

L16 – Typexempel med lösningsförslag

Former av komplexa tal

Rektangulär form

Ett komplext tal kan skrivas på rektangulär form enligt nedan:

$$z = x + jy,$$

där

- x utgör den reella delen av talet,
- y utgör den imaginära delen av talet (indikerat via det imaginära talet j).

Polär form

Ett komplext tal kan skrivas på polär form enligt nedan:

$$z = |z| \angle \delta,$$

där

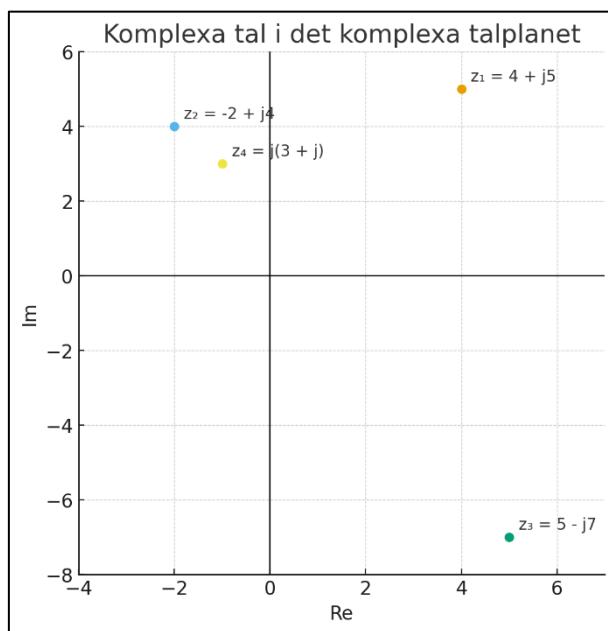
- $|z| =$ absolutbeloppet (längden) $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- $\delta =$ talets vinkel (fasvinkeln) $\Rightarrow \delta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm k\pi$ för $k = 0, 1, 2 \dots n$.

Notering: Vinkeln δ kan vara negativ eller ligga i andra kvadranten. Titta på var punkten ligger i planet när du bestämmer vinkeln.

1. Markera följande komplexa tal som punkter i det komplexa talplanet (x -axeln = reell del, y -axeln = imaginär del). Beräkna också absolutbeloppet $|z|$ och skriv talet i polär form ($|z| \angle \delta$), med fasvinkeln i radianer. Avrunda till en decimal.
- a) $z_1 = 4 + j5$
 b) $z_2 = -2 + j4$
 c) $z_3 = 5 - j7$
 d) $z_4 = j(3 + j)$

Lösning

Samtliga komplexa tal $z_1 - z_4$ har markerats i det komplexa talplanet nedan:



Figur 1: $z_1 - z_4$ markerade i det komplexa talplanet.

Elteknisk matematik

- a) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_1|$ med Pythagoras sats:

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_1 med \tan^{-1} :

$$\delta_1 = \tan^{-1} \frac{5}{4} \pm k\pi \approx 0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx 51,3^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom z_1 ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_1 \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_1 korrekt.

Därmed gäller att

$$z_1 = 4 + j5 \approx 6,4 \angle 0,9 \text{ rad}$$

- b) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_2|$ med Pythagoras sats:

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4,5$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_2 med \tan^{-1} :

$$\delta_2 = \tan^{-1} \frac{4}{-2} \pm k\pi \approx -1,1 \pm k\pi \text{ rad} \approx -63,4^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom z_2 ligger i andra kvadranten ($90^\circ \leq \delta_2 \leq 180^\circ$) adderar vi $\pi = 180^\circ$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_2 \approx -1,1 + 1 * \pi \approx 2,0 \text{ rad} \approx 116,6^\circ$$

Därmed gäller att

$$z_2 = -2 + j4 \approx 4,5 \angle 2,0 \text{ rad}$$

- c) Vi beräknar absolutbeloppet $|z_3|$ med Pythagoras sats:

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{60} \approx 8,6$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_3 med \tan^{-1} :

$$\delta_3 = \tan^{-1} \frac{-7}{5} \pm k\pi \approx -1,0 \pm k\pi \text{ rad} \approx -54,5^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom z_3 ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_3 \leq 360^\circ$) samt att $-54,5^\circ = 360^\circ - 54,5^\circ = 305,5^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_3 korrekt.

Därmed gäller att

$$z_3 = 5 - j7 \approx 8,6 \angle -1,0$$

- d) Först och främst utvecklar vi det givna uttrycket:

$$z_4 = j(3 + j) = j3 + j^2$$

Enligt definitionen av imaginära tal gäller att $j = \sqrt{-1}$, vilket innebär att

$$j^2 = -1$$

Därmed kan z_4 skrivas om till

$$z_4 = j3 + (-1),$$

Vilket är ekvivalent med

$$z_4 = -1 + j3$$

Vi beräknar absolutbeloppet $|z_4|$ med Pythagoras sats:

$$|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3,2$$

Vi beräknar fasvinkeln δ_4 med \tan^{-1} :

$$\delta_4 = \tan^{-1} \frac{3}{-1} \pm k\pi \approx -1,2 \pm k\pi \text{ rad} \approx -71,6^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom z_4 ligger i andra kvadranten ($90^\circ \leq \delta_4 \leq 180^\circ$) adderar vi $\pi = 180^\circ$. Vi sätter därmed k till 1:

$$\delta_4 \approx -1,2 + 1 * \pi \approx 1,9 \text{ rad} \approx 108,4^\circ$$

Därmed gäller att

$$z_4 = -1 + j3 \approx 3,2 \angle 1,9 \text{ rad}$$

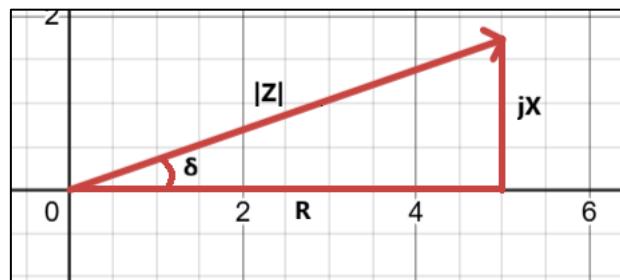
2. Inom elektroteknik är impedansen $Z = R + jX$ ett motstånd bestående av en resistiv respektive reaktiv del:

- Den resistiva delen R är ej frekvensberoende och utgörs av motstånd från resistorer. R är reell och ligger i det reella talplanet (x-led).
- Den reaktiva delen X är frekvensberoende och utgörs av motstånd från kondensatorer och spolar. X är imaginär (därav j :et) och ligger i det imaginära talplanet (y-led).

Omvandla impedansen $Z = 10 \angle \frac{\pi}{3} \text{ k}\Omega$ till rektangulär form.

Lösning

Enligt uppgift är impedansens absolutbelopp $|Z| = 10 \text{ k}\Omega$. Vi känner också till impedansens fasvinkel δ , vilket medför att impedansen kan visualiseras som en triangel såsom visas nedan:



Figur 2: Impedansen Z visualiseras som en triangel.

Som synes kan den resistiva delen R samt den reaktiva delen jX beräknas trigonometriskt (via cosinus samt sinus).

Vi beräknar först den resistiva delen R med cosinus:

$$\cos \delta = \frac{R}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$R = |Z| * \cos \delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att $R = 5 \text{ k}\Omega$, då

$$R = 10 * \cos \frac{\pi}{3} = 5 \text{ k}\Omega$$

Elteknisk matematik

Vi beräknar sedan den reaktiva delen X med sinus:

$$\sin \delta = \frac{X}{|Z|},$$

som kan skrivas om till

$$X = |Z| * \sin \delta$$

Genom att sätta in värden i ovanstående uttryck ser vi att $X \approx 8,7 \text{ k}\Omega$, då

$$X = 10 * \sin \frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} \text{ k}\Omega \approx 8,7 \text{ k}\Omega$$

Därmed kan impedansen Z skrivas på rektangulär form som visas nedan:

$$Z \approx 5 + j8,7 \text{ k}\Omega$$

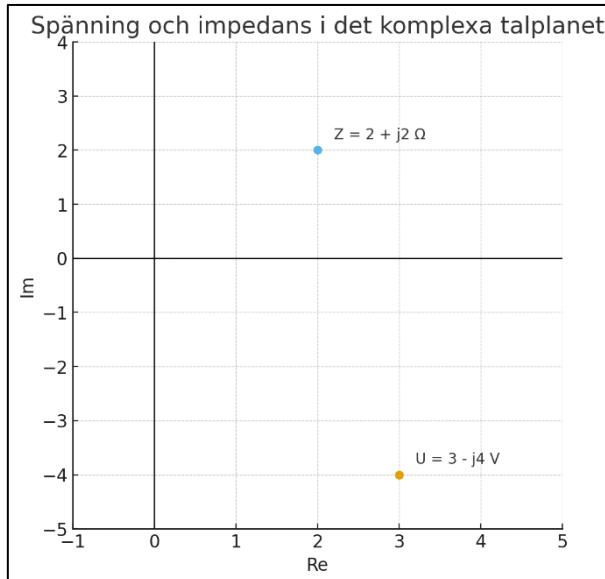
3. En krets matas med spänningen $U = 3 - j4 \text{ V}$. Kretsen har impedansen $Z = 2 + j2 \Omega$. Beräkna strömmen I som flödar genom kretsen med "Ohms lag", dvs. Ohms lag anpassad för komplexa tal:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ange strömmen både på rektangulär samt polär form.

Lösning

För att beräkna strömmen I måste spänningen U samt impedansen Z omvandlas till polär form. Vi börjar med att markera dessa storheter i det komplexa talplanet för att enklare kunna bestämma fasvinklarna.



Figur 3: Spänningen U samt impedansen Z markerade i det komplexa talplanet.

Vi börjar med att omvandla spänningen U , vars absolutbelopp $|U|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|U| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Vi beräknar sedan spänningens fasvinkel δ_u med \tan^{-1} :

$$\delta_u = \tan^{-1} \frac{-4}{3} \pm k\pi \approx -0,9 \pm k\pi \text{ rad} \approx -53,1^\circ \pm k * 180^\circ$$

Elteknisk matematik

Eftersom U ligger i fjärde kvadranten ($270^\circ \leq \delta_u \leq 360^\circ$) samt att $-53,1^\circ = 360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$ är den beräknade fasvinkeln δ_u korrekt.

Därmed gäller att

$$U = 3 - j4 \approx 5 \angle -0,9 \text{ rad } V$$

Vi omvandlar sedan impedansen Z , vars absolutbelopp $|Z|$ beräknas via Pythagoras sats:

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,8 \Omega$$

Vi beräknar sedan impedansens fasvinkel δ_z med \tan^{-1} :

$$\delta_z = \tan^{-1} \frac{2}{2} \pm k\pi \approx 0,8 \pm k\pi \text{ rad} = 45^\circ \pm k * 180^\circ$$

Eftersom Z ligger i första kvadranten ($0^\circ \leq \delta_z \leq 90^\circ$) är den beräknade fasvinkeln δ_z korrekt.

Därmed gäller att

$$Z = 2 + j2 \approx 2,8 \angle 0,8 \text{ rad } \Omega$$

Vi beräknar sedan strömmen I på polär form:

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{5 \angle -0,9}{2,8 \angle 0,8},$$

som kan skrivas om till

$$I \approx \frac{5}{2,8} \angle (-0,9 - 0,8) \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A$$

Strömmen kan därmed uttryckas på polär form enligt nedan:

$$I \approx 1,8 \angle -1,7 \text{ rad } A,$$

där

- strömmens absolutbelopp $|I| = 1,8 \text{ A}$,
- strömmens fasvinkel $\delta_i \approx -1,7 \text{ rad} \approx -98,1^\circ$.

Vi omvandlar sedan strömmen till rektangulär form såsom visades i uppgift 2. Vi söker

$$I = I_{re} + jI_{im},$$

där

- I_{re} = strömmens reella del,
- I_{im} = strömmens imaginära del (indikerad via j).

Vi beräknar först strömmens reella del I_{re} med cosinus:

$$I_{re} = |I| * \cos \delta_i \approx 1,8 * \cos (-1,7) = -0,25 \text{ A}$$

Vi beräknar sedan strömmens imaginära del I_{im} med sinus:

$$I_{im} = |I| * \sin \delta_i \approx 1,8 * \sin (-1,7) \approx -1,75 \text{ A}$$

Strömmen I kan därmed uttryckas på rektangulär form såsom visas nedan:

$$I = -0,25 - j1,75 \text{ A}$$