

Lösningsförslag till övningstenta

Del I - Aritmetik, algebra, ekvationer samt trigonometri

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för fyra parallellkopplade resistorer R_1 , R_2 , R_3 och R_4 kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Beräkna parallellresistansen R om $R_1 = R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega$ och $R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$. Ange svaret i $\text{k}\Omega$ med en värdesiffra.

Notering: Ω är enheten för resistans och utläses 'Ohm').

Lösning

Vi sätter in givna värden i den givna formeln för att beräkna $\frac{1}{R}$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2,2k} + \frac{1}{2,2k} + \frac{1}{10k} + \frac{1}{10k},$$

där

$$\frac{1}{2,2k} + \frac{1}{2,2k} = \frac{2}{2,2k} = \frac{1}{1,1k}$$

samt

$$\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k} = \frac{2}{10k} = \frac{1}{5k}$$

Därmed kan ovanstående uttryck förenklas till

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1,1k} + \frac{1}{5k}$$

Lösningen går att direkt beräkna via miniräknare. Alternativt förenklar vi genom att se till att båda tal i högerledet har en gemensam nämnare:

$$\frac{1}{1,1k} + \frac{1}{5k} = \frac{1 * 5k}{1,1k * 5k} + \frac{1 * 1,1k}{5k * 1,1k} = \frac{5 + 1,1k}{5k * 1,1k} = \frac{6,1k}{5,5M} = \frac{6,1}{5,5k}$$

Därmed gäller att

$$\frac{1}{R} = \frac{6,1}{5,5k}$$

Genom att invertera båda leden ser vi att parallellresistansen $R \approx 0,9 \text{ k}\Omega$, då

$$R = \frac{5,5k}{6,1} \approx 0,9 \text{ k}\Omega$$

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går utan att ta hänsyn till ogiltiga värden på c :

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)}$$

Lösning

Vi börjar med att förenkla täljaren:

$$\frac{c^8 - 16c^4}{c^2} = c^{8-2} - 16c^{4-2} = c^6 - 16c^2$$

Vidare gäller att

$$c^6 - 16c^2 = c^2(c^4 - 16),$$

där

$$c^4 - 16 = (c^2 + 4)(c^2 - 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = \frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c(c^2 - 4)}$$

Eftersom vi har c^2 i täljaren samt c i nämnaren kan följande förenkling genomföras:

$$\frac{c^2}{c} = c,$$

vilket innebär att

$$\frac{c^2(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c(c^2 - 4)} = \frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c^2 - 4}$$

Vi har nu $c^2 - 4$ både i täljaren och nämnaren. Dessa tar ut varandra, vilket innebär att

$$\frac{c(c^2 + 4)(c^2 - 4)}{c^2 - 4} = c(c^2 + 4)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - 16c^4}{c^2}}{c(c^2 - 4)} = c(c^2 + 4)$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem. Svara exakt i bråkform.

$$\begin{cases} 4y = -6x - 6 \\ 3y + 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Lösning

Vi börjar med att härleda en formel för x via den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6$$

vilket kan skrivas om till

$$6x = -4y - 6$$

Genom att dividera med 6 i respektive led erhålls följande formel för x :

$$x = \frac{-4y - 6}{6} = -\frac{2y}{3} - 1$$

Vi sätter in ovanstående formel för x i den andras ekvationen:

$$3y + 6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) + 9 = 0,$$

där

$$6\left(-\frac{2y}{3} - 1\right) = -\frac{6 * 2y}{3} - 6 = -4y - 6$$

Därmed kan formeln ovan förenklas till följande:

$$3y - 4y - 6 + 9 = 0,$$

som kan skrivas om till

$$-y + 3 = 0$$

Genom att addera y i respektive led ser vi att $y = 3$:

$$y = 3$$

Vi sätter in det beräknade värdet för y i tidigare härledd formel för x och erhåller då följande:

$$x = -\frac{2y}{3} - 1 = -\frac{2 * 3}{3} - 1$$

Vi ser därmed att $x = -3$:

$$x = -2 - 1 = -3$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera erhållna värden. Vi börjar med den första ekvationen:

$$4y = -6x - 6,$$

där vänsterledet är lika med 12, då

$$4y = 4 * 3 = 12$$

Samtidigt gäller att högerledet är lika med 12, då

$$-6x - 6 = -6 * (-3) - 6 = 18 - 6 = 12$$

Vi testar sedan den andra ekvationen:

$$3y + 6x + 9 = 0,$$

där vänsterledet är lika med 0, då

$$3y + 6x + 9 = 3 * 3 + 6 * (-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

Uppgift 4 (1,0 poäng)

- a) Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning k samt vilovärde m .
- b) Ekvationen $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning i intervallet mellan 180° och 270° . Hitta denna lösning och ange den i grader.

Lösning

- a) Den första ekvationen visas nedan:

$$4y = -6x - 6 = 0$$

Den räta linjens ekvation har följande form:

$$y = kx + m$$

Genom att dividera med 4 i båda led erhålls följande formel:

$$y = \frac{-6x - 6}{4} = -1,5x - 1,5$$

Därmed gäller att

$$k = -1,5; m = -1,5$$

- b) För att beräkna vinkeln v använder vi \sin^{-1} :

$$\sin(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60^\circ$$

För sinus gäller att

$$v_2 = 180^\circ - v_1$$

Därmed gäller att lösningen i intervallet mellan 180° och 270° är 240° , då

$$v_2 = 180^\circ - (-60^\circ) = 240^\circ$$

Uppgift 5 (2,0 poäng)

Lös följande ekvation:

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 4 - 20x$$

Ange svaret med två decimaler.

Lösning

Vi börjar med att förenkla respektive faktor i vänsterledet:

$$8(x+2)^2 = 8(x^2 + 4x + 4) = 8x^2 + 32x + 32$$

samt

$$5(x-3)^2 = 5(x^2 - 6x + 9) = 5x^2 - 30x + 45$$

Därmed gäller för vänsterledet att

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8x^2 + 32x + 32 - (5x^2 - 30x + 45),$$

vilket kan förenklas till

$$8x^2 + 32x + 32 - 5x^2 + 30x - 45,$$

vilket är ekvivalent med

$$3x^2 + 62x - 13$$

Därmed gäller att

$$3x^2 + 62x - 13 = 4 - 20x,$$

vilket kan transformeras till följande:

$$3x^2 + 82x - 17 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -82x + 17$$

Genom att dividera med 3 i både led erhålls följande ekvation:

$$x^2 = -\frac{82x}{3} + \frac{17}{3}$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{-82}{3}\right)\right)^2 + \frac{17}{3}}$$

Eftersom

$$\frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} = -\frac{82}{6} = -\frac{41}{3}$$

gäller att

$$x = -\frac{41}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{41}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}} \approx -\frac{41}{3} \pm 13,87$$

Vi kan därmed erhålla följande värden för x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{41}{3} + 13,87 \approx 0,21 \\ x_2 = -\frac{41}{3} - 13,87 \approx -27,54 \end{cases}$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera svaren. Vi börjar med x_1 . Vänsterledet är ungefär lika med -0,11, då

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8 * (0,21+2)^2 - 5 * (0,21-3)^2 \approx -0,11$$

Elteknisk matematik

Högerledet är också lika med -0,11, då

$$4 - 20x = 4 - 20 * 0,21 \approx -0,11$$

Vi kollar också x_2 . Vänsterledet är ungefär lika med -554,8, då

$$8(x + 2)^2 - 5(x - 3)^2 = 8 * ((-27,54) + 2)^2 - 5 * ((-27,54) - 3)^2 \approx 554,8$$

Högerledet är också lika med 554,8 då

$$4 - 20x = 4 - 20 * (-27,54) \approx 554,8$$

Del II – Vektorer, funktioner trigonometri och decibel

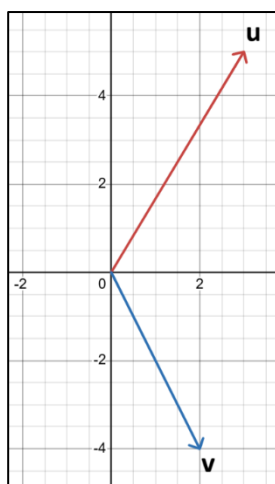
Uppgift 6 (1,0 poäng)

Du har två vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$.

- Rita upp vektorerna i ett koordinatsystem.
- Beräkna vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$.
- Beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v .
- Beräkna en tredje vektor $w = u - 2v$.

Lösning

- Vi ritar upp vektorerna i ett koordinatsystem:
 - Vektor $u = (3; 5)$ har x-koordinat 3 samt y-koordinat 5.
 - Vektor $v = (2; -4)$ har x-koordinat 2 samt y-koordinat -4 .



Figur 1: Vektorer u samt v i ett koordinatsystem.

- Vektorernas absolutbelopp är lika med deras respektive hypotenusor och beräknas därmed enkelt med Pythagoras sats, där x- och y-koordinaterna utgör närliggande respektive motstående katet.

Vektorernas absolutbelopp $|u|$ samt $|v|$ beräknas enligt nedan:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5,83$$

$$|v| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

- För att beräkna vektorernas vinklar kan vi använda oss utav tangens:

$$\tan v = \frac{y}{x},$$

där

- y = vektorns y-koordinat,
- x = vektorns x-koordinat.

För att beräkna vinkeln v lägger vi till \tan^{-1} i respektive led. Eftersom tangens repeteras efter ett halvt varv lägger vi till $\pm 180^\circ$:

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm 180^\circ$$

Vi kan därmed enkelt beräkna vektorernas vinklar v_u samt v_v :

$$v_u = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59,0^\circ$$

samt

$$v_v = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{2}\right) \approx -63,43^\circ$$

d) Vi beräknar vektor w algebraisk genom att sätta in värdena av vektorer $u = (3; 5)$ samt $v = (2; -4)$ i given formel:

$$w = u - 2v = (3; 5) - 2(2; -4),$$

där

$$2(2; -4) = (2 * 2; 2 * (-4)) = (4; -8)$$

Därmed gäller att

$$w = (3; 5) - (4; -8),$$

där

$$-(4; -8) = (-4; 8),$$

vilket innebär att

$$w = (3; 5) + (-4; 8)$$

För att slutföra beräkningen summerar vi ihop x- och y-värdena och ser då att $w = (-1; 13)$, då

$$w = (3 - 4; 5 + 8) = (-1; 13)$$

Uppgift 7 (1,0 poäng)

Bostadspriserna ökar över tid på grund av inflation och marknadstillväxt. Priset $f(x)$ för en bostad kan beskrivas med följande exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x,$$

där C är ursprungspriset, a är den årliga prisökningstakten och x är antalet år som passerat sedan ursprungspriset fastställdes.

Som exempel, under en given tidsperiod är den årliga prisökningen 5 % varje år, vilket innebär att en bostad som kostar 3 000 000 kr idag efter x år är värd $f(x)$ kr, där

$$f(x) = 3 * 10^6 * 1,05^x$$

Anta att ursprungspriset för en bostad är 7 500 000 kr samt att den årliga prisökningen är 2,5 %.

- Ange en funktion som beskriver bostadens pris $f(x)$ efter x år.
- Beräkna bostadens värde efter 5 år.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för en tidsperiod på 0 – 30 år.
- Efter hur många år har bostadens värde fördubblats?

Lösningar

- Vi utgår från given exponentialfunktion:

$$f(x) = C * a^x$$

För aktuell bostad gäller att ursprungspriset $C = 7,5 * 10^6$ kr samt att tillväxthastigheten $a = 1,025$, vilket motsvarar en prisökning på 2,5 % per år. Bostadens pris $f(x)$ kan då beskrivas enligt nedan:

$$f(x) = 7,5 * 10^6 * 1,025^x$$

- För att beräkna bostadens värde efter 5 år beräknar vi $f(5)$. Vi ersätter då samtliga x med 5 i funktionen:

$$f(5) = 7,5 * 10^6 * 1,025^5 \approx 8,49 * 10^6 \text{ kr}$$

Bostadens pris om 5 år estimeras därmed att uppgå till ca 8 490 000 kr.

- Definitionsmängden är given i uppgiften:

$$0 \leq x \leq 30 \text{ år}$$

För att beräkna motsvarande värdemängd beräknar vi $f(0)$ samt $f(30)$:

$$f(0) = 7,5 * 10^6 * 1,025^0 = 7,5 * 10^6 \text{ kr}$$

$$f(30) = 7,5 * 10^6 * 1,025^{30} \approx 15,7 * 10^6 \text{ kr}$$

Vi kan därmed bestämma värdemängden:

$$7,5 * 10^6 \text{ kr} \leq f(x) \leq 15,7 * 10^6 \text{ kr}$$

- För att beräkna efter hur många år x som bostadens värde fördubblats sätter vi $f(x)$ till dubbla ursprungspriset, alltså $2C$. Funktionen $f(x)$ kan sedan användas för att beräkna x :

$$f(x) = C * 1,025^x = 2C$$

Genom att dividera med C i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$1,025^x = 2$$

För att få lösa ut x använder vi oss utav logaritmer, då

$$\log 1,025^x = x * \log 1,025$$

Vi tar logaritmen av båda sidor:

$$x * \log 1,025 = \log 2$$

Genom att dividera med $\log 1,025$ i båda led kan x beräknas till ca 28 år, då

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,025} \approx 28,1$$

Uppgift 8 (1,0 poäng)

Förenkla följande rationella uttryck och ange vilka x -värden som uttrycket inte får anta:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9}$$

Lösning

För att ta reda på potentiella otillåtna x -värden undersöker vi när nämnaren blir noll. Vi faktorerar därmed nämnaren genom att beräkna dess nollställen:

$$x^2 - 9 = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$x^2 = 9$$

Genom att ta roten ur respektive led kan vi beräkna rötterna:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Funktionen $f(x)$ har nollnämnamare när $x = \pm 3$, vilket innebär att x inte kan anta dessa värden

$$x \neq \pm 3$$

Vidare såg vi via ovanstående faktorisering att

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Vi faktorerar även täljaren genom att beräkna dess nollställen:

$$3(x^2 - x - 12) = 0$$

Vi börjar med att dividera med 3 i respektive led:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Ovanstående uttryck kan i sin tur transformeras till

$$x^2 = x + 12$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12},$$

vilket kan förenklas till

$$x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 12} = 0,5 \pm \sqrt{12,25} = 0,5 \pm 3,5$$

Därmed gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 0,5 + 3,5 = 4 \\ x_2 = 0,5 - 3,5 = -3 \end{cases}$$

Via de beräknade nollställena kan täljaren faktoriseras:

$$3(x^2 - x - 12) = 3(x + 3)(x - 4)$$

Vi sätter in den faktorerade täljaren och nämnaren i den givna funktionen:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x - 12)}{x^2 - 9} = \frac{3(x + 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$$

För $x \neq \pm 3$ kan vi förkorta faktorn $(x + 3)$, som förekommer både i täljaren och nämnaren. Därmed gäller att

$$f(x) = \frac{3(x - 4)}{(x - 3)} \text{ för } x \neq \pm 3$$

Uppgift 9 (1,0 poäng)

När en kondensator urladdas genom ett motstånd minskar spänningen över kondensatorn exponentiellt med tiden. Spänningen $u(t)$ kan beskrivas med följande funktion:

$$u(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$$

där

- $u(t)$ = spänningen över kondensatorn vid tiden t ,
- U_0 = begynnelsepotentialen i V ,
- RC = kretsens tidskonstant i sekunder,
- t = tiden i sekunder.

En kondensator med kapacitansen $680 \mu F$ är ansluten till ett motstånd på $10 k\Omega$. Den är initialt laddad till $10 V$ och börjar urladdas vid tiden $t = 0$.

- Beräkna spänningen efter tre sekunder.
- Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd för tidsintervallet $0 - 10$ sekunder.
- Beräkna efter hur lång tid spänningen har sjunkit till 40 % av sitt ursprungliga värde.

Lösning

- Med angivna värden kan ovanstående formel skrivas om enligt nedan:

$$u(t) = 10 e^{-t/(680 \mu * 10k)} = 10 e^{-t/6,8} V$$

Vi beräknar $u(3)$ för att beräkna spänningen efter tre sekunder:

$$u(3) = 10 e^{-3/6,8} \approx 6,43 V$$

- Definitionsmängden är given i uppgiftsbeskrivningen:

$$0 \leq t \leq 10 s$$

Värdemängden erhålls genom att beräkna $u(0)$ samt $u(10)$:

$$u(0) = 10 e^{-0/6,8} = 10 * e^0 = 10 V$$

$$u(10) = 10 e^{-10/6,8} \approx 2,30 V$$

Därmed gäller att

$$2,30 V \leq u(t) \leq 10 V$$

- För att beräkna efter hur lång tid t som spänningen har minskat till 40 % av ursprungsvärdet $10 V$ sätter vi $u(t) = 10 * 0,4 = 4 V$. Funktionen $u(t)$ kan sedan användas för att beräkna tiden t :

$$u(t) = 10 e^{-t/6,8} = 4$$

Genom att dividera med 10 i båda led kan ovanstående uttryck skrivas om till

$$e^{-t/6,8} = 0,4$$

För att få lösa ut t använder vi oss utav den naturliga logaritmen \ln , då

$$\ln e^{-t/6,8} = -\frac{t}{6,8} * \ln e = -\frac{t}{6,8}$$

Vi tar den naturliga logaritmen i båda led:

$$-\frac{t}{6,8} = \ln 0,4$$

Genom att multiplicera med $-6,8$ i båda led kan t beräknas till ca 3,26 sekunder, då

$$t = -6,8 * \ln 0,4 \approx 6,23 \text{ s}$$

Efter ungefär 6,23 sekunder har alltså spänningen minskat till 40 % av ursprungsvärdet.

Uppgift 10 (1,5 poäng)

En växelspänning har amplituden 5 V , frekvensen 100 Hz samt fasen 90° .

- Bestäm växelspänningens ekvation $u(t)$. Ange fasen i radianer.
- Rita växelspänningens sinuskurva över en period T .

Lösning

- Formeln för en växelspänning $u(t)$ är följande:

$$u(t) = |U| \sin(\omega t + \delta),$$

där $|U|$ är amplituden (toppvärdet), ω är vinkelhastigheten, t är tiden och δ är fasen.

Sinuskurvans amplitud/toppvärde $|U|$ är enligt uppgift lika med 5 V :

$$|U| = 5\text{ V}$$

Sinuskurvans frekvens f är enligt uppgift lika med 100 Hz :

$$f = 100\text{ Hz}$$

Motsvarande vinkelhastighet ω är därmed lika med $200\pi\text{ rad/s}$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 100 = 200\pi\text{ rad/s}$$

Fasen δ är enligt uppgift lika med 90° , vilket motsvarar $\pi/2\text{ rad}$, då

$$\delta_{\text{rad}} = \delta_{\text{deg}} * \frac{\pi}{180^\circ} = 90 * \frac{\pi}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

För växelspänningen $u(t)$ gäller därmed följande:

$$u(t) = 5 \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\text{ V}$$

- Vi utgår från sinuskurvans attribut. Eftersom frekvensen f är lika med 100 Hz gäller att periodtiden T är 10 ms , då

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01\text{ s} = 10\text{ ms}$$

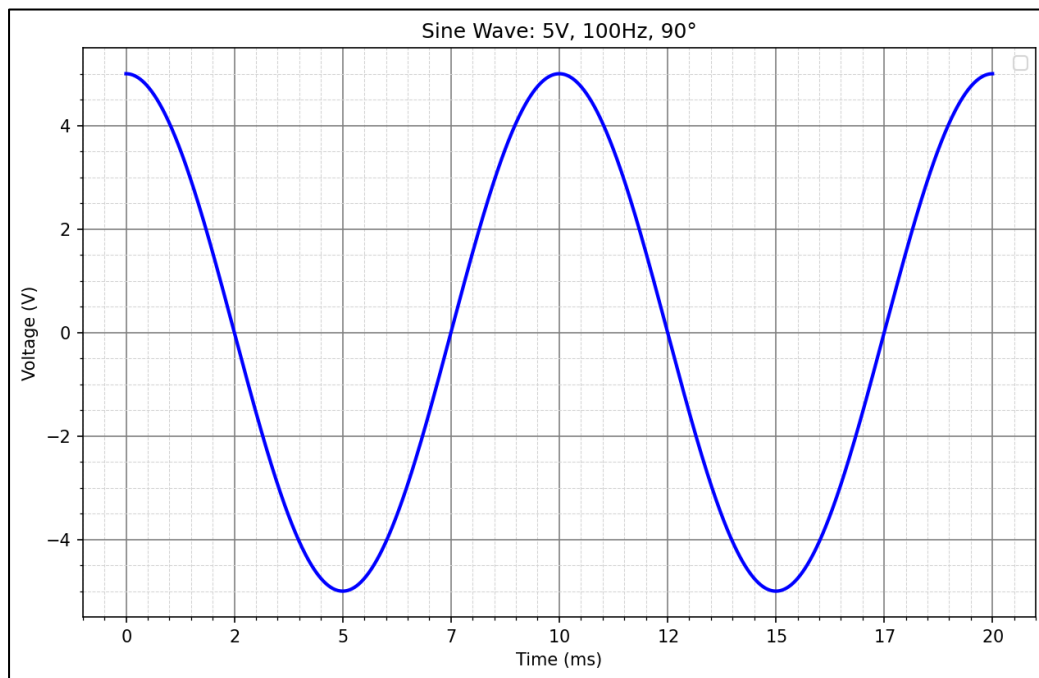
Vi ska då rita ut en sinuskurva som repeteras var 10:e millisekund. För en sinuskurva gäller följande:

- Spänningen är lika med 0 i början av varje varv samt efter ett halvt varv.
- Spännings maximivärde $|U| = 5\text{ V}$ nås efter en fjärdedel av ett varv.
- Spännings minimivärde $-|U| = -5\text{ V}$ nås efter tre fjärdedelar av ett varv.

Fasen δ är lika med 90° , vilket innebär att kurvan är $90^\circ/360^\circ = 1/4$, alltså en fjärdedel av ett varv "före" i x-axeln. Detta motsvarar $2,5\text{ ms}$, då

$$\frac{T}{4} = \frac{10\text{ ms}}{4} = 2,5\text{ ms}$$

Vi ritar därmed upp sinuskurvan med periodtiden $T = 10 \text{ ms}$:



Figur 2: Växelspänningen $u(t) = 5\sin(200\pi t + \pi/2) \text{ V}$.

Uppgift 11 (1,0 poäng)

En ljudförstärkare har en förstärkning på 54 dB. Hur många gånger spänningsförstärkning motsvarar det?

Lösning

Vi bestämmer ett uttryck för den linjära förstärkningen G_{lin} ur följande formel:

$$G_{dB} = 20 * \log_{10} G_{lin} = 54$$

Genom att dividera med 20 i båda led samt vända på uttrycket kan ovanstående ekvation omvandlas till

$$\log_{10} G_{lin} = \frac{54}{20} = 2,7$$

Vi upphöjer sedan båda led med basen 10 för att isolera G_{lin} i vänsterledet, då

$$10^{\log_{10} G_{lin}} = G_{lin}$$

Därmed gäller att

$$G_{lin} = 10^{2,7} \approx 501$$

Spänningsförstärkningen uppgår därmed till en faktor omkring 500.

Del III – Derivata, integraler samt komplexa tal**Uppgift 12 (1,0 poäng)**

Betrakta följande funktion:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Derivera funktionen $f(x)$ och bestäm uttrycket för $f'(x)$.
- Bestäm var funktionen är stationär, dvs. lös $f'(x) = 0$.
- Avgör med hjälp av den andra derivatan om punkten är ett maximum eller minimum.
- Beräkna funktionens minsta/största värde.
- Rita grafen till $f(x)$ för intervallet $0 \leq x \leq 5$. Markera extrempunkten och eventuella skärningar med axlarna.

Lösning

- a) Vi beräknar derivatan av funktionen:

$$f'(x) = 2x - 4$$

- b) Vi beräknar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0,$$

som genom addition med 4 i båda led kan transformeras till

$$2x = 4$$

Genom division med 2 i båda led ser vi att funktionen är stationär då $x = 2$, då

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

- c) Vi beräknar den andra derivatan av funktionen, alltså derivatan av derivatan $f'(x)$:

$$f''(x) = 2$$

Eftersom den andra derivatan är positiv för alla x , inklusive när $x = 2$, ser vi att detta är en minimipunkt. Notera att vi primärt är intresserad av andra derivatans värde när $x = 2$, dvs. $f''(2)$, varvid vi skriver ut denna:

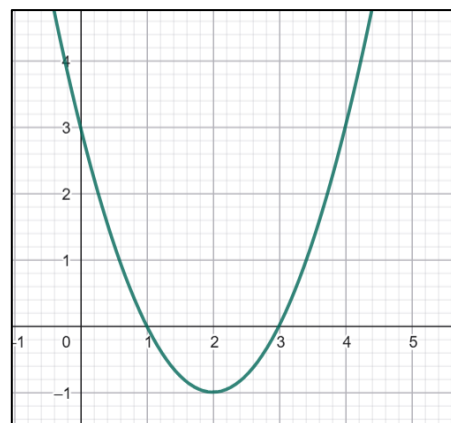
$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

- d) Vi beräknar sedan minimivärdet genom att lägga in $x = 2$ i funktionen, dvs. vi beräknar $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Funktionen har därmed en minimipunkt i $(2; -1)$.

- e) Funktionens graf visas till höger. Förutom minimipunkten $(2; -1)$ beräknades $f(0) = 3$ samt $f(4) = 3$ för att rita grafen.



Figur 3: Graf till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Uppgift 13 (1,0 poäng)

Laddningen av en kondensator kan beskrivas med följande formel:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}),$$

där

- $u(t)$ = spänningsfallet över kondensatorn vid tiden t ,
- t = tiden i sekunder.

- Derivera funktionen och bestäm uttrycket för $u'(t)$.
- Beräkna $u'(t)$ vid tiden $t = 3$ s.
- Beräkna om spänningsökningen/spänningsminskningen ökar eller minskar vid tiden $t = 3$ s.

Lösning

- Vi använder oss av följande deriveringsregel för att lösa uppgiften.

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}] = a * e^{ax}$$

- Vi utvecklar $u(t)$:

$$u(t) = 15(1 - e^{-0,2t}) = 15 - 15e^{-0,2t}$$

Vi deriverar spänningsfallet $u(t)$ för att beräkna $u'(t)$:

$$u'(t) = -0,2 * (-15e^{-0,2t}) = 3e^{-0,2t} \text{ V/s}$$

- Vi beräknar $u'(t)$ då tiden $t = 3$ s, dvs. $u'(3)$:

$$u'(3) = 3e^{-0,2*3} = 3e^{-0,6} \approx 1,65 \text{ V/s}$$

- Vi beräknar $u''(t)$ genom att derivera $u'(t)$:

$$u''(t) = -0,2 * 3e^{-0,2t} = -0,6e^{-0,2t} \text{ V/s}^2$$

Vi beräknar sedan $u''(3)$:

$$u''(3) = -0,6e^{-0,2*3} = -0,6e^{-0,6} \approx -0,33 \text{ V/s}^2$$

Spänningsökningen minskar, då $u''(3) < 0$.

Uppgift 14 (1,5 poäng)

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = e^{2x} * \ln x^2$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x}$

c) $u(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) V$

Lösning

a) Vi applicerar produktregeln för deriveringen:

$$f'(x) = (e^{2x} * \ln x^2)' = (e^{2x})' * \ln x^2 + e^{2x} * (\ln x^2)',$$

där kedjeregeln ger att

$$(e^{2x})' = e^{2x} * (2x)' = 2e^{2x}$$

samt

$$(\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} * (x^2)' = \frac{1}{x^2} * 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + e^{2x} * \frac{2}{x},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = 2e^{2x} * \ln x^2 + \frac{2e^{2x}}{x}$$

Vi kan sedan bryta ut $2e^{2x}$:

$$f'(x) = 2e^{2x} \left(\ln x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

Vidare gäller att

$$\ln x^2 = 2 \ln |x|$$

Därmed kan det slutgiltiga uttrycket bestämmas:

$$f'(x) = 2e^{2x} \left(2 \ln |x| + \frac{1}{x} \right)$$

b) Vi applicerar kvotregeln för deriveringen:

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(3x^2)' * \ln x - 3x^2 * (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

där

$$(3x^2)' = 6x$$

samt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Därmed gäller att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x^2 * \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

där

$$3x^2 * \frac{1}{x} = 3x$$

Detta innebär att

$$f'(x) = \frac{6x * \ln x - 3x}{(\ln x)^2},$$

vilket kan skrivas om till

$$f'(x) = \frac{3x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

c) Vi applicerar kedjeregeln för att lösa uppgiften:

$$\frac{d}{dx} [\cos ax + \delta] = -\sin ax * (ax + \delta)' = -a * \sin ax$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5 \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) * \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)',$$

där

$$\left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)' = 100\pi,$$

Därmed gäller att

$$u'(t) = -5 \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) * 100\pi,$$

vilket kan skrivas om till

$$u'(t) = -500\pi \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ V/s}$$

Uppgift 15 (1,0 poäng)

Strömmen $i(t)$ i en kondensator ges av följande funktion:

$$i(t) = 2e^{-0,5t}$$

där t är tiden i sekunder. Strömmen anges i enheten A (Ampere).

Laddningen uppgår till $2 C$ vid start, dvs. $q(0) = 2$.

- Bestäm ett uttryck för den primitiva funktionen $I(t)$.
- Bestäm ett uttryck för laddningen $q(t)$ i kondensatorn som en funktion av tiden.
- Bestäm integrationskonstanten C .
- Hur stor laddning har flödat in i kondensatorn efter 2 sekunder?

Lösning

- Vi bestämmer den primitiva funktionen $I(t)$ genom att integrera $i(t)$ utan att ange några gränser:

$$I(t) = \int i(t) dt = \int (2e^{-0,5t}) dt = 2 \int (e^{-0,5t}) dt = 2 \left(\frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right) + C,$$

vilket kan skrivas om till

$$I(t) = -4e^{-0,5t} + C$$

- Vi integrerar strömmen $i(t)$ för intervallet $(0, t)$:

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = [I(t)]_0^t = [-4e^{-0,5t} + C]_0^t$$

Vi utvecklar $q(t)$:

$$q(t) = (-4e^{-0,5t} + C) - (-4e^{-0,5 \cdot 0} + C),$$

vilket kan skrivas om till

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + C - C = -4e^{-0,5t}$$

- För att bestämma integrationskonstanten C bestämmer vi $q(0)$:

$$q(0) = -4e^{-0,5 \cdot 0} + C = -4 + C$$

Enligt uppgift är laddningen vid start $q(0) = 2 C$. Därmed gäller att

$$q(0) = -4 + C = 2$$

Genom att addera 4 i respektive led ser vi att integrationskonstanten $C = 6$, då

$$C = 2 + 4 = 6$$

Därmed kan laddningen $q(t)$ efter en viss tid t beräknas med följande formel:

$$q(t) = -4e^{-0,5t} + 6$$

- Laddningen efter 2 sekunder beräknas enkelt genom att beräkna $q(2)$:

$$q(2) = -4e^{-0,5 \cdot 2} + 6 = -4e^{-1} + 6 \approx 4,53 C$$

Efter 2 sekunder har alltså ca 4,53 C flödat in i kondensatorn.

Uppgift 16 (2,0 poäng)

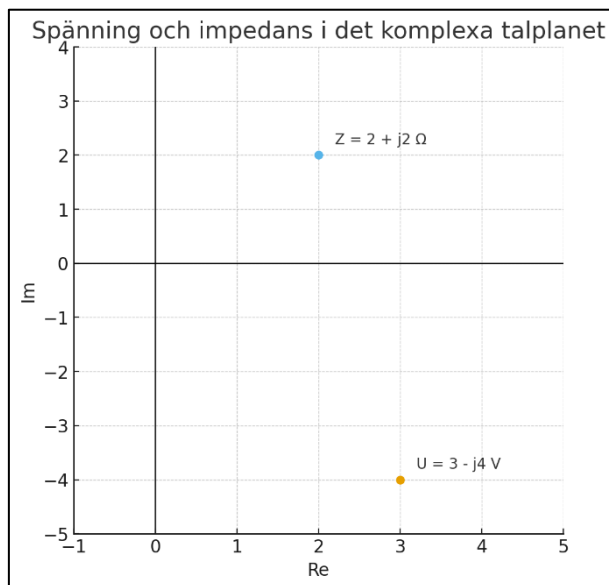
En krets matas med spänningen $U = 3 - j4 \text{ V}$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2 \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning

För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 2: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U , vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med \tan^{-1} :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$) samt att $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad V}$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z , vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med \tan^{-1} :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom Z ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1,8 A$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 A$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 A$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 A$$

Uppgift 17 (2,0 poäng)

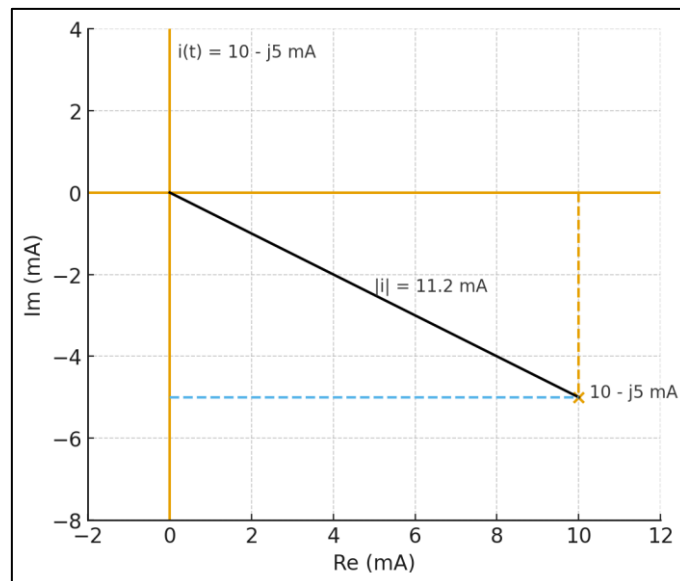
En ström $i(t)$ i en växelströmskrets skrivs på rektangulär form enligt nedan:

$$i(t) = 10 - j5 \text{ mA}$$

- Rita ut strömmen i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Uttryck strömmen på Eulers form, dvs. bestäm absolutbeloppet $|I|$ samt fasvinkeln δ så att $I = |I|e^{j\delta}$.
- Anta att strömmens frekvens $f = 50 \text{ Hz}$. Bestäm vinkelhastigheten ω .
- Skriv $i(t)$ som en tidsberoende funktion $i(t) = |I| * e^{j(\omega t + \delta)}$.

Lösning

- a) Vi ritar ut strömmen i det komplexa talplanet, såsom visas i nedanstående figur:



Figur 3: Strömmen $i(t) = 10 - j5 \text{ mA}$ i det komplexa talplanet.

- b) Vi bestämmer först strömmens absolutbelopp $|I|$ med Pythagoras sats:

$$|I| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ mA}$$

Vi bestämmer sedan fasvinkeln δ med \tan^{-1} :

$$\delta = \frac{I_{im}}{I_{re}} = \frac{-5}{10} \approx -0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx -26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom $i(t)$ ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta \leq 360^\circ$) samt att $-26,6^\circ = 360^\circ - 26,6^\circ = 333,4^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ korrekt.

Vi kan därefter uttrycka strömmen $i(t)$ med Eulers form:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(\omega t - 0,46)} \text{ mA}$$

- c) Vinkelhastigheten ω beräknas med hjälp av frekvensen $f = 50 \text{ Hz}$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

- d) Vi sätter in den bestämda vinkelhastigheten ω i det bestämda uttrycket för $i(t)$:

$$i(t) \approx 11,2e^{j(100\pi t - 0,46)} \text{ mA}$$

Uppgift 18 (2,0 poäng)

Du har följande vektorer: $a = (2; 1)$, $b = (3; -4)$ samt $c = (-1; 3)$. I uppgifterna nedan ska varje vektor $(x; y)$ tolkas som ett komplext tal $z = x + jy$.

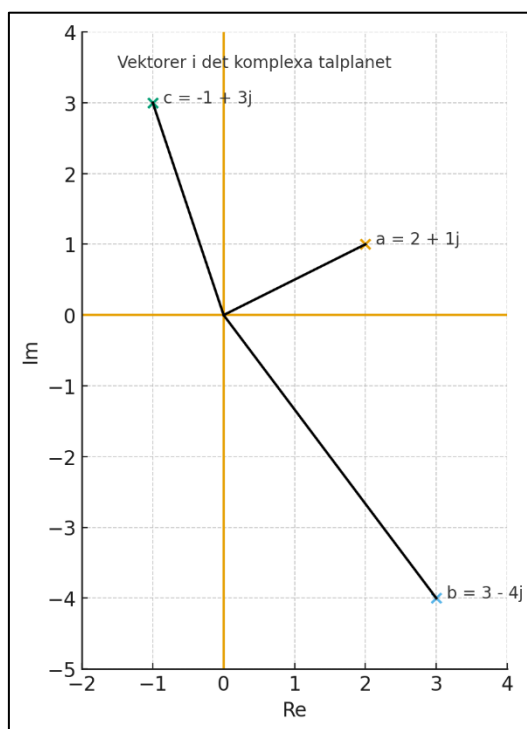
- Skriv vektorerna på komplex rektangulär form.
- Rita ut vektorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Bestäm vektorernas längder, dvs. absolutbeloppet av respektive tal.
- Bestäm längden (absolutbeloppet) av $2a - 3c$, dvs. $|2a - 3c|$.
- Bestäm vektorernas vinklar.
- Bestäm en vektor d med längden 7 som är motsatt riktad a .

Lösning

- a) Vi skriver respektive vektor som ett komplext tal:

$$\begin{cases} a = 2 + j \\ b = 3 - j4 \\ c = -1 + j3 \end{cases}$$

- b) Vi ritat ut respektive vektor i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 4: Vektorer a , b och c i det komplexa talplanet.

- c) Vi beräknar vektorernas längd genom att beräkna deras respektive absolutbelopp, vilket enkelt genomförs med Pythagoras sats:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

d) Vi bestämmer först $2a - 3c$:

$$2a - 3c = 2(2 + j) - 3(-1 + j3),$$

där

$$2(2 + j) = 4 + j2$$

samt

$$3(-1 + j3) = -3 + j9$$

Därmed gäller att

$$2a - 3c = 4 + j2 - (-3 + j9),$$

vilket kan skrivas om till

$$2a - 3c = 4 + j2 + 3 - j9 = 7 - j7,$$

Slutligen beräknar vi absolutbeloppet $|2a - 3c|$:

$$|2a - 3c| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2 * 49} = 7\sqrt{2} \approx 9,9$$

e) Vi beräknar vinklarna med \tan^{-1} . Vi börjar med δ_a :

$$\delta_a = \tan^{-1} \frac{1}{2} \pm k\pi \approx 0,46 \pm k\pi \text{ rad} \approx 26,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom a ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_a \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_a korrekt.

Vi fortsätter sedan med δ_b :

$$\delta_b = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,93 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom b ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$) samt att $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_b korrekt.

Vi avslutar med δ_c :

$$\delta_c = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,25 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom c ligger i andra kvadranten ($90^\circ \leq \delta_c \leq 180^\circ$) adderar vi $\pi = 180^\circ$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_c \approx -1,25 + 1 * \pi \approx 1,89 \text{ rad} \approx 108,3^\circ$$

f) Den nya vektorn d är motsatt riktad a , vilket innebär att dess fasvinkel $\delta_d = \delta_a + \pi$:

$$\delta_d = \delta_a + \pi \approx 0,46 + \pi \approx 3,6 \text{ rad} \approx 206,6^\circ$$

Vi vet att vektorns längd/absolutbelopp $|d| = 7$. Därmed kan vi beräkna dess reella samt imaginära delar med cosinus samt sinus, då

$$d = d_{re} + jd_{im},$$

där

- d_{re} = den reella delen,
- d_{im} = den imaginära delen.

Vi beräknar först den reella delen d_{re} med cosinus:

$$\cos \delta_d = \frac{d_{re}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{re} = |d| * \cos \delta_d \approx 7 * \cos (3,6) \approx -6,26$$

Vi beräknar sedan den imaginära delen d_{im} med sinus:

$$\sin \delta_a = \frac{d_{im}}{|d|},$$

som kan skrivas om till

$$d_{im} = |d| * \sin \delta_a \approx 7 * \sin (3,6) \approx -3,13$$

Därmed kan vektor d skrivas ut på rektangulär form:

$$d \approx -6,26 - j3,13$$

Uppgift 19 (2,0 poäng)

I en seriekoppling med tre komponenter mäts växelspänningen över respektive komponent till:

$$u_1(t) = 2 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 1,5 \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ V}$$

Den totala spänningen i kretsen U_{tot} beräknas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

- Skriv om spänningarna $u_1(t)$, $u_2(t)$ samt $u_3(t)$ till fasor U_1 , U_2 samt U_3 i komplex rektangulär form.
- Beräkna fasorsumman $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3$.
- Rita ut fasorerna i det komplexa talplanet (x-axeln = reell del, y-axeln = imaginär del).
- Omvandla tillbaka resultatet till en sinusformad spänning i tidsdomänen på följande form:

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(\omega t + \delta_{tot})$$

Lösning

- Vi omvandlar sinusspänningarna till motsvarande fasor en efter en:

$$U_1 = 2 \cos(25^\circ) + j2 \sin(25^\circ) \approx 1,81 + j0,85 \text{ V}$$

$$U_2 = 5 \cos(-45^\circ) + j5 \sin(-45^\circ) \approx 3,54 - j3,54 \text{ V}$$

$$U_3 = 1,5 \cos(36^\circ) + j1,5 \sin(36^\circ) \approx 1,21 + j0,88 \text{ V}$$

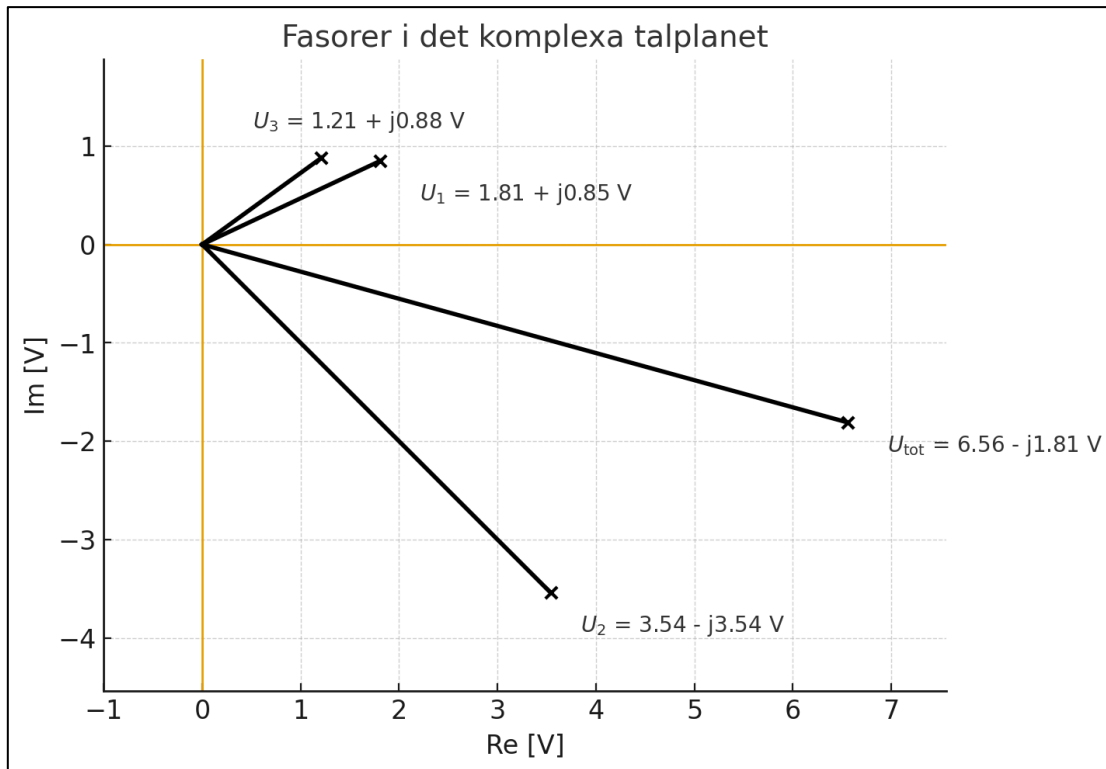
- Vi beräknar fasorsumman U_{tot} genom att addera de beräknade fasorerna U_1 , U_2 samt U_3 :

$$U_{tot} \approx 1,81 + j0,85 + 3,54 - j3,54 + 1,21 + j0,88,$$

vilket kan skrivas om till

$$U_{tot} \approx 6,56 - j1,81 \text{ V}$$

c) Vi ritat ut fasorerna i det komplexa talplanet enligt nedanstående figur:



Figur 1: Fasorer U_1 , U_2 , U_3 samt U_{tot} i det komplexa talplanet.

d) Vi omvandlar fasorsumman U_{tot} till motsvarande sinusformad spänning i tidsdomänen:

där

$$u_{tot}(t) = |U_{tot}| \sin(\omega t + \delta_{tot}),$$

samt

$$|U_{tot}| \approx \sqrt{6,56^2 + (-1,81)^2} \approx 6,81 \text{ V}$$

där

$$\delta_{tot} = \tan^{-1} \frac{-1,81}{6,56} \pm k\pi \approx -14,9^\circ \pm k\pi$$

$$k = 0, 1, 2 \dots n$$

Eftersom U_{tot} ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_b \leq 360^\circ$) samt att $-14,9^\circ = 360^\circ - 14,9^\circ = 345,1^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_{tot} korrekt.

Därmed kan sinusspänningen $u_{tot}(t)$ uttryckas enligt nedan:

$$u_{tot}(t) \approx 6,81 \sin(\omega t - 14,9^\circ) \text{ V}$$