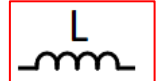


1.5 - Spolen

1.5.1 - Introduktion

- Spolen, ibland kallad induktorn, är en elektronisk komponent som används för ett stort antal applikationer, exempelvis:

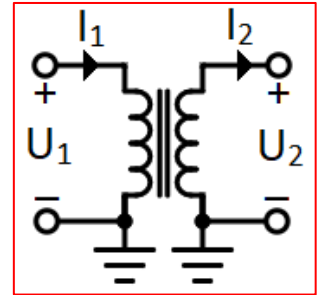
1. **Elektromagneter:** Spolen, i form av koppartråd, viras runt ett magnetiskt material, oftast en järnkärna, och bildas därmed en elektromagnet.



Spolens symbol.

2. **Generatorer:** En vanlig generator består av tre lindningar som roterar i ett magnetfält.

3. **Transformatorer:** Transformatorer består av två lindningar, vanligtvis kopparlindningar, runt en järnkärna. Relation mellan antalet varv koppartråd på de två sidorna av transformatorn är proportionellt med relation mellan spänningsnivån på respektive sida av transformatorn.



Som exempel, om antalet varv koppartråd N_1 på primärsidan är dubbelt så högt i jämförelse med antalet varv N_2 på sekundärsidan så blir spänningen U_1 på primärsidan dubbelt så hög i jämförelse med spänningen U_2 på sekundärsidan. Den ström I_1 som skickas in i lindningen på primärsidan ger upphov till ett magnetfält, som överförs av järnkärnan till sekundärlindningarna. Därav alstras (induceras) en spänning U_2 (och ström I_2) på sekundärsidan, se induktionseffekten nedan.

Olastad enfastransformator, som används för att omvandla spänningsnivån, exempelvis från $U_1 = 230 \text{ V}$ till $U_2 = 10 \text{ V}$, utan att effekten påverkas (förutom eventuella små förlusteffekter).

4. **Gitarmikrofoner:** Gitarmikrofoner innehåller magneter vars fält sträcker sig över strängarna. Magneterna omges av en eller två spolar; magneterna omges alltså av koppartråd. När strängarna, som består av ett magnetiskt material, slås an så förändras magnetfältet. Därmed alstras en spänning U (och ström I), vilket leder till att en elektrisk signal uppkommer. Denna elektriska signal, primärt strömmen I , som uppstår i spolen, förstärks. Ju fler lindningsvarv N runt magneterna, desto högre förstärkning.

Därmed så minskar spänningen med en faktor $230 / 10 = 23$, vilket också medför att strömnivån ökar med en faktor 23 så att effekten på de två sidorna av transformatorn är densamma; I_2 kommer alltså bli 23 gånger större än I_1 .

5. **Drossel:** Minskar störningar av olika slag i filter, reläer, högtalare etc. Då kallar man spolen för drossel.

- Spolar är inte alls lika vanliga som såsom resistorer, kondensatorer och så kallade transistorer i integrerade kretsar, eftersom de tar upp relativt mycket yta, kostar relativt mycket och är relativt tunga. Dessutom har de relativt hög inre resistans som leder till hög förlusteffekt. Därför används hellre andra komponenter än spolar när det är möjligt.

1.5.2 - Induktionseffekten för inducerad spänning

- Spolen används ofta i generatorer för att alstra (inducera) en spänning U , genom att spolen får rotera i ett magnetfält. Så länge spolen och magnetfältet rör sig i förhållande till varandra så kommer elektronerna i spolen att anpassa sig efter det nya magnetfältet och därmed uppstår en så kallad inducerad spänning U . Därefter kan vi enkelt ge upphov till en ström I genom att ansluta denna inducerade spänning till en elektrisk ledare. Denna effekt kallas induktionseffekten. Ofta säger man endast induktion.
- Spolen består vanligtvis av koppartråd, som lindas runt en järnkärna för att bilda en elektromagnet. Ju fler varv koppartråd N runt järnkärnan, desto högre inducerad spänning U alstras och desto starkare blir elektromagneten. Detta utnyttjas i så kallade transformatorer, där den så kallade primärsidan spänningssidan har fler varv koppartråd än sekundärsidan, vilket leder till att spänningen U_1 på primärsidan blir högre än spänningen U_2 på sekundärsidan.

- Den inducerade spänningen U i en spole kan beräknas med formeln

$$U = -L * \frac{di}{dt},$$

där U är den inducerade spänningen, L är spolens så kallade induktans och di/dt är förändringen av strömmen I som flödar genom spolen per sekund. Minustecknet betyder att strömmen I som induceras kommer en sådan riktning att induktionen motverkas; därmed så kommer strömmen I ha "motsatt" riktning den inducerade spänningen U , därav minustecknet.

- Genom att transformera formeln ovan för den inducerade spänningen U i en spole så kan en formel härledas för att underlätta definition av begreppet induktans:

$$L = \frac{|U|}{\frac{di}{dt}},$$

där L är spolens induktans, $|U|$ är absolutbeloppet* av den inducerade spänningen och di/dt är strömförändringen i spolen per sekund.

*Absolutbeloppet $|U|$ indikerar hur hög den inducerade spänningen U är som en positiv storhet; Som exempel, om $|U|$ skulle vara negativ, exempelvis -2 V, så blir $|U|$ lika med 2 V.

- En spoles induktans L indikerar alltså hur hög spänning U som induceras i denna spole då strömmen genom spolen varierar med 1 Ampere per sekund (A/s). Induktans mäts i enheten Henry (H). Som exempel, 1 H betyder att en spänning U på 1 V induceras i spolen då strömmen I varierar med 1 A/s.
- När en spänning U induceras så lagras energi internt i spolens magnetfält. Energin W som lagras i en spole kan beräknas med formeln

$$W = \frac{L * I^2}{2},$$

där W är energin som lagras i spolen, mätt i enheten Joule (J), L är spolens induktans och I är strömmen som flödar genom spolen.

- Flera faktorer påverkar en spoles induktans L , exempelvis antalet lindningsvarv N samt spolens dimensioner. En spoles induktans kan härledas med följande formel:

$$L = \mu_o \frac{N^2 * A}{l},$$

där L är spolens induktans, μ_o är permeabiliteten i vakuum* (som är $4\pi * 10^{-7}$ H/m), N är antalet lindningsvarv, A är spolens area och l är spolens längd.

* Även känt som den magnetiska konstanten.

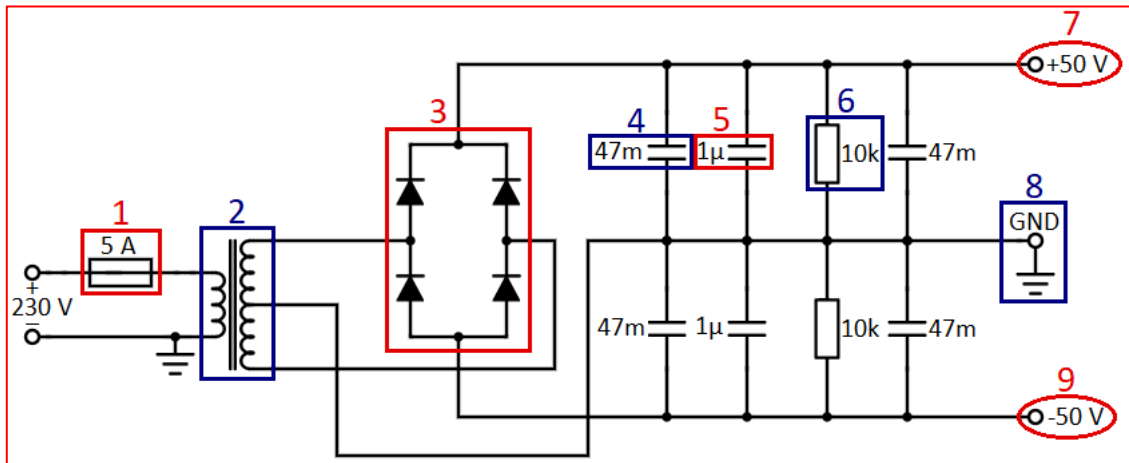
- Som exempel, en spole vars längd är 20 cm ($0,2$ m), arean är 2 cm² ($2 * 10^{-4}$ m²) och består av 2000 varv koppartråd har en induktans på ungefär 5 mH, eftersom

$$L = \mu_o \frac{N^2 * A}{l} = 4\pi * 10^{-7} * \frac{2000^2 * 2 * 10^{-4}}{0,2} \approx 5 \text{ mH}$$

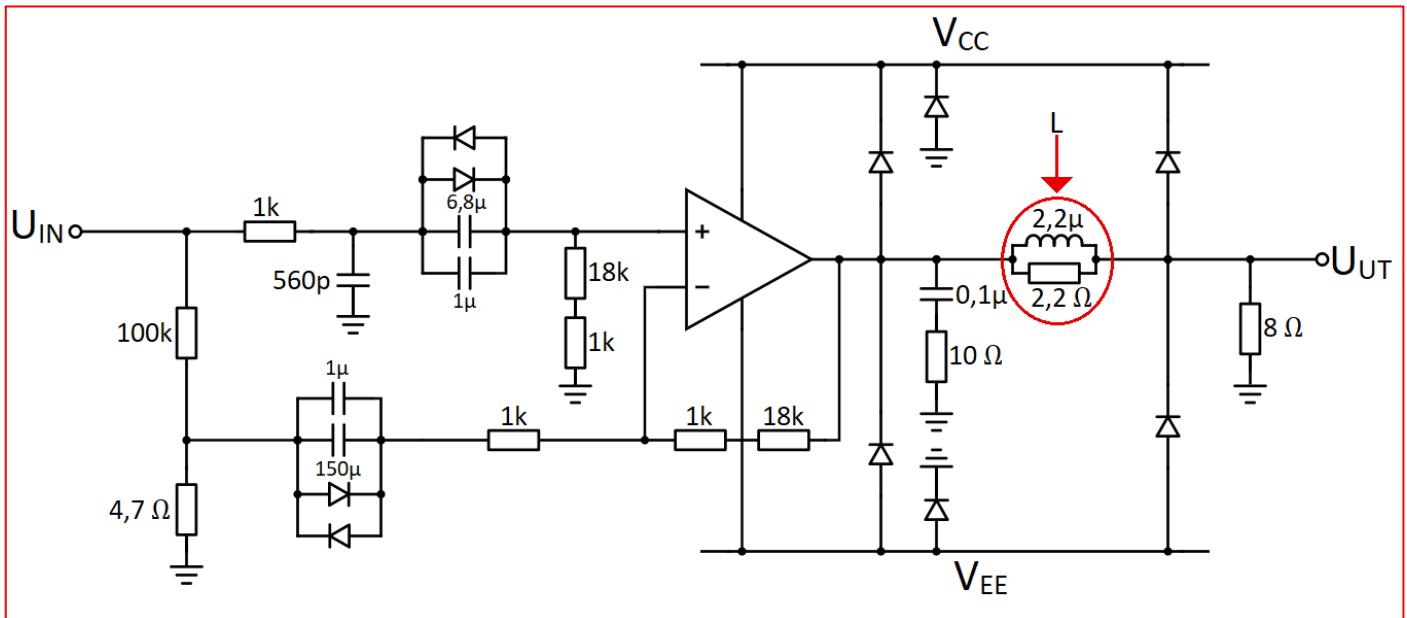
- Som synes av formeln ovan så är induktansen L på en spole proportionell med antalet lindningsvarv N i kvadrat:

$$L \sim N^2,$$

vilket betyder att antalet lindningsvarv har stor betydelse för en spoles induktans; som exempel, en fördubbling av antalet lindningsvarv N medför då att induktansen L ökar med en faktor $2^2 = 4$.



Enkel likriktare, som används för att omvandla växelström till en jämn likström. Transformern (se 2) består av två spolar, som omvandlar spänningsnivån i detta fall från 230 V ned till 100 V. Därmed så sänks spänningsnivån med en faktor 2,3. Samtidigt ökar dock strömmen lika mycket, så effekten in i transformern är samma som effekten ut (förutom eventuella förluster inuti transformern).



Exempel på audioförstärkare (trianglesymbolen) med tillhörande stabilitetskretsar, överspänningsskydd hög- och lågpasfilter runt. Audioförstärkaren matar en högtalare på 8 Ω (längst till höger) med signaler från exempelvis en mikrofon (via inspänningen U_{IN}). En spole på 2,2 μH parallellkopplas med en resistor på 2,2 Ω mellan audioförstärkaren och högtalaren, se den inringade kretsen. Spolen och resistorn bildar en LR-krets, som håller audioförstärkaren (främst dess slutsteg) stabilt vid höga frekvenser ifall lasten skulle vara kapacitiv, alltså ifall lasten skulle bestå av en kondensator.

Vid höga frekvenser så kommer denna kondensator, alltså vår last, att utgöra ett mycket litet motstånd, som kan medföra att slutsteget blir mycket instabilt. Men via LR-kretsen så finns alltid en viss resistans (på 2,2 Ω) mellan lasten och slutsteget, vilket medför att audioförstärkaren hålls stabil. Samtidigt så kommer spolen utgöra ett mycket stort motstånd, som dock blir förbikopplat av den mycket mindre resistorn (kom ihåg; om du har två parallellkopplade motstånd, där det ena motståndet är mycket högre än det andra, så blir ersättningsimpedansen ungefär lika med det mindre motståndet).

Vid låga frekvenser så kommer dock spolen att utgöra ett mycket litet motstånd, som förbikopplar 2,2 Ω :s resistorn. Då kommer LR-filtret i princip inte utgöra något motstånd. Sammanfattat så används spolen för att se till att det finns en viss resistans (2,2 Ω) mellan lasten och högtalaren vid höga frekvenser, för att hålla slutsteget (och därmed audioförstärkaren) stabil. Vid lägre frekvenser så kommer spolen förbikoppla resistorn, så att den i praktiken inte utgör något motstånd alls.

1.5.3 - Spolen som motstånd i växelströmskretsar

- I växelströmskretsar utgör spolen en så kallad induktiv reaktans, där reaktans betyder frekvensberoende motstånd, till skillnad mot resistans, som betyder icke frekvensberoende motstånd. Att spolen är induktiv innebär att dess reaktans (motstånd) ökar linjärt med ökad frekvens. En spoles reaktans X_L kan beräknas med formeln:

$$X_L = j\omega L = j2\pi fL,$$

där j indikerar att det rör sig om en reaktiv (frekvensberoende) storhet, ω betecknar strömmens/spänningens vinkelhastighet/vinkelfrekvens och L betecknar spolens induktans.

- För att förenkla eventuell analys eller uträkningar av frekvensberoende kretsar så ersätts ofta $j\omega$ i formeln ovan med s , vilket ger formeln

$$X_L = sL,$$

där s är den så kallade frekvensparametern, som motsvarar $j\omega$.



Laplace transformering av en spole. Spolen ersätts med en impedans sL , vilket medför att vi ritat ut ett motstånd istället för den traditionella symbolen för spolen.

- Användningen av frekvensparametern s är ett exempel på en så kallad Laplace-transform. Vi kommer använda oss utav Laplacetransformer i stor utsträckning vid senare analys av frekvensberoende kretsar.
- Även om frekvensparametern s motsvarar $j\omega$ i formeln för spolens reaktans X_L ovan så brukar j :et försummas, då detta endast används för att indikera att reaktansen X_L är en reaktiv (frekvensberoende) storhet; eftersom vi vet att så fort s används så handlar det om en reaktiv storhet, så brukar frekvensparametern s vid Laplacetransformering endast tänkas motsvara vinkelfrekvensen ω :

$$s = \omega,$$

vilket medför att förhållandet mellan frekvensen f samt frekvensparametern s vid Laplacetransformering är följande:

$$s = 2\pi f,$$

- Frekvensparametern s är alltså lika med frekvensen multiplicerat med två gånger pi (π).
- Längre fram i denna bok så används Laplacetransformer vid analys av växelströmskretsar, där spolens reaktans X_L är lika med

$$X_L = sL = 2\pi fL,$$

där s är den så kallade frekvensparametern, L är spolens induktans och f är växelströmmens frekvens.

- Vid mycket låga frekvenser (då frekvensen f går mot noll) så kommer därmed spolen utgöra ett obefintligt motstånd, vilken man enkelt kan visa rent matematiskt, eftersom

$$\lim_{f \rightarrow 0} X_L = \lim_{f \rightarrow 0} sL = \lim_{f \rightarrow 0} 2\pi fL = 2\pi * 0 = 0,$$

där \lim betyder gränsvärde och $f \rightarrow 0$ betyder att frekvensen f går mot noll; när frekvensen närmar sig gränsvärdet noll så närmar sig därmed spolens reaktans X_L noll. Notera att vi här ersatte frekvensen f med dess gränsvärde noll.

- Däremot vid mycket höga frekvenser (då frekvensen f går mot oändligheten, alltså ∞) så kommer spolen istället utgöra ett oändligt motstånd, eftersom

$$\lim_{f \rightarrow \infty} X_L = \lim_{f \rightarrow \infty} sL = \lim_{f \rightarrow \infty} 2\pi fL = 2\pi * \infty = \infty$$

- Det är på grund av att en spoles reaktans (motstånd) ökar med ökad frekvens som den kan användas för att minska störningar, då störningar brukar bestå av högfrekventa växelströmmar, som då blockeras av spolen genom att strömmen begränsas.

Ersättningsinduktans vid serie- och parallellkoppling av spolar:

- Eftersom spolens reaktans är proportionell med induktansen (se formeln ovan) så fungerar ersättningsinduktansen för serie- och parallellkoppling av spolar precis på samma sätt som ersättningsresistansen på resistorer; ersättningsinduktansen L_s för två seriekopplade spolar L_1 och L_2 är summan av spolarnas individuella induktanser:

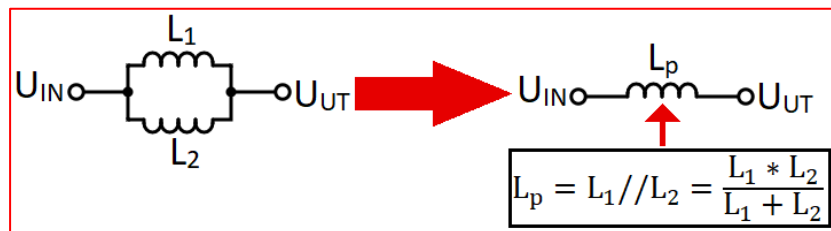
$$L_s = L_1 + L_2,$$



Beräkning av ersättningsinduktansen L_s för två seriekopplade spolar L_1 och L_2 .

medan ersättningsinduktansen L_p för två parallellkopplade spolar L_1 och L_2 beräknas med formeln

$$L_p = L_1 // L_2 = \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2}$$



Beräkning av ersättningsinduktansen L_p för två parallellkopplade spolar L_1 och L_2 .

Beräkning av ersättningsinduktans vid parallellkoppling av fler än två spolar:

- Om fler än två spolar är parallellkopplade så beräknas ersättningsinduktansen L_p lämpligast genom att beräkna ersättningsinduktansen för två spolar i taget med formeln ovan, tills endast en spole återstår. Denna spole är då lika med ersättningsinduktansen L_p .
- Som exempel, anta att vi har fyra parallellkopplade spolar, L_1 , L_2 , L_3 och L_4 , se figuren nedan. För att beräkna ersättningsinduktansen L_p för alla fyra spolar så beräknar vi först ersättningsinduktansen L_{12} för spolarna C_1 och C_2 samt ersättningsinduktansen L_{34} för spolar L_3 och L_4 :

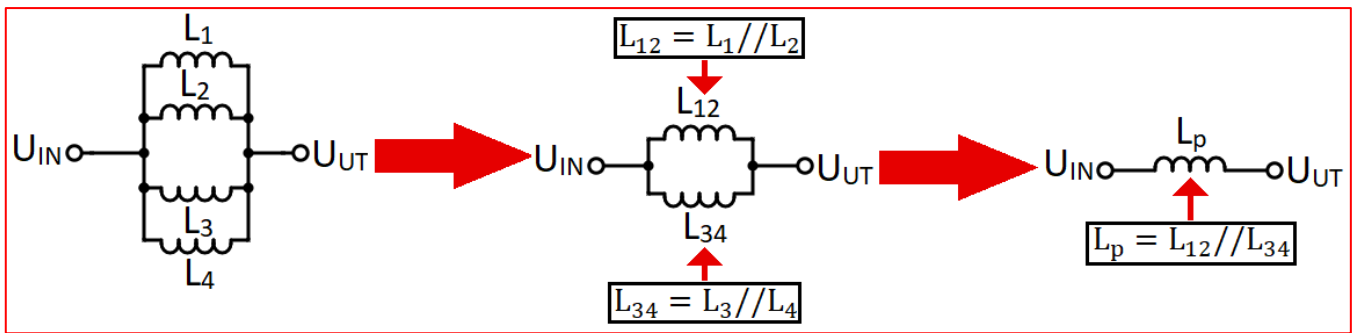
$$L_{12} = L_1 // L_2 = \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2}$$

samt

$$L_{34} = L_3 // L_4 = \frac{L_3 * L_4}{L_3 + L_4}$$

- Därefter återstår endast två parallellkopplade spolar, alltså L_{12} och L_{34} . Ersättningsinduktansen L_p är då lika med ersättningsinduktansen för de två parallellkopplade spolarna L_{12} och L_{34} :

$$L_p = L_{12} // L_{34} = \frac{L_{12} * L_{34}}{L_{12} + L_{34}}$$



Genom att gradvis beräkna ersättningsinduktansen för två parallellkopplade i taget så återstår till slut endast en spole, vilket är ersättningsinduktansen L_p för samtliga parallellkopplade spolar.

Härledning av ersättningsinduktansen vid serie- och parallellkoppling via Laplacetransformer:

- Vi kan enkelt härleda en formel för ersättningsinduktans vid serie- samt parallellkopplade spolar vid Laplacetransformer. Vi börjar med två seriekopplade spolar L_1 och L_2 , se den vänstra figuren nedan. Därefter så Laplacetransformerar vi kretsen, vilket resulterar i figuren nedan till höger.



Laplacetransformering av två seriekopplade spolar L_1 och L_2 .

- Vi skall beräkna ersättningsimpedansen Z_s för de två spolarna. Eftersom spolarna är seriekopplade så kan ersättningsimpedansen Z_s beräknas med formeln

$$Z_s = X_{L1} + X_{L2},$$

där X_{L1} och X_{L2} är spolarnas respektive reaktans. Som synes i figuren ovan så är spolarnas respektive reaktans lika med

$$X_{L1} = sL_1$$

samt

$$X_{L2} = sL_2$$

- Därmed så kan spolarnas ersättningsimpedans Z_s även skrivas som

$$Z_s = sL_1 + sL_2 = s(L_1 + L_2)$$

- Detta medför att vi hade kunnat ersätta de två spolarna med en spole L_s vars induktans är lika med summan av L_1 och L_2 . Ersättningsimpedansen Z_s hade ändå blivit samma, eftersom

$$L_s = L_1 + L_2 \rightarrow Z_s = sL_s = s(L_1 + L_2)$$

- Därmed så fungerar ersättningsinduktansen L_s för två (eller fler) seriekopplade spolar L_1 och L_2 på samma sätt som ersättningsresistansen R_s för seriekopplade resistorer R_1 och R_2 .



Ersättningsinduktansen L_s för två (eller fler) seriekopplade spolar beräknas precis på samma sätt som ersättningsresistansen R_s för två (eller fler) seriekopplade resistorer. Därmed så är ersättningsinduktansen L_s lika med summan av spolarnas individuella induktanser.

- Därefter kan vi ta ett exempel med två parallellkopplade spolar L_1 och L_2 , se figuren nedan. Ersättningsimpedansen Z_p för parallellkopplingen nedan beräknas som vanligt via spolarnas reaktanser X_{L1} och X_{L2} med formeln

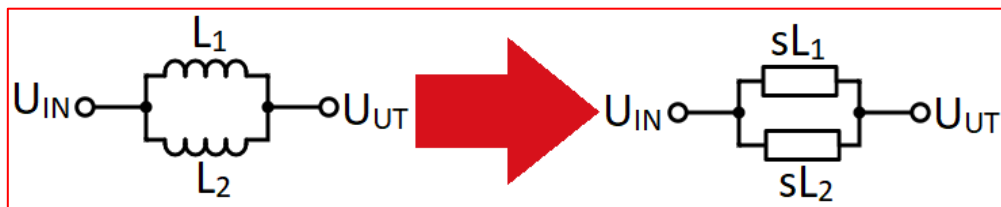
$$Z_p = X_{L1} // X_{L2} = \frac{X_{L1} * X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}},$$

där spolarnas reaktanser är lika med

$$X_{L1} = sL_1$$

samt

$$X_{L2} = sL_2$$



Laplace transformering av två parallellkopplade spolar L_1 och L_2 .

- Därmed så kan formeln för ersättningsinduktansen Z_p ovan transformeras till

$$Z_p = sL_1 // sL_2 = \frac{sL_1 * sL_2}{sL_1 + sL_2} = \frac{s^2 L_1 L_2}{s(L_1 + L_2)} = \frac{sL_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

- Detta medför att vi hade kunnat ersätta de två spolarna L_1 och L_2 med en ersättningsspole L_p , där

$$L_p = L_1 // L_2 = \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2},$$

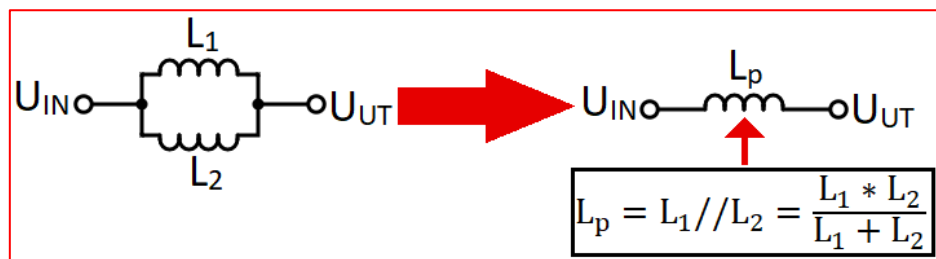
så hade ersättningsinduktansen Z_p ändå blivit samma, eftersom

$$Z_p = sL_p = s * L_1 // L_2 = \frac{sL_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

- Därmed så gäller att ersättningsinduktansen L_p för två parallellkopplade induktanser L_1 och L_2 är lika med

$$L_p = L_1 // L_2 = \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2},$$

precis som ersättningsresistansen R_p för två parallellkopplade resistorer R_1 och R_2 .



Ersättningsinduktansen L_p för två parallellkopplade spolar L_1 och L_2 beräknas på samma sätt som ersättningsresistansen R_p för två parallellkopplade resistorer R_1 och R_2 .

- Kom ihåg:** Om fler än två spolar är parallellkopplade så beräknas ersättningsinduktansen L_p lämpligast genom att beräkna ersättningsinduktansen för två spolar i taget med formeln ovan, tills endast en spole återstår, som vi såg tidigare. Den kvarvarande spolen är då lika med ersättningsinduktansen L_p .