

Exempel, derivata

Exempel 1:

Ett antal bakterier i en bakteriekultur ges av formeln

$$N(t) = 2t^2 + 52t + 450$$

där t är tiden i timmar. Bestäm tillväxthastigheten då $t = 3,5$

1. Tillväxthastigheten är förändringen vid en viss tidpunkt, alltså derivatan.
2. Derivera $N(t) = 2t^2 + 52t + 450$
 $N'(t) = 4t + 52$ detta är derivatans formel för valfritt t
3. Sätt in den tid du är intresserad av, alltså 3,5 i stället för.
 $N(3,5) = 4 \cdot 3,5 + 52 = 14 + 52 = 66$
4. Svar: Tillväxthastigheten vid tiden $t=3,5$ timmar är 66 bakterier/timme.

Exempel 2:

Produktionskostnaden $P(x)$ kr för x enheter av en vara fås ur formeln

$$P(x) = 0,001x^2 + 4x$$

Bestäm marginalkostnaden vid produktionen av $x=200$ enheter.

1. Marginalkostnaden är kostnaden vid ett visst produktionsantal, alltså derivatan.
2. Derivera formeln produktionskostnaden $P(x) = 0,001x^2 + 4x$
 $P'(x) = 0,002x + 4$
3. Sätt in det antal du är intresserad av, alltså $x=200$ i derivatans formel.
 $P'(200) = 0,002 \cdot 200 + 4 = 4,4$
4. Svar: Vid produktion av 200 enheter är marginalkostnaden 4,40 kr /styck (alltså kostnaden för att tillverka den 200:e enheten).

Exempel 3

Derivatan är samma som k -värdet för tangenten till en graf. **Tangenten** är en rät linje och kan då skrivas som $y=kx+m$

Att bestämma tangentens ekvation för kurvan $f(x)=4x-x^2$ då $x=3$.

1. Tangenten är derivatan, derivera $f(x) = 4x - x^2$
 $f'(x) = 4 - 2x$
2. Vi vill veta tangenten (derivatan) då x är 3. Sätt in 3 i stället för x $f'(3) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$

Då får vi linjens lutning, alltså k -värdet är -2.
3. För att räkna ut m -värdet i $y=kx+m$ behöver vi en punkt på linjen. Beräkna y -värdet för kurvan då $x=3$ (den sökta punkten). $f(x) = 4x - x^2$ $f(3) = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3 \Rightarrow y = 3$ då $x = 3$

4. $y=kx+m$ $k=-2$, $x=3$ ger att också $y=3$. Sätt in värden och beräkna m

$$y = kx + m$$

$$3 = -2 \cdot 3 + m$$

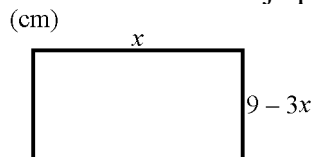
$$9 = m$$

5. Svar: Tangentens ekvation är $y = -2x+9$

Övningar

1. Derivera funktionen $y = x^3$
2. Derivera funktionen $y = 5x^2$
3. Derivera funktionen $y = 2x$
4. Derivera funktionen $y = -6x$
5. Derivera funktionen $y = 12,5$
6. Derivera funktionen $y = x^3 + x^2$
7. Derivera funktionen $y = 3x^7 - 5x^6$
8. Derivera funktionen $y = x + 2$
9. Derivera funktionen $y = 3,1 \cdot 10^3 x^2 + 2,2 \cdot 10^{-1} x$
10. Derivera funktionen $y = 0,05 + 0,1x$
11. Lös nedanstående problem.
 - a) Derivera $f(x) = 3x^4 - 4x + 3$
 - b) Beräkna $f'(2)$
12. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 1}{3}$
13. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = x(x + 3)$
14. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = x^2(x^3 - 3x)$
15. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = x^3(2x^2 - x + 1)$
16. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = (3x + 1)^2$
17. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = (2 - 4x)^2$
18. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = (x + 1)(x - 2)$
19. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = (2x - 3)(7 - x)$
20. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = (3x - 2)(5 + 4x)$
21. Kurvan $y = 3x^2 - 4$ har en tangent i punkten $(2; 8)$. Bestäm tangentens k -värde.
22. Kurvan $y = x^2 - 4x + 1$ har en tangent i punkten $(4; 1)$. Bestäm tangentens k -värde.
23. Kurvan $y = 5x - x^2$ har en tangent i punkten $(2; 6)$. Bestäm tangentens k -värde.
24. Kurvan $y = x^3 - 2x^2 + 1$ har en tangent i punkten $(2; 1)$. Bestäm tangentens k -värde.

25. Bestäm rektangelns maximala area med hjälp av derivatan.



26. Internettjänsten "Napster" förmedlar musik i mp3-format. För att kunna använda tjänsten måste man logga in med ett lösenord. Antalet besökare registreras kontinuerligt. Ett dygn visade det sig att antalet besökare följde funktionen $B(x) = 38x - x^2 + 8540$ där B är antalet besökare efter x timmar.

Hur många är inloggade som mest och när sker detta?

Använd derivatan och svara i hela timmar.

27. Feberkurvan (T °C) hos en person följer under tre veckor formeln

$$T(x) = 37,0 + 0,6x - 0,03x^2, \text{ där } x = \text{antalet dagar.}$$

Bestäm när febertoppen inträffar och hur hög febern är då.

28. Ett föremål rör sig enligt $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$, där s mäts i km och t i timmar. Bestäm föremålets hastighet efter tre timmar.

Rätta svar

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $y' = 3x^2$ | 14. $f'(x) = 5x^4 - 9x^2$ |
| 2. $y' = 10x$ | 15. $f'(x) = 10x^4 - 4x^3 + 3x^2$ |
| 3. $y' = 2$ | 16. $f'(x) = 18x + 6$ |
| 4. $y' = -6$ | 17. $f'(x) = 32x - 16$ |
| 5. $y' = 0$ | 18. $f'(x) = 2x - 1$ |
| 6. $y' = 3x^2 + 2x$ | 19. $f'(x) = 17 - 4x$ |
| 7. $y' = 21x^6 - 30x^5$ | 20. $f'(x) = 24x + 7$ |
| 8. $y' = 1$ | 21. 12 |
| 9. $y' = 6,2 \cdot 10^3 x + 0,22$ | 22. 4 |
| 10. $y' = 0,1$ | 23. 1 |
| 11. a) $f'(x) = 12x^3 - 4$ | 24. 4 |
| b) 92 | 25. $6,75 \text{ cm}^2$ |
| 12. $f'(x) = \frac{10x}{3} + 1$ | 26. 8901 inloggade efter 19 h. |
| 13. $f'(x) = 2x + 3$ | 27. Efter 10 dagar är febern $40,0^\circ\text{C}$. |
| | 28. 8 km/h |