L15 – Typexempel med lösningsförslag

Beräkning av laddning via integrering av ström

Laddningen $q(t)$ som passerar genom en ledare inom ett tidsintervall $(0, t)$ kan beräknas via följande funktion:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt = [I(t)]_0^t,$$

där

- $q(t)$ är laddningen genom ledaren i C $(Coulomb)$,
- $i(t)$ är strömmen som passerar genom ledaren i A $(Ampere)$,
- $I(t)$ är den primitiva funktionen (obestämda integralen) av $i(t)$.

1. Strömmen $i(t)$ genom en ledare varierar linjärt med tiden enligt följande funktion:

$$i(t) = 3t + 2,$$

där t är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A $(Ampere)$.

a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t)$.
b) Bestäm ett uttryck för laddningen $q(t)$ som en funktion av tiden.
c) Ledaren är oladdad vid start, dvs. $q(0) = 0$. Vad har detta för implikation för integrationskonstanten C?
d) Hur stor laddning har passerat efter 4 sekunder?

Lösning

a) Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t)\,dt = \int (3t + 2\,)\,dt = \frac{3t^2}{2} + 2t + C = 1{,}5t^2 + 2t + C$$

b) Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt = [I(t)]_0^t = [1{,}5t^2 + 2t + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (1{,}5t^2 + 2t + C) - (1{,}5 * 0^2 + 2 * 0 + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = (1{,}5t^2 + 2t + C) - C = 1{,}5t^2 + 2t$$

c) För att bestämma integrationskonstanten C bestämmer vi $q(0)$:

$$q(0) = 1{,}5 * 0^2 + 2 * 0 + C = C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 0$, vilket innebär att $C = q(0) = 0$.

Därmed kan laddningen $q(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q(t) = 1{,}5t^2 + 2t$$

d) Laddningen som har passerat i ledaren efter 4 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna $q(4)$:

$$q(4) = 1{,}5 * 4^2 + 2 * 4 = 24 + 8 = 32\ C$$

Efter 4 sekunder har alltså 32 C passerat genom ledaren.

2. Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där t är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A $(Ampere)$.

Laddningen uppgår till 2 C vid start, dvs. $q(0) = 2$.

a) Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t)$.
b) Bestäm ett uttryck för laddningen $q(t)$ i kondensatorn som en funktion av tiden.
c) Bestäm integrationskonstanten C.
d) Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

Lösning

a) Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t)\,dt = \int (2e^{-0,5t}\,)\,dt = 2\int (e^{-0,5t}\,)\,dt = 2\left(\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

b) Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5*0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - C = -4e^{-0,5t}$$

c) För att bestämma integrationskonstanten C bestämmer vi $q(0)$:

$$q(0) = -4e^{-0,5*0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 2\ C$. Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten $C = 6$, då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan laddningen $q(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

d) Laddningen efter 2 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna $q(2)$:

$$q(2) = -4e^{-0,5*2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4{,}53\ C$$

Efter 2 sekunder har alltså ca $4,53$ C flödat in i kondensatorn.