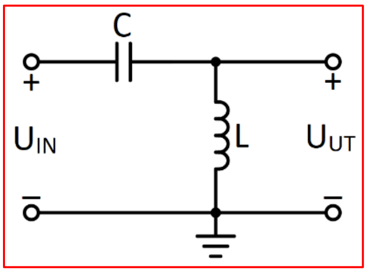
# 2.4 - Högpass LC-filter

## 2.4.1 - Introduktion till LC-filter

- Som vi har sett tidigare så kan hög- samt lågpassfilters egenskaper förbättras genom att ersätta filterresistorn R med en filterspole. Då bildas ett så kallad högpass LC-filter, se figuren till höger.



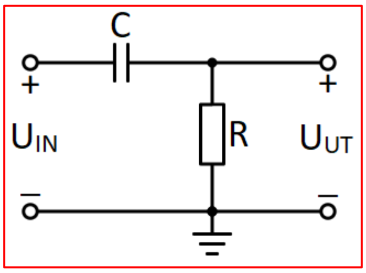

*Högpass LC-filter dämpar frekvenser under brytfrekvensen $f_c$ effektivare än motsvarande RC-filter. Dock så krävs en spole, som oftast tar mycket plats samt kostar mycket; i IC-kretsar används därför oftast RC-filter istället.*

- Högpass LC-filtret dämpar frekvenser under brytfrekvensen effektivare än motsvarande RC-filter, samtidigt som frekvenser ovanför brytfrekvensen dämpas mindre.

- Trots att högpass LC-filter har mer önskvärda egenskaper än motsvarande RC-filter så används oftast RC-filter; dels så har RC-filtret tillräckligt goda egenskaper för de flesta ändamål, samtidigt som filtret blir billigare att tillverka och mindre utrymmeskrävande.

- Det är själva filterspolen L som utgör både för- och nackdelarna med högpass LC-filtret. Det är filterspolen som medför filtrets mer önskvärda egenskaper, men det är också filterspolens som medför att LC-filter kostar mer att tillverka och blir mer utrymmeskrävande; generellt sett så är spolar relativt stora och dyra komponenter.

- Att få plats med en eller flera spolar är fysiskt omöjligt i de flesta IC-kretar på grund av spolarnas storlek.



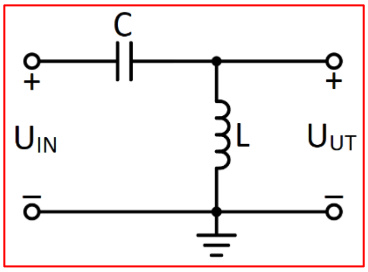

*Högpass RC-filter, vars egenskaper inte är lika bra som motsvarande LC-filter ovan. Dock så är RC-filter vanligtvis mycket billigare att tillverka samt kräver mindre utrymme (filterspolen tar generellt sett upp mycket yta, vilket kan vara problematiskt, särskilt i IC-kretsar).*

- Även om det fanns möjlighet att få plats med spolar i IC-kretsarna så hade förmodligen de flesta tillverkare ändå valt att använda RC-filter, på grund av att spolar är relativt dyra. Vid massproduktion hade då IC-kretsarna blivit väldigt dyra att tillverka; förmodligen hade detta också medfört att elutrustning med sådana IC-kretsar hade blivit mycket dyra.

- I detta avsnitt kommer högpass LC-filter att analyseras och konstrueras; vi kommer gå igenom filtrets egenskaper, överföringsfunktion samt in- och utimpedans vid olika frekvenser, precis som vi gjorde tidigare för motsvarande RC-filter.

- I detta avsnitt så förväntas läsaren ha genomgått analys av högpass RC-filter (gärna också lågpass RC-filter) och därmed ha koll på härledning av högpass RC-filtrets överföringsfunktion, amplitudfunktion samt in- och utimpedans. Detta avsnitt kommer därför vara kortare än de tidigare, då dessa delar inte kommer förklaras från grunden än en gång.

### 2.4.2 - Dimensionering av högpass LC-filter



*Högpass LC-filter.*

- Anta att vi skall dimensionera ett högpass LC-filter på ingången till en förstärkare, vars brytfrekvens $f_c$ är lika med 1 Hz:

$$f_c = 1\ Hz$$

- Som vi har sett tidigare så är det mycket vanligt att använda ett högpassfilter vars brytfrekvens ligger mellan 0,5–5 Hz på ingången till förstärkare, då likström kan förstöra högtalaren, samtidigt hörbara frekvenser skall släppas igenom utan märkbar dämpning.

- På grund av att högpassfiltret inte har perfekta egenskaper, oavsett om det är ett LC-filter eller ett RC-filter, så kommer frekvenser på båda sidor av brytfrekvensen $f_c$ att dämpas; för ett högpassfilter så kommer lägre frekvenser dämpas, vilket vi vill, men tyvärr kommer också frekvenser ovanför brytfrekvensen dämpas; om vi sätter brytfrekvensen för nära det hörbara området så kan filtret spärra en viss del hörbara frekvenser, särskilt basfrekvenser. Därför så sätter vi lämpligen högpass LC-filtrets brytfrekvens $f_c$ långt under den nedre gränsen av det hörbara intervallet, alltså lugnt under 20 Hz.

- Brytfrekvensen $f_c$ kan beräknas med formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där L är filterspolens induktans och C är filterspolens kapacitans. Vi måste välja lämpliga värden på dessa komponenter.

- Eftersom vi skall dimensionera två komponenter (spolen samt kondensatorn) så kan vi välja en av dem valfritt och därefter dimensionera den andra komponenten utefter detta. Eftersom brytfrekvensen $f_c$ är så låg som 1 Hz så kommer vi behöva använda en stor filterspole samt en stor filterkondensator. Vi väljer därför att sätta filterspolen L till 1 H:

$$L = 1\ H$$

- Då återstår bara att välja en lämplig filterkondensator C för ändamålet. Vi kan transformera formeln för brytfrekvensen $f_c$ ovan för att härleda en formel för filterkondensatorns kapacitans C:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow f_c * \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_c}$$

- Därefter kvadrerar vi båda sidor av formeln, vilket medför att

$$LC = \left(\frac{1}{2\pi f_c}\right)^2 = \frac{1}{(2\pi f_c)^2} \rightarrow C = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * L}$$

- Genom att sätta in värden i formeln ovan ser vi då att för en brytfrekvens $f_c$ på 1 Hz samt en filterspole L på 1 H så bör vi använda en filterkondensator C på ungefär 25 mF, eftersom

$$C = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * L} = \frac{1}{(2\pi * 1)^2 * 1} \approx 25\ mF$$

- Närmaste standardvärde är 27 mF, som vi därmed använder:

$$C = 27\ mF$$

- En kondensator av en sådan storlek (27 mF) kommer innebära mycket hög ekvivalent serieresistans (ESR) samt ekvivalent serieinduktans (ESL), vilket kan medföra höga effektförluster samt att filtrets utsignal blir nedsatt på grund av spänningsfallet över kondensatorns interna resistans.

- Det är därför mycket viktigt att vi parallellkopplar en kondensator på exempelvis 1 µF för att kraftigt reducera påverkan av ESR och ESL. Med ett sådant kondensatorvärde, som är 27 000 gånger mindre än 27 mF:s kondensatorn, så kan vi räkna med att ESR samt ESL minskar med en faktor 27 000 var.

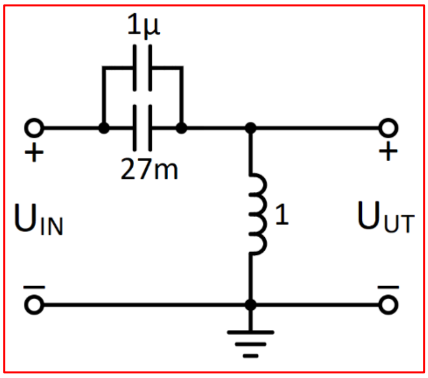
- Samtidigt så reduceras inte den totala kapacitansen i filtret, då ersättningskapacitansen $C_{TOT}$ av parallellkopplade kapacitanser beräknas som summan av deras interna kapacitanser, vilket inte är fallet för motsvarande resistans samt induktans.

- Därmed så gäller för högpass LC-filtret ovan att den totala kapacitansen $C_{TOT}$ i kretsen blir lika med 27 µF, eftersom

$$C_{TOT} = C + 1\mu = 27m + 1\mu \approx 27\ mF$$

- Därmed så har vi konstruerat ett högpass LC-filter, vars brytfrekvensen $f_c$ ligger något under 1 Hz, eftersom

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{TOT}}} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{1 * 27m}} \approx 0{,}97\ Hz$$




*Färdigdimensionerat högpass LC-filter, vars brytfrekvens $f_c$ ligger omkring 1 Hz; därmed dämpas frekvenser under 1 Hz, medan övriga frekvenser släpps igenom.*

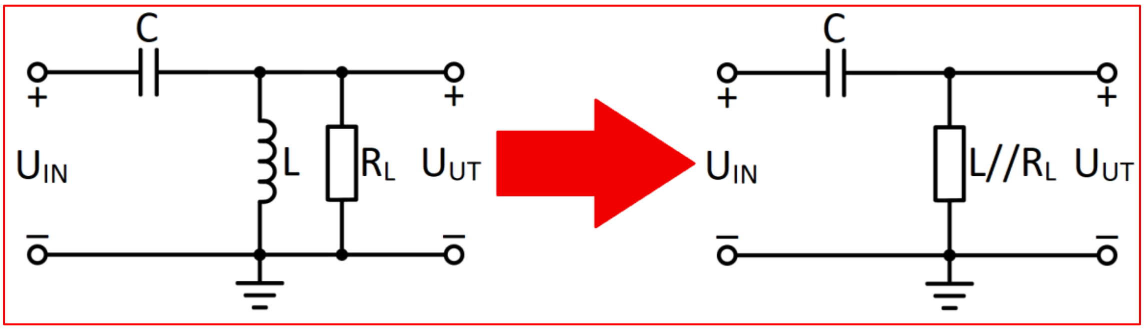
*En kondensator på 1 µF minskar effektförluster samt risken att utsignalen blir nedsatt, på grund av 25 mF:s kondensatorns ekvivalenta serieresistans (ESR) samt serieinduktans (ESL).*

- Trots en mycket stor filterkondensator C på 27 mF så har åtgärder vidtagits för att säkerhetsställa att filterkondensatorns ESR och ESL inte kommer medföra höga förlusteffekter eller sänkt utsignal.

### 2.4.3 - Högpass LC-filter i lastat tillstånd

- Vanligtvis så efterföljs högpassfiltret av en eller flera ytterligare komponenter, såsom lågspassfilter eller förstärkare, vilket medför att högpassfiltret kommer vara lastat med en viss resistans (ibland också impedans, beroende på vilken komponent det gäller, men vi antar här att det är en resistans). Faktum är att efterföljande komponentens inresistans kommer utgöra en last, vars resistans vi kallar $R_L$ (L står för last).

- Lastresistansen $R_L$ kan tänkas vara ansluten parallellt med högpassfiltrets utgång, vilket medför att filterspolen L samt lastresistansen $R_L$ utgör en parallellkoppling $L//R_L$, se den vänstra figuren nedan. Vi kan därmed ersätta filterspolen L samt lastresistansen $R_L$ med parallellimpedansen $L//R_L$, vilket förenklar kretsschemat, se den högra figuren nedan.




*Genom att förenkla kretsschemat på det lastade högpass LC-filtret så efterliknar dess form ett vanligt olastat högpass LC-filter, med skillnaden att filterspolen L ersätts med ersättningsimpedansen $L//R_L$. Detta kan påverka filtrets brytfrekvens $f_c$, beroende på storleken på lastresistansen $R_L$ i förhållande till filterspolen L. I de flesta fall så är dock filterspolen runt 1 mH upp till 1 H, vilket är mycket mindre än lastresistansen $R_L$, som vanligtvis ligger mellan 10 Ω upp till hundratals TΩ, såsom ingången på förstärkare med så kallade FET-transistorer på ingångarna.*

- Efter förenklingen av kretsschemat så efterliknar det lastade högpass LC-filtret ett vanligt olastat högpass LC-filter. Den enda skillnaden att filterspolen L har ersatts med ersättningsimpedansen $L//R_L$. Detta medför att vid de tillfällen vi räknar med filterspolen L i olastat tillstånd så måste vi räkna med $L//R_L$ i lastat tillstånd, exempelvis i formeln för högpass LC-filtrets brytfrekvens, som nu blir

$$f_c = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L//R_L * C}},$$

  där $f_c$ är brytfrekvensen, L är filterspolens induktans, $R_L$ är lastresistansen och C är filterkondensatorns kapacitans.

- Detta betyder att lastresistansen $R_L$ kan medföra att brytfrekvensen $f_c$ påverkas; detta beror på lastresistansen $R_L$:s storlek i förhållande till filterspolen L:s reaktans; om $R_L$ är mycket hög, så kan denna försummas, då ersättningsimpedansen $L//R_L$ i så fall blir ungefär lika med filterspolens induktans L. Då kan brytfrekvensen $f_c$ beräknas som i olastat tillstånd, eftersom

$$R_L \gg L \rightarrow L//R_L \approx L,$$

  vilket medför att

$$f_c = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L//R_L * C}} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

  precis som i olastat tillstånd.

- I de flesta fall är detta också fallet; i de två föregående exemplen så användes en relativt stor spole på 1 H. Vi kan med stor sannolikhet anta att eventuell lastresistans är långt högre än så, säkert minst 10 Ω och kanske upp mot hundratals MΩ eller GΩ; därmed så kan eventuell lastresistans $R_L$ i normala fall försummas.

### 2.4.4 - Härledning av högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s)

- Man kan enkelt härleda högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s), som är ration av in- och utsignalen, genom Laplacetransformering av filtret:

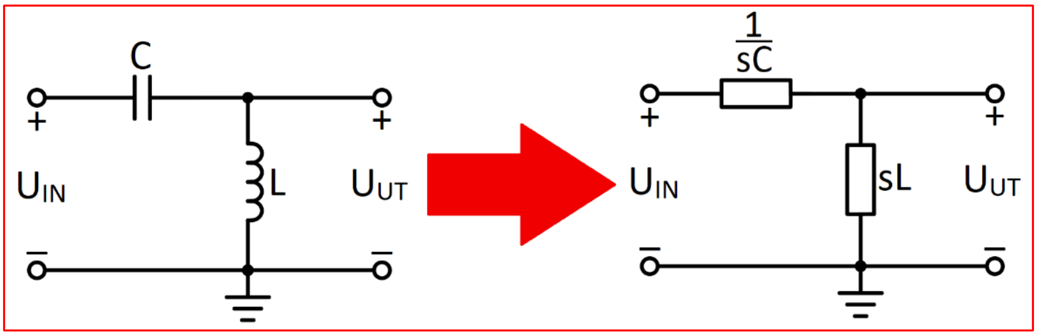
$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}},$$

där H(s) är filtrets överföringsfunktion* och $U_{IN}$ samt $U_{UT}$ är in- respektive utsignalen ur filtret.

*S:et i H(s) indikerar att värdet på överföringsfunktionen H beror på värdet på frekvensparametern s, som i sig beror på frekvensen f; därmed beror H indirekt på den aktuella frekvensen, vilket möjliggör sådant som filter.

- Vid frekvenser där överföringsfunktionen H(s) är lika med ett så är utsignalen $U_{UT}$ lika med insignalen $U_{IN}$, vilket betyder att filtret inte dämpar signaler vid den aktuella frekvensen.

- Ju närmre överföringsfunktionen H(s) når noll, desto mer dämpas inkommande signaler; som exempel, när H(s) är lika med noll så blir utsignalen $U_{UT}$ lika med noll, oavsett hur stor insignalen $U_{IN}$ är.

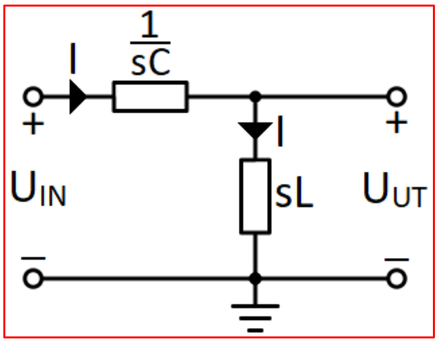



*Laplacetransformering av ett högpass LC-filter.*

- Som synes i figuren till höger så kommer strömmen I flöda genom både filterkondensatorn C och filterspolen L till jordpunkten; att strömmen I inte delas upp i knutpunkten ovanför filterspolen L beror på att det inte finns någon väg för strömmen I att flöda ned till jord via utsignalen $U_{UT}$, vilket medför att all ström kommer flödar genom filterspolen L.

- För att härleda en formel för överföringsfunktionen H(s) så behöver vi härleda formler för insignalen $U_{IN}$ samt utsignalen $U_{UT}$, vilket vi enkelt kan göra med Kirchhoffs spänningslag.

- För att härleda en formel för inspänningen $U_{IN}$ så går vi ett varv från jordpunkten via $U_{IN}$ (från minus- till pluspolen, vilket därför räknas som $U_{IN}$), via filterkondensatorn C och ned till jordpunkten via filterspolen L.
Då erhålls formeln




*Eftersom den enda vägen för strömmen till jord är via spolen så flödar samma ström I genom filterkondensatorn C och filterspolen L.*

$$U_{IN} - I * \frac{1}{sC} - sLI = 0,$$

där $U_{IN}$ är insignalen, I * 1/(sC) är spänningsfallet över filterkondensatorn och sLI är spänningsfallet över filterspolen.

- Notera att spänningsfallet I * 1/(sC) över filterkondensatorn samt spänningsfallet sLI över filterspolen räknas som negativa i formeln, eftersom beräkningen sker i strömmens riktning, alltså från plus- till minuspolen.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$U_{IN} = I * \frac{1}{sC} + sLI$$

Elektroteknik

- Genom att bryta ut strömmen I så kan följande formel härledas för inspänningen $U_{IN}$:

$$U_{IN} = I\left(\frac{1}{sC} + sL\right) = I\left(\frac{s^2LC + 1}{sC}\right) = I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)$$

- Därefter härleder vi en formel för utsignalen $U_{UT}$. Vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via utspänningen $U_{UT}$, sedan via filterspolen L ned till jordpunkten. I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så är summan av samtliga spänningsfall ett helt varv i en sluten krets lika med noll, vilket medför att summan av utspänningen $U_{UT}$ samt spänningsfallet sLI över filterspolen L är lika med noll. Vi kan därmed härleda formeln

$$U_{UT} - sLI = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{UT} = sLI$$

- Därmed så kan en första formel härledas för högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s):

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{sLI}{I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)},$$

där strömmen I kan tas bort ur formeln, eftersom I förekommer i både täljaren och nämnaren, vilket ger

$$H(s) = \frac{sL}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)},$$

som vidare kan förenklas genom att multiplicera med sC i både täljaren och nämnaren:

$$H(s) = \frac{sL}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)} = \frac{sL * sC}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right) * sC} = \frac{s^2LC}{1 + s^2LC}$$

- Därefter kan vi dividera med $s^2LC$ i både täljaren och nämnaren, vilket ger

$$H(s) = \frac{s^2LC}{1 + s^2LC} = \frac{\left(\frac{s^2LC}{s^2LC}\right)}{\left(\frac{1 + s^2LC}{s^2LC}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{s^2LC} + \frac{s^2LC}{s^2LC}} = \frac{1}{\frac{1}{s^2LC} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2LC}}$$

- Därmed så kan en slutgiltig formel för högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) härledas:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2LC}},$$

där den resistiva delen av överföringsfunktionen (samt filtret) är lika med ett och den reaktiva delen är lika med $1/(s^2LC)$.

- Därmed så gäller att överföringsfunktionens absolutbelopp |H(s)| kan beräknas med formeln

$$|H(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{1}{s^2LC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{s^2LC}\right)^2}},$$

där |H(s)| är amplitudfunktionen, s är frekvensparametern, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans.

- Tidigare jämfördes ett högpass RC-filter med motsvarande högpass LC-filter, vars respektive brytfrekvens $f_c$ sattes till ungefär 1 kHz. Vi såg då att vid en frekvens f på 100 Hz så släppte högpass RC-filtret fortfarande igenom ca 9 % av insignalerna, samtidigt som motsvarande högpass LC-filter endast släppte igenom ca 0,09 %, alltså ungefär 100 gånger mindre, vilket vi kan se genom att beräkna amplitudfunktionen |H(s)| vid frekvensen f = 100 Hz.

- En frekvens f på 100 Hz är ekvivalent med en frekvensparameter s på 2π * 100, eftersom

$$s = 2\pi f = 2\pi * 100$$

- Därmed beräknar vi amplitudfunktionen |H(s)| vid frekvensparametern 2π * 100 (alltså frekvensen f = 100 Hz):

$$\rightarrow |H(2\pi * 100)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{(2\pi * 100)^2 * 22m * 1\mu}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 115^2}} \approx \frac{1}{115} \approx 0{,}009$$

- Däremot vid en frekvens f på 3,5 kHz, alltså långt över brytfrekvensen $f_c$ (ca 1 kHz) , vill vi att eventuell högpassfilter skall låta signaler passera obemärkt. Vi såg då att högpass RC-filtret fortfarande dämpade signalerna med ca 6 % (amplitudfunktionen |H(s)| ≈ 0,94), samtidigt som motsvarande LC-filter endast dämpade signaler med ca 1 %.

- Vi undersöker amplitudfunktionen |H(s)| vid en frekvens f = 3,5 kHz, vilket är ekvivalent med en frekvensparameter s på 2π * 3,5k, och se då att denna är ungefär 0,99, alltså 99 %:

$$|H(2\pi * 3{,}5k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{(2\pi * 3{,}5k)^2 * 22m * 1\mu}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}09^2}} \approx \frac{1}{1{,}01} \approx 0{,}99$$

- Därmed så dämpas endast ca 1 – 0,99 ≈ 0,01, alltså ca 1 %, vid frekvensen 3,5 kHz.

- Endast vid brytfrekvensen $f_c$ så dämpar båda typer av högpassfilter signalerna lika mycket (ca 30 %), eftersom i båda fall så gäller att den resistiva samt den reaktiva delen av respektive filter är lika stora; eftersom den resistiva delen av respektive filter är lika med ett, så måste även den reaktiva delen vara lika med ett.

- För högpass LC-filtret gäller därmed att den reaktiva delen $1/(s^2LC)$ är lika med ett:

$$Brytfrekvens \rightarrow \frac{1}{s^2LC} = 1$$

  och vid brytfrekvensen $f_c$ så är frekvensparametern s lika med

$$s = 2\pi f_c,$$

  vilket medför att amplitudfunktionen |H(s)| = |H(2π$f_c$)| blir ungefär lika med 0,707, eftersom

$$|H(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{1}{s^2LC}\right|} = \frac{1^2}{\sqrt{1^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

- Resultatet indikerar att vid brytfrekvensen $f_c$ så släpper högpass LC-filtret igenom ungefär 70 % av inkommande signaler, vilket betyder att ungefär 30 % dämpas, precis som på motsvarande högpass RC-filter.

- Genom dessa exempel så ser vi att högpass LC-filtret mer ideella egenskaper än motsvarande högpass RC-filter när det gäller att spärra oönskade frekvenser samt låta önskvärda frekvenser passera.

### 2.4.5 - Härledning av högpass LC-filtrets brytfrekvens $f_c$

- Vid brytfrekvensen $f_c$ så är den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av filtret, som är lika med ett, lika stor som den reaktiva (frekvensberoende) delen $1/(s^2LC)$, vilket medför att

$$1 = \frac{1}{s^2LC} \text{ då } f = f_c$$

som sedan kan transformeras till

$$s^2 = \frac{1}{LC}$$

- För att härleda en formel för frekvensparametern s så tar vi kvadratroten ur båda sidor av formeln, vilket medför att

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

där

$$\sqrt{s^2} = s$$

samt

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

vilket ger följande formel för frekvensparametern s:

$$s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Vid brytfrekvensen $f_c$ är frekvensparametern s lika med brytvinkelfrekvensen $w_c$, som i sin tur är lika med

$$s = w_c = 2\pi f_c,$$

där $w_c$ är lika med brytvinkelfrekvensen och $f_c$ är lika med brytfrekvensen.

- Genom att ersätta frekvensparametern s i Laplacetransformen med $2\pi f_c$ så kan följande formel härledas:

$$s = 2\pi f_c \to 2\pi f_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

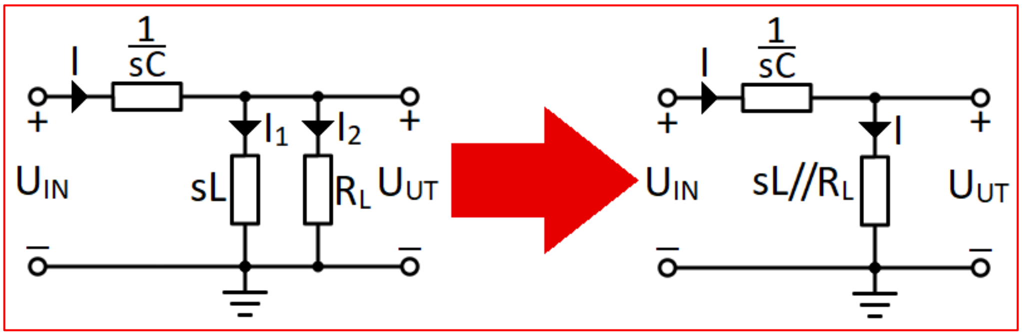
- För att sedan härleda en formel för brytfrekvensen $f_c$ så dividerar vi med $2\pi$ i både västerled och högerled. Då erhålls formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där $f_c$ är brytfrekvensen, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans.

### 2.4.6 - Högpass LC-filtrets brytfrekvens $f_c$ i lastat tillstånd

- I detta avsnitt antar vi att högpass LC-filtret har en rent resistiv last, som vi kallar $R_L$. I lastat tillstånd så kan kretsen förenklas genom att de parallellkopplade motstånden sL och $R_L$ ersätts med parallellkopplingens ekvivalenta ersättningsimpedans, vilket är $sL//R_L$. Vi kan därefter rita om kretsen till den högra figuren nedan.




*I lastat tillstånd så kommer filterspolens reaktans sL samt lastens resistans $R_L$ utgöra en parallellkoppling $sL//R_L$, såsom i den vänstra figuren. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen $sL//R_L$, såsom i figuren till höger.*

- För att kunna härleda en formel för överföringsfunktionen H(s) i lastat tillstånd så börjar vi med att härleda formler för insignalen $U_{IN}$ samt utsignalen $U_{UT}$, vilket vi enkelt kan göra med Kirchhoffs spänningslag.

- För att härleda en formel för inspänningen $U_{IN}$ så går vi ett varv från jordpunkten via $U_{IN}$ (från minus- till pluspolen, vilket därför räknas som $U_{IN}$), via filterkondensatorn C och ned till jordpunkten vi ersättningsimpedansen $sL//R_L$.

- Då erhålls formeln

$$U_{IN} - I * \frac{1}{sC} - (sL//R_L) * I = 0,$$

där $U_{IN}$ är insignalen, I * 1/(sC) är spänningsfallet över filterkondensatorn och $(sL//R_L)$ * I är spänningsfallet över ersättningsimpedansen $sL//R_L$.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$U_{IN} = I * \frac{1}{sC} + (sL//R_L) * I$$

- Genom att bryta ut strömmen I så kan följande formel härledas för inspänningen $U_{IN}$:

$$U_{IN} = \left(\frac{1}{sC} + sL//R_L\right) * I,$$

där

$$sL//R_L = \frac{sL * R_L}{sL + R_L}$$

- Därefter härleder vi en formel för utsignalen $U_{UT}$. Vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via utspänningen $U_{UT}$, sedan via ersättningsimpedansen $sL//R_L$ ned till jordpunkten. Eftersom vi gick ett helt varv i kretsen så är summan av spänningsfallen över utspänningen $U_{UT}$ samt filterspolen L lika med noll. Detta ger oss formeln

$$U_{UT} - (sL//R_L) * I = 0$$

vilket kan transformeras till

$$U_{UT} = (sL//R_L) * I$$

- Därmed så kan en första formel härleda för högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) i lastat tillstånd:

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{(sL//R_L) * I}{\left(\frac{1}{sC} + sL//R_L\right) * I} = \frac{sL//R_L}{\left(\frac{1}{sC} + sL//R_L\right)}$$

- Vi dividerar sedan med $sL//R_L$ i båda täljaren och nämnaren och får då:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{sL//R_L}{sL//R_L}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{1}{sC}\right)}{sL//R_L} + \left(\frac{sL//R_L}{sL//R_L}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{sC(sL//R_L)} + 1},$$

där

$$sL//R_L = \frac{sL * R_L}{sL + R_L},$$

vilket medför att

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{sC\left(\frac{sL * R_L}{sL + R_L}\right)} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{s^2 R_L LC}{sL + R_L}\right)} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{R_L + sL}{s^2 R_L LC}}$$

- Därmed så kan en slutgiltig formel för högpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) i lastat tillstånd härledas:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{R_L + sL}{s^2 R_L LC}},$$

där den resistiva (icke frekvensberoende) delen av överföringsfunktionen (samt filtret) är lika med ett och den reaktiva (frekvensberoende) delen är lika med $(R_L + sL) / (s^2 R_L LC)$.

- Vid brytfrekvensen $f_c$ så är den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av filtret, som är lika med ett, lika stor som den reaktiva (frekvensberoende) delen $(R_L + sL) / (s^2 R_L LC)$, vilket medför att

$$1 = \frac{R_L + sL}{s^2 R_L LC} \text{ då } f = f_c$$

som sedan kan transformeras till

$$s^2 R_L LC = sL + R_L,$$

vilket medför att

$$s^2 = \frac{sL + R_L}{R_L LC} = \frac{sL}{R_L LC} + \frac{R_L}{R_L LC},$$

som kan förenklas till

$$s^2 = \frac{s}{R_L C} + \frac{1}{LC}$$

- Rötter för frekvensparametern s kan beräknas med PQ-formeln:

$$s = \frac{1}{2R_L C} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

där

$$s_1 = \frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

samt

$$s_2 = \frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- Den negativa roten kan försummas, då frekvensparametern s inte kan understiga noll:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}} < \frac{1}{2R_L C},$$

vilket medför att

$$s_2 = \frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}} < 0 \rightarrow Falsk\ rot!$$

- Därmed så gäller att

$$s = \frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- Som vi har sett tidigare så är frekvensparametern s vid brytfrekvensen $f_c$ lika med

$$s = 2\pi f_c,$$

där s alltså är frekvensparametern och $f_c$ är brytfrekvensen. Genom att ersätta frekvensparametern s med denna formel så kan följande formel härledas:

$$2\pi f_c = \frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- För att sedan härleda en formel för brytfrekvensen $f_c$ så kan vi dividera med 2π i både vänster- och högerled, vilket ger formeln

$$f_c = \frac{\frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2\pi}$$

- Formeln ovan är relativt komplex, men kan förenklas genom att undersöka de fall då lastresistansen $R_L$ är mycket låg eller moderat till hög.

- Förutsatt att $R_L$ är moderat till hög så kan vi med säkerhet anta att

$$\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 \ll \frac{1}{LC},$$

vilket medför att formeln för brytfrekvensen $f_c$ ovan kan förenklas till

$$f_c = \frac{\frac{1}{2R_LC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2\pi} \approx \frac{\frac{1}{2R_LC} + \sqrt{\frac{1}{LC}}}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2R_LC} + \frac{1}{\sqrt{LC}}}{2\pi}$$

- Förutsatt att lastresistansen $R_L$ är moderat till hög så kan vi anta att

$$\frac{1}{2R_LC} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

vilket medför att

$$\frac{1}{2R_LC} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Därmed så ser vi att vi brytfrekvensen $f_c$ i lastat tillstånd, där lastresistansen $R_L$ är moderat till hög, så kan brytfrekvensen $f_c$ beräknas med formeln

$$f_c \approx \frac{\frac{1}{2R_LC} + \frac{1}{\sqrt{LC}}}{2\pi} \approx \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{2\pi},$$

som kan förenklas genom att multiplicera med 1/(2π) i både täljare och nämnare:

$$f_c \approx \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{2\pi} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{2\pi} * \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns induktans.

- Däremot ifall lastresistansen $R_L$ närmar sig noll så kommer brytfrekvensen $f_c$ gå mot oändlighet, eftersom brytfrekvensen $f_c$ på ett lastat högpass LC-filter kan beräknas med formeln

$$f_c = \frac{\frac{1}{2R_LC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2\pi},$$

där

$$\lim_{R_L \to 0} \frac{1}{2R_LC} = \frac{1}{2 * 0 * C} = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{R_L \to 0} f_c = \lim_{R_L \to 0} \frac{\frac{1}{2R_LC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2*0*C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2*0*C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2\pi} = \infty$$

- Ifall lastresistansen $R_L$ närmar sig noll så hade alltså högpass LC-filtret spärrat i princip samtliga inkommande signaler. Det är därför viktigt att se till att eventuell lastresistans $R_L$ är hög.

- Ifall lasten istället hade bestått av en lastimpedans $Z_L$, vars storlek varierar med frekvensen (proportionerligt med ökad frekvens ifall det handlar om en lastinduktans $L_L$, i omvänd proportion ifall det handlas om en lastkapacitans $C_L$). Då gäller det att se till att lastimpedansen $Z_L$ är hög i det frekvensintervall som högpass LC-filtret skall arbeta i.

## 2.4.7 - Högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$

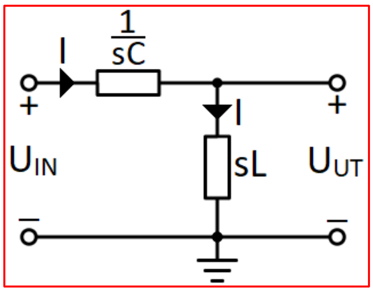
- Precis som för motsvarande RC-filter så är det mycket enkelt att härleda formler för högpassfiltrets in- och utimpedans ur de framtagna formlerna för in- och utspänningen $U_{IN}$ och $U_{UT}$. Ur dessa kan vi använda Ohms lag för att härleda in- och utimpedansen $Z_{IN}$ och $Z_{UT}$.

- Högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ är lika med filtrets inspänning $U_{IN}$ dividerat med inströmmen $I_{IN}$:

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}},$$

där $Z_{IN}$ är inimpedansen, $U_{IN}$ är inspänningen och $I_{IN}$ är lika med filtrets inström, som man enkelt kan se är lika med strömmen I (eftersom I är strömmen som flödar in från ingången):

$$I_{IN} = I$$




*Högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ är lika med inspänningen $U_{IN}$ dividerat med inströmmen $I_{IN}$, som är lika med strömmen I, eftersom det är denna ström som flödar in i filtret från ingången, via filterkondensatorn C och filterspolen L ned till jordpunkten.*

- Vi såg tidigare att inspänningen $U_{IN}$ är lika med

$$U_{IN} = I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)$$

- Därmed så kan högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ härledas med formeln

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)}{I} = \frac{1 + s^2LC}{sC}$$

- Att inimpedansen $Z_{IN}$ innefattar en resistiv del samt två reaktiva delar medför att dess storlek kommer variera med frekvensen på insignalerna. I nästa avsnitt kommer vi gå igenom hur inimpedansen beräknas vid en given frekvens, men före detta så skall vi härleda inimpedansens absolutbelopp $|Z_{IN}|$:

- Precis som för motsvarande högpass RC-filter så beräknas absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ av filtrets inimpedans med Pythagoras sats:

$$|Z_{IN}| = \left|\frac{1 + s^2LC}{sC}\right| = \frac{|1 + s^2LC|}{|sC|} = \frac{\sqrt{1^2 + (s^2LC)^2}}{\sqrt{(sC)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}}{sC}$$

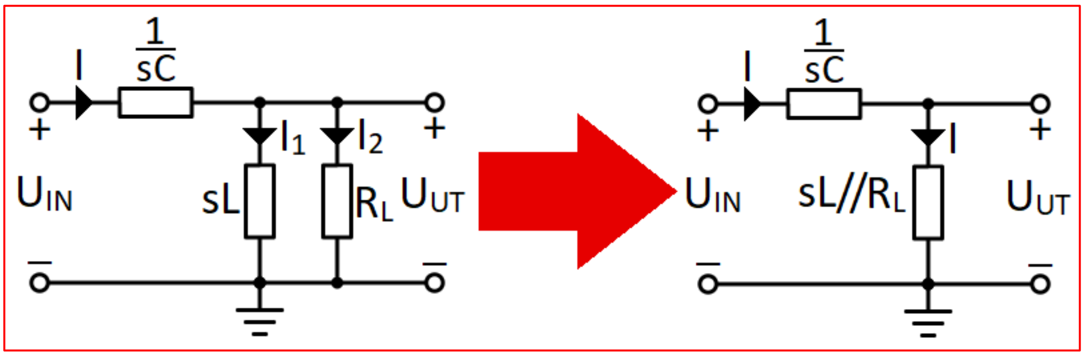
- Som beskrevs tidigare för motsvarande RC-filter så används Pythagoras sats för beräkning av absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ på grund av att den resistiva samt den reaktiva delen av kretsen kan tänkas utgöra storheter på två olika dimensioner.

- Den reaktiva samt den resistiva delen av inimpedansen $Z_{IN}$ kan därför ritas ut som storheter på olika axlar, där den resistiva delen av kretsen ligger på x-axeln och den reaktiva delen på y-axeln; tillsammans bildar dessa en triangel, där hypotenusan är lika med absolutbeloppet $|Z_{IN}|$. För mer information om absolutbelopp, se avsnittet *2.2.5 – Högpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$.*

**Högpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd:**

- I lastat tillstånd så kommer eventuell lastresistans $R_L$ (eller lastimpedans $Z_L$) utgöra en parallellkoppling med filterspolens reaktans sL, se den vänstra figuren nedan. I detta exempel så antar vi att lasten är rent resistiv.

- För att beräkna filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd så kan kretsen förenklas genom att de parallellkopplade motstånden sL och $R_L$ ersätts med parallellkopplingens ekvivalenta ersättningsimpedans, vilket är $sL//R_L$. Vi kan därefter rita om kretsen till den högra figuren nedan.




*I lastat tillstånd så kommer filterspolens reaktans sL samt lastens resistans $R_L$ utgöra en parallellkoppling $sL//R_L$, såsom i den vänstra figuren. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen $sL//R_L$, såsom i den högra figuren. Därmed så blir filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd lika med 1/(sC) + $sL//R_L$.*

- Vi använder den högra figuren ovan för att beräkna högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd. Genom att köra ett varv med Kirchhoffs spänningslag från ingången $U_{IN}$ via filterkondensatorn C (i praktiken via dess reaktans 1/(sC) samt ersättningsimpedansen $sL//R_L$ ned till jord.

- I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så blir summan av insignalen $U_{IN}$, spänningsfallet I * 1/(sC) över kondensatorn C samt spänningsfallet över ersättningsimpedansen I * ($sL//R_L$) lika med noll, vilket ger följande formel:

$$U_{IN} - I * \frac{1}{sC} - I * (sL//R_L) = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{IN} = I * \frac{1}{sC} + I * (sL//R_L) = I * (sL//R_L) + I * \frac{1}{sC} =$$

- Genom att bryta ut strömmen I ur högerledet, så kan följande formel härledas:

$$U_{IN} = I\left(sL//R_L + \frac{1}{sC}\right),$$

där $U_{IN}$ är insignalen, I är strömmen som flödar genom filtret, $sL//R_L$ är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen av filterspolen L samt lastresistansen $R_L$ och 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans.

- Därmed så kan högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ härledas med formeln

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(sL//R_L + \frac{1}{sC}\right)}{I} = sL//R_L + \frac{1}{sC},$$

där $sL//R_L$ alltså är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen av filterspolen L samt lastresistansen $R_L$ och 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans.

- Vi kan därefter härleda en formel för absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ i lastat tillstånd, vilket kräver matematiska förenklingar:

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|sL//R_L + \frac{1}{sC}\right| = \left|\frac{sL * R_L}{sL + R_L} + \frac{1}{sC}\right|,$$

vilket kan förenklas genom att de två delarna av formeln ovan får samma nämnare:

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|\frac{sL * R_L}{sL + R_L} + \frac{1}{sC}\right| = \left|\frac{sL * R_L}{sL + R_L} * \frac{sC}{sC} + \frac{1}{sC} * \frac{sL + R_L}{sL + R_L}\right| = \left|\frac{s^2 R_L LC}{sC(sL + R_L)} + \frac{sL + R_L}{sC(sL + R_L)}\right|,$$

vilket ger formeln

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|sL//R_L + \frac{1}{sC}\right| = \left|\frac{s^2 R_L LC + sL + R_L}{sC(sL + R_L)}\right| = \left|\frac{s^2 R_L LC + sL + R_L}{s^2 LC + sR_L C}\right|,$$

vilket vidare kan förenklas till

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|\frac{s^2 R_L LC + sL + R_L}{s^2 LC + sR_L C}\right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (s^2 R_L LC + sL)^2}}{\sqrt{(s^2 LC + sR_L C)^2}} = \frac{\sqrt{R_L^2 + (s^2 R_L LC + sL)^2}}{s^2 LC + sR_L C}$$

- Därmed ser vi att absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ av högpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd kan härledas med formeln:

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|sL//R_L + \frac{1}{sC}\right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (s^2 R_L LC + sL)^2}}{s^2 LC + sR_L C}$$

- Om lastresistansen $R_L$ är mycket hög så kan denna försummas vid lägre till moderata frekvenser. Detta beror på att reaktansen sL då är relativt låg, vilket medför att impedansen $sL//R_L$ blir ungefär lika med sL. Då kan inimpedansen $Z_{IN}$ (samt brytfrekvensen $f_c$) beräknas som i olastat tillstånd:

$$sL \ll R_L \rightarrow sL//R_L = \frac{sL * R_L}{sL + R_L} \approx sL,$$

vilket medför att

$$Z_{IN,lastat} = sL//R_L + \frac{1}{sC} \approx sL + \frac{1}{sC}$$

samt

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Vid mycket höga frekvenser så kommer dock reaktansen sL utgöra ett mycket stort motstånd, som överstiger lastresistansen $R_L$. Vid frekvenser där reaktansen sL är mycket högre än lastresistansen $R_L$ (tio gånger högre eller mer) så kan reaktansen sL försummas:

$$sL \gg R_L \rightarrow sL//R_L = \frac{sL * R_L}{sL + R_L} \approx R_L,$$

vilket medför att LC-filtret fungerar och kan beräknas som ett olastat högpass RC-filter, där lastresistansen $R_L$ utgör filterresistorn, vilket medför att

$$Z_{IN,lastat} = sL//R_L + \frac{1}{sC} \approx R_L + \frac{1}{sC}$$

samt att brytfrekvensen $f_c$ i detta fall kan beräknas som på ett olastat högpass RC-filter, där lastresistansen $R_L$ utgör filterresistor:

$f_c = \frac{1}{2\pi R_L C}$

**Högpass LC-filtrets inimpedans vid låga frekvenser:**

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) utgöra ett nästintill oändligt motstånd, eftersom

$$s = 2\pi f,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * 0 * C} = \infty,$$

där lim står för gränsvärde, f → 0 indikerar att f närmar sig noll (men är inte exakt lika med noll) och ∞ indikerar att reaktansen närmar sig oändlighet.

- Samtidigt så kommer filterspolens reaktans sL närma sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to 0} sL = \lim_{f\to 0} 2\pi f L = 2\pi * 0 * L = 0,$$

vilket medför att ersättningsimpedansen $sL//R_L$ närmar sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to 0}\ sL//R_L = \lim_{f\to 0} \frac{sL * R_L}{sL + R_L} = \frac{0 * R_L}{0 + R_L} = \frac{0}{R_L} = 0$$

- Därmed så kommer inimpedansen $Z_{IN}$ i lastat tillstånd gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0}\ Z_{IN,lastat} = \lim_{f\to 0} \left(\frac{1}{sC} + sL//R_L\right) = 0 + \infty = \infty$$

- Därmed så ser vi att högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd har ett maximumvärde $Z_{IN,max}$ som går mot oändlighet:

$$Z_{IN,max,lastat} = \infty,$$

vars absolutbelopp $|Z_{IN,max,lastat}|$ också går mot oändlighet, eftersom

$$|Z_{IN,max,lastat}| = |\infty| = \infty$$

- Även i olastat tillstånd så kommer inimpedansen $Z_{IN}$ gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0}\ Z_{IN} = \lim_{f\to 0} \left(\frac{1}{sC} + sL\right) = \infty + 0 = \infty,$$

vilket också medför att absolutbeloppet $|Z_{IN,max}|$ också går mot oändlighet, eftersom

$$|Z_{IN,max}| = |\infty| = \infty$$

**Högpass LC-filtrets inimpedans vid mycket höga frekvenser:**

- Däremot vid frekvenser som närmar sig oändlighet så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) närma sig noll, eftersom

$$s = 2\pi f,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty}\frac{1}{sC} = \lim_{f\to\infty}\frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi * \infty * C} = 0,$$

där lim står för gränsvärde och f → ∞ indikerar att f närmar sig oändlighet.

- Samtidigt så kommer filterspolens reaktans sL närma sig oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} sL = \lim_{f\to\infty} 2\pi fL = 2\pi * \infty * L = \infty,$$

vilket medför att ersättningsimpedansen $sL//R_L$ närmar sig lastresistansen $R_L$, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} sL//R_L = \lim_{f\to\infty} \infty//R_L = R_L$$

- Därmed så kommer inimpedansen $Z_{IN}$ i lastat tillstånd närma sig lastresistansen $R_L$, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{1}{sC} + sL//R_L\right) = R_L + 0 = R_L$$

- Därmed så ser vi att högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd har ett minimumvärde, $Z_{IN,min}$, som närmar sig lastresistansen $R_L$:

$$Z_{IN,min,lastat} = R_L,$$

vilket medför att absolutbeloppet $|Z_{IN,min}|$ också går mot $R_L$, eftersom

$$|Z_{IN,min,lastat}| = |R_L| = R_L$$

- Däremot i olastat tillstånd så kommer inimpedansen $Z_{IN}$ närma sig oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{1}{sC} + sL\right) = \infty + 0 = \infty,$$

vilket medför ett absolutbelopp $|Z_{IN}|$ som går mot oändlighet, eftersom

$$|Z_{IN}| = |\infty| = \infty$$

- I olastat tillstånd så går alltså högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ mot oändlighet, oavsett frekvens. I lastat tillstånd så går inimpedansen $Z_{IN}$ mot oändlighet vid låga frekvenser, för att minska gradvis med ökad frekvens till ett minimumvärde som går mot lastresistansen $R_L$.

**Sammanfattning av högpass RC-filtrets inimpedans vid olika frekvenser:**

- Vi har sett att högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i olastat tillstånd kan härledas med formeln

$$Z_{IN} = \frac{1 + s^2LC}{sC},$$

vars absolutbelopp kunde härledas (via Pythagoras sats) till

$$|Z_{IN}| = \left|\frac{1 + s^2LC}{sC}\right| = \frac{|1 + s^2LC|}{|sC|} = \frac{\sqrt{1^2 + (s^2LC)^2}}{\sqrt{(sC)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}}{sC}$$

- I olastat tillstånd så har vi sett att inimpedansen $Z_{IN}$ närmar sig oändlighet vid alla frekvenser:

$$Z_{IN} = \infty,$$

vilket medför att absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ i olastat tillstånd närmar sig oändlighet

$$|Z_{IN}| = \infty$$

- Vi har sett att högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN,lastat}$ i lastat tillstånd kan härledas med formeln

$$Z_{IN,lastat} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(sL//R_L + \frac{1}{sC}\right)}{I} = sL//R_L + \frac{1}{sC},$$

där $sL//R_L$ är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen av filterspolens reaktans sL samt lastresistansen $R_L$ och 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans.

- Vi har också sett att absolutbeloppet $|Z_{IN,lastat}|$ av högpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd härledas till:

$$|Z_{IN,lastat}| = \left|sL//R_L + \frac{1}{sC}\right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (s^2R_LLC + sL)^2}}{s^2LC + sR_LC}$$

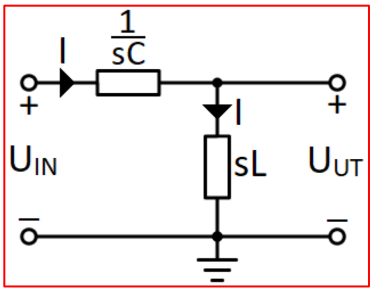
- Vi har sett att högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN,lastat}$ har ett minimumvärde $Z_{IN,min}$ som går mot lastresistansen $R_L$, samtidigt som maximumvärdet $Z_{IN,max}$ närmar sig oändlighet, vilket kan skrivas som

$$R_L \leq Z_{IN,lastat} \leq \infty,$$

vilket är identiskt med absolutbeloppet $|Z_{IN,lastat}|$ av inimpedansen i lastat tillstånd:

$$R_L \leq |Z_{IN,lastat}| \leq \infty$$

## 2.4.8 - Högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$




*Högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ är lika med utspänningen $U_{UT}$ dividerat med utströmmen $I_{UT}$, som är lika med strömmen I, då strömmen I flödar från utspänningens plus- till minuspol, se figuren ovan.*

- Högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ är lika med filtrets utspänning $U_{UT}$ dividerat med utströmmen $I_{UT}$:

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}},$$

där $Z_{UT}$ är utimpedansen, $U_{UT}$ är utspänningen och $I_{UT}$ är filtrets utström, som är lika med strömmen I, eftersom strömmen I flödar från utspänningen $U_{UT}$:s pluspol ned till dess minuspol, som är ansluten till jordpunkten:

$$I_{UT} = I$$

- Vi såg tidigare att utspänningen $U_{UT}$ kan härledas med formeln

$$U_{UT} = sLI,$$

där sL är filterspolens reaktans och I är strömmen som flödar genom spolen.

- Därmed så kan högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ härledas med formeln

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{sLI}{I} = sL$$

- Högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i olastat tillstånd är alltså lika med filterspolens reaktans:

$$Z_{UT} = sL,$$

vilket medför ett identiskt absolutbelopp $|Z_{UT}|$, då utimpedansen $Z_{UT}$ endast har en reaktiv del, vilket medför att

$$|Z_{UT}| = |sL| = \sqrt{(sL)^2} = sL$$

- Vid mycket låga frekvenser så kommer därmed högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ närma sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT} = \lim_{f\to 0} sL = \lim_{f\to 0} 2\pi fL = 2\pi * 0 * L = 0,$$

där lim betyder gränsvärde och f→0 indikerar att frekvensen f går mot noll.

- Däremot så kommer filtrets utimpedans $Z_{UT}$ öka linjärt med ökad frekvens, för att gå mot oändlighet vid mycket höga frekvenser, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{UT} = \lim_{f\to\infty} sL = \lim_{f\to\infty} 2\pi fL = 2\pi * \infty * L = \infty$$

- Därmed så har högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ ett minimum- samt ett maximumvärde i olastat tillstånd, som sträcker sig från noll (vid frekvenser som går mot noll) till oändlighet (vid frekvenser som närmar sig oändlighet):

$$0 \leq Z_{UT} \leq \infty,$$

vars absolutbelopp $|Z_{UT}|$ har samma min- och maxvärde:

$$0 \leq |Z_{UT}| \leq \infty,$$

då

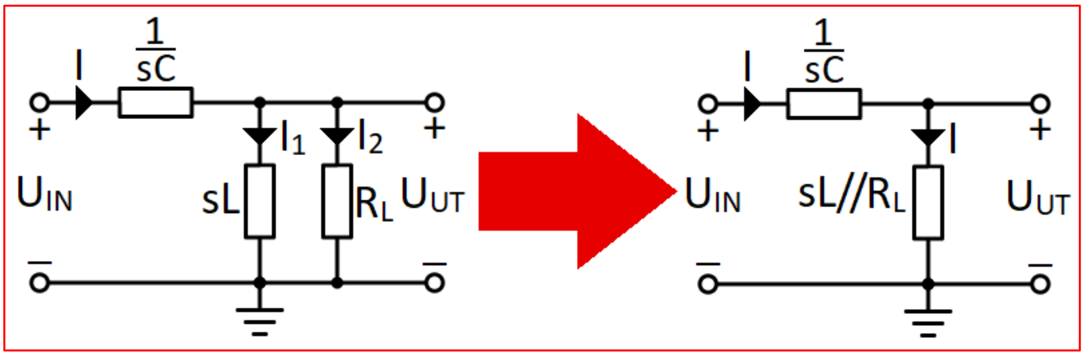
$$|Z_{UT,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,max}| = |\infty| = \infty$$

**Högpass LC-filtrets utimpedans i lastat tillstånd:**

- Som vi såg tidigare när högpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN}$ i lastat tillstånd analyserades så kommer eventuell lastresistans $R_L$ på filtrets utgång utgöra en parallellkoppling med filterspolen L. Därmed så kommer filterspolens reaktans sL samt lastresistansen $R_L$ utgöra en parallellkoppling, se den vänstra figuren nedan, som kan förenklas till den högra figuren nedan genom att de parallellkopplade impedanserna ersätts med ekvivalent ersättningsimpedans, vilket är lika med $sL//R_L$.




*I lastat tillstånd så kommer filterspolens reaktans sL samt lastens resistans $R_L$ utgöra en parallellkoppling $sL//R_L$, såsom i den vänstra figuren. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen $sL//R_L$, såsom i den högra figuren. Därmed så blir filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i lastat tillstånd lika med $sL//R_L$.*

- Vi måste härleda en ny formel för utspänningen $U_{UT}$ i lastat tillstånd. Vi kör ett varv med Kirchhoffs spänningslag från jord via utsignalen $U_{UT}$ och sedan tillbaka till jord via ersättningsimpedansen $sL//R_L$. I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så är summan av samtliga spänningsfall ett helt varv i en krets lika med noll, vilket medför att

$$U_{UT} - (sL//R_L) * I = 0,$$

vilket medför att

$$U_{UT} = (sL//R_L) * I$$

- Eftersom utströmmen $I_{UT}$ är lika med strömmen I så kan vi enkelt härleda en formel för utimpedansen $Z_{UT}$ i lastat tillstånd med Ohms lag:

$$Z_{UT,lastat} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{(sL//R_L) * I}{I} = sL//R_L$$

- Vi ser därmed att högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i lastat tillstånd är lika med ersättningsimpedansen $sL//R_L$ av de parallellkopplade impedanserna sL (spolens reaktans) samt $R_L$ (lastresistansen).

$$Z_{UT,lastat} = sL//R_L$$

- Därmed kan en formel för absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ i lastat tillstånd härledas:

$$|Z_{UT,lastat}| = |sL//R_L| = \left|\frac{sL * R_L}{sL + R_L}\right| = \frac{\sqrt{(sR_L L)^2}}{\sqrt{R_L^2 + (sL)^2}} = \frac{sR_L L}{\sqrt{R_L^2 + (sL)^2}}$$

- Därmed ser vi att absolutbeloppet av högpass LC-filtret i lastat tillstånd (med resistiv last $R_L$) kan härleda med formeln

$$|Z_{UT,lastat}| = |sL//R_L| = \frac{sR_L L}{\sqrt{R_L^2 + (sL)^2}}$$

- Vid mycket låga frekvenser så kommer högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i lastat tillstånd närma sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to 0} sL//R_L,$$

där lim betyder gränsvärde och f→0 indikerar att frekvensen f går mot noll.

- När frekvensen f går mot noll så kommer reaktansen sL gå mot det noll, eftersom

$$\lim_{f\to 0} sL = \lim_{f\to 0} 2\pi f L = 2\pi * 0 * L = 0,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to 0} sL//R_L = 0//R_L = 0,$$

eftersom

$$0//R_L = \frac{0 * R_L}{0 + R_L} = 0$$

- Däremot så kommer högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ öka linjärt med ökad frekvens, för att närma sig lastresistansen $R_L$ vid mycket höga frekvenser, eftersom

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT,,lastat} = \lim_{f\to \infty} sL//R_L,$$

där

$$\lim_{f\to \infty} sL = \lim_{f\to \infty} 2\pi f L = 2\pi * \infty * L = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to \infty} sL//R_L = \infty//R_L = R_L,$$

eftersom

$$\infty//R_L = \frac{\infty * R_L}{\infty + R_L} = R_L$$

- Därmed så har högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ ett minimum- samt ett maximumvärde i lastat tillstånd, som sträcker sig från noll (vid frekvenser som går mot noll) till lastresistansen $R_L$ (vid frekvenser som går mot oändlighet):

$$0 \leq Z_{UT,lastat} \leq R_L,$$

där absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ har samma minimum- och maximumvärde:

$$0 \leq |Z_{UT,lastat}| \leq R_L,$$

då

$$|Z_{UT,lastat,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,lastat,max}| = |R_L| = R_L$$

**Sammanfattning av högpass RC-filtrets utimpedans vid olika frekvenser:**

- Vi har sett att högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i olastat tillstånd härledas med formeln

$$Z_{UT} = sL,$$

där sL är filterspolens reaktans.

- Eftersom utimpedansen $Z_{UT}$ är rent reaktiv i olastat tillstånd så blev absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ identiskt i olastat tillstånd, eftersom

$$|Z_{UT}| = |sL| = \sqrt{(sL)^2} = sL$$

- Vi såg att högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i olastat tillstånd har ett minimumvärde som går mot noll (vid frekvenser som går mot noll) samt ett maximumvärde som går mot oändlighet (vid frekvenser som går mot oändlighet):

$$0 \leq Z_{UT} \leq \infty,$$

- Även absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ av utimpedansen i olastat tillstånd har samma min- och maxvärde:

$$0 \leq |Z_{UT}| \leq \infty,$$

då

$$|Z_{UT,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,max}| = |\infty| = \infty$$

- Vi har sett att högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i lastat tillstånd härledas med formeln

$$Z_{UT,lastat} = sL//R_L,$$

där $sL//R_L$ är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen av filterspolens reaktans sL samt lastresistansen $R_L$.

- Ur formeln ovan kunde en formel för absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ i lastat tillstånd härledas:

$$|Z_{UT,lastat}| = |sL//R_L| = \left|\frac{sL * R_L}{sL + R_L}\right| = \frac{\sqrt{(sR_L L)^2}}{\sqrt{R_L^2 + (sL)^2}} = \frac{sR_L L}{\sqrt{R_L^2 + (sL)^2}}$$

- Vi har sett att högpass LC-filtrets utimpedans $Z_{UT}$ i lastat tillstånd har ett minimumvärde $Z_{UT,min}$ som närmar sig noll, samtidigt som maximumvärdet $Z_{UT,max}$ närmar sig lastresistansen $R_L$, vilket kan skrivas som

$$0 \leq Z_{UT,lastat} \leq R_L,$$

vilket är identiskt med absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ av utimpedansen i lastat tillstånd:

$$0 \leq |Z_{IN,lastat}| \leq R_L,$$

då

$$|Z_{UT,lastat,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,lastat,max}| = |R_L| = R_L$$