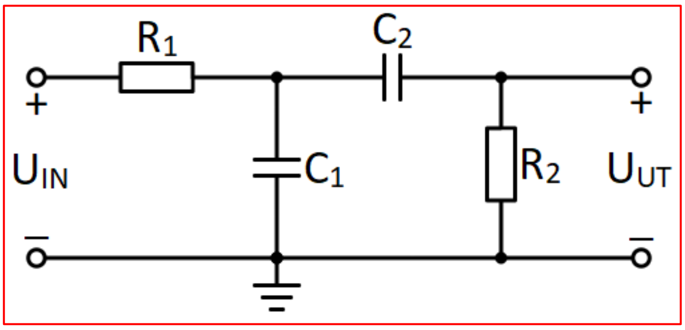
2.6 - Bandpass RC-filter

2.6.1 - Introduktion

- Detta avsnitt behandlar konstruktion och analys av bandpass RC-filter, som släpper igenom frekvenser inom ett visst intervall, samtidigt som övriga frekvenser dämpas.

- Bandpass RC-filter är uppbyggda av kaskadkopplade låg- samt högpass RC-filter, såsom i figuren till höger.

- Vid genomgång av detta avsnitt förväntas läsaren ha koll på överföringsfunktion, brytfrekvens samt in- och utimpedans hos både hög- och lågpass RC-filter. För att inte repetera tidigare avsnitt så kommer grundläggande egenskaper hos dessa filter hänvisas till kapitel 2.2 – 2.3.



Bandpass RC-filter, som släpper igenom frekvenser inom ett visst intervall; lågpassfiltret på ingången sätter den övre gränsen på intervallet via sin brytfrekvens, medan det efterföljande högpassfilter sätter den nedre gränsen på intervallet via sin brytfrekvens. Alla frekvenser mellan brytfrekvenser kan därmed passera, medan övriga frekvenser dämpas (förenklat sett).

- Den interna ordningen på hög- och lågpassfiltret spelar inte någon roll. Dock är storleksskillnaden mellan filterresistorer R_1 och R_2 mycket viktig för att brytfrekvenserna skall hamnar nära de specificerade värdena.

- På grund av att vi kopplar ihop ett låg- samt ett högpassfilter så erhåller bandpass RC-filtret två brytfrekvenser, en övre samt en lägre.

- Bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ kan sättas via filterresistorn samt filterkondensatorn i lågpassfiltret, som i detta fall är det första filtret:

$$f_ö = \frac{1}{2\pi R_1 C_1},$$

där $f_ö$ är den övre brytfrekvensen och R_1 samt C_1 är filterresistorn samt filterkondensatorn i lågpassfiltret. I detta fall så förutsätter vi att filterresistorn R_2 i det efterföljande högpassfiltret är satt minst tio gånger högre än filterresistor R_1 i lågpassfiltret, för att inte den övre brytfrekvensen $f_ö$ skall bli påverkad av högpassfiltrets inimpedans Z_{IN2};

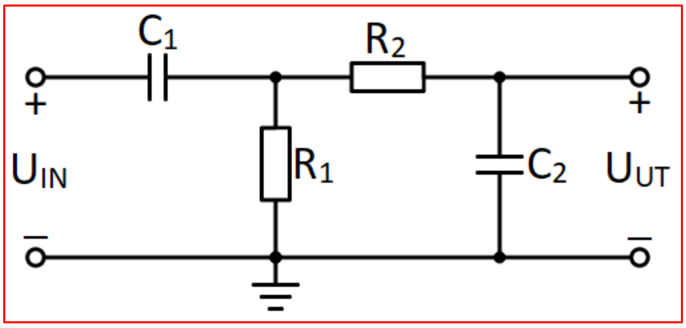
$$Tumregel: R_2 \geq 10R_1$$

- Tumregeln ovan gäller oavsett ordningen på låg- och högpassfiltret; filterresistor R_2 i det efterföljande filtret (filtret närmast utgången) bör alltid sättas minst tio gånger högre än filterresistorn R_1 i det föregående filtret (filtret närmast ingången), gärna högre. Annars kan brytfrekvensen f_c på det föregående filtret (filtret närmast ingången) påverkas av inimpedansen Z_{IN2} på det efterföljande filtret (filtret närmast utgången).

- På samma sätt så kan bandpassfiltrets undre brytfrekvens f_u sättas via filterresistorn samt filterkondensatorn i högpassfiltret. För bandpassfiltret ovan så gäller därmed att

$$f_u = \frac{1}{2\pi R_2 C_2},$$

där f_u är den undre brytfrekvensen och R_2 samt C_2 är storleken på filterresistorn samt filterkondensatorn i högpassfiltret.



Ännu ett bandpass RC-filter, där ett högpassfilter efterföljs av ett lågpassfilter. Oavsett vilket filter som ansluts först så bör filterresistor R_2 i det efterföljande filtret alltid sättas minst tio gånger högre än filterresistor R_1 i det föregående filtret, för att inte det efterföljande filtrets inimpedans Z_{IN2} skall påverka det föregående filtrets brytfrekvens.

- Som nämndes tidigare så spelar den interna ordningen på hög- och lågpassfiltret i RC bandpassfiltret ingen roll; bandpassfiltrets funktion kommer ändå vara samma.

- Därmed hade vi även kunnat skapa ett bandpassfilter genom att koppla ihop ett högpassfilter följt av ett lågpassfilter, såsom figuren till höger.

- Eftersom högpassfiltret är ansluten närmast ingången så kan bandpassfiltrets undre brytfrekvens f_u sättas via filterresistor R_1 samt filterkondensator C_1, som i detta fall utgör komponenterna i högpassfiltret:

$$f_u = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

- På samma sätt så kan bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ sättas via lågpassfiltrets filterresistor R_2 samt filterkondensator C_2:

$$f_ö = \frac{1}{2\pi R_2 C_2},$$

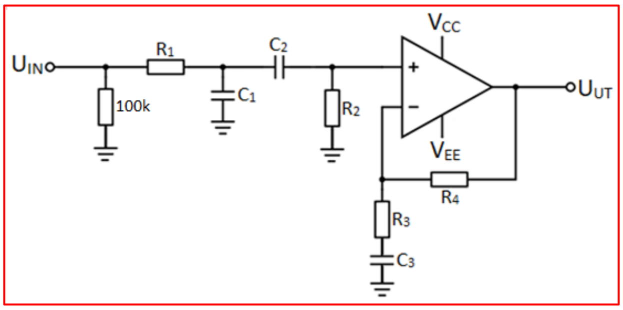
- För att inte högpassfiltrets brytfrekvens f_u skall bli påverkad av lågpassfiltrets inimpedans Z_{IN2} så bör filterresistor R_2, här i lågpassfiltret, sättas minst tio gånger högre än filterresistor R_1 i högpassfiltret, gärna ännu högre:

$$R_2 \geq 10R_1$$

- Den interna ordningen på hög- och lågpassfiltret spelar alltså ingen roll, men storlekarna på filterresistorerna R_1 och R_2 gör det; det gäller därmed att filterresistorn i det efterföljande filtret/filtret närmast utgången sätts minst tio gånger högre än filterresistorn i det föregående filtret/filtret närmast ingången.

2.6.2 - Exempel på dimensionering av ett bandpassfilter

- I figuren till höger är ett bandpass RC-filter ansluten på ingången till en OP-förstärkare. Detta är exempel på ett så kallat aktivt filter, vilket är en blandning av ett passivt filter samt en förstärkarkrets. I detta exempel skall dock endast bandpassfiltret dimensioneras, se kapitel 3.4 för konstruktion av aktiva filter.



Aktivt filter, som består av ett bandpass RC-filter samt en icke-inverterande förstärkarkoppling. För att matcha inströmmarna på OP-förstärkarens plus- och minusingång vid växelström, så bör resistor R_2 och R_3 sättas till ungefär samma värde, vilket vanligtvis är 1 kΩ. I enlighet med vår tidigare tumregel så bör filterresistor R_1 då sättas till högst 100 Ω.

- Antag att bandpassfiltret skall bestå av ett lågpass RC-filter kaskadkopplat med ett högpass RC-filter för att dämpa signaler utanför frekvensbandet 0,5 Hz – 250 kHz. Därmed sätter bandpassfiltrets undre brytfrekvens f_u till 0,5 Hz:

$$f_u = 0{,}5\ Hz,$$

samtidigt som bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ till 250 kHz:

$$f_ö = 250\ kHz$$

- Filterresistor R_2 bör matchas efter resistor R_3 i OP-förstärkarkopplingen, för att matcha eventuella inströmmar på OP-förstärkarens två ingångar vid växelström.

- För höga resistorvärden i OP-förstärkarkopplingen kan medföra onödigt mycket brus. Som vi kommer senare är det därför lämpligt att sätta resistor R_3 i förstärkarkopplingen till 1 kΩ:

$$R_3 = 1\ k\Omega$$

vilket medför att även högpassfiltrets filterresistor R_2 bör sättas till ett värde omkring 1 kΩ, för att matcha OP-förstärkarens inströmmar vid växelström:

$$R_2 = 1\ k\Omega$$

- Detta minskar risken för att små strömskillnader uppkommer på ingångarna, vilket kan orsaka så kallad offset, alltså avvikelser på utsignalernas storlek.

- Högpass RC-filtrets undre brytfrekvens f_u kan beräknas med formeln

$$f_u = \frac{1}{2\pi R_2 C_2},$$

där filterresistor R_2 tidigare sattes till 1 kΩ och C_2 är kapacitansen på högpassfiltrets filterkondensator.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$C_2 = \frac{1}{2\pi R_2 f_u}$$

- Genom att sätta in värden i formeln ovan kan ett lämpligt värde på filterkondensator C_2 beräknas för en undre brytfrekvens f_u på ca 0,5 Hz:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi * 1k * 0{,}5} \approx 318\ \mu F$$

- Närmaste värde i E12-serien är 330 µF, vilket vi väljer att använda:

$$C_2 = 330\ \mu F$$

- Som vi har sett tidigare så är det en god idé att placera en kondensator på 0,1 µF-1µF parallellt med elektrolytkondensator C_2 för att minska påverkan av ESR (ekvivalent serieresistans) och ESL (ekvivalent serieinduktans), som annars kan leda till förlusteffekter samt minskad utsignal.

- Därefter kan lågpassfiltret dimensioneras. I enlighet med vår tidigare tumregel för storleksförhållande mellan filterresistorer R_1 och R_2 så bör lågpassfiltrets filterresistor R_1 sättas minst tio gånger lägre än R_2, alltså till högst 100 Ω, eftersom

$$R_2 \geq 10R_1,$$

  vilket medför att

$$R_1 \leq \frac{R_2}{10} = \frac{1k}{10} = 100\ \Omega$$

- Därmed gäller att

$$R_1 \leq 100\ \Omega$$

- Ifall vi använder ett ännu mindre värde på filterresistor R_1 än 100 Ω, så kommer bandpassfiltrets inimpedans Z_{IN} minska onödigt mycket vid högre frekvenser, vilket inte är önskvärt.

- Därmed är det lämpligt att sätta lågpassfiltrets filterresistor R_1 till ca 100 Ω i aktiva filter:

$$R_1 = 100\ \Omega$$

- Lågpass RC-filtrets undre brytfrekvens f_u kan beräknas med formeln

$$f_u = \frac{1}{2\pi R_1 C_1},$$

  där R_1 tidigare sattes till 100 Ω och C_1 är kapacitansen på högpassfiltrets filterkondensator.

- Formeln ovan kan transformeras till

$$C_1 = \frac{1}{2\pi R_1 f_u}$$

- Genom att sätta in värden i formeln ovan kan ett lämpligt värde på filterkondensator C_1 beräknas för en övre brytfrekvens $f_ö$ på ca 250 kHz:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi * 100 * 250k} \approx 6{,}4\ nF$$

- Närmaste värdet i E12-serien är 6,8 nF, som vi väljer att använda:

$$C_1 = 6{,}8\ nF$$

- Vid så låg kapacitans så behöver vi inte tänkas på att placera en kondensator på 0,1 µF-1µF parallellt med C_1 för att minska påverkan av ESR (ekvivalent serieresistans) och ESL (ekvivalent serieinduktans).

2.6.3 - Analys av bandpass RC-filtrets överföringsfunktion G_{TOT}

- Den totala överföringsfunktionen G_{TOT} för hela bandpassfiltret är lika med produkten av lågpassfiltrets och högpassfiltrets respektive överföringsfunktion $H_1(s)$ samt $H_2(s)$:

$$G_{TOT} = H_1(s) * H_2(s)$$

där $H_1(s)$ och $H_2(s)$ är låg- respektive högpassfiltrets överföringsfunktion.

- För att härleda en formel för G_{TOT} behöver alltså formler för låg- samt högpassfiltrets respektive överföringsfunktion $H_1(s)$ samt $H_2(s)$.

a) Lågpass RC-filtrets överföringsfunktion $H_1(s)$:

- Lågpassfiltrets överföringsfunktion $H_1(s)$ är som vi har sett tidigare lika med ration av filtrets in- och utsignal $U_{IN,LP}$ samt $U_{UT,LP}$ enligt nedan:

$$H_1(s) = \frac{U_{UT,LP}}{U_{IN,LP}}$$

- Som vi såg tidigare i kapitel 2.2 så gäller att ett olastat lågpass RC-filter konstruerat med en filterresistor R_1 samt filterkondensator C_1 överföringsfunktionen $H_1(s)$, där

$$H_1(s) = \frac{U_{UT,LP}}{U_{IN,LP}} = \frac{\left(\frac{1}{sC_1}\right) * I}{\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) * I},$$

där R_1 är filterresistorns resistans och $1/(sC_1)$ är filterkondensatorns kapacitans.

- Eftersom strömmen I förekommer i både täljaren och nämnaren i högerledet så kan denna elimineras, vilket medför att

$$H_1(s) = \frac{\left(\frac{1}{sC_1}\right)}{\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right)}$$

- Genom att använda gemensamma interna nämnare sC_1 för täljaren respektive nämnaren så kan formeln förenklas till

$$H_1(s) = \frac{\left(\frac{1}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sR_1C_1}{sC_1}\right)},$$

där de två interna nämnarna sC_1 tar ut varandra och därmed kan elimineras, vilket resulterar i följande formel:

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_1},$$

vilket motsvarar amplitudfunktionen $|H_1(s)|$:

$$|H_1(s)| = \left|\frac{1}{1 + sR_1C_1}\right|,$$

som är ekvivalent med

$$|H_1(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sR_1C_1)^2}}$$

b) Högpass RC-filtrets överföringsfunktion $H_2(s)$:

- I enlighet med analys av aktiva högpassfilter som vi har sett tidigare så gäller att överföringsfunktionen $H_2(s)$ hos ett högpass RC-filter bestående av filterresistor R_2 samt filterkondensator C_2 är lika med

$$H_2(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}},$$

där R_2 är filterresistorns resistans och $1/(sC_2)$ är filterkondensatorns reaktans.

- Överföringsfunktionen $H_2(s)$ kan transformeras till

$$H_2(s) = \frac{R_2}{\left(\frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}\right)} = \frac{R_2}{\left(\frac{1 + sR_2C_2}{sC_2}\right)},$$

som kan förenklas via multiplikation med sC_2 i både täljare och nämnare:

$$H_2(s) = \frac{R_2}{\left(\frac{1 + sR_2C_2}{sC_2}\right)} * \frac{sC_2}{sC_2} = \frac{R_2 * sC_2}{\left(\frac{1 + sR_2C_2}{sC_2}\right) * sC_2} = \frac{sR_2C_2}{1 + sR_2C_2}$$

- Därefter kan $H_2(s)$ förenklas ytterligare via division med sR_2C_2 i både täljare och nämnare, vilket medför att

$$H_2(s) = \frac{\left(\frac{sR_2C_2}{sR_2C_2}\right)}{\left(\frac{1 + sR_2C_2}{sR_2C_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{sR_2C_2}},$$

där R_2 är filterresistorns resistans och C_2 är filterkondensatorns kapacitans.

- Därmed blir högpassfiltrets amplitudfunktion $|H_2(s)|$ lika med

$$|H_2(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{1}{sR_2C_2}\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$|H_2(s)| = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2}}$$

c) Bandpassfiltrets totala överföringsfunktion G_{TOT}:

- Den totala överföringsfunktionen G_{TOT} kan sedan härledas genom att multiplicera låg- och högpassfiltrets respektive överföringsfunktion $H_1(s)$ samt $H_2(s)$:

$$G_{TOT} = H_1(s) * H_2(s),$$

vilket är ekvivalent med

$$G_{TOT} = \left(\frac{1}{1 + sR_1C_1}\right) * \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{sR_2C_2}}\right),$$

som kan förenklas till

$$G_{TOT} = \frac{1}{(1 + sR_1C_1)\left(1 + \frac{1}{sR_2C_2}\right)}$$

- Därmed blir bandpassfiltrets amplitudfunktion $|G_{TOT}|$ lika med

$$|G_{TOT}| = \frac{|1|}{\left|(1 + sR_1C_1)\left(1 + \frac{1}{sR_2C_2}\right)\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$|G_{TOT}| = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + (sR_1C_1)^2} * \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2}},$$

som kan förenklas till

$$|G_{TOT}| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (sR_1C_1)^2] * \left[1 + \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2\right]}}$$

2.6.4 - Analys av bandpassfiltrets brytfrekvenser och bandbredd

- Formler för bandpassfiltrets övre och undre brytfrekvens kan härledas via de låg- samt högpassfiltrets amplitudfunktioner $|H_1(s)|$ samt $|H_2(s)|$, som härleddes tidigare. Som vi kommer se kommer dock lågohmiga laster påverka brytfrekvenserna, vilket är anledningen till att eventuell lastimpedans Z_L bör hållas hög om möjligt.

a) Bandpassfiltrets brytfrekvenser samt bandbredd (i olastat tillstånd):

- För att härleda en formel för bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ så använder vi oss av lågpassfiltrets amplitudfunktion $|H_1(s)|$, där

$$|H_1(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sR_1C_1)^2}}$$

- Vid den övre brytfrekvensen $f_ö$ så gäller att den resistiva samt den reaktiva delen av amplitudfunktionens nämnare är lika stora. Detta medför att

$$1 = (sR_1C_1)^2,$$

som kan transformeras till

$$sR_1C_1 = \sqrt{1} = \pm 1$$

- Därmed erhålls två rötter, +1 samt -1, där den negativa roten kan förkastas då varken frekvensparametern s, filterresistor R_1 eller filterkondensator C_1 kan understiga noll:

$$\begin{cases} s \geq 0 \\ R_1 \geq 0 \\ C_1 \geq 0 \end{cases}$$

- Därmed gäller att reaktansen sR_1C_1 inte kan understiga noll, då detta kräver att minst en av faktorerna är negativ, vilket är omöjligt:

$$sR_1C_1 \geq 0$$

- Detta medför att endast roten +1 återstår:

$$sR_1C_1 = 1,$$

som kan transformeras till

$$s = \frac{1}{R_1C_1}$$

- Vid den övre brytfrekvensen $f_ö$ så gäller att frekvensparametern s är lika med $f_ö$ multiplicerat med 2π:

$$s = 2\pi f_ö,$$

vilket medför att

$$2\pi f_ö = \frac{1}{R_1C_1},$$

som kan transformeras för att härleda en formel för den övre brytfrekvensen $f_ö$:

$$f_ö = \frac{1}{2\pi R_1C_1},$$

där R_1 och C_1 är lågpassfiltrets filterresistor respektive filterkondensator.

- För att härleda en formel för bandpassfiltrets undre brytfrekvens f_u så använder vi oss av högpassfiltrets amplitudfunktion $|H_2(s)|$, där

$$|H_2(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2}}$$

- Vid den undre brytfrekvensen f_u så gäller att den resistiva samt den reaktiva delen av amplitudfunktionens nämnare är lika stora. Detta medför att

$$1 = \left(\frac{1}{sR_2C_2}\right)^2,$$

  vilket kan transformeras till

$$\frac{1}{sR_2C_2} = \sqrt{1} = \pm 1$$

- Därmed erhålls två rötter, +1 samt -1, där den negativa roten kan förkastas då varken frekvensparametern s, filterresistor R_2 eller filterkondensator C_2 kan understiga noll:

$$\begin{cases} s \geq 0 \\ R_2 \geq 0 \\ C_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Därmed gäller att reaktansen sR_2C_2 inte kan understiga noll, då detta kräver att minst en av faktorerna är negativ, vilket är omöjligt:

$$\frac{1}{sR_2C_2} \geq 0$$

- Detta medför att endast roten +1 återstår:

$$\frac{1}{sR_2C_2} = 1,$$

  som kan transformeras till

$$s = \frac{1}{R_2C_2}$$

- Vid den undre brytfrekvensen f_u så gäller att frekvensparametern s är lika med f_u multiplicerat med 2π:

$$s = 2\pi f_u,$$

  vilket medför att

$$2\pi f_u = \frac{1}{R_2C_2},$$

  som kan transformeras för att härleda en formel för den undre brytfrekvensen f_u:

$$f_u = \frac{1}{2\pi R_2C_2},$$

  där R_2 och C_2 är högpassfiltrets filterresistor respektive filterkondensator.

- Bandpassfiltrets bandbredd BW är lika med differensen mellan den övre samt den undre brytfrekvensen $f_ö$ respektive f_u:

$$BW = f_ö - f_u$$

- Via de tidigare framtagna formlerna för bandpassfiltrets brytfrekvenser så kan bandbredden BW i olastat tillstånd härledas med formeln

$$BW = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi R_2 C_2},$$

som kan transformeras till

$$BW = \frac{R_2 C_2}{2\pi R_1 C_1 R_2 C_2} - \frac{R_1 C_1}{2\pi R_2 C_2 R_2 C_2},$$

vilket är ekvivalent med

$$BW = \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{2\pi R_1 C_1 R_2 C_2}$$

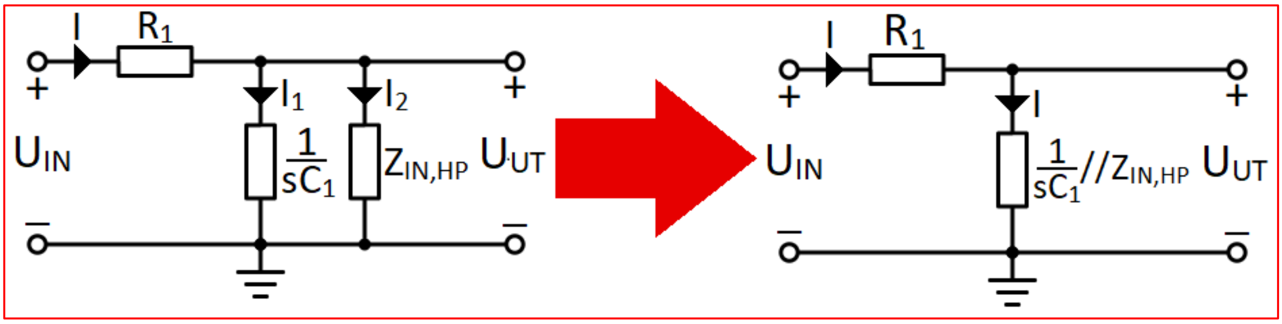
b) Förändringar av bandpassfiltrets brytfrekvenser i lastat tillstånd:

- I ett bandpass RC-filter som detta, där lågpass RC-filtret efterföljs av ett högpass RC-filter, så kommer högpassfiltrets inimpedans $Z_{IN,HP}$ utgöra en last på lågpassfiltret. Ifall denna impedans är relativt låg, så kommer lågpassfiltrets brytfrekvens f_{c1} ändras från det beräknade värdet i olastat tillstånd. Vi kan enkelt visa detta genom Laplacetransformering av filtret, för att sedan beräkna överföringsfunktionen $H_1(s)$ i lastat tillstånd.

- Som vanligt gäller att

$$H_1(s) = \frac{U_{UT,LP}}{U_{IN,LP}},$$

där $H_1(s)$ är lågpassfiltrets överföringsfunktion och $U_{IN,LP}$ samt $U_{UT,LP}$ är lågpassfiltrets in- respektive utsignalen.



Förenkling av kretsschemat på ett lågpass RC-filter lastat med den komplexa impedansen $Z_{IN,HP}$, vilket är inimpedansen från ett efterföljande högpass RC-filter. Schemat kan förenklas genom att ersätta filterkondensatorn C_1:s reaktans $1/(sC_1)$ samt lastimpedansen $Z_{IN,HP}$ med ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$, se kretsschemat ovan till höger, vars form är identiskt med ett olastat lågpassfilter. Därefter kan lågpassfiltrets överföringsfunktion $H_1(s)$ härledas via formler för in- respektive utsignalen $U_{IN,LP}$ och $U_{UT,LP}$.

- Det efterföljande högpassfiltrets inimpedans $Z_{IN,HP}$ utgör en parallellkoppling filterkondensator C_1:s reaktans $1/(sC_1)$. Därmed kan kretsen förenklas till den högra figuren ovan, där $Z_{IN,HP}$ samt $1/(sC_1)$ har ersatts med ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$.

- För att härleda en formel för lågpassfiltrets överföringsfunktion $H_1(s)$ så måste formler härledas för insignalen $U_{IN,LP}$ samt utsignalen $U_{UT,LP}$. Detta kan åstadkommas med Kirchhoffs spänningslag, som säger att summan av alla spänningar ett helt varv i en krets är lika med noll.

- För att beräkna spänningsfallet över respektive komponent i kretsen använder vi oss av Ohms lag; spänningsfallet över komponenten är lika med dessresistans/reaktans multiplicerat med strömmen I, som flödar genom filtret.

- Vi börjar med att härleda en formel för insignalen $U_{IN,LP}$. Vi går ett varv från jordpunkten via $U_{IN,LP}$ (från minus- till pluspolen, vilket medför att $U_{IN,LP}$ beräknas som positiv), sedan via filterresistor R_1 samt ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$ ned till jordpunkten (vars spänningsfall räknas som negativa, då vi går från plus- till minuspolen). Vi får då formeln

$$U_{IN,LP} - R_1 I - I * \left(\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) = 0,$$

vilket medför att

$$U_{IN,LP} = R_1 I + I * \left(\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right)$$

- Genom att bryta ut strömmen I så erhålls formeln

$$U_{IN,LP} = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) * I$$

- Därefter härleder vi en formel för lågpassfiltrets utsignal $U_{UT,LP}$. Vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via $U_{UT,HP}$, sedan via ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$ ned till jordpunkten. Vi får då formeln

$$U_{UT,LP} - \left(\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) * I = 0,$$

vilket medför att

$$U_{UT,LP} = \left(\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) * I$$

- Därefter kan lågpassfiltrets överföringsfunktion $H_1(s)$ härledas:

$$H_1(s) = \frac{U_{UT,LP}}{U_{IN,LP}} = \frac{\left(\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) * I}{U_{IN,LP} = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}\right) * I}$$

där strömmen I förekommer i både täljare samt nämnare och kan därför elimineras, vilket medför att

$$H_1(s) = \frac{\frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}}{R_1 + \frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP}},$$

där R_1 är den resistiva (icke frekvensberoende) delen av filtret, samtidigt som ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$ är den reaktiva (frekvensberoende) delen.

- För att förenkla härledningarna nedan så ersätter vi ersättningsimpedansen $(1/(sC_1))//Z_{IN,HP}$ med Z:

$$Z = \frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP},$$

vilket medför att

$$H_1(s) = \frac{Z}{R_1 + Z},$$

där R_1 och Z är den resistiva respektive reaktiva delen av filtret.

- Formeln ovan kan sedan förenklas via division med Z i både täljare och nämnare:

$$H_1(s) = \frac{\left(\frac{Z}{Z}\right)}{\left(\frac{R_1 + Z}{Z}\right)} = \frac{1}{\frac{R_1}{Z} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{Z}}$$

- Lågpassfiltrets amplitudfunktion $H_1(s)$ blir därmed

$$|H_1(s)| = \frac{|1|}{\left|1 + \frac{R_1}{Z}\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$|H_1(s)| = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{R_1}{Z}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{Z}\right)^2}}$$

- Vid bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ så är den resistiva samt den reaktiva delen av nämnaren lika stora. Därmed gäller att

$$1 = \left(\frac{R_1}{Z}\right)^2,$$

vilket kan transformeras till

$$\frac{R_1}{Z} = \sqrt{1} = \pm 1$$

- Därmed så har den reaktiva delen av nämnaren R_1/Z två rötter, +1 samt -1.

- Impedansen Z är lika med

$$Z = \frac{1}{sC_1} // Z_{IN,HP},$$

vilket är ekvivalent med

$$Z = \frac{\frac{1}{sC_1} * Z_{IN,HP}}{\frac{1}{sC_1} + Z_{IN,HP}} = \frac{\left(\frac{Z_{IN,HP}}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}}{sC_1}\right)} = \frac{Z_{IN,HP}}{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}}$$

- Därmed gäller att

$$\frac{R_1}{Z} = \frac{R_1}{\left(\frac{Z_{IN,HP}}{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}}\right)},$$

som kan förenklas via multiplikation med $1 + sC_1 * Z_{IN,HP}$ i både täljare och nämnare:

$$\frac{R_1}{Z} = \frac{R_1}{\left(\frac{Z_{IN,HP}}{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}}\right)} * \frac{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}}{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}} = \frac{R_1\left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right)}{\left(\frac{Z_{IN,HP}}{1 + sC_1 * Z_{IN,HP}} * \left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right)\right)} = \frac{R_1\left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right)}{Z_{IN,HP}}$$

- Därmed gäller att

$$\frac{R_1}{Z} = \frac{R_1\left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right)}{Z_{IN,HP}}$$

Elektroteknik

- Resistor R_1, frekvensparametern s, filterkondensator C_1 samt högpassfiltrets inimpedans $Z_{IN,HP}$ kan inte understiga noll:

$$\begin{cases} R_1 \geq 0 \\ s \geq 0 \\ C_1 \geq 0 \\ Z_{IN,HP} \geq 0 \end{cases}$$

- Detta medför att den reaktiva delen av nämnaren R_1/Z inte kan understiga noll:

$$\frac{R_1}{Z} \geq 0$$

- Därmed kan den negativa roten förkastas, vilket betyder att

$$\frac{R_1}{Z} = \frac{R_1\left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right)}{Z_{IN,HP}} = 1,$$

som kan transformeras till

$$R_1\left(1 + sC_1 * Z_{IN,HP}\right) = Z_{IN,HP}$$

- Formeln ovan kan förenklas till

$$R_1 + sR_1C_1 * Z_{IN,HP} = Z_{IN,HP},$$

vilket kan transformeras till

$$sR_1C_1 * Z_{IN,HP} = Z_{IN,HP} - R_1$$

- Därefter kan en formel för frekvensparametern s härledas via division med $R_1C_1 * Z_{IN,HP}$ i vänster- och högerled:

$$\frac{sR_1C_1 * Z_{IN,HP}}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}} = \frac{Z_{IN,HP} - R_1}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}},$$

där

$$\frac{sR_1C_1 * Z_{IN,HP}}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}} = s$$

och

$$\frac{Z_{IN,HP} - R_1}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}} = \frac{Z_{IN,HP}}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}} - \frac{R_1}{R_1C_1 * Z_{IN,HP}} = \frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{C_1 * Z_{IN,HP}}$$

- Därmed gäller att

$$s = \frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{C_1 * Z_{IN,HP}},$$

där frekvensparametern s är lika med den övre brytfrekvensen $f_ö$ multiplicerat med 2π:

$$s = 2\pi f_ö$$

- Genom att ersätta frekvensparametern s med motsvarande brytfrekvens $2\pi f_ö$ så erhålls formeln

$$2\pi f_ö = \frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{C_1 * Z_{IN,HP}},$$

vilket kan transformeras till

$$f_ö = \frac{\left(\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{C_1 * Z_{IN,HP}}\right)}{2\pi}$$

- Genom att multiplicera med 1/2π i högerledets täljare samt nämnare så erhålls formeln

$$f_{ö} = \frac{\left(\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{C_1 * Z_{IN,HP}}\right)}{2\pi} * \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * Z_{IN,HP}}\right)}{2\pi * \frac{1}{2\pi}} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * Z_{IN,HP}}\right)}{1}$$

- Därmed gäller att

$$f_{ö} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * Z_{IN,HP}}$$

där $f_{ö}$ är lågpassfiltrets övre brytfrekvens, R_1 är filterresistorns resistans, C_1 är filterkondensatorns kapacitans och $Z_{IN,HP}$ är högpassfiltrets inimpedans.

- Som vi såg i avsnittet om högpass RC-filter så är dess inimpedans $Z_{IN,HP}$ i olastat tillstånd lika med

$$Z_{IN,HP} = R_2 + \frac{1}{sC_2},$$

där R_2 och $1/(sC_2)$ är resistansen respektive reaktansen på högpassfiltrets filterresistorn R_2 samt filterkondensator C_2.

- Högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ kan beräknas med formeln

$$Z_{IN,HP,lastat} = R_2//Z_L + \frac{1}{sC_2},$$

där Z_L är lastimpedansen, som utgör en parallellkoppling med högpassfiltrets filterresistor R_2.

- Vi kan anta att högpassfiltret efterföljs av en högohmig last, såsom en OP-förstärkare, vars inimpedans $Z_{IN,OP}$ kan antas gå mot oändlighet:

$$Z_L = Z_{IN,OP} = \infty$$

- Därmed kan högpassfiltrets lastimpedans Z_L försummas, då

$$R_2//Z_L = R_2//\infty = \frac{R_2 * \infty}{R_2 + \infty} = R_2,$$

vilket medför att

$$Z_{IN,HP,lastat} = R_2//Z_L + \frac{1}{sC_2} = R_2 + \frac{1}{sC_2},$$

precis som i olastat tillstånd.

- I beräkningarna nedan antar vi därmed att högpassfiltrets inimpedans $Z_{IN,HP,lastat}$ är samma som i olastat tillstånd:

$$Z_{IN,HP,lastat} = Z_{IN,HP}$$

- Som synes i formeln ovan så varierar högpassfiltrets inimpedans $Z_{IN,HP}$ med frekvensen. Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer reaktansen $1/(sC_2)$ närma sig oändlighet. Då uppnås maximumvärdet $Z_{IN,HP,max}$:

$$Z_{IN,HP,max} = \lim_{f \to 0} Z_{IN,HP} = \lim_{f \to 0}\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = \lim_{f \to 0}\left(R_2 + \frac{1}{2\pi f C_2}\right) = R_2 + \frac{1}{"0"} = R_2 + \infty = \infty,$$

där ”0” betyder mycket nära, men inte exakt lika med noll, vilket medför att 1/”0” går mot oändlighet.

- För låga frekvenser, då $Z_{IN,HP}$ går mot oändlighet, så kommer bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ bli opåverkad och kan beräknas som i olastat tillstånd, då

$$f_ö = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * Z_{IN,HP,max}} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * \infty} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - 0 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

där $f_ö$ är bandpassfiltrets övre brytfrekvens och R_1 samt C_1 är storleken på dess filterresistor samt filterkondensator.

- Vid mycket höga frekvenser (då både frekvensen f samt frekvensvariabeln s gör mot oändlighet), så kommer reaktansen $1/(sC_2)$ från högpassfiltrets filterkondensator C_2 närma sig noll. Då uppnås minimumvärdet $Z_{IN,HP,min}$, som är lika med storleken på högpassfiltrets filterresistor R_2:

$$Z_{IN,HP,min} = \lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP} = \lim_{f\to\infty}\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = \lim_{f\to\infty}\left(R_2 + \frac{1}{2\pi f C_2}\right) = R_2 + \frac{1}{\infty} = R_2 + 0 = R_2$$

- Vid högre frekvenser, då $Z_{IN,HP}$ når sitt minimumvärde R_2, så gäller därmed att

$$f_ö = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 * Z_{IN,HP,min}} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} - \frac{1}{2\pi C_1 R_2},$$

vilket kan transformeras till

$$f_ö = \frac{R_2}{2\pi R_1 R_2 C_1} - \frac{R_1}{2\pi C_1 R_1 R_2} = \frac{R_2 - R_1}{2\pi R_1 R_2 C_1}$$

där $f_ö$ är bandpassfiltrets övre brytfrekvens, R_1 och C_1 är lågpassfiltrets filterresistor samt filterkondensator och R_2 är högpassfiltrets filterresistor.

- Därmed ser vi att om högpassfiltrets filterresistor R_2 sätts till ett mycket högre värde än lågpassfiltrets filterresistor R_2, så kommer bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ förbli i princip opåverkad av lasten vid alla frekvenser, eftersom

$$R_2 - R_1 \approx R_2$$

då

$$R_2 \gg R_1,$$

vilket medför att

$$f_ö = \frac{R_2 - R_1}{2\pi R_1 R_2 C_1} \approx \frac{R_2}{2\pi R_1 R_2 C_1},$$

där resistor R_2 kan elimineras ut högerledet, då denna resistans förekommer i både täljaren och nämnaren, vilket medför att den övre brytfrekvensen $f_ö$ då kan beräknas som i olastat tillstånd:

$$f_ö \approx \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

- En tumregel är att sätta högpassfiltrets filterresistor R_2 minst tio gånger högre än lågpassfiltrets filterresistor R_1 för att bandpassfiltrets övre brytfrekvens $f_ö$ skall förbli i princip opåverkad av lasten:

$$R_2 \geq 10R_1$$

2.6.5 - Lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN}

- Som vi såg tidigare så gäller att lågpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,LP}$ är lika med filtrets inspänning $U_{IN,LP}$ dividerat med inströmmen $I_{IN,LP}$, i enlighet med Ohms lag:

$$Z_{IN,HP} = \frac{U_{IN,LP}}{I_{IN,LP}},$$

där samma ström I flödar genom hela filtret, vilket medför att inströmmen I_{IN} är lika med strömmen I:

$$I_{IN} = I$$

- För ett olastat lågpass RC-filter gäller att inspänningen $U_{IN,LP}$ är lika med

$$U_{IN,LP} = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) * I,$$

där R_1 och C_1 är lågpassfiltrets filterresistor respektive filterkondensator och I är strömmen som flödar genom filtret.

- Därmed lågpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,LP}$ i olastat tillstånd härledas via Ohms lag med formeln

$$Z_{IN,LP} = \frac{U_{IN,LP}}{I_{IN,LP}} = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) * I}{I},$$

där strömmen I förekommer i både täljaren och nämnaren och kan därför elimineras, vilket medför att

$$Z_{IN,LP} = R_1 + \frac{1}{sC_1},$$

- Motsvarande belopp $|Z_{IN,LP}|$ blir därmed

$$|Z_{IN,LP}| = \left|R_1 + \frac{1}{sC_1}\right|,$$

vilket är ekvivalent med

$$|Z_{IN,LP}| = \sqrt{{R_1}^2 + \left(\frac{1}{sC_1}\right)^2}$$

- I lastat tillstånd, så kommer eventuell lastimpedans Z_L utgöra en parallellkoppling med filterkondensator C_1, vilket medför att lågpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd, $Z_{IN,LP,lastat}$ är lika med

$$Z_{IN,LP,lastat} = R_1 + \frac{1}{sC_1}//Z_L,$$

där

$$\frac{1}{sC_1}//Z_L = \frac{\frac{1}{sC_1} * Z_L}{\frac{1}{sC_1} + Z_L} = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1}\right)}$$

som kan förenklas via multiplikation med sC_1 i både täljare och nämnare, vilket medför att

$$\frac{1}{sC_1}//Z_L = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1}\right)} * \frac{sC_1}{sC_1} = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1} * sC_1\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1} * sC_1\right)} = \frac{Z_L}{1 + sC_1 Z_L}$$

- Därmed gäller att

$$Z_{IN,LP,lastat} = R_1 + \frac{Z_L}{1 + sC_1 Z_L},$$

vilket kan transformeras till

$$Z_{IN,LP,lastat} = \frac{R_1(1 + sC_1 Z_L) + Z_L}{1 + sC_1 Z_L} = \frac{R_1 + sR_1 C_1 Z_L + Z_L}{1 + sC_1 Z_L}$$

- Vi kan anta att lastimpedansen Z_L utgörs av inimpedansen $Z_{IN,HP}$ från ett högpass RC-filter, som består av en resistans R_2 samt en reaktans $1/(sC_2)$:

$$Z_L = Z_{IN,HP} = R_2 + \frac{1}{sC_2}$$

- Då gäller att

$$Z_{IN,LP,lastat} = \frac{R_1 + sR_1 C_1 Z_L + Z_L}{1 + sC_1 Z_L} = \frac{R_1 + sR_1 C_1 Z_L + R_2 + \frac{1}{sC_2}}{1 + sC_1\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right)},$$

vilket kan transformeras till

$$Z_{IN,LP,lastat} = \frac{R_1 + R_2 + sR_1 C_1 Z_L + \frac{1}{sC_2}}{1 + sR_2 C_1 + \left(\frac{sC_1}{sC_2}\right)} = \frac{R_1 + R_2 + sR_1 C_1 Z_L + \frac{1}{sC_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2} + sR_2 C_1}$$

- Motsvarande belopp blir då

$$\left|Z_{IN,LP,lastat}\right| = \frac{\left|R_1 + R_2 + sR_1 C_1 Z_L + \frac{1}{sC_2}\right|}{\left|1 + \frac{C_1}{C_2} + sR_2 C_1\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{IN,LP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(sR_1 C_1 Z_L + \frac{1}{sC_2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)^2 + (sR_2 C_1)^2}},$$

- Vid frekvenser nära noll så kommer filterkondensator C_1:s reaktans $1/(sC_1)$ utgöra ett nästintill oändligt motstånd, eftersom

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC_1} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi f * 0} = \frac{1}{"0"} = \infty,$$

där ”0” i reaktansens nämnare betyder att nämnaren är mycket nära (men inte exakt lika med) noll, och ∞ indikerar att kondensator C_1:s reaktans $1/(sC_1)$ går mot oändlighet.

- Vid frekvenser nära noll så kommer därmed lågpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,LP}$ i olastat tillstånd gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN,LP} = \lim_{f \to 0}\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) = R_1 + \infty = \infty$$

- Däremot i lastat tillstånd så kommer storleken på $Z_{IN,LP}$ begränsas av lastimpedansen Z_L eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,LP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}//Z_L\right) = R_1 + \infty//Z_L,$$

där

$$\infty//Z_L = \frac{\infty * Z_L}{\infty + Z_L} = Z_L,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,LP,lastat} = R_1 + \infty//Z_L = R_1 + Z_L$$

- Vi kan anta att lastimpedansen Z_L utgörs av inimpedansen $Z_{IN,HP}$ från ett högpass RC-filter, så gäller att

$$Z_L = Z_{IN,HP} = R_2 + \frac{1}{sC_2},$$

där R_2 samt $1/(sC_2)$ är resistansen samt reaktansen på högpass RC-filtrets filterresistor respektive filterkondensator.

- I detta fall gäller att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,LP,lastat} = R_1 + Z_{IN,HP} = R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2}$$

- Motsvarande belopp blir därmed

$$\left|\lim_{f\to 0} Z_{IN,LP,lastat}\right| = \left|R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2}\right|,$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|\lim_{f\to 0} Z_{IN,LP,lastat}\right| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{sC_2}\right)^2}$$

- Vid frekvenser som går mot oändlighet så kommer lågpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,LP}$ i olastat tillstånd närma sig filterresistor R_1:s resistans, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,LP} = \lim_{f\to\infty}\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) = R_1 + 0 = R_1,$$

vilket medför ett identiskt belopp:

$$\left|\lim_{f\to\infty} Z_{IN,LP}\right| = |R_1| = R_1$$

- Därmed så ser vi att lågpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,LP}$ i olastat tillstånd har ett minimumvärde som är ungefär lika med filterresistor R_1:s resistans.

- Detta gäller även i lastat tillstånd, då

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,LP} = \lim_{f\to\infty}\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}//Z_{IN,HP}\right) = R_1 + 0//Z_{IN,HP},$$

där

$$0//Z_{IN,HP} = \frac{0 * Z_{IN,HP}}{0 + Z_{IN,HP}} = 0,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,LP} = R_1 + 0//Z_{IN,HP} = R_1 + 0 = R_1$$

2.6.6 - Lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP}$

- Lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP}$ är lika med dess utspänningen $U_{UT,LP}$ dividerat med strömmen $I_{UT,LP}$, som flödar genom filtrets utgång:

$$Z_{UT,LP} = \frac{U_{UT,LP}}{I_{UT,LP}}$$

- OP-förstärkarens inimpedans kan antas vara oändligt hög, vilket medför att strömmen som flödar in på dess ingång är nästintill obefintlig. Därmed kan vi anta att hela strömmen I som flödar genom lågpassfiltret också kommer flöda genom dess utgång. Därmed gäller att utströmmen $I_{UT,LP}$ är lika med strömmen I:

$$I_{UT,LP} = I,$$

vilket medför att

$$Z_{UT,LP} = \frac{U_{UT,LP}}{I}$$

- Tidigare härleddes lågpassfiltrets utspänning $U_{UT,LP}$ i olastat tillstånd med formeln

$$U_{UT,LP} = \left(\frac{1}{sC_1}\right) * I$$

- Därmed är lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP}$ i olastat tillstånd lika med filterkondensator C_1:s reaktans $1/(sC_1)$, eftersom

$$Z_{UT,LP} = \frac{U_{UT,LP}}{I} = \frac{\left(\frac{1}{sC_1}\right) * I}{I} = \frac{1}{sC_1}$$

- Därmed blir också beloppet $|Z_{UT,LP}|$ lika med filterkondensator C_1:s reaktans $1/(sC_1)$, eftersom

$$|Z_{UT,LP}| = \left|\frac{1}{sC_1}\right| = \frac{1}{sC_1}$$

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP}$ gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,LP} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{1}{sC_1}\right) = \lim_{f\to 0}\left(\frac{1}{2\pi f C_1}\right) = \frac{1}{2\pi * 0 * C_1} = \infty$$

vilket också gäller för beloppet $|Z_{UT,LP}|$, då

$$\lim_{f\to 0} |Z_{UT,LP}| = |\infty| = \infty$$

- $Z_{UT,LP}$ kommer sedan minska gradvis med ökad frekvens, för ett gå mot noll vid frekvenser som närmar sig oändlighet, då

$$\lim_{f\to \infty} Z_{UT,LP} = \lim_{f\to \infty}\left(\frac{1}{sC_1}\right) = \lim_{f\to \infty}\left(\frac{1}{2\pi f C_1}\right) = \frac{1}{2\pi * \infty * C_1} = 0$$

vilket också gäller beloppet $|Z_{UT,LP}|$, då

$$\lim_{f\to \infty} |Z_{UT,LP}| = |0| = 0$$

- Vi såg tidigare att ifall lågpassfiltret blir lastat med en komplex impedans Z_L så gäller att dess utsignal $U_{UT,LP}$ kan härledas med formeln

$$U_{UT,LP} = \left(\frac{1}{sC_1} // Z_L\right) * I,$$

där Z_L är lastens impedans.

- Därmed kan en formel för lågpass RC-filtrets utimpedans i lastat tillstånd $Z_{UT,LP,lastat}$ härledas:

$$Z_{UT,LP,lastat} = \frac{U_{UT,LP}}{I} = \frac{\left(\frac{1}{sC_1} // Z_L\right) * I}{I},$$

där strömmen I kan elimineras, då denna förekommer i både täljare nämnare, vilket medför att

$$Z_{UT,LP,lastat} = \frac{1}{sC_1} // Z_L,$$

där

$$\frac{1}{sC_1} // Z_L = \frac{\frac{1}{sC_1} * Z_L}{\frac{1}{sC_1} + Z_L} = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1}\right)}$$

som kan förenklas via multiplikation med sC_1 i både täljare och nämnare, vilket medför att

$$\frac{1}{sC_1} // Z_L = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1}\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1}\right)} * \frac{sC_1}{sC_1} = \frac{\left(\frac{Z_L}{sC_1} * sC_1\right)}{\left(\frac{1 + sC_1 Z_L}{sC_1} * sC_1\right)} = \frac{Z_L}{1 + sC_1 Z_L}$$

- Därmed gäller att

$$Z_{UT,LP,lastat} = \frac{Z_L}{1 + sC_1 Z_L}$$

- Motsvarande belopp $|Z_{UT,LP,lastat}|$ blir därmed

$$\left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = \frac{|Z_L|}{|1 + sC_1 Z_L|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{{Z_L}^2}}{\sqrt{1^2 + (sC_1 Z_L)^2}} = \frac{Z_L}{\sqrt{1 + (sC_1 Z_L)^2}}$$

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP,lastat}$ närma sig lastimpedansen Z_L, då

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,LP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{Z_L}{1 + sC_1 Z_L}\right) = \lim_{f\to 0}\left(\frac{Z_L}{1 + 2\pi f C_1 Z_L}\right) = \frac{Z_L}{1 + 2\pi * 0 * C_1 Z_L} = \frac{Z_L}{1 + 0} = Z_L$$

vilket också gäller för beloppet $|Z_{UT,LP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to 0} \left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = |Z_L| = Z_L$$

- Vid frekvenser som närmar sig oändlighet så kommer lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP,lastat}$ närma noll, då

$$\lim_{f\to\infty} Z_{UT,LP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{Z_L}{1+sC_1Z_L}\right) = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{Z_L}{1+2\pi fC_1Z_L}\right) = \frac{Z_L}{1+2\pi*\infty*C_1Z_L} = \frac{Z_L}{1+\infty} = 0$$

vilket också gäller beloppet $|Z_{UT,LP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to\infty} \left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = |0| = 0$$

- Vi kan anta att lastimpedansen Z_L i detta fall utgörs av inimpedansen $Z_{IN,HP}$ från ett högpass RC-filter. Då gäller att

$$Z_L = Z_{IN,HP}$$

- Under förutsättning av högpass RC-filtret är uppbyggt med en filterresistor R_2 samt en filterkondensator C_2, så gäller att

$$Z_L = Z_{IN,HP} = R_2 + \frac{1}{sC_2}$$

- Därmed gäller att lågpassfiltrets utimpedans i lastat tillstånd $Z_{UT,LP,lastat}$ kan härledas med formeln

$$Z_{UT,LP,lastat} = \frac{R_2+\frac{1}{sC_2}}{1+sC_1\left(R_2+\frac{1}{sC_2}\right)} = \frac{R_2+\frac{1}{sC_2}}{1+sR_2C_1+\frac{sC_1}{sC_2}},$$

vilket kan förenklas till

$$Z_{UT,LP,lastat} = \frac{R_2+\frac{1}{sC_2}}{1+sC_1\left(R_2+\frac{1}{sC_2}\right)} = \frac{R_2+\frac{1}{sC_2}}{1+\frac{C_1}{C_2}+sR_2C_1}$$

- Motsvarande belopp $|Z_{UT,LP,lastat}|$ blir därmed

$$\left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = \frac{\left|R_2+\frac{1}{sC_2}\right|}{\left|1+\frac{C_1}{C_2}+sR_2C_1\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{{R_2}^2+\left(\frac{1}{sC_2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)^2+(sR_2C_1)^2}}$$

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP,lastat}$ i detta fall gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,LP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2+\frac{1}{sC_2}}{1+\frac{C_1}{C_2}+sR_2C_1}\right) = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2+\frac{1}{2\pi fC_2}}{1+\frac{C_1}{C_2}+2\pi fR_2C_1}\right) = \frac{R_2+\frac{1}{2\pi*0*C_2}}{1+\frac{C_1}{C_2}+2\pi*0*R_2C_1} = \frac{R_2+\infty}{1+\frac{C_1}{C_2}+0} = \infty$$

vilket också gäller för beloppet $|Z_{UT,LP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to 0} \left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = |\infty| = \infty$$

- Däremot vid frekvenser som närmar sig oändlighet så kommer lågpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,LP,lastat}$ närma noll, då

$$\lim_{f\to\infty} Z_{UT,LP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2} + sR_2C_1}\right) = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + \frac{1}{2\pi f C_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2} + 2\pi f R_2 C_1}\right) = \frac{R_2 + \frac{1}{2\pi * \infty * C_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2} + 2\pi * \infty * R_2 C_1} = \frac{R_2 + 0}{1 + \frac{C_1}{C_2} + \infty} = 0$$

vilket också gäller beloppet $|Z_{UT,LP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to\infty} \left|Z_{UT,LP,lastat}\right| = |0| = 0$$

2.6.7 - Högpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,HP}$

Olastat tillstånd:

- Tidigare härleddes en formel för högpassfiltrets överföringsfunktion $H_2(s)$ via dess in- och utspänning för $U_{IN,HP}$ samt $U_{UT,HP}$ enligt nedan:

$$H_2(s) = \frac{U_{UT,HP}}{U_{IN,HP}} = \frac{R_2 I}{\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) * I}$$

- Ur denna formel ser via att filterkretsens inspänning $U_{IN,HP}$ kan härledas med följande formel:

$$U_{IN,HP} = \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) * I$$

- Högpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,HP}$ är lika med filtrets inspänning $U_{IN,HP}$ dividerat med inströmmen $I_{IN,HP}$:

$$Z_{IN,HP} = \frac{U_{IN,HP}}{I_{IN,HP}},$$

där filtrets inström $I_{IN.HP}$ är lika med strömmen I som flödar genom hela filtret:

$$I_{IN,HP} = I,$$

vilket medför att

$$Z_{IN,HP} = \frac{U_{IN,HP}}{I}$$

- Genom att sätta in formeln för inspänningen $U_{IN,HP}$ i formeln ovan så kan följande formel härledas:

$$Z_{IN,HP} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) * I}{I},$$

där strömmen I förekommer i både täljare samt nämnare och därför kan elimineras, vilket medför att

$$Z_{IN,HP} = R_2 + \frac{1}{sC_2}$$

där R_2 är filterresistorns resistans och $1/(sC_2)$ är reaktansen från filterkondensator C_2.

- Därmed kan en formel för beloppet $|Z_{IN,HP}|$ härledas:

$$|Z_{IN,HP}| = \left|R_2 + \frac{1}{sC_2}\right|,$$

vilket är ekvivalent med

$$|Z_{IN,HP}| = \sqrt{{R_2}^2 + \left(\frac{1}{sC_2}\right)^2}$$

- Vid frekvenser som närmar sig noll så kommer filterkondensatorns reaktans $1/(sC_2)$ gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC_2} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2\pi * 0 * C_2} = \infty,$$

där lim står för gränsvärde, f → 0 indikerar att f närmar sig noll (men är inte exakt lika med noll) och ∞ indikerar att reaktansen $1/(sC_2)$ går mot oändlighet.

- Därmed så kommer filterkretsens inimpedans $Z_{IN,HP}$ gå mot oändlighet vid frekvenser som närmar sig noll, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN,HP} = \lim_{f \to 0} \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = R_2 + \infty = \infty$$

vilket också betyder att beloppet $|Z_{IN,HP}|$ går mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} |Z_{IN,HP}| = \lim_{f \to 0} |\infty| = \infty$$

- Däremot vid frekvenser som går mot oändlighet så kommer filterkretsens inimpedans $Z_{IN,HP}$ bli ungefär lika med filterresistor R_2:s resistans , eftersom

$$\lim_{f \to \infty} \frac{1}{sC_2} = \lim_{f \to \infty} \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2\pi * \infty * C_2} = 0,$$

vilket medför att

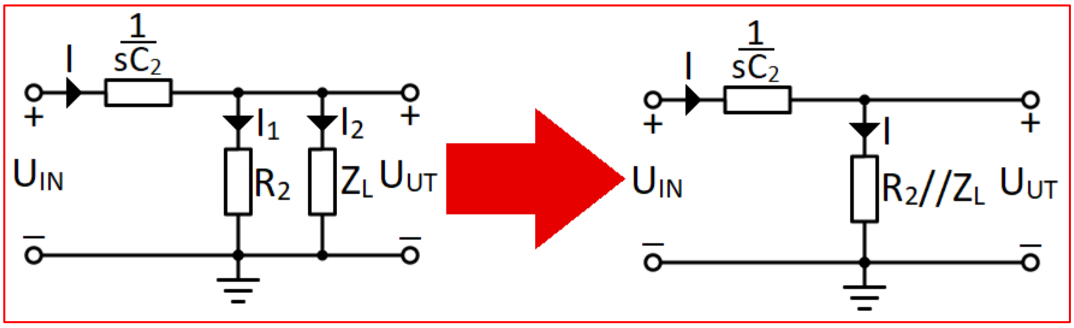
$$\lim_{f \to \infty} Z_{IN,HP} = \lim_{f \to \infty} \left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = R_2 + 0 = R_2$$

vilket också betyder att beloppet $|Z_{IN,HP}|$ då närmar sig filterresistor R_2:s resistans, eftersom

$$\lim_{f \to \infty} |Z_{IN,HP}| = \lim_{f \to \infty} |R_2| = R_2$$

Inimpedans i lastat tillstånd:

- I lastat tillstånd så kommer lastimpedansen Z_L utgöra en parallellkoppling med filterresistor R_2, se figuren till vänster nedan. Dessa kan ersättas med ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$, se den högra figuren nedan:



Laplacetransformering av ett högpass RC-filter med en komplex last Z_L, som kan förenklas till den högra figuren, där filterresistor R_2 samt lasten Z_L har ersatts med ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$.

- Därmed så måste en formel härledas för inimpedansen i lastat tillstånd, $Z_{IN,HP,lastat}$, vilket är lika med inspänningen $U_{IN,HP,lastat}$ dividerat med inströmmen $I_{IN,HP}$:

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{U_{IN,HP,lastat}}{I_{IN,HP}},$$

där filtrets inström $I_{IN.HP}$ är lika med strömmen I som flödar genom hela filtret:

$$I_{IN,HP} = I,$$

vilket medför att

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{U_{IN,HP,lastat}}{I}$$

- Filtrets inspänning $U_{IN,HP,lastat}$ kan härledas med Kirchhoffs spänningslag, som säger att summan av samtliga spänningskällor och spänningsfall ett helt varv i kretsen är lika med noll.

- Därmed gället att summan av inspänningen $U_{IN,HP,lastat}$, spänningsfallet $1/(sC_2)$ * I över filterkondensator C_2 samt spänningsfallet $(R_2//Z_L)$ * I över ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$ är lika med noll, vilket medför att

$$U_{IN,HP,lastat} - \frac{1}{sC_2} * I - (R_2//Z_L) * I = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{IN,HP,lastat} = \frac{1}{sC_2} * I + (R_2//Z_L) * I$$

- Genom att bryta ut strömmen I ur högerledet så erhålls följande formel:

$$U_{IN,HP,lastat} = \left(\frac{1}{sC_2} + R_2//Z_L\right) * I$$

- Därmed kan följande formel härledas för inimpedansen i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$:

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{U_{IN,HP,lastat}}{I} = \frac{\left(\frac{1}{sC_2} + R_2//Z_L\right) * I}{I}$$

där strömmen I förekommer i både täljare samt nämnare och därför kan elimineras, vilket medför att

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{1}{sC_2} + R_2//Z_L,$$

där

$$R_2//Z_L = \frac{R_2 * Z_L}{R_2 + Z_L},$$

vilket medför att

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 * Z_L}{R_2 + Z_L} + \frac{1}{sC_2}$$

- Genom att transformera formeln så att högerledet har en gemensam nämnare så erhålls

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 * Z_L * sC_2}{(R_2 + Z_L) * sC_2} + \frac{1 * (R_2 + Z_L)}{(R_2 + Z_L) * sC_2} = \frac{R_2 + Z_L + sR_2C_2Z_L}{s(R_2 + Z_L)C_2}$$

- Beroende på vad lastimpedansen Z_L består av så kommer inimpedansen variera. Nedan analyseras två fall, där vi i det första fallet antar att Z_L är rent resistiv, vilket är fallet då högpass RC-filtret efterföljs av en OP-förstärkarkoppling i aktiva filter, medan vi i andra fallet antar att Z_L är komplex, vilket är fallet då högpass RC-filtret efterföljs av exempelvis ett lågpassfilter.

a) Fall 1 – Z_L är rent resistiv:

- I detta fall antas lastimpedansen Z_L utgörs av en lastresistans R_L, exempelvis från en av ingångarna på en OP-förstärkare, vilket är fallet i aktiva filter. I sådana applikationer så kan lastresistansen R_L tänkas gå mot oändlighet, samtidigt som eventuell lastreaktans X_L kan antas gå mot noll. För enkelhets skull så förutsätter vi att Z_L i detta fall är rent resistiv, vilket medför att

$$Z_L = R_L$$

- Därmed gäller att

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + sR_2R_LC_2}{s(R_2 + R_L)C_2}$$

- Motsvarande belopp $|Z_{IN,HP,lastat}|$ blir då

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2 + R_L + sR_2R_LC_2|}{|s(R_2 + R_L)C_2|}$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (sR_2R_LC_2)^2}}{\sqrt{(s(R_2 + R_L)C_2)^2}} = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (sR_2R_LC_2)^2}}{(s(R_2 + R_L)C_2)}$$

- Vid frekvenser nära noll så kommer högpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,HP,lastat}$ i lastat tillstånd gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2 + R_L + sR_2R_LC_2}{s(R_2 + R_L)C_2}\right)$$

- Eftersom

$$s = 2\pi f,$$

så gäller att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2 + R_L + 2\pi f R_2R_LC_2}{2\pi f(R_2 + R_L)C_2}\right) = \frac{R_2 + R_L + 2\pi * 0 * R_2R_LC_2}{2\pi * 0 * (R_2 + R_L)C_2},$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + 0}{"0"} = \infty,$$

där ”0” betyder att nämnaren är mycket nära, men inte exakt lika med noll, vilket medför att $Z_{IN,HP,lastat}$ går mot oändlighet.

Även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer då gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f\to 0}\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = |\infty| = \infty$$

- Däremot vid frekvenser som går mot oändlighet så kommer högpass RC-filtrets inimpedans $Z_{IN,HP,lastat}$ i lastat tillstånd gå mot ett, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + R_L + sR_2R_LC_2}{s(R_2 + R_L)C_2}\right) = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + R_L + 2\pi f R_2R_LC_2}{2\pi f(R_2 + R_L)C_2}\right),$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer då bli lika med ett eftersom

$$\lim_{f\to\infty}\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = |1| = 1$$

b) Fall 2 – Z_L är komplex:

- I detta fall antar vi lastimpedansen Z_L utgörs av en resistans R_L samt en reaktans X_L.

$$Z_L = R_L + X_L$$

- Beroende på ifall reaktansen X_L är induktiv eller kapacitiv, vilket beror på ifall X_L kommer från en spole eller en kondensator, så kommer Z_L antingen minska eller öka i proportion med insignalernas frekvens.

- Tidigare härleddes följande formel för högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd, $Z_{IN,HP,lastat}$:

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + Z_L + sR_2C_2Z_L}{s(R_2 + Z_L)C_2}$$

- Genom att ersätta lastimpedansen Z_L med $R_L + X_L$ så erhålls följande:

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + X_L + sR_2C_2(R_L + X_L)}{s(R_2 + R_L + X_L)C_2},$$

  vilket motsvarar beloppet

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2 + R_L + X_L + sR_2C_2(R_L + X_L)|}{|s(R_2 + R_L + X_L)C_2|}$$

- Eftersom X_L är en ren reaktans, även om frekvensparametern s inte är synlig förrän reaktansen skrivs som sL_L eller $1/(sC_L)$, så gäller att

$$|R_2 + R_L + X_L + sR_2C_2(R_L + X_L)| = \sqrt{(R_2 + R_L)^2 + \left(sR_2C_2(R_L + X_L)\right)^2}$$

- Därmed gäller att

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + \left(sR_2C_2(R_L + X_L)\right)^2}}{\sqrt{[s(R_2 + R_L + X_L)C_2]^2}} = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + \left(sR_2C_2(R_L + X_L)\right)^2}}{s(R_2 + R_L + X_L)C_2}$$

- Eftersom frekvensparametern s har blivit faktoriserad i nämnaren, så kommer $Z_{IN,HP,lastat}$ öka i omvänd proportion med frekvensen f. Vi kan direkt visa att oavsett om lastreaktansen X_L är kapacitiv eller induktiv, så kommer högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ gå mot oändlighet vid frekvenser som går mot noll, samtidigt som dess storlek går mot noll vid frekvenser som går mot oändlighet.

- Givet att frekvensparametern s kommer gå mot noll då frekvensen f går mot noll:

$$\lim_{f\to 0} s = \lim_{f\to 0} 2\pi f = 2\pi * 0 = 0,$$

  så ser vi att högpass RC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ kommer gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2 + R_L + X_L + sR_2C_2(R_L + X_L)}{s(R_2 + R_L + X_L)C_2}\right) = \frac{R_2 + R_L + X_L + 0 * R_2C_2(R_L + X_L)}{0 * (R_2 + R_L + X_L)C_2},$$

  vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + X_L}{"0"} = \infty,$$

  där ”0” i nämnaren betyder mycket nära (men inte exakt lika med) noll.

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot oändlighet, då

$$\left|\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat}\right| = |\infty| = \infty$$

- Eftersom frekvensparametern s är proportionell med frekvensen f så kommer s gå mot oändlighet då f går mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} s = \lim_{f\to\infty} 2\pi f = 2\pi * \infty = \infty$$

- Därmed gället att högpass RC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ kommer gå mot ett när frekvensen f går mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + R_L + X_L + sR_2C_2(R_L + X_L)}{s(R_2 + R_L + X_L)C_2}\right) = \frac{R_2 + R_L + X_L + \infty * R_2C_2(R_L + X_L)}{\infty * (R_2 + R_L + X_L)C_2},$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + X_L + \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot ett, då

$$\lim_{f\to\infty}\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = |1| = 1$$

- Detta kan också demonstreras med praktiska exempel. Låt oss anta att reaktansen X_L är induktiv. Då gäller att

$$X_L = sL_L,$$

där sL_L är lastreaktansen från en spole.

- I detta fall blir högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ lika med

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + sL_L + sR_2C_2(R_L + sL_L)}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2},$$

vilket kan förenklas till

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + sR_2C_2(R_L + L_L + sL_L)}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2} = \frac{R_2 + R_L + sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)]}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2}$$

- Motsvarande belopp blir då

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2 + R_L + sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)]|}{|s(R_2 + R_L + sL_L)C_2|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)])^2}}{\sqrt{(s(R_2 + R_L + sL_L)C_2)^2}} = \frac{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)])^2}}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2}$$

- Givet att frekvensparametern s kommer gå mot noll då frekvensen f går mot noll:

$$\lim_{f \to 0} s = \lim_{f \to 0} 2\pi f = 2\pi * 0 = 0,$$

så ser vi att högpass RC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ kommer gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f \to 0} \left(\frac{R_2 + R_L + sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)]}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2} \right) = \frac{R_2 + R_L + 0 * R_2C_2[R_L + L_L(1 + 0)]}{0 * (R_2 + R_L + sL_L)C_2},$$

vilket medför att

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L}{"0"} = \infty,$$

där ”0” i nämnaren betyder mycket nära (men inte exakt lika med) noll.

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f \to 0} |Z_{IN,HP,lastat}| = |\infty| = \infty$$

- När frekvensen f går mot oändlighet så gäller istället att

$$\lim_{f \to \infty} s = \lim_{f \to \infty} 2\pi f = 2\pi * \infty = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{f \to \infty} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f \to \infty} \left(\frac{R_2 + R_L + sR_2C_2[R_L + L_L(1 + s)]}{s(R_2 + R_L + sL_L)C_2} \right) = \frac{R_2 + R_L + \infty * R_2C_2[R_L + L_L(1 + \infty)]}{\infty(R_2 + R_L + \infty L_L)C_2},$$

vilket medför att

$$\lim_{f \to \infty} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot ett, då

$$\lim_{f \to \infty} |Z_{IN,HP,lastat}| = |1| = 1$$

- Låt oss istället anta att reaktansen X_L är kapacitiv. Då gäller att

$$X_L = \frac{1}{sC_L},$$

där $1/(sC_L)$ är lastreaktansen från en kondensator.

- I detta fall blir högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ lika med

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L} + sR_2C_2\left(R_L + \frac{1}{sC_L}\right)}{s\left(R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L}\right)C_2},$$

- Motsvarande belopp blir då

$$|Z_{IN,HP,lastat}| = \frac{\left|R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L} + sR_2C_2\left(R_L + \frac{1}{sC_L}\right)\right|}{\left|s\left(R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L}\right)C_2\right|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2+R_L)^2+\left[\frac{1}{sC_L}+sR_2C_2\left(R_L+\frac{1}{sC_L}\right)\right]^2}}{\sqrt{\left(s\left(R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}\right)C_2\right)^2}} = \frac{\sqrt{(R_2+R_L)^2+\left[\frac{1}{sC_L}+sR_2C_2\left(R_L+\frac{1}{sC_L}\right)\right]^2}}{s\left(R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}\right)C_2}$$

- Som vi har sett tidigare så kommer frekvensparametern s gå mot noll då frekvensen f går mot noll:

$$\lim_{f\to 0} s = \lim_{f\to 0} 2\pi f = 2\pi * 0 = 0,$$

vilket medför att högpass RC-filtrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ kommer gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}+sR_2C_2\left(R_L+\frac{1}{sC_L}\right)}{s\left(R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}\right)C_2}\right) = \frac{R_2+R_L+\frac{1}{0*C_L}+0*R_2C_2\left(R_L+\frac{1}{0*C_L}\right)}{0*\left(R_2+R_L+\frac{1}{0*C_L}\right)C_2},$$

som kan förenklas till

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2+R_L+\infty}{0*\infty}$$

- Formeln kan förenklas via division med oändlighet i både täljare och nämnare, vilket medför att

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{\left(\frac{R_2+R_L+\infty}{\infty}\right)}{\left(\frac{0*\infty}{\infty}\right)} = \frac{\frac{R_2+R_L}{\infty}+1}{"0"} = \frac{1}{"0"} = \infty$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f\to 0}\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = |\infty| = \infty$$

- När frekvensen f går mot oändlighet så gäller istället att

$$\lim_{f\to\infty} s = \lim_{f\to\infty} 2\pi f = 2\pi * \infty = \infty,$$

vilket medför att

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}+sR_2C_2\left(R_L+\frac{1}{sC_L}\right)}{s\left(R_2+R_L+\frac{1}{sC_L}\right)C_2}\right) = \frac{R_2+R_L+\frac{1}{\infty*C_L}+\infty*R_2C_2\left(R_L+\frac{1}{\infty*C_L}\right)}{\infty*\left(R_2+R_L+\frac{1}{\infty*C_L}\right)C_2},$$

som kan förenklas till

$$\lim_{f\to\infty} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2+R_L+\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{IN,HP,lastat}|$ kommer gå mot ett, då

$$\lim_{f\to\infty}\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = |1| = 1$$

2.6.8 – Högpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,HP}$

- Högpassfiltrets utimpedans $Z_{UT,HP}$ är lika med dess utsignal $U_{UT,HP}$ dividerat med strömmen $I_{UT,HP}$, som flödar genom dessutgång:

$$Z_{UT,HP} = \frac{U_{UT,HP}}{I_{UT,HP}}$$

- I olastat tillstånd samt vid mycket högohmig last så kan vi anta att strömmen I som flödar genom filtret också kommer flöda genom dess utgång. Därmed gäller att filterkretsens utström $I_{UT,HP}$ är lika med strömmen I:

$$I_{UT,HP} = I,$$

vilket medför att

$$Z_{UT,HP} = \frac{U_{UT,HP}}{I}$$

- Högpassfiltrets överföringsfunktion $H_2(s)$ härleddes tidigare via dess in- och utspänning $U_{IN,HP}$ samt $U_{UT,HP}$ enligt nedan:

$$H_2(s) = \frac{U_{UT,HP}}{U_{IN,HP}} = \frac{R_2 I}{\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) * I}$$

- Därmed ser vi att filterkretsens utspänning $U_{UT,HP}$ kan härledas med formeln

$$U_{UT,HP} = R_2 I$$

- Därmed är filtrets utimpedans $Z_{UT,HP}$ lika med filterresistor R_2:s resistans, eftersom

$$Z_{UT,HP} = \frac{U_{UT,HP}}{I} = \frac{R_2 I}{I},$$

där strömmen I förekommer i båda täljare samt nämnare i högerledet och kan därför elimineras, vilket medför att

$$Z_{UT,HP} = R_2$$

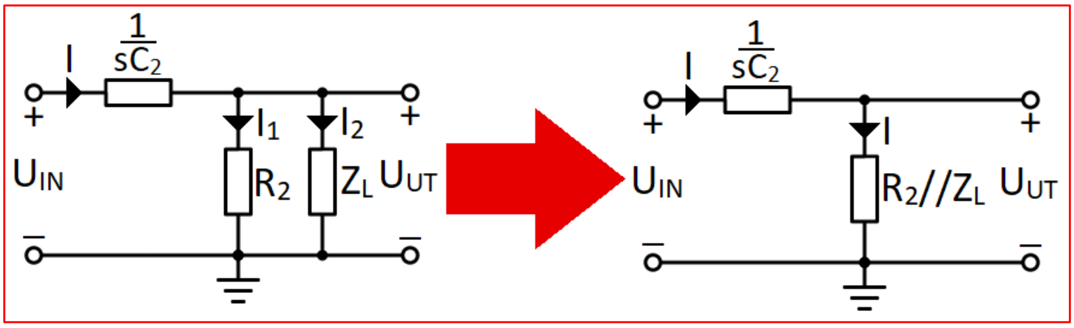
- Därmed blir också beloppet $|Z_{UT,HP}|$ lika med R_2, eftersom

$$|Z_{UT,HP}| = |R_2| = R_2$$

- Eftersom filtrets utimpedans $Z_{UT,HP}$ är rent resistiv så kommer dess storlek hållas konstant oavsett frekvens. Detta gäller även för beloppet $|Z_{UT,HP}|$.

Utimpedans i lastat tillstånd:

- Som vi har sett tidigare så gäller i tillstånd att lastimpedansen Z_L utgöra en parallellkoppling med filterresistor R_2, se figuren till vänster nedan, som kan ersättas med ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$ i enlighet med den högra figuren nedan:



Laplacetransformering av ett högpass RC-filter med en komplex last Z_L, som kan förenklas till den högra figuren, där filterresistor R_2 samt lasten Z_L har ersatts med ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$.

- Därmed så måste en formel härledas för utimpedansen i lastat tillstånd, $Z_{UT,HP,lastat}$, vilket är lika med inspänningen $U_{UT,HP,lastat}$ dividerat med utströmmen $I_{IN,HP}$:

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{U_{IN,HP,lastat}}{I_{UT,HP}},$$

där filtrets utström $I_{UT.HP}$ är lika med strömmen I som flödar genom hela filtret:

$$I_{UT,HP} = I,$$

vilket medför att

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{U_{UT,HP,lastat}}{I}$$

- Filtrets inspänning $U_{UT,HP,lastat}$ kan härledas med Kirchhoffs spänningslag, som säger att summan av samtliga spänningskällor och spänningsfall ett helt varv i kretsen är lika med noll. Därmed gället att summan av utspänningen $U_{UT,HP,lastat}$ samt spänningsfallet $(R_2//Z_L) * I$ över ersättningsimpedansen $R_2//Z_L$ är lika med noll, vilket medför att

$$U_{UT,HP,lastat} - (R_2//Z_L) * I = 0,$$

vilket kan transformeras till

$$U_{UT,HP,lastat} = (R_2//Z_L) * I$$

- Därmed kan följande formel härledas för utimpedansen i lastat tillstånd $Z_{UT,HP,lastat}$:

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{U_{UT,HP,lastat}}{I} = \frac{(R_2//Z_L) * I}{I}$$

där strömmen I förekommer i både täljare samt nämnare och därför kan elimineras, vilket medför att

$$Z_{UT,HP,lastat} = R_2//Z_L = \frac{R_2 * Z_L}{R_2 + Z_L}$$

- Beroende på vad lastimpedansen Z_L består av så kommer inimpedansen variera. Precis som för inimpedansen tidigare så analyseras två fall, där vi i det första fallet antar att Z_L är rent resistiv, vilket är fallet då högpass RC-filtret efterföljs av en OP-förstärkarkoppling i aktiva filter, medan vi i andra fallet antar att Z_L är komplex, vilket är fallet då högpass RC-filtret efterföljs av exempelvis ett lågpassfilter.

a) Fall 1 – Z_L är rent resistiv:

- I detta fall antas lastimpedansen Z_L utgörs av en lastresistans R_L, exempelvis från en av ingångarna på en OP-förstärkare, vilket är fallet i aktiva filter. I sådana applikationer så kan lastresistansen R_L tänkas gå mot oändlighet, samtidigt som eventuell lastreaktans X_L kan antas gå mot noll. För enkelhets skull så förutsätter vi att Z_L i detta fall är rent resistiv, vilket medför att

$$Z_L = R_L$$

- Därmed gäller att

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2 * R_L}{R_2 + R_L}$$

- Motsvarande belopp $|Z_{UT,HP,lastat}|$ blir då

$$\left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2 * R_L|}{|R_2 + R_L|}$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2 * R_L)^2}}{\sqrt{(R_2 + R_L)^2}} = \frac{R_2 * R_L}{R_2 + R_L}$$

- Eftersom utimpedansen i detta fall är helt resistiv så kommer dess storlek vara konstant vid olika frekvenser.

b) Fall 2 – Z_L är komplex:

- I detta fall antar vi lastimpedansen Z_L utgörs av en resistans R_L samt en reaktans X_L.

$$Z_L = R_L + X_L$$

- Beroende på ifall reaktansen X_L är induktiv eller kapacitiv, vilket beror på ifall X_L kommer från en spole eller en kondensator, så kommer Z_L antingen minska eller öka i proportion med insignalernas frekvens.

- Tidigare härleddes följande formel för högpassfiltrets utimpedans i lastat tillstånd, $Z_{UT,HP,lastat}$:

$$Z_{UT,HP,lastat} = R_2//Z_L = \frac{R_2 * Z_L}{R_2 + Z_L}$$

- Genom att ersätta lastimpedansen Z_L med $R_L + X_L$ så erhålls följande formel:

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2(R_L + X_L)}{R_2 + R_L + X_L} = \frac{R_2R_L + R_2X_L}{R_2 + R_L + X_L}$$

vilket motsvarar beloppet

$$\left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2R_L + R_2X_L|}{|R_2 + R_L + X_L|}$$

- Eftersom X_L är en ren reaktans, även om frekvensparametern s inte är synlig förrän reaktansen skrivs som sL_L eller $1/(sC_L)$, så gäller att

$$\left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2R_L)^2 + (R_2X_L)^2}}{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (X_L)^2}}$$

- Låt oss anta att reaktansen X_L är induktiv. Då gäller att

$$X_L = sL_L,$$

där sL_L är lastreaktansen från en spole.

- I detta fall blir högpassfiltrets utimpedans i lastat tillstånd $Z_{UT,HP,lastat}$ lika med

$$Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 R_L + sR_2 L_L}{R_2 + R_L + sL_L}$$

- Motsvarande belopp blir då

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{|R_2 R_L + sR_2 L_L|}{|R_2 + R_L + sL_L|},$$

vilket är ekvivalent med

$$\left|Z_{IN,HP,lastat}\right| = \frac{\sqrt{(R_2 R_L)^2 + (sR_2 L_L)^2}}{\sqrt{(R_2 + R_L)^2 + (sL_L)^2}}$$

- Givet att frekvensparametern s kommer gå mot noll då frekvensen f går mot noll:

$$\lim_{f \to 0} s = \lim_{f \to 0} 2\pi f = 2\pi * 0 = 0,$$

så ser vi att utimpedansen i lastat tillstånd $Z_{UT,HP,lastat}$ kommer gå mot parallellresistansen $R_2//R_L$, då

$$\lim_{f \to 0} Z_{UT,HP,lastat} = \lim_{f \to 0} \left(\frac{R_2 R_L + sR_2 L_L}{R_2 + R_L + sL_L}\right) = \frac{R_2 R_L + 0 * R_2 L_L}{R_2 + R_L + 0 * L_L},$$

vilket medför att

$$\lim_{f \to 0} Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = R_2//R_L,$$

vilket även gäller för beloppet $|Z_{UT,HP,lastat}|$, då

$$\lim_{f \to 0} \left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = |R_2//R_L| = R_2//R_L$$

- När frekvensen f går mot oändlighet så gäller istället att

$$\lim_{f \to \infty} s = \lim_{f \to \infty} 2\pi f = 2\pi * \infty = \infty,$$

vilket medför att $Z_{UT,HP,lastat}$ kommer gå mot ett, eftersom

$$\lim_{f \to \infty} Z_{UT,HP,lastat} = \lim_{f \to \infty} \left(\frac{R_2 R_L + sR_2 L_L}{R_2 + R_L + sL_L}\right) = \frac{R_2 R_L + \infty * R_2 L_L}{R_2 + R_L + \infty * L_L} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{UT,HP,lastat}|$ kommer gå mot ett, då

$$\lim_{f \to \infty} \left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = |1| = 1$$

- Låt oss istället anta att reaktansen X_L är kapacitiv. Då gäller att

$$X_L =,$$

där $1/(sC_L)$ är lastreaktansen från en kondensator.

- I detta fall blir högpassfiltrets inimpedans i lastat tillstånd $Z_{IN,HP,lastat}$ lika med

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2R_L + R_2 * \frac{1}{sC_L}}{R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L}} = \frac{R_2R_L + \frac{R_2}{sC_L}}{R_2 + R_L + \frac{1}{sC_L}},$$

vilket kan transformeras till

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{\left(\frac{sR_2R_LC_L + R_2}{sC_L}\right)}{\left(\frac{sC_L(R_2 + R_L) + 1}{sC_L}\right)} = \frac{\left(\frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{sC_L}\right)}{\left(\frac{1 + sC_L(R_2 + R_L)}{sC_L}\right)}$$

- Formeln ovan kan förenklas via multiplikationer med sC_L i både täljare och nämnare:

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{\left(\frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{sC_L}\right)}{\left(\frac{1 + sC_L(R_2 + R_L)}{sC_L}\right)} * \frac{sC_L}{sC_L} = \frac{\left(\frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{sC_L}\right) * sC_L}{\left(\frac{1 + sC_L(R_2 + R_L)}{sC_L}\right) * sC_L},$$

vilket medför att

$$Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{1 + sC_L(R_2 + R_L)}$$

- Motsvarande belopp blir då

$$|Z_{UT,HP,lastat}| = \frac{|R_2 + sR_2R_LC_L|}{|1 + sC_L(R_2 + R_L)|},$$

vilket är ekvivalent med

$$|Z_{UT,HP,lastat}| = \frac{\sqrt{{R_2}^2 + (sR_2R_LC_L)^2}}{\sqrt{1^2 + [sC_L(R_2 + R_L)]^2}} = \frac{\sqrt{{R_2}^2 + (sR_2R_LC_L)^2}}{\sqrt{1 + [sC_L(R_2 + R_L)]^2}}$$

- Som vi har sett tidigare så kommer frekvensparametern s gå mot noll då frekvensen f går mot noll:

$$\lim_{f\to 0} s = \lim_{f\to 0} 2\pi f = 2\pi * 0 = 0,$$

vilket medför att utimpedansen i lastat tillstånd $Z_{UT,HP,lastat}$ kommer gå mot filterresistor R_2, då

$$\lim_{f\to 0} Z_{UT,HP,lastat} = \lim_{f\to 0}\left(\frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{1 + sC_L(R_2 + R_L)}\right) = \frac{R_2 + 0 * R_2R_LC_L}{1 + 0 * C_L(R_2 + R_L)},$$

som kan förenklas till

$$\lim_{f\to 0} Z_{IN,HP,lastat} = \frac{R_2 + 0}{1 + 0} = \frac{R_2}{1} = R_2$$

- Detta gäller även beloppet $|Z_{UT,HP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to 0}|Z_{UT,HP,lastat}| = |R_2| = R_2$$

- När frekvensen f går mot oändlighet så gäller istället att

$$\lim_{f\to\infty} s = \lim_{f\to\infty} 2\pi f = 2\pi * \infty = \infty,$$

vilket medför att $Z_{UT,HP,lastat}$ kommer gå mot ett, då

$$\lim_{f\to\infty} Z_{UT,HP,lastat} = \lim_{f\to\infty}\left(\frac{R_2 + sR_2R_LC_L}{1 + sC_L(R_2 + R_L)}\right) = \frac{R_2 + \infty * R_2R_LC_L}{1 + \infty * C_L(R_2 + R_L)},$$

som kan förenklas till

$$\lim_{f\to\infty} Z_{UT,HP,lastat} = \frac{R_2 + \infty}{1 + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

- Därmed gäller att även beloppet $|Z_{UT,HP,lastat}|$, då

$$\lim_{f\to\infty}\left|Z_{UT,HP,lastat}\right| = |1| = 1$$