

L08 – Typexempel med lösningsförslag

1. Ersättningen $f(x)$ för ett godtyckligt uppdrag kan beräknas via följande funktion:

$$f(x) = kx + m,$$

där k är antalet arbetade timmar och m representerar grundarvodet, dvs. ersättningen som utbetalas enbart för att anta uppdraget.

Efter förhandlingar har grundarvodet satts till 20 000 kr och timarvodet satts till 800 kr. Arbetet är begränsat till maximalt 100 timmar enligt den fastställda budgetramen, vilket innebär att projektet måste slutföras inom denna tidsallokering.

- Bestäm funktionens definitionsmängd.
- Beräkna funktionens värdemängd i tusentals kronor.
- Rita upp funktionens graf i tusentals kronor.
- Hur högt hade timarvodet behövt vara för att ersättningen ska uppgå till 60 000 kr efter 40 arbetade timmar? Anta att grundarvodet är oförändrat. Rita upp motsvarande graf med definitionsmängden beräknad i a).

Lösningar

- a) Det minsta antalet arbetade timmar x är 0 (x kan rimligtvis ej understiga 0), vilket sätter definitionsmängdens minimivärde. Arbetet är också tidsbegränsat till 100 timmar, vilket sätter definitionsmängdens maximivärde. Därmed gäller att

$$0 \leq x \leq 100$$

- b) Med givna värden i tusentals kronor gäller att timlönen $k = 0,8$ samt grundarvodet $m = 20$. Funktionen kan då skrivas så som visas nedan:

$$f(x) = 0,8x + 20$$

Eftersom funktionen är linjär gäller att värdemängdens minimi- och maximivärde erhålls via motsvarande minimi- och maximivärde i definitionsmängden. Värdemängdens minimivärde beräknas därmed via motsvarande minimivärde i definitionsmängden, alltså $x = 0$. Vi beräknar därmed $f(0)$:

$$f(0) = 0,8 * 0 + 20 = 20$$

Värdemängdens maximivärde beräknas via motsvarande maximivärde i definitionsmängden, alltså $x = 100$. Vi beräknar därmed $f(100)$:

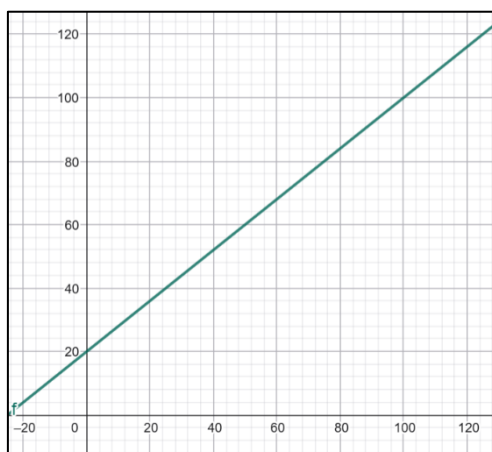
$$f(100) = 0,8 * 100 + 20 = 80 + 20 = 100$$

För funktionens värdemängd gäller då att

$$20 \leq f(x) \leq 100,$$

vilket kan utläsas som att ersättningen som minst kommer uppgå till 20 000 kr och som mest 100 000 kr.

- c) Vi ritar motsvarande graf för definitionsmängden $0 \leq x \leq 100$, där k utgör lutningen och m utgör vilovärdet, se figuren nedan.



Figur 1: Funktionen $f(x) = 0,8x + 20$.

- d) Vi genomför beräkningen i tusentals kronor. I detta fall gäller att ersättningen $f(x) = 60$, grundarvodet $m = 20$ och antalet arbetade timmar $x = 40$. Vad som söks är timarvodet k . Vi skriver ut den nya funktionens formel:

$$f(x) = 40k + 20 = 60,$$

vilket kan transformeras till

$$40k = 40$$

Genom att dividera med 40 i båda led ser vi att timlönen hade behövt uppgå till 1000 kr, då

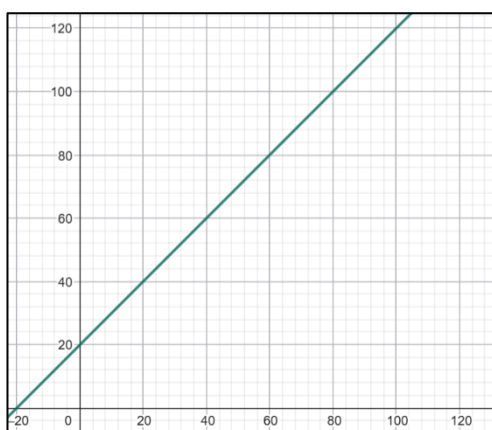
$$k = 1$$

och k är timlönen i tusentals kronor.

Med denna timlön kan ersättningen $f(x)$ beskrivas såsom visas nedan:

$$f(x) = 1 * x + 20 = x + 20$$

Motsvarande graf visas nedan för definitionsmängden $0 \leq x \leq 100$:



Figur 2: Funktionen $f(x) = x + 20$.

2. Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 4% varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 2 500 000 kr idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$y = 2\,500\,000 * 1,04^x.$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 6 000 000 kr samt att den årliga prisökningen är 3 %.

- Ange en funktion som beskriver bostaden pris $f(x)$ efter x år.
- Beräkna bostadens värde efter fem år.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på 0–20 år.
- Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Lösningar

- a) Vi utgår från given exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x$$

För aktuell bostad gäller att ursprungspriset $C = 6\,000\,000$ kr samt att den årliga prisökningen $a = 1,03$, vilket motsvarar en prisökning på 3 % per år. Bostadens pris $f(x)$ kan då beskrivas enligt nedan:

$$f(x) = 6\,000\,000 * 1,03^x$$

- b) För att beräkna bostadens värde efter fem år beräknar vi $f(5)$. Vi ersätter då samtliga x med 5 i funktionen:

$$f(5) = 6\,000\,000 * 1,03^5 \approx 6\,955\,644$$

Bostadens pris om fem år estimeras därmed att uppgå till ca 6 960 000 kr.

- c) För att beräkna efter hur många år x som bostadens värde fördubblats sätter vi $f(x)$ till dubbla ursprungspriset, alltså $2C$. Funktionen $f(x)$ kan sedan användas för att beräkna x :

$$f(x) = C * 1,03^x = 2C$$

Genom att dividera med C i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$1,03^x = 2$$

För att få lösa ut x använder vi oss utav logaritmer, då

$$\log 1,03^x = x * \log 1,03$$

Vi tar logaritmen av båda sidor:

$$x * \log 1,03 = \log 2$$

Genom att dividera med $\log 1,03$ i båda led kan x beräknas till ca 23 år och sex månader, då

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,03} \approx 23,5$$