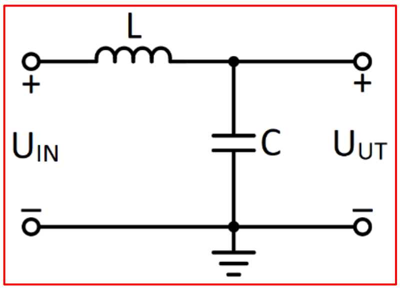
2.5 - Lågpass LC-filter

2.5.1 – Lågpass LC-filtrets funktion



Lågpass LC-filter medför förbättrade egenskaper jämfört med motsvarande RC-filter, till bekostnad av ökade kostnader, ökat behov av utrymme samt ökad vikt.

- Lågpass LC-filter består av en filterspole L vid ingången samt en filterkondensator C vid utgången. Eftersom filterspolen L, likt andra spolar, kommer utgöra ett obefintligt motstånd vid likström, samtidigt som filterkondensatorn C utgör ett oändligt motstånd mellan utgången och jord, så kan alltså låga frekvenser passera problemfritt.

- Med ökad frekvens så kommer filterspolens reaktans sL öka, eftersom

$$sL = 2\pi fL,$$

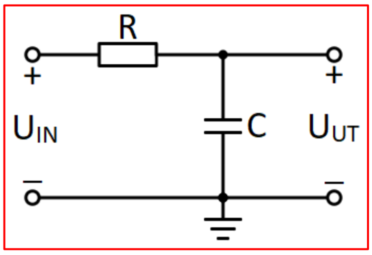
där s är frekvensparametern, L är filterspolens induktans och f är den aktuella frekvensen. Som synes i formeln ovan så är reaktansen sL proportionell med frekvensen f, vilket medför att spolens reaktans ökar linjärt med ökad frekvens.

- Med ökad frekvens så kommer även filterkondensatorn reaktans 1/(sC) minska, eftersom

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{2\pi fC},$$

där s är frekvensparametern C är filterkondensatorns kapacitans och f är den aktuella frekvensen. Formeln ovan indikerar att kondensatorns reaktans 1/(sC) är omvänt proportionell med frekvensen f, vilket medför att reaktansen minskar linjärt med ökad frekvens.

- Kombinationen av att filterspolens reaktans sL ökar och filterkondensatorns reaktans 1/(sC) minskar med ökad frekvens medför att ju högre frekvensen blir, desto mer av insignalen U_{IN} kommer falla över filterspolen L. Detta medför också att spänningsfallet över filterkondensatorn C, som är lika med utsignalen U_{UT}, kommer närma sig noll med ökad frekvens. Exakt vid vilken frekvens detta sker beror på storleken på komponenterna i kretsen.



Lågpass RC-filter, som används oftare än motsvarande LC-filter, på grund av lägre kostnader, lägre behov av utrymme samt lägre vikt. Det är vanligt att kompensera för de sämre egenskaperna genom att sätta den övre gränsfrekvensen relativt högt, för att minimera risken för att önskvärda frekvenser dämpas.

- Notera att lågpass LC-filter och lågpass RC-filtret har samma uppbyggnad; den enda skillnad mellan dem är att LC-lågpassfiltret har en filterspole L på ingången istället för en filterresistor R.

- Som vi har sett tidigare så leder detta till att filtret får bättre egenskaper; icke-önskvärda frekvenser dämpas i högre grad, samtidigt som önskvärda frekvenser dämpas till mindre grad.

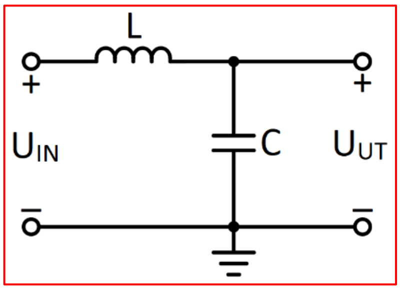
- Dock så kommer de förbättrade egenskaperna med ett pris, nämligen ökat behov av utrymme, ökad vikt samt ökade kostnader (spolar är relativt stora, dyra samt tunga).

- Lågpass LC-filtrets brytfrekvens f_c kan beräknas med formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där L är filterspolens induktans och C är filterspolens kapacitans.

2.5.2 - Dimensionering av lågpass LC-filter



Lågpass LC-filter.

- Anta att ett lågpass LC-filter skall placeras på ingången till en förstärkare för att dämpa högfrekventa störningar (uppe i MHz-området). Vi måste se till att inga hörbara frekvenser (20 – 20 kHz) dämpas. Därför sätter vi brytfrekvensen långt över den övre gränsen av det hörbara området, alltså långt över 20 kHz. I fall som detta så är det vanligt att sätta brytfrekvensen till ett värde mellan 250–300 kHz.

- Låt oss säga att vi siktar på en brytfrekvens f_c på ca 275 kHz:

$$f_c = 275\ kHz$$

- Som vi såg tidigare så kan lågpass LC-filtrets brytfrekvens f_c beräknas med formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där L är filterspolens induktans och C är filterspolens kapacitans. Lämpliga värden måste väljas på dessa komponenter.

- Eftersom vi skall dimensionera två komponenter (filterspolen L samt filterkondensatorn C) så kan vi välja en av dem valfritt och därefter dimensionera den andra komponenten utefter detta. Eftersom brytfrekvensen f_c är så hög som 275 lHz så relativt små komponenter. Vi väljer därför att sätta filterspolen L till 1 mH:

$$L = 1\ mH$$

- Då återstår bara att välja en lämplig filterkondensator C för ändamålet. Vi kan transformera formeln för brytfrekvensen f_c ovan för att härleda en formel för filterkondensatorns kapacitans C:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \to f_c * \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi} \to \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_c}$$

- Därefter kvadrerar vi båda sidor av formeln, vilket medför att

$$LC = \left(\frac{1}{2\pi f_c}\right)^2 = \frac{1}{(2\pi f_c)^2} \to C = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * L}$$

- Genom att sätta in värden i formeln ovan ser vi då att för en brytfrekvens f_c på 275 kHz samt en filterspole L på m1 H så bör en filterkondensator C på ungefär 0,35 nF användas, eftersom

$$C = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * L} = \frac{1}{(2\pi * 275k)^2 * 1m} \approx 0{,}35\ nF$$

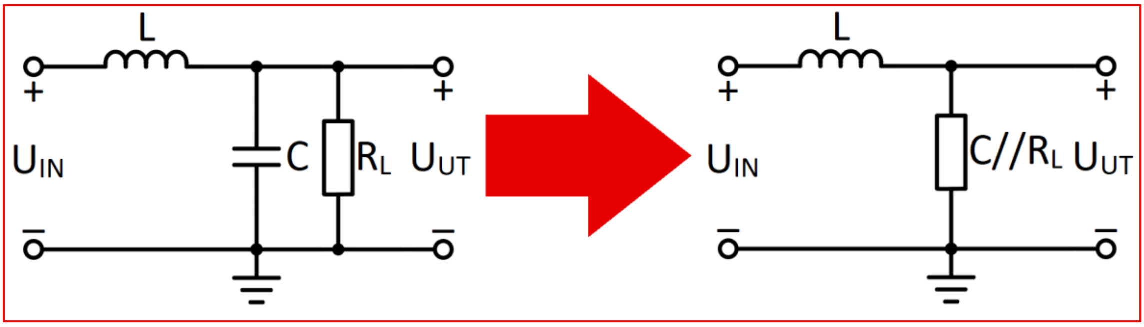
- Närmaste standardvärde är 0,33 nF, som vi därmed använder:

$$C = 0{,}33\ nF$$

2.5.3 - Lastat lågpass LC-filter

- Om ett lågpass LC-filtrets utgång ansluts till en eller flera ytterligare komponenter, såsom högpassfilter, transistorsteg eller OP-förstärkare, så kommer detta filter lastas med en viss resistans (eller impedans, beroende på vilken komponent som filtrets utgång ansluts till, men vi antar här att det är en resistans). Efterföljande komponentens inresistans kommer utgöra en last, placerat parallellt med lågpass LC-filtrets utgång. Denna resistans kallas vanligtvis R_L, där L står för last.

- Eftersom lastresistansen R_L är placerad parallellt med lågpass LC-filtrets utgång, så kommer filterkondensatorn C och lastresistansen R_L utgöra en parallellkoppling $C//R_L$, se den vänstra figuren nedan. Som vi har sett tidigare så kan vi i fall som detta förenkla kretsschemat. I detta fall kan kretsschemat förenklas genom att filterkondensatorn C samt lastresistansen R_L ersätts med impedansen $C//R_L$, se den högra figuren nedan.



Filterkondensatorn C samt lastresistansen R_L utgör en parallellkoppling, som kan ersättas med ersättningsimpedansen $C//R_L$ för att förenkla kretsschemat. Efter denna förenkling så får kretsschemat samma form som vanligt olastat lågpass LC-filter; den enda skillnaden är att filterkondensatorn C ersätts med ersättningsimpedansen $C//R_L$. Detta kan påverka filtrets brytfrekvens f_c, beroende på storleken på lastresistansen R_L.

Ifall lastresistansen R_L är mycket hög så kommer filtret ha samma egenskaper som i olastat tillstånd, både sett till brytfrekvens f_c samt in- och utimpedans Z_{IN} och Z_{UT}, vilket är önskvärt. Ifall lastresistansen R_L är mycket låg så kommer dock lågpassfiltret släpps igenom alla inkommande signaler, då brytfrekvensen f_c kommer gå mot oändlighet.

- Efter förenklingen av kretsschemat så efterliknar det lastade lågpass LC-filtret ett vanligt olastat lågpass LC-filter, med den enda skillnaden att filterkondensatorn C har ersatts med ersättningsimpedansen $C//R_L$. Detta medför att i de beräkningar där filterkondensatorn C används så måste vi ersätta denna med $C//R_L$ i lastat tillstånd. Ett exempel på detta är i formeln för lågpass LC-filtrets brytfrekvens i lastat tillstånd, som blir

$$f_c = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L * C//R_L}},$$

där f_c är brytfrekvensen, L är filterspolens induktans, C är filterkondensatorns kapacitans och R_L är lastresistansen.

- Detta betyder att lastresistansen R_L kan medföra att brytfrekvensen f_c påverkas; om R_L är mycket hög, så kommer brytfrekvensen f_c bli opåverkad, eftersom ersättningsimpedansen $C//R_L$ i detta fall blir ungefär lika med filterkondensatorns kapacitans C. Då kan filtrets brytfrekvens f_c beräknas som i olastat tillstånd, eftersom

$$R_L \gg C \rightarrow C//R_L \approx C,$$

vilket medför att

$$f_c = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L * C//R_L}} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

precis som i olastat tillstånd.

- I de flesta fall så är lastresistansen R_L så pass hög att denna kan försummas. Om den inte är det så kan detta åtgärdas med någon typ av buffer som ökar resistansen, exempelvis en OP-förstärkare ansluten som en buffer eller separata transistorsteg, såsom emitter- eller sourceföljare. Vi kommer se mer av dessa lösningar senare.

2.5.4 - Härledning av lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s)

- Lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s), som är ration av in- och utsignalen, kan enkelt härledas via Laplacetransformering av filtret:

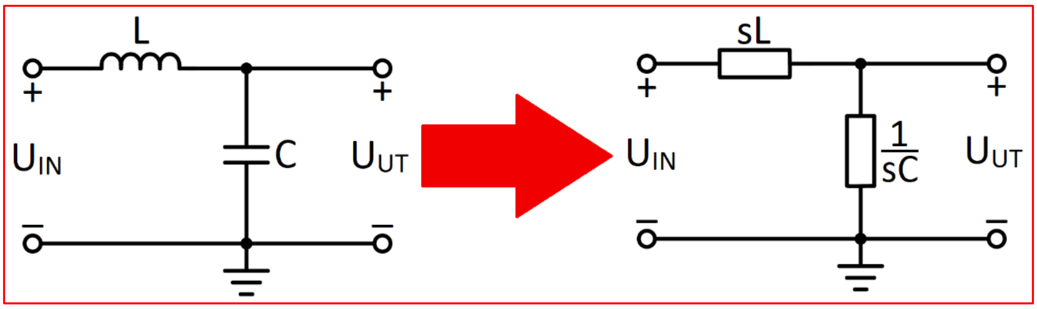
$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}},$$

där H(s) är filtrets överföringsfunktion* och U_{IN} samt U_{UT} är in- respektive utsignalen ur filtret.

*S:et i H(s) indikerar att värdet på överföringsfunktionen H beror på värdet på frekvensparametern s, som i sig beror på frekvensen f; därmed beror H indirekt på den aktuella frekvensen, vilket möjliggör sådant som filter.

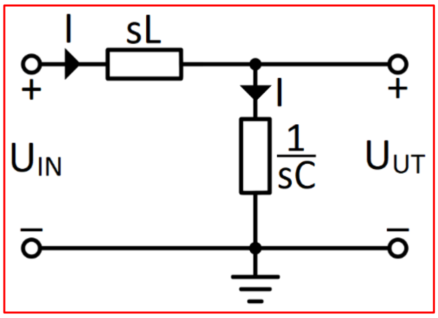
- Vid frekvenser där överföringsfunktionen H(s) är lika med ett så är utsignalen U_{UT} lika med insignalen U_{IN}, vilket betyder att filtret inte dämpar signaler vid den aktuella frekvensen.

- Ju närmre överföringsfunktionen H(s) når noll, desto mer dämpas inkommande signaler; som exempel, när H(s) är lika med noll så blir utsignalen U_{UT} lika med noll, oavsett hur stor insignalen U_{IN} är.



Laplacetransformering av ett lågpass LC-filter.

- Som synes i figuren till höger så kommer strömmen I flöda genom både filterspolen L samt filterkondensatorn C (ned till jordpunkten), då det inte finns någon annan väg för strömmen att flöda. Detta förenklar härledning av överföringsfunktionen H(s), då strömmen kommer kunna elimineras ur formeln.



Eftersom den enda vägen för strömmen till jord är via filterkondensator så flödar samma ström I genom filterspolen L och filterkondensatorn C.

- För att härleda en formel för överföringsfunktionen H(s) så måste formler härledas för insignalen U_{IN} samt utsignalen U_{UT}, vilket vi enkelt kan göra med Kirchhoffs spänningslag.

- För att härleda en formel för inspänningen U_{IN} så går vi ett varv från jordpunkten via U_{IN}, via filterspolen L och ned till jordpunkten via filterkondensatorn C. Vi får då formeln

$$U_{IN} - sLI - I * \frac{1}{sC} = 0,$$

där U_{IN} är insignalen, sLI är spänningsfallet över filterspolen och I * 1/(sC) är spänningsfallet över filterkondensatorn.

- Eftersom beräkningen sker i strömmens riktning, alltså från plus- till minuspolen så beräknas spänningsfallet sLI över filterspolen samt spänningsfallet I * 1/(sC) över filterkondensatorn som negativa i formeln.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$U_{IN} = sLI + I * \frac{1}{sC}$$

- Genom att bryta ut strömmen I så kan följande formel härledas för inspänningen U_{IN}:

$$U_{IN} = I\left(sL + \frac{1}{sC}\right) = I\left(\frac{s^2LC + 1}{sC}\right) = I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)$$

- För att härleda en formel för utsignalen U_{UT} så går vi ett varv med Kirchhoffs spänningslag; vi går från jordpunkten via utspänningen U_{UT}, sedan via filterkondensatorn C ned till jordpunkten. I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så är summan av samtliga spänningsfall ett helt varv i en sluten krets lika med noll, vilket medför att summan av utspänningen U_{UT} samt spänningsfallet I * 1/(sC) över filterkondensatorn C är lika med noll. Vi kan därmed härleda formeln

$$U_{UT} - I * \frac{1}{sC} = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{UT} = I * \frac{1}{sC}$$

- Därmed så kan en formel härledas för lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s):

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{I * \left(\frac{1}{sC}\right)}{I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)},$$

där strömmen I kan tas bort ur formeln, eftersom I förekommer i både täljaren och nämnaren, vilket ger

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)},$$

som vidare kan förenklas genom att multiplicera med sC i både täljaren och nämnaren:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{sC}\right) * sC}{\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right) * sC} = \frac{1}{1 + s^2LC}$$

- Därmed så ser vi att lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) härledas till formeln

$$H(s) = \frac{1}{1 + s^2LC},$$

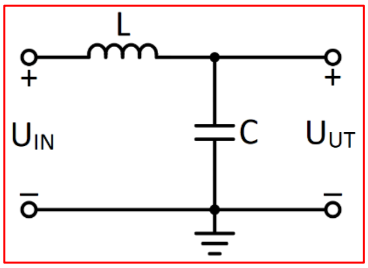
där den resistiva delen av överföringsfunktionen (samt filtret) är lika med ett och den reaktiva delen är lika med s^2LC.

- Därmed så gäller att överföringsfunktionens absolutbelopp |H(s)| kan beräknas med formeln

$$|H(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{1}{1 + s^2LC},\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}},$$

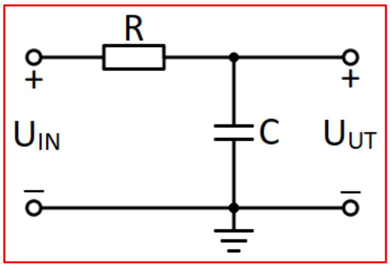
där |H(s)| är amplitudfunktionen, s är frekvensparametern, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans.

- I kapitel 2.3 så jämfördes egenskaperna på ett lågpass LC-filter med ett lågpass RC-filter, där båda filters brytfrekvens f_c sattes till ca 100 kHz. Därmed är det önskvärt att frekvenser över 100 kHz dämpas så mycket som möjligt av respektive filter.



Lågpass LC-filter.

- Vi såg att vi en frekvens f på 800 kHz så släppte lågpass RC-filtret fortfarande igenom ca 13 % av insignalerna, samtidigt som motsvarande lågpass LC-filter endast släppte igenom ca 1,8 %, alltså ungefär sju gånger mindre, vilket vi kan se genom att beräkna amplitudfunktionen |H(s)| vid frekvensen f = 800 kHz.



Lågpass RC-filter.

- Vi såg tidigare att amplitudfunktionen |H(s)| av lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) är lika med

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}},$$

där s är frekvensparametern, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans, som kan sättas till 15 µH respektive 0,15 µF för att erhålla en brytfrekvens f_c runt 100 kHz.

- En frekvens f på 800 kHz är ekvivalent med en frekvensparameter s på 2π * 900k, eftersom

$$s = 2\pi f = 2\pi * 800k$$

- Därmed beräknar vi amplitudfunktionen |H(s)| vid en frekvensparameter s på 2π * 800k (alltså frekvensen f = 800 kHz):

$$|H(2\pi * 800k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + ((2\pi * 800k)^2 * 15\mu * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 56{,}8^2}} \approx \frac{1}{56{,}85} \approx 0{,}018$$

- Däremot under brytfrekvensen, exempelvis vid en frekvens f på 80 kHz, alltså relativt långt under brytfrekvensen f_c (ca 100 kHz) , vill vi att ett lågpassfilter skall låta signaler passera obemärkt. Vid en sådan frekvens så kommer ett lågpass RC-filter fortfarande dämpa signalerna med ca 10 %. Vi har tidigare sett att amplitudfunktionen |H(s)| av ett lågpass RC-filters överföringsfunktion H(s) är lika med

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}},$$

där s är frekvensparametern, R är filterresistorns resistans och C är filterkondensatorns kapacitans, som kan sättas till 10 Ω respektive 0,15 µF för en brytfrekvens f_c på ca 100 kHz.

- Därmed ser vi att för en frekvens f på 50 kHz, vilket är ekvivalent med en frekvensparameter s på 2π * 50k, så blir amplitudfunktionen |H(s)| ungefär lika med 0,9

$$|H(2\pi * 50k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi * 50k * 10 * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (0{,}47)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1{,}1}} \approx 0{,}9$$

- Resultatet ovan indikerar att inkommande signaler kommer dämpas av lågpass RC-filtret med ca 10 % vid denna frekvens.

- Motsvarande LC-filters kommer endast insignaler med ca 5 % vid samma frekvens, vilket vi kan se genom att beräkna amplitudfunktionen |H(s)|, som blir ungefär lika med 0,95:

$$|H(2\pi * 50k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + ((2\pi * 50k)^2 * 15\mu * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}22^2}} \approx \frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}95$$

- Därmed ser vi att lågpass LC-filtret har mer önskvärda egenskaper än motsvarande lågpass RC-filter; frekvenser ovanför brytfrekvensen f_c dämpas i högre grad, samtidigt som frekvenser under brytfrekvensen f_c dämpas i mindre grad.

- Endast vid brytfrekvensen f_c så kommer båda typer av lågpassfilter dämpa signalerna lika mycket (ca 30 %), eftersom i båda fall så gäller att den resistiva samt den reaktiva delen av respektive filter(och därmed överföringsfunktion H(s) är lika stora. Vi har tidigare sett att den resistiva delen av respektive filter kan tänkas vara lika med ett, i enlighet med formlerna

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}}$$

  för ett lågpass LC-filter och

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}}$$

  för ett lågpass RC-filter.

- Därmed så måste även den reaktiva delen av respektive filter vara lika med ett (s^2LC för ett lågpass LC-filter, sRC för ett lågpass RC-filter).

- För lågpass LC-filtret gäller därmed att den reaktiva delen s^2LC är lika med ett:

$$Brytfrekvens \;\rightarrow s^2LC = 1$$

- Vid brytfrekvensen f_c så är frekvensparametern s lika med

$$s = 2\pi f_c,$$

  vilket medför att amplitudfunktionen |H(s)| = |H(2πf_c)| blir ungefär lika med 0,707, eftersom

$$|H(s)| = \frac{|1|}{|1 + s^2LC|} = \frac{1^2}{\sqrt{1^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

- Resultatet indikerar att vid brytfrekvensen f_c så släpper lågpass LC-filtret igenom ungefär 70 % av inkommande signaler, vilket betyder att ungefär 30 % dämpas.

- Detta gäller även för motsvarande lågpass RC-filter, eftersom

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}} = \frac{1^2}{\sqrt{1^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

2.5.5 - Härledning av lågpass LC-filtrets brytfrekvens f_c

- Vi såg tidigare att lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) kan härledas med formeln

$$H(s) = \frac{1}{1 + s^2LC},$$

- Vid brytfrekvensen f_c så är den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av filtret, som är lika med ett, lika stor som den reaktiva (frekvensberoende) delen s^2LC, vilket medför att

$$1 = s^2LC \text{ då } f = f_c$$

vilket kan transformeras till

$$s^2 = \frac{1}{LC}$$

- För att härleda en formel för frekvensparametern s så tar vi kvadratroten ur båda sidor av formeln, vilket medför att

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

där

$$\sqrt{s^2} = s$$

samt

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

vilket ger följande formel för frekvensparametern s:

$$s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Vid brytfrekvensen f_c är frekvensparametern s lika med brytvinkelfrekvensen w_c, som i sin tur är lika med

$$s = w_c = 2\pi f_c,$$

där w_c är lika med brytvinkelfrekvensen och f_c är lika med brytfrekvensen.

- Genom att ersätta frekvensparametern s i Laplacetransformen med $2\pi f_c$ så kan följande formel härledas:

$$s = 2\pi f_c \rightarrow 2\pi f_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

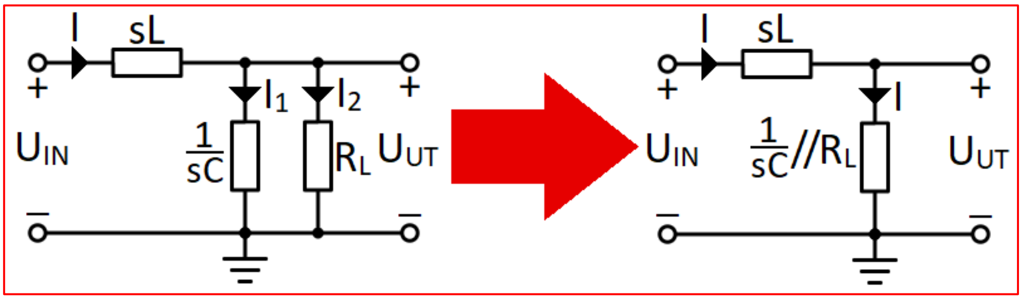
- För att sedan härleda en formel för brytfrekvensen f_c så dividerar vi med 2π i både västerled och högerled. Då får vi formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där f_c är brytfrekvensen, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans.

2.5.6 - Lågpass LC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd

- I detta avsnitt antar vi att lågpass LC-filtret har en rent resistiv last, som vi kallar R_L. I detta fall så kan kretsen förenklas genom att de parallellkopplade motstånden sL och R_L ersätts med parallellkopplingens ekvivalenta ersättningsimpedans, vilket är $sL//R_L$. Vi kan därefter rita om kretsen till den högra figuren nedan.



I lastat tillstånd så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastens resistans R_L utgöra en parallellkoppling 1/(sC)//R_L, såsom i den vänstra figuren. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L, såsom i figuren till höger.

- För att kunna härleda överföringsfunktionen H(s) för lågpass LC-filtret i lastat tillstånd så måste först formel härledas för insignalen U_{IN} samt utsignalen U_{UT}, vilket enkelt kan göras med Kirchhoffs spänningslag.

- För att härleda en formel för inspänningen U_{IN} så går vi ett varv från jordpunkten via U_{IN} (från minus- till pluspolen, vilket därför räknas som U_{IN}), via filterspolen L och ned till jordpunkten via ersättningsimpedansen (1/sC)//R_L.
Vi får då formeln

$$U_{IN} - I * sL - \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I = 0,$$

där U_{IN} är insignalen, sL*I är spänningsfallet över filterspolen och (1/(sC) //R_L) * I är spänningsfallet över ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$U_{IN} = I * sL + \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I$$

- Genom att bryta ut strömmen I så kan följande formel härledas för inspänningen U_{IN}:

$$U_{IN} = \left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right) * I,$$

där

$$\frac{1}{sC}//R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} = \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + sR_LC}{sC}\right)} = \frac{R_L}{1 + sR_LC}$$

- Därefter härleder vi en formel för utsignalen U_{UT}. Vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via utspänningen U_{UT}, sedan via ersättningsimpedansen (1/sC)//R_L ned till jordpunkten. Eftersom vi gick ett helt varv i kretsen så är summan av spänningsfallen över utspänningen U_{UT} samt filterspolen L lika med noll, i enlighet med Kirchhoffs spänningslag.
Detta ger oss formeln

$$U_{UT} - \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I = 0$$

vilket kan transformeras till

$$U_{UT} = \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I$$

- Därmed så kan en formel härledas för lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) i lastat tillstånd:

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{\left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I}{\left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right) * I},$$

där strömmen I kan elimineras, eftersom den förekommer i både täljaren och nämnaren, vilket ger formeln

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}//R_L}{sL + \frac{1}{sC}//R_L}$$

- Vi dividerar sedan med (1/sC)//R_L i båda täljaren och nämnaren och får då:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{\frac{1}{sC}//R_L}{\frac{1}{sC}//R_L}\right)}{\left(\frac{sL}{\frac{1}{sC}//R_L} + \left(\frac{\frac{1}{sC}//R_L}{\frac{1}{sC}//R_L}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{sL}{\frac{1}{sC}//R_L} + 1},$$

där

$$\frac{1}{sC}//R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} = \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + sR_LC}{sC}\right)} = \frac{R_L}{1 + sR_LC}$$

vilket medför att

$$H(s) = \frac{1}{\frac{sL}{\left(\frac{R_L}{1 + sR_LC}\right)} + 1} = \frac{1}{\frac{sL(1 + sR_LC)}{R_L} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}}$$

- Därmed så kan en slutgiltig formel för lågpass LC-filtrets överföringsfunktion H(s) i lastat tillstånd härledas:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}}$$

där den resistiva (icke frekvensberoende) delen av överföringsfunktionen (samt filtret) är lika med ett och den reaktiva (frekvensberoende) delen är lika med ($sL + s^2R_LLC$) / R_L.

- Överföringsfunktionen H(s) ovan har amplitudfunktionen

$$|H(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}\right)^2}}$$

- Vid brytfrekvensen f_c så är den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av amplitudfunktionen, som är lika med ett i kvadrat, lika stor som den reaktiva (frekvensberoende) delen $(sL + s^2R_LLC) / R_L$ i kvadrat, vilket medför att

$$\left(\frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}\right)^2 = 1^2 \; då \; f = f_c$$

- Genom att ta roten ur båda sidor så ser vi att den reaktiva delen $(sL + s^2R_LLC) / R_L$ är lika med ±1, eftersom

$$\sqrt{\left(\frac{sL + s^2R_LLC}{R_L}\right)^2} = \sqrt{1^2} = \pm 1,$$

vilket medför att $(sL + s^2R_LLC) / R_L$ är lika med absolutbeloppet av |1|:

$$\frac{sL + s^2R_LLC}{R_L} = \pm 1 = |1|$$

- Formeln ovan kan transformeras till

$$|sL + s^2R_LLC| = |R_L|$$

vilket medför att

$$|s^2R_LLC| = |-sL + R_L|,$$

där vi kan dividera med R_LLC på båda sidor av ekvationen, vilket medför att

$$|s^2| = \left|\frac{-sLR_L}{R_LLC}\right| = \left|-\frac{sL}{R_LLC} + \frac{R_L}{R_LLC}\right|,$$

där s^2 är över eller lika med noll, vilket medför att absolutbeloppet $|s^2|$ är lika med s^2:

$$s^2 \geq 0 \rightarrow |s^2| = s^2$$

- Formeln ovan kan därmed förenklas till

$$s^2 = \left|-\frac{s}{R_LC} + \frac{1}{LC}\right|$$

- Rötter för frekvensparametern s kan beräknas med PQ-formeln:

$$s = \left|-\frac{1}{2R_LC} \pm \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|,$$

där

$$s_1 = \left|-\frac{1}{2R_LC} + \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|$$

samt

$$s_2 = \left|-\frac{1}{2R_LC} - \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_LC}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|$$

- Eftersom vi har två rötter till frekvensparametern så kommer filtret få två brytfrekvenser, en övre samt en undre. Som vi har sett tidigare så gäller följande samband mellan frekvensparametern s frekvensen f:

$$s = 2\pi f$$

- Eftersom rötterna ovan för frekvensparametern s gäller vid de två brytfrekvenserna f_{c1} och f_{c2} så kan dessa beräknas genom att ersätta respektive rot s_1 och s_2 med motsvarande brytfrekvens f_{c1} och f_{c2}:

$$s_1 = 2\pi f_{c1}$$

samt

$$s_s = 2\pi f_{c2}$$

- Vi börjar med att ersätta frekvensparametern s_1 med motsvarande brytfrekvens f_{c1}:

$$2\pi f_{c1} = \left| -\frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left| \left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC} \right|} \right|,$$

vilket kan transformeras till

$$f_{c1} = \frac{\left| -\frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left| \left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC} \right|} \right|}{2\pi}$$

- Därefter ersätter vi frekvensparametern s_2 med motsvarande brytfrekvens f_{c2} vilket ger formeln:

$$2\pi f_{c2} = \left| -\frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left| \left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC} \right|} \right|,$$

vilket kan transformeras till

$$f_{c2} = \frac{\left| -\frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left| \left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC} \right|} \right|}{2\pi}$$

- Formlerna ovan är relativt komplexa, men kan förenklas genom att undersöka de fall då lastresistansen R_L är mycket låg eller moderat till hög.

- Förutsatt att R_L är hög så kan vi anta att

$$\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 \ll \frac{1}{LC},$$

vilket medför att formeln för brytfrekvensen f_{c1} ovan kan förenklas till

$$f_{c1} = \frac{\left| -\frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left| \left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC} \right|} \right|}{2\pi} \approx \frac{\left|\frac{1}{LC}\right|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi|LC|},$$

där LC är över eller lika med noll:

$$LC \geq 0,$$

vilket medför att absolutbeloppet |LC| är lika med LC (precis som absolutbeloppet|1| är lika med 1):

$$|LC| = LC$$

- Därmed så ser vi att vi brytfrekvensen f_{c1} i lastat tillstånd, där lastresistansen R_L är moderat till hög, så kan brytfrekvensen f_c approximeras med formeln

$$f_{c1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns induktans.

- Detsamma gäller för brytfrekvensen f_{c2}, eftersom

$$f_{c2} = \frac{\left|-\frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|}{2\pi} \approx \frac{\left|-\frac{1}{LC}\right|}{2\pi} = \frac{\left(\frac{1}{LC}\right)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi LC},$$

då

$$LC \geq 0,$$

vilket medför att

$$|LC| = LC$$

- Däremot ifall lastresistansen R_L närmar sig noll så kommer brytfrekvensen f_c gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{R_L \to 0} \frac{1}{2R_L C} = \frac{1}{2 * 0 * C} = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{R_L \to 0} f_{c1} = \lim_{R_L \to 0} \frac{\left|-\frac{1}{2R_L C} + \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|}{2\pi} \approx \frac{\left|-\infty + \sqrt{\left|\infty^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|}{2\pi} = \infty$$

- Detsamma gäller för brytfrekvensen f_{c2}, eftersom

$$\lim_{R_L \to 0} f_{c2} = \lim_{R_L \to 0} \frac{\left|-\frac{1}{2R_L C} - \sqrt{\left|\left(\frac{1}{2R_L C}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|}{2\pi} \approx \frac{\left|-\infty - \sqrt{\left|\infty^2 + \frac{1}{LC}\right|}\right|}{2\pi} \approx \infty$$

- Ifall lastresistansen R_L närmar sig noll så hade alltså lågpass LC-filtret släppt igenom alla insignaler; i praktiken hade därmed filtret inte längre fungerat. Det är därför viktigt att se till att eventuell lastresistans R_L är hög.

- Ifall lasten istället hade bestått av en lastimpedans Z_L, vars storlek varierar med frekvensen (proportionerligt med ökad frekvens ifall det handlar om en lastinduktans L_L, i omvänd proportion ifall det handlas om en lastkapacitans C_L). Då gäller det att se till att lastimpedansen Z_L är hög i det frekvensintervall som lågpass LC-filtret skall arbeta i.

2.5.7 - Lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN}

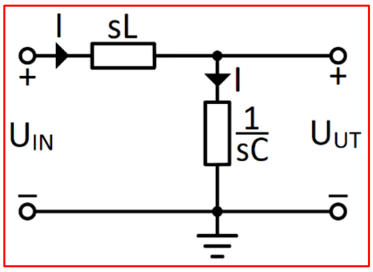
- Precis som för motsvarande RC-filter så är det mycket enkelt att härleda formler för lågpassfiltrets in- och utimpedans ur de framtagna formlerna för in- och utspänningen U_{IN} och U_{UT}. Ur dessa kan vi använda Ohms lag för att härleda in- och utimpedansen Z_{IN} och Z_{UT}.

- Lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} är lika med filtrets inspänning U_{IN} dividerat med inströmmen I_{IN}:

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}},$$

där Z_{IN} är inimpedansen, U_{IN} är inspänningen och I_{IN} är lika med filtrets inström, som man enkelt kan se är lika med strömmen I (eftersom I är strömmen som flödar in från ingången):

$$I_{IN} = I$$



Lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} är lika med inspänningen U_{IN} dividerat med inströmmen I_{IN}, som är lika med strömmen I, eftersom det är denna ström som flödar in i filtret från ingången, via filterspolen L samt filterkondensatorn C ned till jordpunkten.

- Vi härledde tidigare formeln för lågpass LC-filtrets inspänning U_{IN} till

$$U_{IN} = I\left(\frac{1 + s^2LC}{sL}\right)$$

- Därmed så kan en formel för LC-filtrets inimpedans Z_{IN} härledas:

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(\frac{1 + s^2LC}{sC}\right)}{I} = \frac{1 + s^2LC}{sC}$$

- Ur formeln för lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} ovan så kan en formel härledas för absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ av inimpedansen. Precis som för de filter vi har sett tidigare så beräknas $|Z_{IN}|$ med Pythagoras sats:

$$|Z_{IN}| = \left|\frac{1 + s^2LC}{sC}\right| = \frac{|1 + s^2LC|}{|sC|} = \frac{\sqrt{1^2 + (s^2LC)^2}}{\sqrt{(sC)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}}{sC}$$

- Som vi har sett tidigare så används Pythagoras sats för beräkning av absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ på grund av att den resistiva samt den reaktiva delen av kretsen kan tänkas utgöra storheter på två olika dimensioner.

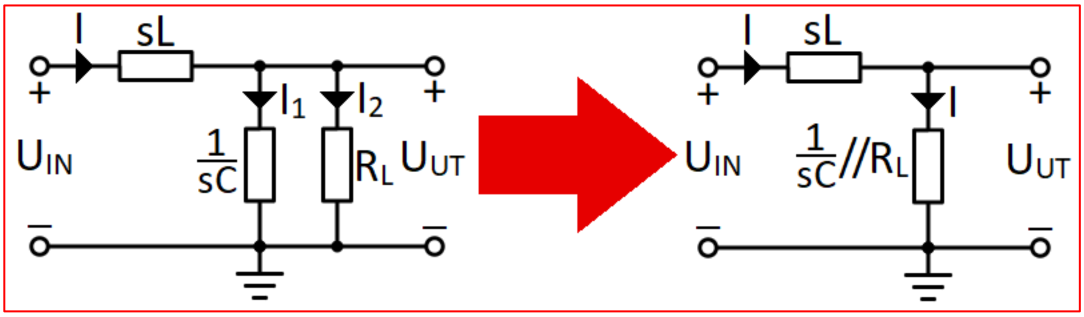
- Den reaktiva samt den resistiva delen av inimpedansen kan därför ritas ut som storheter på olika axlar, där den resistiva delen av kretsen ligger på x-axeln och den reaktiva delen på y-axeln; tillsammans bildar dessa en triangel, där hypotenusan är lika med absolutbeloppet $|Z_{IN}|$. För mer information om absolutbelopp, se avsnittet *x.x Absolutbeloppet av högpass RC-filtrets inimpedans.*

- Precis som för de filter vi har sett tidigare så kommer storleken på lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} variera med insignalernas frekvens, eftersom Z_{IN} innefattar en resistiv del samt två reaktiva delar. I nästa avsnitt kommer vi gå igenom hur $|Z_{IN}|$ beräknas vid en given frekvens.

Lågpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd:

- I lastat tillstånd så kommer eventuell lastresistans R_L (eller lastimpedans Z_L) utgöra en parallellkoppling med filterkondensatorns reaktans 1/(sC), se den vänstra figuren nedan. I detta exempel så antar vi att lasten är rent resistiv.

- För att beräkna filtrets inimpedans Z_{IN} i lastat tillstånd så kan kretsen förenklas genom att de parallellkopplade motstånden 1/(sC) och R_L ersätts med parallellkopplingens ekvivalenta ersättningsimpedans, vilket är 1/(sC)//R_L. Vi kan därefter rita om kretsen till den högra figuren nedan.



I lastat tillstånd så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastens resistans R_L utgöra en parallellkoppling 1/(sC)//R_L, såsom i den vänstra figuren. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L, såsom i den högra figuren. Därmed så blir filtrets inimpedans Z_{IN} i lastat tillstånd lika med sL + 1/(sC)//R_L.

- Vi använder den högra figuren ovan för att beräkna lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} i lastat tillstånd. Genom att köra ett varv med Kirchhoffs spänningslag från ingången U_{IN} via filterspolens reaktans sL samt ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L ned till jord.

- I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så blir summan av insignalen U_{IN}, spänningsfallet I * sL över filterspolen L samt spänningsfallet över ersättningsimpedansen I * (1/(sC)//R_L) lika med noll, vilket ger följande formel:

$$U_{IN} - sLI - I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{IN} = sLI + I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right)$$

- Genom att bryta ut strömmen I ur högerledet, så kan följande formel härledas:

$$U_{IN} = I\left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right),$$

där U_{IN} är insignalen, I är strömmen som flödar genom filtret, sL är filterspolens reaktans och 1/(sC)//R_L är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen bestående av filterkondensatorn C samt lastresistansen R_L.

- Därmed så kan lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} härledas med formeln

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right)}{I} = sL + \frac{1}{sC}//R_L,$$

där sL alltså är filterspolens reaktans och 1/(sC)//R_L är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen bestående av filterkondensatorn C samt lastresistansen R_L.

- Vi kan därefter härleda en formel för absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ i lastat tillstånd, vilket kräver matematiska förenklingar:

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|sL + \frac{1}{sC}//R_L\right| = \left|sL + \frac{\left(\frac{1}{sC} * R_L\right)}{\left(\frac{1}{sC} + R_L\right)}\right|,$$

vilket kan förenklas till

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|sL + \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + sR_LC}{sC}\right)}\right| = \left|sL + \frac{R_L}{1 + sR_LC}\right|$$

- Därefter multiplicerar vi spolens reaktans sL med en faktor $1 + sR_LC$ så att hela formeln får en gemensam nämnare:

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|sL + \frac{R_L}{1 + sR_LC}\right| = \left|\frac{sL(1 + sR_LC) + R_L}{1 + sR_LC}\right| = \left|\frac{R_L + sL + s^2R_LLC}{1 + sR_LC}\right|,$$

- Formeln ovan kan sedan förenklas till

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|\frac{R_L + sL + s^2R_LLC}{1 + sR_LC}\right| = \frac{\sqrt{{R_L}^2 + (sL + s^2R_LLC)^2}}{\sqrt{1^2 + (sR_LC)^2}},$$

- Därmed ser vi att absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ av lågpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd kan härledas med formeln:

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|\frac{R_L + sL + s^2R_LLC}{1 + sR_LC}\right| = \frac{\sqrt{{R_L}^2 + (sL + s^2R_LLC)^2}}{\sqrt{1 + (sR_LC)^2}}$$

- Om lastresistansen R_L är mycket hög så kan denna försummas vid moderata till högre frekvenser. Detta beror på att reaktansen 1/(sC) då är relativt låg, vilket medför att impedansen $1/(sC)//R_L$ blir ungefär lika med 1/(sC). Då kan inimpedansen Z_{IN} (samt brytfrekvensen f_c) beräknas som i olastat tillstånd:

$$\frac{1}{sC} \ll R_L \rightarrow \frac{1}{sC}//R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} \approx \frac{1}{sC},$$

vilket medför att

$$Z_{IN,lastat} = sL + \frac{1}{sC}//R_L \approx sL + \frac{1}{sC}$$

samt

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Däremot vid mycket låga frekvenser så kommer reaktansen 1/(sC) utgöra ett mycket stort motstånd, som överstiger lastresistansen R_L. Ifall reaktansen 1/(sC) är mycket högre än lastresistansen R_L så kan reaktansen 1/(sC) försummas:

$$\frac{1}{sC} \gg R_L \rightarrow \frac{1}{sC}//R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} \approx R_L,$$

vilket medför att LC-filtret fungerar och kan beräknas som ett olastat lågpass RC-filter, där lastresistansen R_L utgör filterresistorn, vilket medför att

$$Z_{IN,lastat} = sL + \frac{1}{sC}//R_L \approx sL + R_L$$

samt att brytfrekvensen f_c i detta fall kan beräknas som på ett olastat lågpass RC-filter, där lastresistansen R_L utgör filterresistor:

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_LC}$$

Lågpass LC-filtrets inimpedans vid låga frekvenser:

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer filterspolens reaktans sL närma sig noll, eftersom

$$s = 2\pi f,$$

vilket medför att

$$\lim_{f \to 0} sL = \lim_{f \to 0} 2\pi f L = 2\pi * 0 * L = 0$$

där lim står för gränsvärde och f → 0 indikerar att f närmar sig noll (men är inte exakt lika med noll).

- Samtidigt så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) utgöra ett nästintill oändligt motstånd, eftersom

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * 0 * C} = \infty,$$

vilket medför att ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L närmar sig lastresistansen R_L, eftersom

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC} // R_L = \lim_{f \to 0} \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} = \frac{\infty * R_L}{\infty + R_L} \approx \frac{\infty * R_L}{\infty} = R_L$$

- Därmed så kommer inimpedansen Z_{IN} i lastat tillstånd närma sig lastresistansen R_L, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN,lastat} = \lim_{f \to 0} \left(sL + \frac{1}{sC} // R_L \right) = 0 + \infty // R_L \approx R_L$$

- Därmed så ser vi att lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} i lastat tillstånd har ett minimumvärde $Z_{IN,min}$, som närmar sig lastresistansen R_L:

$$Z_{IN,min,lastat} = R_L,$$

- Därmed så kommer även absolutbeloppet $|Z_{IN,min,lastat}|$ närma sig också lastresistansen R_L, eftersom

$$\left| Z_{IN,min,lastat} \right| = |R_L| = R_L$$

- I olastat tillstånd så kommer inimpedansen Z_{IN} gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN} = \lim_{f \to 0} \left(sL + \frac{1}{sC} \right) = 0 + \infty = \infty,$$

vilket också medför att absolutbeloppet $|Z_{IN,max}|$ också närmar sig oändlighet, eftersom

$$\left| Z_{IN,max} \right| = |\infty| = \infty$$

Lågpass LC-filtrets inimpedans vid mycket höga frekvenser:

- Vid frekvenser som närmar sig oändlighet så kommer filterspolens reaktans sL närma sig oändlighet, eftersom

$$s = 2\pi f,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty} sL = \lim_{f\to\infty} 2\pi f L = 2\pi * \infty * L = \infty,$$

där lim står för gränsvärde och f → ∞ indikerar att f närmar sig oändlighet.

- Samtidigt så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) närma sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to\infty} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * \infty * C} = 0,$$

vilket medför att ersättningsimpedansen 1/(sC) //R_L närmar sig noll, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} \frac{1}{sC}//R_L = \lim_{f\to\infty} 0//R_L = 0$$

- Därmed så kommer inimpedansen $Z_{IN,lastat}$ i lastat tillstånd närma sig oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,lastat} = \lim_{f\to\infty} \left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right) = \infty + 0 = \infty$$

- Därmed så ser vi att lågpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN,lastast}$ i lastat tillstånd har ett maximumvärde, $Z_{IN,max,lastat}$, som närmar sig oändlighet

$$Z_{IN,max,lastat} = \infty$$

vilket medför att absolutbeloppet $|Z_{IN,min,lastat}|$ också går mot oändlighet, eftersom

$$|Z_{IN,max,lastat}| = |\infty| = \infty$$

- Även i olastat tillstånd så kommer inimpedansen Z_{IN} närma sig oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN} = \lim_{f\to\infty} \left(sL + \frac{1}{sC}\right) = \infty + 0 = \infty,$$

vilket medför ett absolutbelopp $|Z_{IN}|$ som går mot oändlighet, eftersom

$$|Z_{IN}| = |\infty| = \infty$$

- I olastat tillstånd så går alltså lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} mot oändlighet, oavsett frekvens. I lastat tillstånd så närmar sig inimpedansen $Z_{IN,lastat}$ lastresistansen R_L vid låga frekvenser, för att öka gradvis mot oändlighet med ökad frekvens.

Sammanfattning av lågpass RC-filtrets inimpedans vid olika frekvenser:

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} i olastat tillstånd kan härledas med formeln

$$Z_{IN} = \frac{1 + s^2LC}{sC},$$

vars absolutbelopp $|Z_{IN}|$ kunde härledas (via Pythagoras sats) till

$$|Z_{IN}| = \left|\frac{1 + s^2LC}{sC}\right| = \frac{|1 + s^2LC|}{|sC|} = \frac{\sqrt{1^2 + (s^2LC)^2}}{\sqrt{(sC)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}}{sC}$$

- I olastat tillstånd så har vi sett att inimpedansen Z_{IN} närmar sig oändlighet vid alla frekvenser:

$$Z_{IN} = \infty,$$

vilket medför att absolutbeloppet $|Z_{IN}|$ i olastat tillstånd går mot oändlighet:

$$|Z_{IN}| = \infty$$

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN,lastat}$ i lastat tillstånd kan härledas med formeln

$$Z_{IN,lastat} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(sL + \frac{1}{sC}//R_L\right)}{I} = sL + \frac{1}{sC}//R_L$$

där sL är filterspolens reaktans och $1/(sC)//R_L$ är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen bestående av filterkondensatorn C samt lastresistansen R_L.

- Vi har också sett att absolutbeloppet $|Z_{IN,lastat}|$ av lågpass LC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd härledas till:

$$\left|Z_{IN,lastat}\right| = \left|\frac{R_L + sL + s^2R_LLC}{1 + sR_LC}\right| = \frac{\sqrt{{R_L}^2 + (sL + s^2R_LLC)^2}}{\sqrt{1 + (sR_LC)^2}}$$

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets inimpedans $Z_{IN,lastat}$ i lastat tillstånd har ett minimumvärde $Z_{IN,min}$ som går mot lastresistansen R_L, samtidigt som maximumvärdet $Z_{IN,max,lastat}$ närmar sig oändlighet, vilket kan skrivas som

$$R_L \leq Z_{IN,lastat} \leq \infty,$$

vilket är identiskt med absolutbeloppet $|Z_{IN,lastat}|$ av inimpedansen i lastat tillstånd:

$$R_L \leq |Z_{IN,lastat}| \leq \infty$$

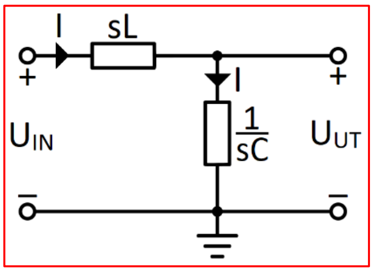
2.5.8 - Lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT}

- Lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} är lika med filtrets utspänning U_{UT} dividerat med utströmmen I_{UT}:

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}},$$

där Z_{UT} är utimpedansen, U_{UT} är utspänningen och I_{UT} är filtrets utström, som är lika med strömmen I, eftersom strömmen I flödar från utspänningen U_{UT}:s pluspol ned till dess minuspol, som är ansluten till jordpunkten:

$$I_{UT} = I$$



Lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} är lika med utspänningen U_{UT} dividerat med utströmmen I_{UT}, som är lika med strömmen I, då strömmen I flödar från utspänningens plus- till minuspol, se figuren ovan.

- Vi härledde tidigare följande formel för lågpass LC-filtrets utspänning U_{UT}:

$$U_{UT} = I * \frac{1}{sC},$$

där 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans och I är strömmen som flödar genom spolen.

- Därmed så kan lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} härledas med formeln

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{\left(I * \frac{1}{sC}\right)}{I} = \frac{1}{sC}$$

- Lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i olastat tillstånd är alltså lika med filterkondensatorns reaktans:

$$Z_{UT} = \frac{1}{sC},$$

vilket medför ett identiskt absolutbelopp $|Z_{UT}|$, då utimpedansen Z_{UT} endast har en reaktiv del, vilket medför att

$$|Z_{UT}| = \left|\frac{1}{sC}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{sC}\right)^2} = \frac{1}{sC}$$

- Vid mycket låga frekvenser så kommer därmed lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} närma sig oändlighet eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * 0 * C} = \infty,$$

där lim betyder gränsvärde och f→0 indikerar att frekvensen f går mot noll.

- Däremot så kommer utimpedansen Z_{UT} minska linjärt med ökad frekvens, för att närma sig noll vid mycket höga frekvenser, eftersom

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT} = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * \infty * C} = 0$$

- Därmed så har lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} ett minimum- samt ett maximumvärde i olastat tillstånd, som sträcker sig från noll (vid frekvenser som går mot oändlighet) till oändlighet (när frekvensen går mot eller är lika med noll, såsom vid likström):

$$0 \leq Z_{UT} \leq \infty,$$

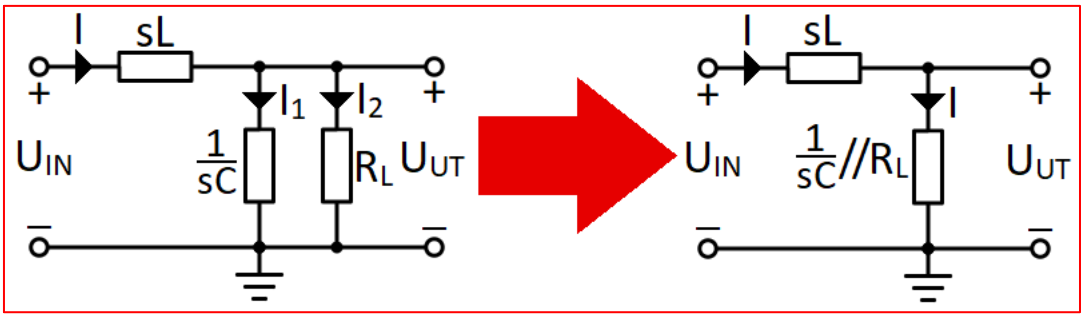
vilket ger ett identiskt absolutbelopp $|Z_{UT}|$ då |0| = 0 samt |∞| = ∞:

$$0 \leq |Z_{UT}| \leq \infty$$

Lågpass LC-filtrets utimpedans i lastat tillstånd:

- Som vi såg tidigare när lågpass LC-filtrets inimpedans Z_{IN} i lastat tillstånd analyserades så kommer eventuell lastresistans R_L på filtrets utgång utgöra en parallellkoppling med filterkondensatorn C.

- Därmed så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastresistansen R_L utgöra en parallellkoppling, såsom kretsschemat nedan till vänster. Detta kretsschema kan förenklas till kretsschema till höger genom att vi ersätter de parallellkopplade impedanserna med ekvivalent ersättningsimpedans, vilket i detta fall är lika med 1(sC)//R_L.



I lastat tillstånd så kommer filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastens resistans R_L utgöra en parallellkoppling 1/(sC)//R_L, såsom i det vänstra kretsschemat. Vi kan därmed ersätta dessa motstånd med ersättningsimpedansen 1/(sC)//R_L och därmed erhålla det ekvivalenta kretsschemat till höger. Därmed så är filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd (med resistiv last) lika med 1/(sC)//R_L.

- En formel måste härledas för utspänningen U_{UT} i lastat tillstånd. I enlighet med Kirchhoffs spänningslag så är summan av samtliga spänningsfall ett helt varv i en krets lika med noll. Vi kör därmed ett varv med Kirchhoffs spänningslag från jord via utsignalen U_{UT} och sedan tillbaka till jord via ersättningsimpedansen 1(sC)//R_L och kan därmed härleda formeln

$$U_{UT} - \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I = 0,$$

som kan transformeras till

$$U_{UT} = \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I$$

- Eftersom utströmmen I_{UT} är lika med strömmen I så kan en formel enkelt härledas för utimpedansen Z_{UT} i lastat tillstånd genom användning av Ohms lag:

$$Z_{UT,lastat} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{\left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I}{I} = \frac{1}{sC}//R_L$$

- Vi ser därmed att lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd är lika med ersättningsimpedansen 1(sC)//R_L av parallellkopplingen bestående av filterkondensatorns reaktans 1//(sC) samt lastresistansen R_L.

$$Z_{UT,lastat} = \frac{1}{sC}//R_L,$$

där

$$\frac{1}{sC}//R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} = \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + sR_LC}{sC}\right)} = \frac{R_L}{1 + sR_LC}$$

- Därmed kan en formel för absolutbeloppet |Z_{UT}| av lågpass LC-filtrets utimpedans i lastat tillstånd härledas:

$$|Z_{UT,lastat}| = \left|\frac{1}{sC}//R_L\right| = \left|\frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L}\right| = \left|\frac{R_L}{1 + sR_LC}\right| = \frac{\sqrt{{R_L}^2}}{\sqrt{1^2 + (sR_LC)^2}} = \frac{R_L}{\sqrt{1 + (sR_LC)^2}}$$

- Vid mycket låga frekvenser så kommer lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd närma sig lastresistansen R_L, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{sC} // R_L,$$

där lim betyder gränsvärde och f→0 indikerar att frekvensen f går mot noll.

- När frekvensen f går mot noll så kommer reaktansen 1/(sC) gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * 0 * C} = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to 0} \frac{1}{sC} // R_L = \infty // R_L = R_L,$$

eftersom

$$\infty // R_L = \frac{\infty * R_L}{\infty + R_L} = \infty$$

- Däremot så kommer utimpedansen Z_{UT} minska linjärt med ökad frekvens, för att närma sig noll vid mycket höga frekvenser, eftersom

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT,,lastat} = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{sC} // R_L,$$

där

$$\lim_{f\to \infty} \frac{1}{sC} = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * \infty * C} = 0,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT,lastat} = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{sC} // R_L = 0 // R_L = 0,$$

eftersom

$$0 // R_L = \frac{0 * R_L}{0 + R_L} = 0$$

- Därmed så har lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} ett minimum- samt ett maximumvärde i lastat tillstånd, som sträcker sig från lastresistansen R_L (vid frekvenser som går mot och är lika med noll, såsom likström) till att närma sig noll (vid frekvenser som går mot oändlighet):

$$0 \le Z_{UT,lastat} \le R_L,$$

där absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ har samma minimum- och maximumvärde:

$$0 \le |Z_{UT,lastat}| \le R_L,$$

då

$$|Z_{UT,lastat,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,lastat,max}| = |R_L| = R_L$$

Sammanfattning av lågpass RC-filtrets utimpedans vid olika frekvenser:

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i olastat tillstånd härledas med formeln

$$Z_{UT} = \frac{1}{sC},$$

där 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans.

- Eftersom utimpedansen Z_{UT} är rent reaktiv i olastat tillstånd så blev absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ identiskt i olastat tillstånd, eftersom

$$|Z_{UT}| = \left|\frac{1}{sC}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{sC}\right)^2} = \frac{1}{sC}$$

- Vi såg att lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i olastat tillstånd har ett minimumvärde som går mot noll (vid frekvenser som går mot oändlighet) samt ett maximumvärde som går mot oändlighet (vid frekvenser som går mot och är lika med noll, exempelvis likström):

$$0 \leq Z_{UT} \leq \infty,$$

- Även absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ av utimpedansen i olastat tillstånd har samma min- och maxvärde:

$$0 \leq |Z_{UT}| \leq \infty,$$

då

$$|Z_{UT,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,max}| = |\infty| = \infty$$

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd härledas med formeln

$$Z_{UT,lastat} = \frac{1}{sC} // R_L$$

där 1(sC)//R_L är ersättningsimpedansen för parallellkopplingen av filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastresistansen R_L.

- Ur formeln ovan kunde en formel för absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ i lastat tillstånd härledas:

$$\left|Z_{UT,lastat}\right| = \left|\frac{1}{sC} // R_L\right| = \left|\frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L}\right| = \left|\frac{R_L}{1 + sR_LC}\right| = \frac{\sqrt{{R_L}^2}}{\sqrt{1^2 + (sR_LC)^2}} = \frac{R_L}{\sqrt{1 + (sR_LC)^2}}$$

- Vi har sett att lågpass LC-filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd har ett minimumvärde $Z_{UT,min}$ som närmar sig noll, samtidigt som maximumvärdet $Z_{UT,max}$ närmar sig lastresistansen R_L, vilket kan skrivas som

$$0 \leq Z_{UT,lastat} \leq R_L,$$

vilket är identiskt med absolutbeloppet $|Z_{UT}|$ av utimpedansen i lastat tillstånd:

$$0 \leq |Z_{IN,lastat}| \leq R_L,$$

då

$$|Z_{UT,lastat,min}| = |0| = 0$$

samt

$$|Z_{UT,lastat,max}| = |R_L| = R_L$$