $a = (2; 1)$ ,  $b = (3; -4)$  samt  $c = (-1; 3)$ . I uppgifterna nedan ska varje vektor  $(x; y)$  tolkas som ett komplext tal  $z = x + jy$ .
  - Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
  - Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
  - Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
  - Bestäm längden (absolutbeloppet) av  $2a - 3c$ , dvs.  $|2a - 3c|$ .
  - Bestäm vektorernas vinklar.
  - Bestäm en vektor  $d$  med längden 7 som är motsatt riktad  $a$ .

### Lösning

- Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

- b) Vi ritar ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 1: Vektorer  $a$ ,  $b$  och  $c$  i det komplexa talplanet.

- c) Vi beräknar vektorernas längder genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

- d) Vi bestämmer först  $2a - 3c$ :

$$2a - 3c = 2(2 + j) - 3(-1 + j3),$$

där

$$2(2 + j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1 + j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet  $|2a - 3c|$ :

$$|2a - 3c| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,9$$

- e) Vi beräknar vinklarna med  $\tan^{-1}$ . Vi börjar med  $\delta_a$ :

$$\delta_a = \tan^{-1} \frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx 26,6^\circ \pm k \cdot 180^\circ$$

Eftersom  $a$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_a \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_a$  korrekt.

Vi fortsätter sedan med  $\delta_b$ :

$$\delta_b = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,93 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $b$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$ ) samt att  $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_b$  korrekt.

Vi avslutar med  $\delta_c$ :

$$\delta_c = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,25 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $c$  ligger i andra kvadranten ( $90^\circ \leq \delta_c \leq 180^\circ$ ) adderar vi  $\pi = 180^\circ$ . Vi sätter därmed  $k$  till 1:

$$\delta_c \approx -1,25 + 1 * \pi \approx 1,89 \text{ rad} \approx 108,3^\circ$$

f) Den nya vektorn  $d$  är motsatt riktad  $a$ , vilket innebär att dess fasvinkel  $\delta_d = \delta_a + \pi$ :

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0,46 + \pi \approx 3,6 \text{ rad} \approx 206,6^\circ$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp  $|d| = 7$ . Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + jd_{im},$$

där

- $d_{re}$  = den reella delen,
- $d_{im}$  = den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen  $d_{re}$  med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos (3,6) \approx -6,26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen  $d_{im}$  med sinus:

$$\sin \delta_d = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin \delta_d \approx 7 * \sin (3,6) \approx -3,13$$

Därmed kan vektor  $d$  skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6,26 - j3,13$$

2. En spänning  $u(t)$  i en växelströmskrets skrivs på Eulers form enligt nedan:

$$u(t) = 5e^{j(100\pi t + \frac{\pi}{12})} \text{ V},$$

där  $t$  = tiden i sekunder.

- Skriv om  $u(t)$  till rektangulär form via Eulers formel.
- Beräkna spänningens värde vid tiden  $t = 2 \text{ ms}$ , dvs.  $u(0,002)$ .
- Rita ut spänningens värde vid tiden  $t = 2 \text{ ms}$  i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).

### Lösning

- Vi applicerar Eulers formel på  $u(t)$ :

$$u(t) = 5e^{j(100\pi t + \frac{\pi}{12})} = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right) + j5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right) \text{ V}$$

- Vi beräknar  $u(0,002)$  genom att sätta  $t = 0,002$  det bestämda uttrycket:

$$u(0,002) = 5 \cos\left(100\pi * 0,002 + \frac{\pi}{12}\right) + j5 \sin\left(100\pi * 0,002 + \frac{\pi}{12}\right),$$

vilket kan skrivas om till

$$(0,002) = 5 \cos\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + j5 \sin\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right),$$

där

$$\cos\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0,63$$

samt

$$\sin\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0,78$$

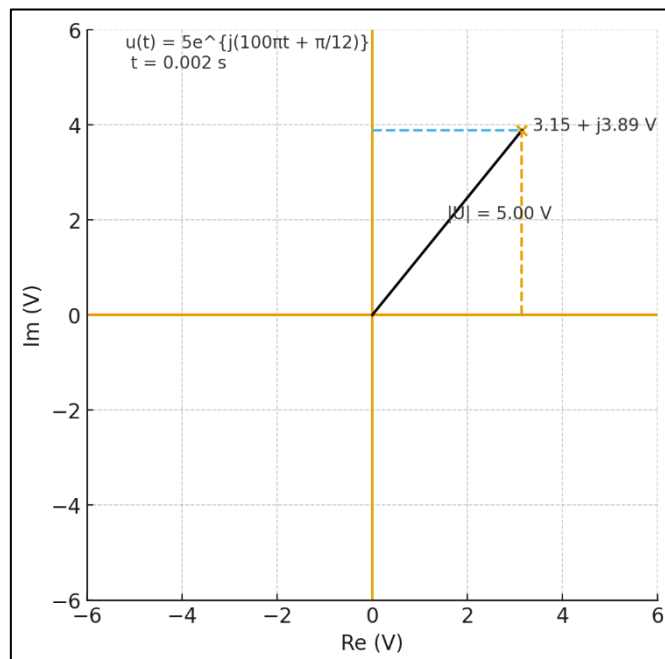
Därmed gäller att

$$u(0,002) \approx 5 * 0,63 + j5 * 0,78 \text{ V},$$

vilket kan skrivas om till

$$u(0,002) \approx 3,15 + j3,89 \text{ V}$$

- Vi ritar ut  $u(0,002)$  i det komplexa talplanet, såsom visas i figuren nedan:



Figur 2: Spänningen  $u(0,002)$  i det komplexa talplanet.

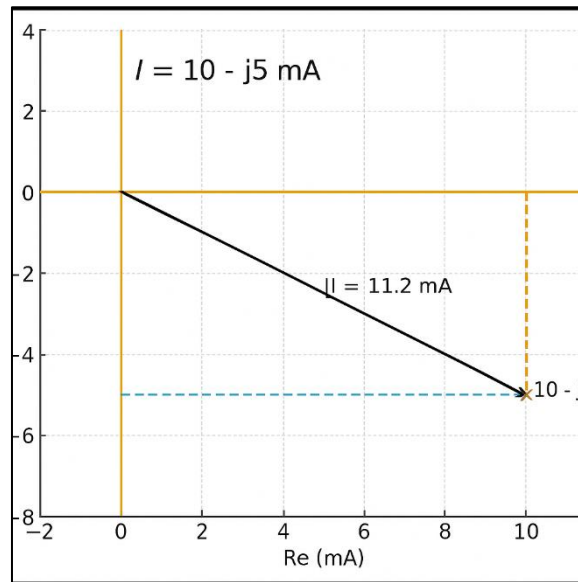
3. En ström  $i(t)$  i en växelströmskrets kan representeras av en fasor  $I$ , som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5 \text{ mA}$$

- Rita ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Uttryck fasorn  $I$  på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet  $|I|$  samt fasvinkeln  $\delta$  så att  $I = |I|e^{j\delta}$ .
- Anta att strömmens frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ . Bestäm vinkelhastigheten  $\omega$ .
- Skriv motsvarande komplexa tidsfunktion för strömmen på Eulers form, dvs.  $i(t) = |I| * e^{j(\omega t + \delta)}$ .

### Lösning

- a) Vi ritar ut fasorn  $I$  i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Fasorn  $I = 10 - j5 \text{ mA}$  i det komplexa talplanet.

- b) Vi bestämmer först fasorns absolutbelopp  $|I|$  med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln  $\delta$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{I_{im}}{I_{re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{10}\right) \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $I$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$ ) samt att  $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta$  korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn  $I$  med Eulers form:

$$I \approx 11,2e^{-j0,46} \text{ mA}$$

- c) Vinkelhastigheten  $\omega$  beräknas med hjälp av frekvensen  $f = 50 \text{ Hz}$ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

- d) Vi skriver om fasor  $I$  till motsvarande komplexa ström  $i(t)$  genom att lägga till frekvenskomponenten  $\omega t$ :

$$i(t) \approx 11,2e^{j(\omega t - 0,46)} \text{ mA}$$

Vi sätter in den bestämda vinkelhastigheten  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  i det bestämda uttrycket för  $i(t)$ :

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$