

## Övningstenta

### Tillåtna hjälpmmedel

- Skrivmaterial och valfri miniräknare.
- En hand- eller datorskriven formelsamling på A4-sida (båda sidor).
- En handskriven A4-sida (båda sidor) med valfria anteckningar.

**OBS!** Mobiltelefoner får inte användas under den tid som tentamen pågår och ska placeras på angiven plats.

### Poäng

Totalt 25 poäng, varav upp till 1,5 bonuspoäng från dugga 1 – 3.

### Betygsgränser

- **IG** < 10 poäng
- **G** >= 17,5 poäng
- **VG** >= 17,5 poäng

### Övrigt

Alla uppgifter kräver lösningar/motiveringar med redovisat svar (inklusive enhet där det är aktuellt). Du måste alltså förklara hur du kom fram till dina resultat! Lycka till!

## Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

### Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  och  $R_4$  kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen  $R$  om  $R_3 = R_4 = 2,2 \text{ k}\Omega$  och  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ . Ange svaret i  $\text{k}\Omega$  med en värdesiffra.

**Notering:**  $\Omega$  är enheten för resistans och utläses 'Ohm').

### Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyns till oglämpliga värden på  $c$ :

$$\frac{c^8 - 16c^4}{c(c^2 - 4)}$$

### Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem. Svara exakt i bråkform.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

### Uppgift 4 (1,0 poäng)

a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning  $k$  samt vilovärde  $m$ .

b) Ekvationen  $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  har en lösning i intervallet mellan  $180^\circ$  och  $270^\circ$ . Hitta denna lösning och ange den i grader.

### Uppgift 5 (2,0 poäng)

Lös följande ekvation:

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 4 - 20x$$

Ange svaret med två decimaler.

## Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

### Uppgift 6 (1,0 poäng)

Du har två vektorer  $u = (3; 5)$  samt  $v = (2; -4)$ .

- Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
- Beräkna vektorernas absolutbelopp  $|u|$  samt  $|v|$ .
- Beräkna vektorernas vinklar  $\nu_u$  samt  $\nu_v$ .
- Beräkna en tredje vektor  $w = u - 2v$ .

### Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset  $f(x)$  för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där  $C$  är ursprungspriset,  $a$  är den årliga prisökningstakten och  $x$  är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 3 000 000 kr idag efter  $x$  år är värd  $f(x)$  kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1,05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 7 500 000 kr samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

- Ange en funktion som beskriver bostaden pris  $f(x)$  efter  $x$  år.
- Beräkna bostadens värde efter 5 år.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på 0 – 30 år.
- Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

### Uppgift 8 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka  $x$ -värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

### Uppgift 9 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen  $u(t)$  kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t)$  = spänningen över kondensatorn vid tiden  $t$ ,
- $U_0$  = begynnelsespänningen i  $V$ ,
- $RC$  = kretsens tidskonstant i sekunder,
- $t$  = tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen  $680 \mu F$  är ansluten till ett motstånd på  $10 k\Omega$ . Den är initialt laddad till  $10 V$  och börjar urladdas vid tiden  $t = 0$ .

- Beräkna spänningen efter tre sekunder.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet 0 – 10 sekunder.
- Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till 40 % av sitt ursprungliga värde.

**Uppgift 10 (1,5 poäng)**

En växelspänning har amplituden 5 V, frekvensen 100 Hz samt fasen 90°.

- a) Bestäm växelspänningens ekvation  $u(t)$ . Ange fasen i radianer.
- b) Rita växelspänningens sinuskurva över en period  $T$ .

**Uppgift 11 (1,0 poäng)**

En ljudförstärkare har en förstärkning på 54 dB. Hur många gångers spänningsförstärkning motsvarar det?

## Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal

### Uppgift 12 (1,0 poäng)

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen  $f(x)$  och bestäm uttrycket för  $f'(x)$ .
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös  $f'(x) = 0$ .
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till  $f(x)$  för intervallet  $0 \leq x \leq 5$ . Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

### Uppgift 13 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$  = spänningsfallet över kondensatoren vid tiden  $t$ ,
- $t$  = tiden i sekunder.

- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för  $u'(t)$ .
- Beräkna  $u'(t)$  vid tiden  $t = 3$  s.
- Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden  $t = 3$  s.

### Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera funktioner:

a)  $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$

b)  $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$

c)  $u(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) V$

### Uppgift 15 (1,0 poäng)

Strömmen  $i(t)$  i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där  $t$  är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A (Ampere).

Laddningen uppgår till 2 C vid start, dvs.  $q(0) = 2$ .

- Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen  $I(t)$ .
- Bestäm ett uttryck för laddningen  $q(t)$  i kondensatoren som en funktion av tiden.
- Bestäm integrationskonstanten C.
- Hur stor laddning har flödat in i kondensatoren efter 2 sekunder?

### Uppgift 16 (2,0 poäng)

En krets matas med spänningen  $U = 3 - j4$  V. Kretsen har impedansen  $Z = 2 + j2$  Ω. Beräkna strömmen  $I$  som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

### Uppgift 17 (2,0 poäng)

En ström  $i(t)$  i en växelströmskrets skrivs på rektangulär form enligt nedan:

$$i(t) = 10 - j5 \text{ mA}$$

- a) Rita ut strömmen i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- b) Uttryck strömmen på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet  $|I|$  samt fasvinkeln  $\delta$  så att  $I = |I|e^{j\delta}$ .
- c) Anta att strömmens frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ . Bestäm vinkelhastigheten  $w$ .
- d) Skriv  $i(t)$  som en tidsberoende funktion  $i(t) = |I| * e^{j(wt+\delta)}$ .

### Uppgift 18 (2,0 poäng)

Du har följande vektorer:  $a = (2; 1)$ ,  $b = (3; -4)$  samt  $c = (-1; 3)$ . I uppgifterna nedan ska varje vektor  $(x; y)$  tolkas som ett komplex tal  $z = x + jy$ .

- a) Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
- b) Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- c) Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
- d) Bestäm längden (absolutbeloppet) av  $2a - 3c$ , dvs.  $|2a - 3c|$ .
- e) Bestäm vektorernas vinklar.
- f) Bestäm en vektor  $d$  med längden 7 som är motsatt riktad  $a$ .

### Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2 \sin(wt + 25^\circ) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 5 \sin(wt - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 1,5 \sin(wt + 36^\circ) \text{ V}$$

Den totala spänningen i kretsen  $U_{tot}$  beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

- a) Skriv om spänningarna  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  samt  $u_3(t)$  till fasor  $U_1$ ,  $U_2$  samt  $U_3$  i komplex rektangulär form.
- b) Beräkna fasorsumman  $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$ .
- c) Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- d) Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(wt + \delta_{tot})$$