

L17 – Typexempel med lösningsförslag

Former av komplexa tal

Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- x utgör den reella delen av talet,
- y utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

- $|z| =$ absolutbeloppet (längden) $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- $\delta =$ talets vinkel (fasvinkeln) $\Rightarrow \delta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm k\pi$ för $k = 0, 1, 2 \dots n$.

Notering: Vinkeln δ kan vara negativ eller ligga i andra kvadranten. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

Eulers formel

Ett komplext tal kan uttryckas med Eulers formel som:

$$z = e^{j\nu} = \cos \nu + j \sin \nu = x + jy,$$

där

- $e^{j\nu} =$ talet z uttryckt med Eulers form,
- $\cos \nu = x$ utgör den reella delen av talet,
- $\sin \nu = y$ utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

Definition av fasor

En fasor är den tidsberoende delen av en komplex storhet. En spänning som skrivs $u(t) = |U| * e^{j(wt+\delta)}$ har därför motsvarande fasor $U = |U| * e^{j\delta}$. Notera att fasorn skrivs med stor bokstav.

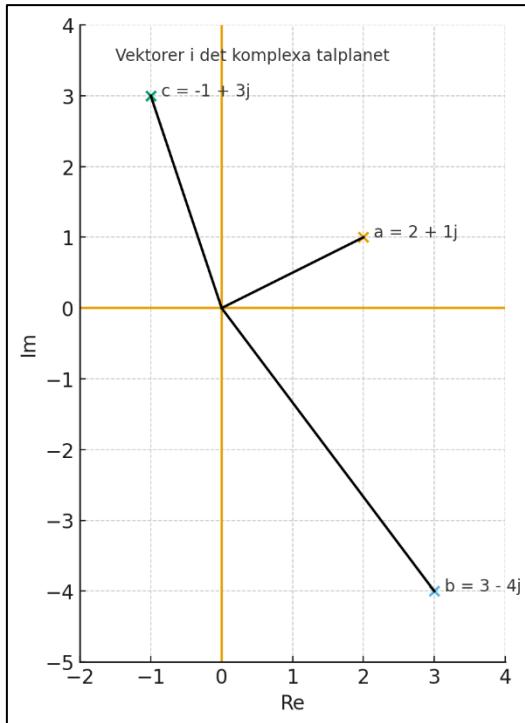
1. Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.
 - a) Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
 - b) Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x -axeln = reell del, y -axeln = imaginär del).
 - c) Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
 - d) Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $|2a - 3c|$.
 - e) Bestäm vektorernas vinklar.
 - f) Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a .

Lösning

- a) Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

- b) Vi ritar ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 1: Vektorer a , b och c i det komplexa talplanet.

- c) Vi beräknar vektorernas längder genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

- d) Vi bestämmer först $2a - 3c$:

$$2a - 3c = 2(2 + j) - 3(-1 + j3),$$

där

$$2(2 + j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1 + j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet $|2a - 3c|$:

$$|2a - 3c| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 * 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,9$$

- e) Vi beräknar vinklarna med \tan^{-1} . Vi börjar med δ_a :

$$\delta_a = \tan^{-1} \frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx 26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom a ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_a \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_a korrekt.

Vi fortsätter sedan med δ_b :

$$\delta_b = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,93 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom b ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$) samt att $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_b korrekt.

Vi avslutar med δ_c :

$$\delta_c = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,25 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom c ligger i andra kvadranten ($90^\circ \leq \delta_c \leq 180^\circ$) adderar vi $\pi = 180^\circ$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_c \approx -1,25 + 1 * \pi \approx 1,89 \text{ rad} \approx 108,3^\circ$$

f) Den nya vektorn d är motsatt riktad a , vilket innebär att dess fasvinkel $\delta_d = \delta_a + \pi$:

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0,46 + \pi \approx 3,6 \text{ rad} \approx 206,6^\circ$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp $|d| = 7$. Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + j d_{im},$$

där

- d_{re} = den reella delen,
- d_{im} = den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen d_{re} med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos (3,6) \approx -6,26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen d_{im} med sinus:

$$\sin \delta_d = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin \delta_d \approx 7 * \sin (3,6) \approx -3,13$$

Därmed kan vektor d skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6,26 - j3,13$$

2. En spänning $u(t)$ i en växelströmskrets skrivs på Eulers form enligt nedan:

$$u(t) = 5e^{j(100\pi t + \frac{\pi}{12})} V,$$

där t = tiden i sekunder.

- a) Skriv om $u(t)$ till rektangulär form via Eulers formel.
- b) Beräkna spänningens värde vid tiden $t = 2 \text{ ms}$, dvs. $u(0,002)$.
- c) Rita ut spänningens värde vid tiden $t = 2 \text{ ms}$ i det komplexa talplanet (x -axeln = reell del, y -axeln = imaginär del).

Lösning

- a) Vi applicerar Eulers formel på $u(t)$:

$$u(t) = 5e^{j(100\pi t + \frac{\pi}{12})} = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right) + j5\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{12}\right) V$$

- b) Vi beräknar $u(0,002)$ genom att sätta $t = 0,002$ det bestämda uttrycket:

$$u(0,002) = 5 \cos\left(100\pi * 0,002 + \frac{\pi}{12}\right) + j5\sin\left(100\pi * 0,002 + \frac{\pi}{12}\right),$$

vilket kan skrivas om till

$$(0,002) = 5 \cos\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + j5\sin\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right),$$

där

$$\cos\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0,63$$

samt

$$\sin\left(0,2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx 0,78$$

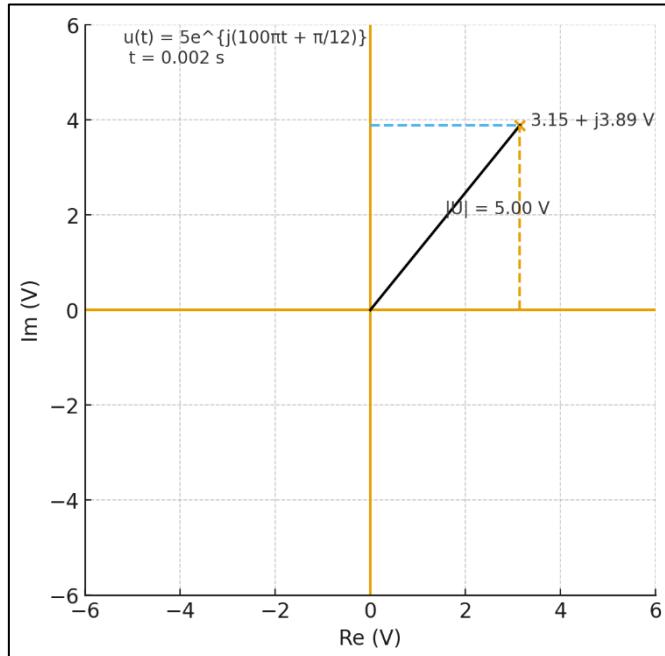
Därmed gäller att

$$u(0,002) \approx 5 * 0,63 + j5 * 0,78 V,$$

vilket kan skrivas om till

$$u(0,002) \approx 3,15 + j3,89 V$$

- c) Vi ritar ut $u(0,002)$ i det komplexa talplanet, såsom visas i figuren nedan:



Figur 2: Spänningen $u(0,002)$ i det komplexa talplanet.

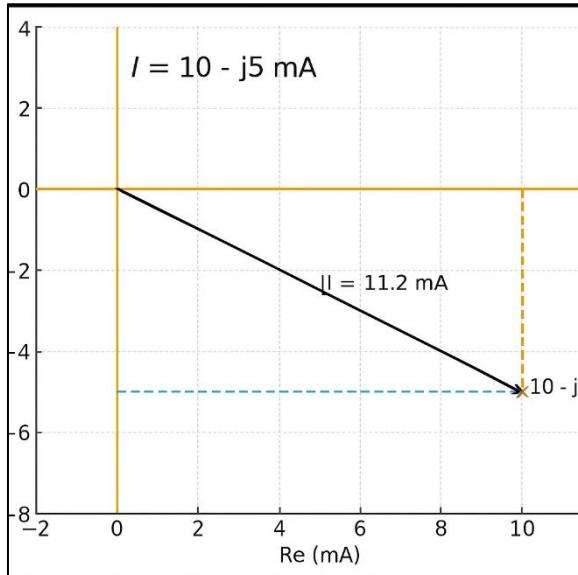
3. En ström $i(t)$ i en växelströmskrets kan representeras av en fasor I , som på rektangulär form skrivs enligt nedan:

$$I = 10 - j5 \text{ mA}$$

- a) Rita ut fasorn I det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- b) Uttryck fasorn I på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
- c) Anta att strömmens frekvens $f = 50 \text{ Hz}$. Bestäm vinkelhastigheten w .
- d) Skriv motsvarande komplexa tidsfunktion för strömmen på Eulers form, dvs. $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$.

Lösning

- a) Vi ritar ut fasorn I i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Fasorn $I = 10 - j5 \text{ mA}$ i det komplexa talplanet.

- b) Vi bestämmer först fasorns absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med \tan^{-1} :

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{I_{im}}{I_{re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{10}\right) \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom I ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$) samt att $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka fasorn I med Eulers form:

$$I \approx 11,2e^{-j0,46} \text{ mA}$$

- c) Vinkelhastigheten w beräknas med hjälp av frekvensen $f = 50 \text{ Hz}$:

$$w = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

- d) Vi skriver om fasorn I till motsvarande komplexa ström $i(t)$ genom att lägga till frekvenskomponenten wt :

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$

Vi sätter in den bestämda vinkelhastigheten $w = 100\pi \text{ rad/s}$ i det bestämda uttrycket för $i(t)$:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$