L11 – Typexempel med lösningsförslag

1. Lös följande ekvationer, antingen med tiologaritmen eller med den naturliga logaritmen:
a) $5^x = 125$
b) $4^{x+2} = 64$
c) $e^{x-3} = 2981$

Lösning

Som tumregel kan tiologaritmen användas när ett givet tal inte innehåller talet e (basen till den naturliga logaritmen), annars används den naturliga logaritmen.

a) För att få ned x från exponenten i vänsterledet läggs tiologaritmen till i både led. För vänsterledet gällande följande:

$$\log_{10} 5^x = x * \log_{10} 5$$

Ekvationen kan därmed skrivas om till

$$x * \log_{10} 5 = \log_{10} 125$$

Vi dividerar med $\log_{10} 5$ i både led för att få x isolerad i vänsterledet och ser då att $x = 3$:

$$x = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5} = 3$$

b) För att få ned $x + 2$ från exponenten i vänsterledet används tiologaritmen. För vänsterledet gällande följande:

$$\log_{10} 4^{x+2} = (x + 2) * \log_{10} 4$$

Ekvationen kan därmed skrivas om till

$$(x + 2) * \log_{10} 4 = \log_{10} 64$$

Vi dividerar med $\log_{10} 4$ i både led för att få $x + 2$ isolerat i vänsterledet:

$$x + 2 = \frac{\log_{10} 64}{\log_{10} 4}$$

Vi subtraherar sedan med 2 i både led för att isolera x i vänsterledet. Vi ser då att $x = 1$, då

$$x = \frac{\log_{10} 64}{\log_{10} 4} - 2 = 3 - 2 = 1$$

c) Eftersom talet i vänsterledet har basen e används den naturliga logaritmen för att få ned $x - 3$ från exponenten i vänsterledet. För vänsterledet gällande följande:

$$\ln e^{x-3} = (x - 3) * \ln e$$

Vidare gäller att

$$\ln e = 1$$

Ekvationen kan därmed skrivas om till

$$x - 3 = \ln 2981$$

Vi adderar sedan 3 i både led för att isolera x i vänsterledet. Vi ser då att $x = 11$, då

$$x = \ln 2981 + 3 \approx 8 + 3 = 11$$

2. Halveringstiden för ett läkemedel i kroppen är 18 timmar. Efter hur lång tid återstår 30 % av den ursprungliga mängden i blodet?

Lösning

Nuvarande mängd läkemedel i kroppen kan beskrivas via nedanstående funktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där $f(x)$ är nuvarande mängd, C är den ursprungliga mängden, a är förändringsfaktorn och x är antalet passerade timmar.

Förändringsfaktorn a är okänd, men kan beräknas, då vi vet att halveringstiden är 18 timmar. Med andra ord, om C är den ursprungliga mängden av läkemedlet återstår $0{,}5C$ efter 18 timmar:

$$f(18) = C * a^{18} = 0{,}5C$$

Vi dividerar med C i båda led och erhåller då följande ekvation:

$$a^{18} = 0{,}5$$

Vi upphöjer sedan båda led med exponenten $1/18$ för att isolera förändringsfaktorn a i vänsterledet:

$$a^{18*\left(\frac{1}{18}\right)} = 0{,}5^{\left(\frac{1}{18}\right)},$$

vilket är ekvivalent med att

$$a = 0{,}5^{\left(\frac{1}{18}\right)} \approx 0{,}96$$

Vi lägger till den beräknade förändringsfaktorn a i ovanstående funktion:

$$f(x) \approx C * 0{,}96^x$$

Vi söker sedan efter hur många timmar x som läkemedlet är nere på 30 % av den ursprungliga mängden. Med andra ord, om C är den ursprungliga mängden av läkemedlet söker vi efter hur många timmar x som kvarvarande mängd $f(x)$ är lika med $0{,}3C$:

$$f(x) \approx C * 0{,}96^x = 0{,}3C$$

Återigen dividerar vi C i båda led:

$$0{,}96^x \approx 0{,}3$$

För att få ned x från exponenten i vänsterledet läggs tiologaritmen till i både led. För vänsterledet gällande följande:

$$\log_{10} 0{,}96^x = x * \log_{10} 0{,}96$$

Ekvationen kan därmed skrivas om till

$$x * \log_{10} 0{,}96 \approx \log_{10} 0{,}3$$

Vi dividerar med $\log_{10} 0{,}96$ i både led för att få x isolerad i vänsterledet och ser då att $x \approx 31{,}26$:

$$x = \frac{\log_{10} 0{,}3}{\log_{10} 0{,}96} \approx 31{,}26$$

Detta motsvarar ungefär 31 timmar samt 16 minuter, då

$$0{,}26 * 60\, min \approx 16\, min$$

3. Sambandet mellan den linjära förstärkningen samt förstärkningen mätt i dB visas nedan:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin},$$

där

- $G_{dB} =$ förstärkningen i dB,
- $G_{lin} =$ den linjära förstärkningen.

Hur många dB större än 0,5 V är 50 V?

Lösning

Vi omvandlar enkelt den linjära förstärkningen $G_{lin} = \frac{50}{0,5} = 100$ till dB enligt nedan:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin} = 20 * \log_{10} 100 = 40\ dB$$

4. Sambandet mellan en spännings effektivvärde samt motsvarande värde i dBV (decibel Volt) visas nedan:

$$U_{dBV} = 20 \log_{10} \frac{U_{RMS}}{1\ V}$$

där

- $U_{RMS} =$ spänningens effektivvärde i V,
- $U_{dBV} =$ spänningen i dBV.

En sinusspänning har amplituden 20 V. Bestäm amplituden i dBV_{RMS}.

Lösning

För en sinusspänning gäller att dess effektivvärde U_{RMS} samt amplitud $|U|$ har följande förhållande:

$$U_{RMS} = \frac{|U|}{\sqrt{2}}$$

I detta fall, då amplituden $|U| = 20\ V$, gäller att $U_{RMS} \approx 14{,}14\ V$, då

$$U_{RMS} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14{,}14\ V$$

Genom att sätta in det beräknade effektivvärdet U_{RMS} i den första formeln ser vi att spänningen U_{dBV} kan beräknas till 23 dBV, då

$$U_{dBV} \approx 20 \log_{10} 14{,}14 \approx 23\ dBV$$