

## L16 – Typexempel med lösningsförslag

### Former av komplexa tal

#### Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- $x$  utgör den reella delen av talet,
- $y$  utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet  $j$ ).

#### Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

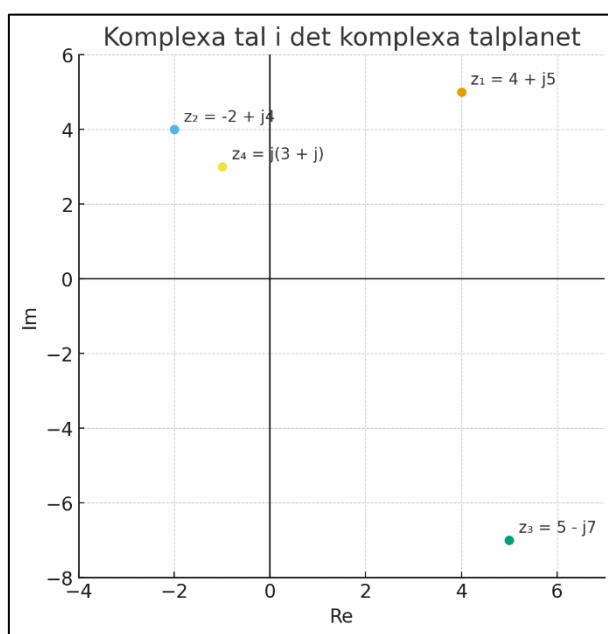
- $|z| =$  absolutbeloppet (längden)  $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,
- $\delta =$  talets vinkel (fasvinkeln)  $\Rightarrow \delta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm k\pi$  för  $k = 0, 1, 2 \dots n$ .

**Notering:** Vinkeln  $\delta$  kan vara negativ eller ligga i andra kvadranten. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

1. Markera följande komplexa tal som punkter i det komplexa talplanet ( $x$ -axeln = reell del,  $y$ -axeln = imaginär del). Beräkna också absolutbeloppet  $|z|$  och skriv talet i polär form ( $|z| \angle \delta$ ), med fasvinkeln i radianer. Avrunda till en decimal.
- a)  $z_1 = 4 + j5$   
 b)  $z_2 = -2 + j4$   
 c)  $z_3 = 5 - j7$   
 d)  $z_4 = j(3 + j)$

### Lösning

Samtliga komplexa tal  $z_1 - z_4$  har markerats i det komplexa talplanet nedan:



Figur 1:  $z_1 - z_4$  markerade i det komplexa talplanet.

## Elteknisk matematik

- a) Vi beräknar absolutbeloppet  $|z_1|$  med Pythagoras sats:

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Vi beräknar fasvinkeln  $\delta_1$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_1 = \tan^{-1} \frac{5}{4} \pm k\pi \approx 0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx 51,3^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $z_1$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_1 \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_1$  korrekt.

Därmed gäller att

$$z_1 = 4 + j5 \approx 6,4 \angle 0,9 \text{ rad}$$

- b) Vi beräknar absolutbeloppet  $|z_2|$  med Pythagoras sats:

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4,5$$

Vi beräknar fasvinkeln  $\delta_2$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_2 = \tan^{-1} \frac{4}{-2} \pm k\pi \approx -1,1 \pm k\pi \text{ rad} \approx -63,4^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $z_2$  ligger i andra kvadranten ( $90^\circ \leq \delta_2 \leq 180^\circ$ ) adderar vi  $\pi = 180^\circ$ . Vi sätter därmed  $k$  till 1:

$$\delta_2 \approx -1,1 + 1 * \pi \approx 2,0 \text{ rad} \approx 116,6^\circ$$

Därmed gäller att

$$z_2 = -2 + j4 \approx 4,5 \angle 2,0 \text{ rad}$$

- c) Vi beräknar absolutbeloppet  $|z_3|$  med Pythagoras sats:

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{60} \approx 8,6$$

Vi beräknar fasvinkeln  $\delta_3$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_3 = \tan^{-1} \frac{-7}{5} \pm k\pi \approx -1,0 \pm k\pi \text{ rad} \approx -54,5^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $z_3$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_3 \leq 360^\circ$ ) samt att  $-54,5^\circ = 360^\circ - 54,5^\circ = 305,5^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_3$  korrekt.

Därmed gäller att

$$z_3 = 5 - j7 \approx 8,6 \angle -1,0$$

- d) Först och främst utvecklar vi det givna uttrycket:

$$z_4 = j(3 + j) = j3 + j^2$$

Enligt definitionen av imaginära tal gäller att  $j = \sqrt{-1}$ , vilket innebär att

$$j^2 = -1$$

Därmed kan  $z_4$  skrivas om till

$$z_4 = j3 + (-1),$$

Vilket är ekvivalent med

$$z_4 = -1 + j3$$

Vi beräknar absolutbeloppet  $|z_4|$  med Pythagoras sats:

$$|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3,2$$

Vi beräknar fasvinkeln  $\delta_4$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_4 = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,2 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $z_4$  ligger i andra kvadranten ( $90^\circ \leq \delta_4 \leq 180^\circ$ ) adderar vi  $\pi = 180^\circ$ . Vi sätter därmed  $k$  till 1:

$$\delta_4 \approx -1,2 + 1 * \pi \approx 1,9 \text{ rad} \approx 108,4^\circ$$

Därmed gäller att

$$z_4 = -1 + j3 \approx 3,2 \angle 1,9 \text{ rad}$$

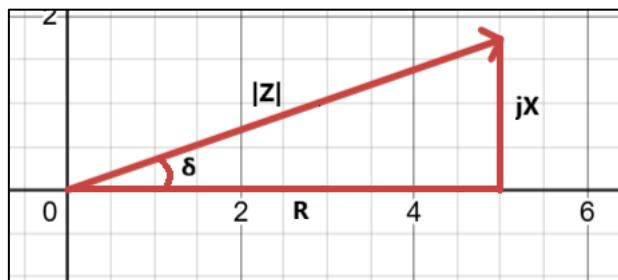
**2.** Inom elektroteknik är impedansen  $Z = R + jX$  ett motstånd bestående av en resistiv respektive reaktiv del:

- Den resistiva delen  $R$  är ej frekvensberoende och utgörs av motstånd från resistorer.  $R$  är reell och ligger i det reella talplanet (x-led).
- Den reaktiva delen  $X$  är frekvensberoende och utgörs av motstånd från kondensatorer och spolar.  $X$  är imaginär (därav  $j$ :et) och ligger i det imaginära talplanet (y-led).

Omvandla impedansen  $Z = 10 \angle \frac{\pi}{3} \text{ k}\Omega$  till rektangulär form.

### Lösning

Enligt uppgift är impedansens absolutbelopp  $|Z| = 10 \text{ k}\Omega$ . Vi känner också till impedansens fasvinkel  $\delta$ , vilket medför att impedansen kan visualiseras som en triangel i det komplexa talplanet, såsom visas nedan:



Figur 2: Impedansen  $Z$  visualiseras som en triangel.

Som synes kan den resistiva delen  $R$  samt den reaktiva delen  $jX$  beräknas trigonometriskt (via cosinus samt sinus).

Vi beräknar först den resistiva delen  $R$  med cosinus:

$$\cos \delta = \frac{R}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$R = |Z| * \cos \delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att  $R = 5 \text{ k}\Omega$ , då

$$R = 10 * \cos \frac{\pi}{3} = 5 \text{ k}\Omega$$

## Elteknisk matematik

Vi beräknar sedan den reaktiva delen  $X$  med sinus:

$$\sin \delta = \frac{X}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$X = |Z| * \sin \delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att  $X \approx 8,7 \text{ k}\Omega$ , då

$$X = 10 * \sin \frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} \text{ k}\Omega \approx 8,7 \text{ k}\Omega$$

Därmed kan impedansen  $Z$  skrivas på rektangulär form som visas nedan:

$$Z \approx 5 + j8,7 \text{ k}\Omega$$

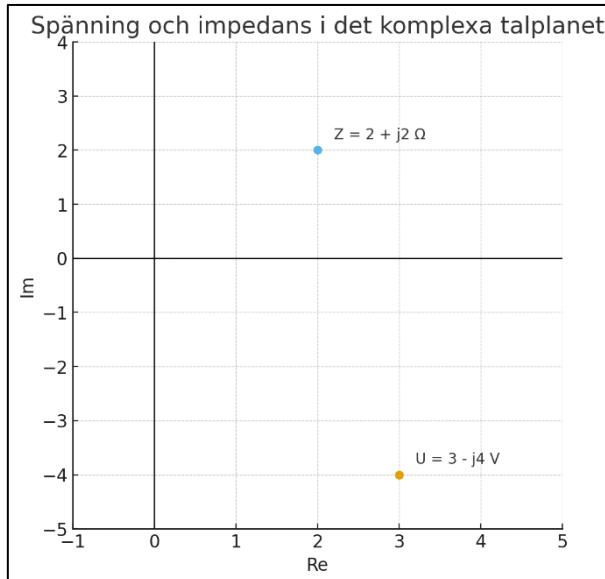
3. En krets matas med spänningen  $U = 3 - j4 \text{ V}$ . Kretsen har impedansen  $Z = 2 + j2 \Omega$ . Beräkna strömmen  $I$  som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

### Lösning

För att beräkna strömmen  $I$  måste spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 3: Spänningen  $U$  samt impedansen  $Z$  markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen  $U$ , vars absolutbelopp  $|U|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel  $\delta_u$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

## Elteknisk matematik

Eftersom  $U$  ligger i fjärde kvadranten ( $270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$ ) samt att  $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$  är den beräknade fasvinkeln  $\delta_u$  korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad } V$$

Vi omvandlar sedan impedansen  $Z$ , vars absolutbelopp  $|Z|$  beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel  $\delta_z$  med  $\tan^{-1}$ :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom  $Z$  ligger i första kvadranten ( $0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$ ) är den beräknade fasvinkeln  $\delta_z$  korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen  $I$  på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A,$$

där

- strömmens absolutbelopp  $|I| = 1,8 \text{ A}$ ,
- strömmens fasvinkel  $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$ .

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form såsom visades i uppgift 2. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- $I_{re}$  = strömmens reella del,
- $I_{im}$  = strömmens imaginära del (indikerad via  $j$ ).

Vi beräknar först strömmens reella del  $I_{re}$  med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 \text{ A}$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del  $I_{im}$  med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 \text{ A}$$

Strömmen  $I$  kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 \text{ A}$$