L14 – Typexempel med lösningsförslag

Viktiga deriveringsregler

- **Produktregeln**

$$(xy)' = x'y + xy'$$

- **Kvotregeln**

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy}{y^2}$$

- **Kedjeregeln**

$$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$$

1. Derivera följande funktioner:

a) $x^2 * \ln x$

b) $e^{2x} * \frac{1}{x^3}$

c) $x^3 * \sqrt{\ln x}$

Lösning

a) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$(x^2 * \ln x)' = (x^2)' * \ln x + x^2 * (\ln x)',$$

där

$$(x^2)' = 2x$$

samt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Därmed gäller att

$$(x^2 * \ln x)' = 2x * \ln x + x^2 * \frac{1}{x},$$

där

$$x^2 * \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

Därmed gäller att

$$(x^2 * \ln x)' = 2x * \ln x + x$$

Slutligen kan vi bryta ut x för att erhålla det slutgiltiga uttrycket:

$$(x^2 * \ln x)' = x(2 \ln x + 1)$$

b) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$\left(e^{2x} * \frac{1}{x^3}\right)' = (e^{2x})' * \frac{1}{x^3} + e^{2x} * \left(\frac{1}{x^3}\right)',$$

där

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

samt

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Därmed gäller att

$$\left(e^{2x} * \frac{1}{x^3}\right)' = 2e^{2x} * \frac{1}{x^3} + e^{2x} * \left(-\frac{3}{x^4}\right),$$

där

$$2e^{2x} * \frac{1}{x^3} = \frac{2e^{2x}}{x^3}$$

samt

$$e^{2x} * \left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{3e^{2x}}{x^4}$$

Därmed gäller att

$$\left(e^{2x} * \frac{1}{x^3}\right)' = \frac{2e^{2x}}{x^3} + \left(-\frac{3e^{2x}}{x^4}\right) = \frac{2e^{2x}}{x^3} - \frac{3e^{2x}}{x^4}$$

Slutligen kan vi bryta ut $\frac{e^{2x}}{x^3}$ för att erhålla det slutgiltiga uttrycket:

$$\left(e^{2x} * \frac{1}{x^3}\right)' = \frac{e^{2x}}{x^3}\left(2 - \frac{3}{x}\right)$$

c) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$\left(x^3 * \sqrt{\ln x}\right)' = (x^3)' * \sqrt{\ln x} + x^3 * \left(\sqrt{\ln x}\right)',$$

där

$$(x^3)' = 3x^2$$

samt

$$\left(\sqrt{\ln x}\right)' = \left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} * \ln x^{-\frac{1}{2}} * (\ln x)',$$

vilket är ekvivalent med att

$$\left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2} * \ln x^{-\frac{1}{2}} * \frac{1}{x} = \frac{\ln x^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{1}{2x * \ln x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x * \sqrt{\ln x}}$$

Därmed gäller att

$$\left(x^3 * \sqrt{\ln x}\right)'' = 3x^2 * \sqrt{\ln x} + x^3 * \frac{1}{2x * \sqrt{\ln x}},$$

där

$$x^3 * \frac{1}{2x * \sqrt{\ln x}} = \frac{x^3}{2x * \sqrt{\ln x}} = \frac{x^2}{2\sqrt{\ln x}}$$

Därmed gäller att

$$\left(x^3 * \sqrt{\ln x}\right)'' = 3x^2 * \sqrt{\ln x} + \frac{x^2}{2\sqrt{\ln x}}$$

Slutligen kan vi bryta ut x^2 för att erhålla det slutgiltiga uttrycket

$$\left(x^3 * \sqrt{\ln x}\right)'' = x^2\left(3\sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right)$$

2. Derivera följande funktioner:

a) $\frac{\ln x^2}{x}$

b) $\frac{3x^2}{\ln x}$

c) $\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

Lösning

a) Vi noterar först och främst att

$$\ln x^2 = 2\ln x$$

Därmed gäller att

$$\frac{\ln x^2}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$\left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = \frac{(2\ln x)' * x - 2\ln x * x'}{x^2}$$

där

$$(2\ln x)' = 2 * \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

samt

$$x' = 1$$

Därmed gäller att

$$\left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{2}{x} * x - 2\ln x * 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

Vi avslutar med att bryta ut 2 ut täljaren:

$$\left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

b) Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$\left(\frac{3x^2}{\ln x}\right)' = \frac{(3x^2)' * \ln x - 3x^2 * (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

där

$$(3x^2)' = 6x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

samt

$$(\ln x)^2 = 2\ln x$$

Därmed gäller att

$$\left(\frac{3x^2}{\ln x}\right)' = \frac{6x * \ln x - 3x^2 * \frac{1}{x}}{2\ln x}$$

där

$$3x^2 * \frac{1}{x} = 3x$$

Därmed gäller att

$$\left(\frac{3x^2}{\ln x}\right)' = \frac{6x * \ln x - 3x}{2\ln x},$$

vilket kan skrivas om till

$$\left(\frac{3x^2}{\ln x}\right)' = 3 - \frac{3x}{2\ln x}$$

c) Vi noterar först och främst att

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

samt att

$$\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} * x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

vilket innebär att

$$\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{x^{1/2}}{2-x^{1/2}}$$

Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$\left(\frac{x^{1/2}}{2-x^{1/2}}\right)' = \frac{(x^{1/2})' * (2-x^{1/2}) - x^{1/2} * (2-x^{1/2})'}{(2-x^{1/2})^2},$$

där

$$(x^{1/2})' = \frac{1}{2} * x^{-1/2} = \frac{x^{-1/2}}{2}$$

samt

$$(2-x^{1/2})' = -\frac{1}{2} * x^{-1/2} = -\frac{x^{-1/2}}{2}$$

Därmed gäller att

$$\left(\frac{x^{1/2}}{2-x^{1/2}}\right)' = \frac{\frac{x^{-1/2}}{2} * (2-x^{1/2}) - x^{1/2} * \left(-\frac{x^{-1/2}}{2}\right)}{\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

Vi förenklar täljaren:

$$\frac{x^{-1/2}}{2} * (2-x^{1/2}) - x^{1/2} * \left(-\frac{x^{-1/2}}{2}\right) = \frac{x^{-1/2}}{2} * (2-x^{1/2}) + x^{1/2} * \left(\frac{x^{-1/2}}{2}\right)$$

Vi bryter ut $\frac{x^{-1/2}}{2}$:

$$\frac{x^{-1/2}}{2} * (2-x^{1/2}) + x^{1/2} * \left(\frac{x^{-1/2}}{2}\right) = \frac{x^{-1/2}}{2} * \left(2 - x^{1/2} + x^{1/2}\right) = \frac{x^{-1/2}}{2} * 2 = x^{-1/2}$$

Därmed gäller att täljaren kan förenklas till $x^{-1/2}$.

Vi sätter in den förenklade täljaren i uttrycket:

$$\left(\frac{x^{1/2}}{2-x^{1/2}}\right)' = \frac{x^{-1/2}}{\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

Eftersom

$$x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

gäller att

$$\left(\frac{x^{1/2}}{2-x^{1/2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

3. Derivera följande funktioner:

a) $e^{\sqrt{2x+2}}$

b) $x * \ln(x^2 + 2x + 1)$

Lösning

a) Vi genomför följande ersättning:

$$t = \sqrt{2x+2} = (2x+2)^{1/2},$$

vilket innebär att funktionen kan skrivas om till e^t. Vi deriverar denna funktion med kedjeregeln:

$$(e^t)' = e^t * t'$$

Vi bestämmer sedan t':

$$t' = \left(\sqrt{2x+2}\right)' = \left((2x+2)^{1/2}\right)',$$

vilket innebär att

$$t' = \frac{1}{2} * (2x+2)^{-1/2} * (2x+2)',$$

där

$$(2x+2)' = 2$$

Därmed gäller att

$$t' = \frac{1}{2} * (2x+2)^{-1/2} * 2 = (2x+2)^{-1/2}$$

Vidare gäller att

$$(2x+2)^{-1/2} = \frac{1}{(2x+2)^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+2}},$$

vilket betyder att

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$$

Vi ersätter t samt t' i det framtagna uttrycket:

$$(e^t)' = e^t * t' = e^{\sqrt{2x+2}} * \frac{1}{\sqrt{2x+2}} = \frac{e^{\sqrt{2x+2}}}{\sqrt{2x+2}}$$

b) Vi genomför följande ersättning:

$$t = \ln{(x^2 + 2x + 1)},$$

vilket innebär att funktionen kan skrivas om till $x * t$. Vi deriverar denna funktion med produktregeln:

$$(x * t)' = x't + xt',$$

där

$$x' = 1,$$

$$(x * t)' = 1 * t + xt' = t + xt'$$

vilket innebär att

Vi bestämmer sedan t' med kedjeregeln:

$$t' = (\ln{(x^2 + 2x + 1)})' = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} * (x^2 + 2x + 1)',$$

där

$$(x^2 + 2x + 1)' = 2x + 2$$

Därmed gäller att

$$t' = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} * (2x + 2) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

Vidare gäller att

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

Vi kan också faktorisera täljaren $x^2 + 2x + 1$ genom att finna dess nollställen:

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

vilket innebär att

$$x^2 = -2x - 1$$

Vi beräknar sedan rötterna med PQ-formeln:

$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm \sqrt{1 - 1} = -1 \pm 0 = -1 \; (dubbelrot)$$

Därmed gäller att

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$$

Vi kan därmed skriva om uttrycket för t' enligt nedan:

$$t' = \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{x + 1} \; då \; x \neq -1$$

Detta innebär även att

$$\ln{(x^2 + 2x + 1)} = \ln((x + 1)^2) = 2\ln{|x + 1|}$$

Notera att vi använder hakparenteser runt argumentet i ln, eftersom logaritmen endast är definierad för positiva argument, samt att $((x + 1)^2 \geq 0$ för alla x. Absolutbeloppet säkerställer att argumentet i logaritmen alltid är positivt.

Vi ersätter t samt t' i det framtagna uttrycket:

$$(x * t)' = t + xt' = 2\ln{\;|x + 1|} + x * \frac{2}{x + 1},$$

vilket kan utvecklas till

$$(x * t)' = 2\ln{\;|x + 1|} + \frac{2x}{x + 1} \; då \; x \neq -1$$