Lösningsförslag till övningsdugga 1

Uppgift 1 (1,0 poäng)

Resistansen för två parallellkopplade resistorer R_1 och R_2 kan beräknas med följande formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Beräkna resistansen R_2 om R_1 = 10 kΩ och parallellresistansen R = 4,5 kΩ. Ange svaret i kΩ med en värdesiffra.
Notering: Ω är enheten för resistans och utläses 'Ohm').

Svar: Vi härleder en formel för resistansen R_2. Vi börjar med att transformera högerledet i ovanstående formel:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1 * R_2}{R_1R_2} + \frac{1 * R_1}{R_2R_2},$$

vilket kan förenklas till

$$\frac{R_2}{R_1R_2} + \frac{R_1}{R_2R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}$$

Därmed gäller att

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}$$

Vi lägger in detta i den givna formeln för parallellresistans:

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2},$$

vilket kan transformeras till

$$\frac{R_1R_2}{R} = R_1 + R_2$$

Genom att multiplicera med R i båda led erhålls följande:

$$R_1R_2 = R(R_1 + R_2)$$

vilket kan förenklas till

$$R_1R_2 = RR_1 + RR_2$$

Vi placerar samtliga faktorer innehållande R_2 i vänsterledet och erhåller då följande formel:

$$R_1R_2 - RR_2 = RR_1$$

Vi bryter sedan ut R_2 i vänsterledet:

$$R_2(R_1 - R) = RR_1$$

Genom att dividera med (R_1 – R) i båda led kan följande formel erhållas:

$$R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$$

Slutligen sätter vi in värden i formeln ovan:

$$R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R} = \frac{4{,}5k * 10k}{10k - 4{,}5k} \approx 8{,}2\ k\Omega$$

Notera att 8,2 kΩ är ett av resistorvärdena i den mycket utbredda E12-serien.

Uppgift 2 (1,0 poäng)

Förenkla följande uttryck så långt det går:

$$\frac{\frac{c^8 - c^4}{c^2}}{c(c^2 - 1)}$$

Svar: Vi börjar med att förenkla täljaren:

$$\frac{c^8 - c^4}{c^2} = c^{8-2} - c^{4-2} = c^6 - c^2$$

Vidare gäller att

$$c^6 - c^2 = c^2(c^4 - 1)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - c^4}{c^2}}{c(c^2 - 1)} = \frac{c^2(c^4 - 1}{c(c^2 - 1)}$$

Eftersom vi har c^2 i täljaren samt c i nämnaren kan följande förenkling genomföras:

$$\frac{c^2}{c} = c,$$

vilket innebär att

$$\frac{c^2(c^4 - 1}{c(c^2 - 1)} = \frac{c(c^4 - 1)}{c^2 - 1}$$

Vi kan sedan förenkla täljaren ytterligare:

$$c^4 - 1 = (c^2 + 1)(c^2 - 1),$$

vilket innebär att

$$\frac{c(c^2 + 1)(c^2 - 1)}{c^2 - 1}$$

Vi har nu $c^2 + 1$ både i täljaren och nämnaren. Dessa tar ut varandra, vilket innebär att

$$\frac{c(c^2 + 1)(c^2 - 1)}{c^2 - 1} = c(c^2 + 1)$$

Därmed gäller att

$$\frac{\frac{c^8 - c^4}{c^2}}{c(c^2 - 1)} = c(c^2 + 1)$$

Uppgift 3 (1,0 poäng)

Lös nedanstående ekvationssystem. Svara exakt i bråkform.

$$\begin{cases} 4y - 2x + 6 = 0 \\ 3y = 5x + 4 \end{cases}$$

Svar: Vi börjar med att härleda en formel för x via den första ekvationen:

$$4y - 2x + 6 = 0 => 4y + 6 = 2x,$$

vilket är ekvivalent med

$$2x = 4y + 6$$

Genom att dividera med 2 i respektive led erhålls följande formel för x:

$$x = 2y + 3$$

Vi sätter in ovanstående formel för x i den andras ekvationen:

$$3y = 5x + 4 = 5(2y + 3) + 4,$$

vilket är ekvivalent med

$$3y = 5 * 2y + 5 * 3 + 4,$$

som kan vidareutvecklas till följande:

$$3y = 10y + 15 + 4 = 10y + 19$$

Därmed gäller att

$$10y + 19 = 3y$$

Vi subtraherar sedan 3y i högerledet och erhåller då följande:

$$7y + 19 = 0$$

Vi subtraherar sedan medan 19 i vänsterledet och erhåller då följande:

$$7y = -19$$

Vi kan sedan beräkna y genom att dividera med 7 i båda led:

$$y = -\frac{19}{7}$$

Vi sätter in ovanstående värde i tidigare härledd formel för x och erhåller då följande:

$$x = 2y + 3 = 2\left(-\frac{19}{7}\right) + 3,$$

vilket kan utvecklas till följande:

$$x = -\frac{2 * 19}{7} + 3 = -\frac{38}{7} + 3$$

För att hela högerledet ska inneha en gemensam nämnare multiplicerar vi talet 3 med 7:

$$x = -\frac{38}{7} + \frac{3 * 7}{7} = -\frac{38}{7} + \frac{21}{7} = -\frac{17}{7}$$

Därmed gäller att

$$x = -\frac{17}{7}$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera erhållna värden. Vi börjar med den första ekvationen:

$$4y - 2x + 6 = 0,$$

där

$$4y = 4 * \left(-\frac{19}{7}\right) = -\frac{76}{7}$$

och

$$2x = 2 * \left(-\frac{17}{7}\right) = \frac{34}{7}$$

Därmed gäller att

$$4y - 2x = -\frac{76}{7} + \frac{34}{7} = -\frac{42}{7} = -6$$

Den första ekvationen stämmer därmed, då

$$4y - 2x + 6 = -6 + 6 = 0$$

Vi testar sedan den andra ekvationen:

$$3y = 5x + 4,$$

där

$$3y = 3 * \left(-\frac{19}{7}\right) = -\frac{57}{7}$$

Därmed gäller att

$$3x = 5x + 4 = -\frac{57}{7},$$

där

$$5x = 5 * \left(-\frac{17}{7}\right) = -\frac{85}{7}$$

Den andra ekvationen stämmer också, då

$$5x + 4 = -\frac{85}{7} + 4 = -\frac{85}{7} + \frac{4 * 7}{7} = -\frac{85}{7} + \frac{28}{7} = -\frac{57}{7}$$

Uppgift 4 (0,5 poäng)

Ekvationerna i Uppgift 3 är exempel på räta linjens ekvation. Ange den första ekvationens lutning *k* samt vilovärde *m.*

Svar: Den första ekvationen visas nedan:

$$4y - 2x + 6 = 0$$

Den räta linjens ekvation har följande form:

$$y = kx + m$$

Vi omvandlar därmed ovanstående formel till

$$4y = 2x - 6$$

Genom att dividera med 4 i båda led erhålls följande formel:

$$y = \frac{2x - 6}{4} = 0{,}5x - 1{,}5$$

Därmed gäller att

$$k = 0{,}5; m = -1{,}5$$

Uppgift 5 (0,5 poäng)

Nedanstående ekvation har en lösning i intervallet mellan 90° och 180°. Hitta denna lösning och ange den i grader:

$$\sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svar: För att beräkna vinkeln v använder vi $\sin^{-1}$:

$$\sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} => v_1 = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60°$$

För sinus gäller att:

$$v_2 = 180° - v_1$$

Därmed gäller att lösningen i intervallet mellan 90° och 180° är 120°, då

$$v_2 = 180° - 60° = 120°$$

Uppgift 6 (1,0 p)

Lös följande ekvation:

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 4 - 20x$$

Ange svaret med två decimaler.

Svar: Vi börjar med att förenkla respektive faktor i vänsterledet:

$$8(x+2)^2 = 8(x^2 + 4x + 4) = 8x^2 + 32x + 32$$

samt

$$5(x-3)^2 = 5(x^2 - 6x + 9) = 5x^2 - 30x + 45$$

Därmed gäller för vänsterledet att

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8x^2 + 32x + 32 - (5x^2 - 30x + 45),$$

vilket kan förenklas till

$$8x^2 + 32x + 32 - 5x^2 + 30x - 45,$$

vilket är ekvivalent med

$$3x^2 + 62x - 13$$

Därmed gäller att

$$3x^2 + 62x - 13 = 4 - 20x,$$

vilket kan transformeras till följande:

$$3x^2 + 82x - 17 = 0 => 3x^2 = -82x + 17$$

Genom att dividera med 3 i både led erhålls följande ekvation:

$$x^2 = -\frac{82x}{3} + \frac{17}{3}$$

Vi kan sedan beräkna x med PQ-formeln:

$$x = \frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2}\right)^2 + \frac{17}{3}}$$

Eftersom

$$\frac{\left(-\frac{82}{3}\right)}{2} = -\frac{82}{6} = -\frac{41}{3}$$

gäller att

$$x = -\frac{41}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{41}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}} \approx -\frac{41}{3} \pm 13{,}87$$

Vi kan därmed erhålla följande värden för x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{41}{3} + 13{,}87 \approx 0{,}21 \\ x_2 = -\frac{41}{3} - 13{,}87 \approx -27{,}54 \end{cases}$$

Vi kontrollräknar sedan för att verifiera svaren. Vi börjar med x_1. Vänsterledet är ungefär lika med -0,11, då

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8 * (0{,}21+2)^2 - 5 * (0{,}21-3)^2 \approx -0{,}11$$

Högerledet är också lika med -0,11, då

$$4 - 20x = 4 - 20 * 0{,}21 \approx -0{,}11$$

Vi kollar också x_2. Vänsterledet är ungefär lika med -554,8, då

$$8(x+2)^2 - 5(x-3)^2 = 8 * \left((-27{,}54)+2\right)^2 - 5 * \left((-27{,}54)-3\right)^2 \approx 554{,}8$$

Högerledet är också lika med 554,8 då

$$4 - 20x = 4 - 20 * (-27{,}54) \approx 554{,}8$$