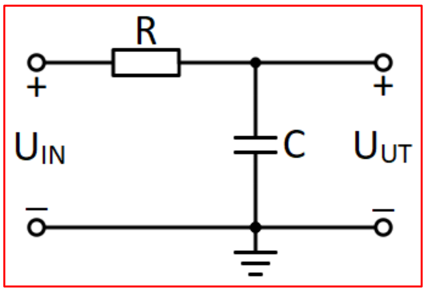
2.3 - Lågpass RC-filter

2.3.1 - Dimensionering av olastat lågpass RC-filter

- Lågpass RC-filter innehåller samma komponenter som högpass RC-filter, med skillnaden att filterresistorn R samt filterkondensatorn C har ombytta platser; därmed placeras filterresistorn R i serie med ingången, samtidigt som filterkondensatorn C placeras parallellt med utgången, se figuren till höger.



Lågpass RC-filter. Jämfört med motsvarande högpassfilter så har filterresistorn R och filterkondensatorn C bytt plats med varandra. Detta medför att frekvenser ovanför brytfrekvensen f_c kommer dämpas, istället för tvärtom.

- Lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c beräknas precis som motsvarande högpassfilter med formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC},$$

där R är filterresistorns resistans och C är filterkondensatorns kapacitans.

- Dimensioneringen av ett lågpass RC-filter sker på samma sätt som motsvarande högpassfilter. Skillnaden är dock att när lågpassfilter används så kommer frekvenser ovanför brytfrekvensen f_c dämpas, istället för tvärtom. Detta kan vara fördelaktigt för att dämpa högfrekventa störningar, som vanligtvis ligger inom frekvensintervallet hundratals kHz upp till MHz.

- Som exempel, anta att vi skall dimensionera ett lågpass RC-filter, vars brytfrekvens f_c är lika med 250 kHz:

$$f_c = 250\ kHz$$

- Eftersom två storheter skall dimensioneras så kan vi välja en av dem valfritt och därefter dimensionera den andra utefter detta. Efter brytfrekvensen f_c är satt så hög så krävs relativt små värden på filterresistorn R samt filterkondensatorn. Vi väljer därför att sätta filterresistorn R till 10 Ω:

$$R = 10\ \Omega$$

- Då återstår bara att välja en lämplig filterkondensator C. Vi transformerar formeln för brytfrekvensen f_c ovan för att enkelt kunna beräkna ett lämpligt värde på filterkondensatorn C:

$$C = \frac{1}{2\pi R * f_c}$$

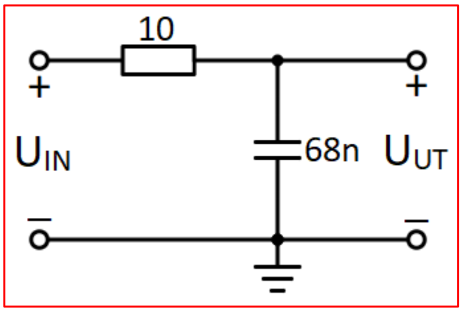
- Eftersom vi har satt filterresistorn R till 10 kΩ och brytfrekvensen f_c till 250 kHz så bör vi därmed använda en filterkondensator C vars kapacitans ligger omkring 64 µF, eftersom

$$C = \frac{1}{2\pi * 10 * 250k} \approx 64\ nF$$

- Närmaste standardvärde på kondensatorer är 68 nF, som vi därför använder; brytfrekvensen f_c blir då något lägre än 250 kHz (ca 234 kHz) men detta bör inte göra någonting:

$$C = 68\ nF$$

- Eftersom storleken på filterkondensatorn C är så låg så kommer dess ekvivalenta serieresistans (ESR) samt serieinduktans (ESL) vara låga.



Färdigdimensionerat lågpass RC-filter, vars brytfrekvens f_c ligger omkring 234 kHz; därmed dämpas frekvenser över 234 kHz, medan övriga frekvenser släpps igenom (förenklat sett).

I praktiken så kommer dock lågpassfiltret även dämpa frekvenser under brytfrekvensen f_c till en viss grad, men denna dämpning minskar linjärt med minskad frekvens, vilket medför att för frekvenser som understiger brytfrekvensen med en viss marginal, såsom 1 Hz upp till 100 kHz, så kommer dämpningen vara minimal.

- Detta medför att vi inte behöver placera en mindre kondensator parallellt med filterkondensatorn, utan risk för onödiga förlusteffekter eller att vi kommer få ett relativt stort spänningsfall över filterkondensatorn istället för på utgången, vilken annars kan leda till utspänningen U_{UT} minskar.

2.3.2 - Härledning av lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c

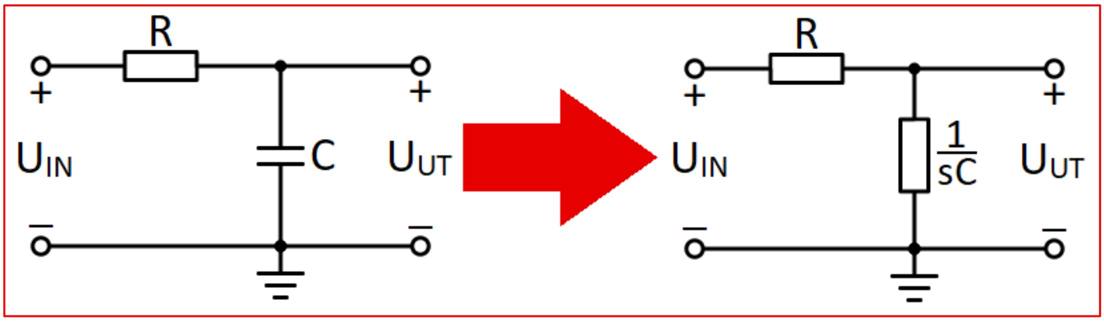
- Lågpass RC-filtrets brytfrekvens kan härledas genom Laplacetransformering, precis som vi såg tidigare för motsvarande högpassfilter. För att beräkna filtrets brytfrekvens f_c så använder vi oss av dess överföringsfunktion H(s), som är ration av in- och utsignalen:

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}},$$

där H(s) är filtrets överföringsfunktion och U_{IN} samt U_{UT} är in- respektive utsignalen ur filtret. H(s) betyder att värdet H på överföringsfunktionen H är beroende av det aktuella värdet på s, eftersom s är proportionerlig med frekvensen så beror därmed värdet på H på den aktuella frekvensen.

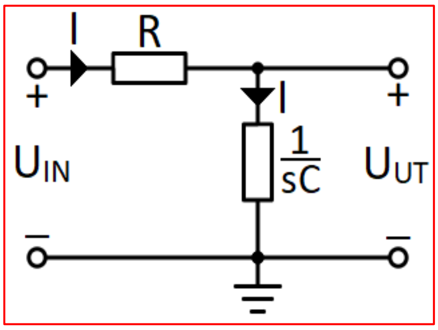
- Vid frekvenser där överföringsfunktionen H(s) är lika med ett så är utsignalen U_{UT} lika med insignalen U_{IN}, vilket betyder att filtret inte dämpar signaler vid den aktuella frekvensen.

- Ju närmre överföringsfunktionen H(s) når noll, desto mer dämpas inkommande signaler; som exempel, när H(s) är lika med noll så blir utsignalen U_{UT} lika med noll, oavsett hur stor insignalen U_{IN} är.



Laplacetransformering av ett lågpass RC-filter.

- Precis som för motsvarande högpassfilter så kommer strömmen I flöda genom både resistorn och kondensatorn till jordpunkten; att strömmen I inte delas upp i knutpunkten ovanför resistorn märkt beror på att det inte finns någon väg för strömmen att flöda ned till jord via utsignalen U_{UT}, vilket medför att all ström kommer flöda genom resistorn, se figuren till höger.



Eftersom den enda vägen för strömmen till jord är via kondensatorn (1/(sC)) så flödar samma ström I genom både kondensatorn och resistorn; utspänningen U_{UT} är endast spänningsfallet över resistorn, men den enda vägen från plus- till minuspolen är via kondensatorn.

- För att härleda överföringsfunktionen H(s) så behöver vi härleda formler för insignalen U_{IN} samt utsignalen U_{UT}, vilket vi enkelt kan göra med Kirchhoffs spänningslag, som säger att summan av alla spänningar ett helt varv i en krets är lika med noll.

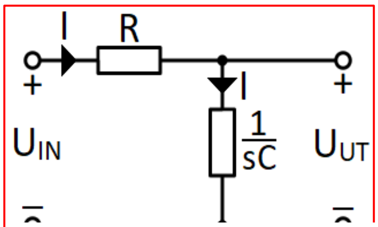
- Vi börjar med att härleda en formel för insignalen U_{IN}. Vi går ett varv från jordpunkten via U_{IN} (från minus- till pluspolen, vilket därför räknas som U_{IN}), sen via resistorn och kondensatorn ned till jordpunkten (som räknas som negativa, då vi går från plus- till minuspolen). Vi erhåller då formeln

$$U_{IN} - I * \frac{1}{sC} - RI = 0,$$

vilket medför att

$$U_{IN} = I * \frac{1}{sC} + RI,$$

där U_{IN} är insignalen, RI är spänningsfallet över filterresistorn och I * 1/(sC) är spänningsfallet över filterkondensatorn.



För att härleda en formel för inspänningen U_{IN} så kör vi ett varv med Kirchhoffs spänningslag från inspänningen U_{IN}, via resistorn och kondensatorn tillbaka till jordpunkten.

- Genom att bryta ut strömmen I så kan formeln ovan transformeras till

$$U_{IN} = I\left(\frac{1}{sC} + R\right) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) * I,$$

- Därefter härleder vi en formel för utsignalen U_{UT} på liknande sätt; vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via U_{UT}, sen via filterkondensatorn ned till jordpunkten. Vi får då formeln

$$U_{UT} - \frac{1}{sC} * I = 0,$$

vilket medför att

$$U_{UT} = \frac{1}{sC} * I$$

- Därmed så kan vi härleda en formel för högpassfiltrets överföringsfunktion H(s):

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{\left(\frac{1}{sC}\right) * I}{\left(R + \frac{1}{sC}\right) * I}$$

- Eftersom I förekommer i både täljaren och nämnaren så kan vi ta bort strömmen I ur formeln, vilket medför att

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{1}{sC}}$$

- Vid brytfrekvensen f_c så är den resistiva delen av filtret (R) lika stor som den frekvensberoende delen (1/(sC):

$$Brytfrekvens \rightarrow R = \frac{1}{sC}$$

- Formeln för överföringsfunktionen H(s) kan förenklas ytterligare genom att vi multiplicerar med sC i både täljaren och nämnaren för. Då blir det ännu lättare att se hur överföringsfunktionen H(s) påverkas av den frekvensberoende delen:

$$H(s) = \frac{sC * \frac{1}{sC}}{sC * R + sC * \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1}{1 + sRC}$$

- Med denna formel så blir filtrets resistiva del lika med ett, medan filtrets frekvensberoende del blir lika med sRC. Nu blir överföringsfunktionen ännu enklare att tyda; brytfrekvensen f_c uppnås när den frekvensberoende delen sRC av överföringsfunktionen H(s) är lika ett. Kom ihåg att brytfrekvensen f_c nås då den resistiva samt den frekvensberoende delen av filtret är lika stora, vilket i detta fall är lika med ett. Detta medför att

$$Brytfrekvens \rightarrow sRC = 1,$$

som sedan kan transformeras till

$$s = \frac{1}{RC},$$

där s vid brytfrekvensen är lika med brytvinkelfrekvensen w_c, som i sin tur är lika med

$$s = w_c = 2\pi f_c,$$

där w_c är lika med brytvinkelfrekvensen och f_c är lika med brytfrekvensen.

- Genom att ersätta s i Laplacetransformen med $2\pi f_c$ så får vi formeln

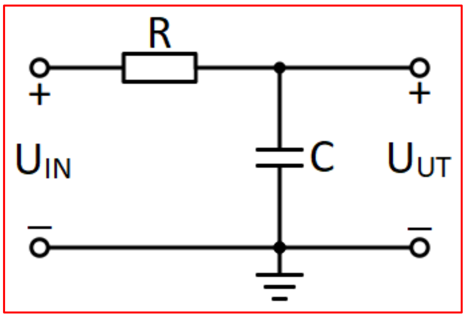
$$s = 2\pi f_c \rightarrow 2\pi f_c = \frac{1}{RC}$$

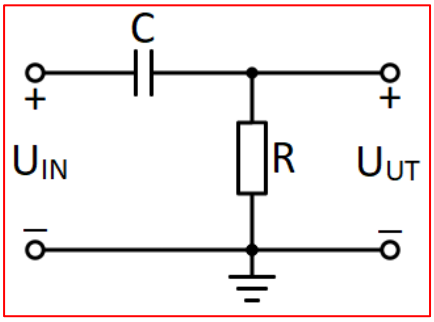
- För att sedan härleda en formel för lågpass RC-filtrets brytfrekvensen f_c så dividerar vi med 2π i både västerled och högerled. Då får vi formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC},$$

  där f_c är brytfrekvensen, R är resistorns resistans och C är kondensatorns kapacitans.

- Notera att formeln för brytfrekvensen f_c ovan är identiskt med den formel som härleddes tidigare för högpass RC-filtrets brytfrekvens. Skillnaden är dock, förenklat sett, att lågpassfilter dämpar signaler vars frekvens överstiger brytfrekvensen, samtidigt som signaler vars frekvens understiger brytfrekvensen släpps igenom.

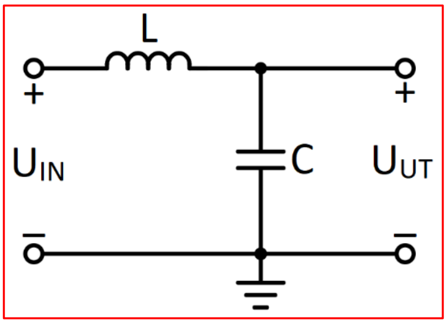




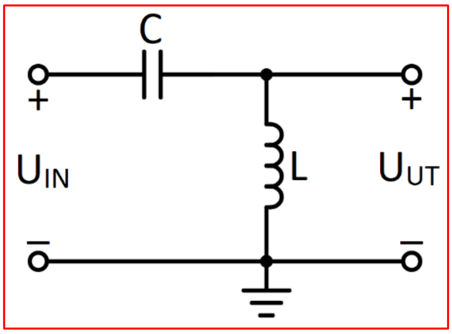
Brytfrekvensen f_c beräknas på samma sätt, oavsett om det handlar om ett lågpass (vänstra figuren) eller ett högpass RC-filter (högra figuren). Dock så kommer filtrernas funktion vara motsatta; lågpassfiltrets funktion är att dämpa signaler vars frekvenser överstiger brytfrekvensen, medan övriga signaler släpps igenom. Högpassfiltrets funktion är istället att dämpa signaler vars frekvens understiger brytfrekvensen, medan övriga signaler släpps igenom.

Som vi har sett tidigare så sker dock dämpningen gradvis; detta medför att vissa signaler som skall dämpas släpps igenom till viss grad, medan vissa signaler som skall släppas igenom dämpas till viss grad. Det är bra att ha detta i åtanke.

Det finns också så kallade LC-filter, där filtrets resistor ersätts med en spole, vilket leder till ett mer effektivt filter med förbättrade egenskaper; signaler som skall dämpas kommer dämpas till högre grad, samtidigt som signaler som skall släppas igenom dämpas till mindre grad. Dock så upptar spolen oftast mer utrymme, samtidigt som den kostar mer. Av dessa anledningar används oftast RC-filter i IC-kretsar. Vi kommer se mer av LC-filter längre fram i kapitlet.



Lågpass LC-filter, där en filterspole L används i stället för en filterresistor, vilket leder till att signaler vars frekvens överstiger brytfrekvens f_c dämpas till högre grad, samtidigt som signaler vars frekvens understiger brytfrekvensen släpps igenom till högre grad.

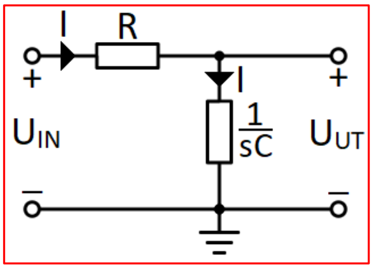


Högpass LC-filter, där en filterspole L används i stället för en filterresistor, vilket leder till att signaler vars frekvens överstiger brytfrekvens f_c dämpas till högre grad, samtidigt som signaler vars frekvens understiger brytfrekvensen släpps igenom till högre grad.

2.3.3 - Lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN}

- Det är mycket enkelt att härleda en formel för lågpass RC-filtrets in- och utimpedans ur de tidigare framtagna formlerna filtrets för in- och utspänning; via dessa kan vi använda Ohms lag för att härleda in- och utimpedansen Z_{IN} och Z_{UT}.

- Lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} är lika med filtrets inspänning U_{IN} dividerat med inströmmen I_{IN}, i enlighet med Ohms lag.



Lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} är lika med inspänningen U_{IN} dividerat med inströmmen I_{IN}, som är samma sak som strömmen I, eftersom det är strömmen I som flödar in i filtret från ingången, via pluspolen till minuspolen på inspänningen U_{IN} (via kondensatorn och resistorn ned till minuspolen via jordpunkten).

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}},$$

där Z_{IN} är inimpedansen, U_{IN} är inspänningen och I_{IN} är lika med filtrets inström, som man enkelt kan se är lika med strömmen I (eftersom I är strömmen som flödar in från ingången):

$$I_{IN} = I$$

- Vi såg tidigare att inspänningen U_{IN} på ett lågpass RC-filter är lika med

$$U_{IN} = I\left(R + \frac{1}{sC}\right)$$

- Därmed så kan lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} härledas via Ohms lag med formeln

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{I} = R + \frac{1}{sC},$$

där R är filterresistorns resistans och 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans, vilket är identiskt med inimpedansen på motsvarande högpass RC-filter.

- Inimpedansen Z_{IN} utgörs alltså av en resistiv del (filterresistorns resistans R) samt en reaktiv del (filterkondensatorns reaktans 1/(sC)). Därmed så kommer Z_{IN} variera med frekvensen, då storleken på reaktansen 1/(sC) varierar i omvänd proportion med den aktuella frekvensen; vid mycket låga frekvenser så kommer 1/(sC) utgöra ett nästintill oändligt motstånd, vilket medför att inimpedansen Z_{IN} kommer gå mot oändlighet.

- Vid mycket höga frekvenser så kommer 1/(sC) istället utgöra ett nästintill obefintligt motstånd, vilket leder till att inimpedansen Z_{IN} då är ungefär lika med filterresistorns resistans R. Emellan dessa extremer så kommer inimpedansen Z_{IN} variera, men kommer totalt sett minska linjärt med ökad frekvens, från att vara oändligt hög ned till storleken på filterresistorns resistans R:

$$R \leq Z_{IN} \leq \infty$$

- Vi kan enkelt visa att detta är fallet genom analys av lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} vid mycket låga samt mycket höga frekvenser, vilket vi kommer göra härnäst.

Härledning av lågpass RC-filtrets inimpedans vid olika frekvenser:

- Vid frekvenser nära noll så kommer reaktansen 1/(sC) utgöra ett nästintill oändligt motstånd, eftersom

$$s = 2\pi f,$$

vilket medför att

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{2\pi f C}$$

- Detta indikerar att när frekvensen f närmar sig noll så kommer reaktansens nämnare sC = 2πfc närma sig noll, då

$$\lim_{f \to 0} sC = \lim_{f \to 0} 2\pi f C = 2\pi * 0 * C = 0,$$

där lim står för gränsvärde, f → 0 indikerar att frekvensen f närmar sig (men är inte exakt lika med) noll.

- När frekvensen f går mot noll så ser vi därmed att reaktansen 1/(sC) går mot oändlighet, då

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{"0"} = \infty,$$

där ”0” i reaktansens nämnare betyder att nämnaren är mycket nära (men inte exakt lika med) noll, och ∞ indikerar att reaktansen 1/(sC) närmar sig oändlighet.

- Vid mycket låga frekvenser så kommer därmed lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} bli nästintill oändlig, eftersom

$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{I} = R + \frac{1}{sC},$$

vilket medför att när frekvensen f närmar sig noll så kommer reaktansen 1/(sC) mot oändlighet, som vi såg ovan, vilket medför att inimpedansen Z_{IN} också kommer gå mot oändlighet, eftersom

$$\lim_{f \to 0} Z_{IN} = \lim_{f \to 0} \left(R + \frac{1}{sC}\right) = R + \infty = \infty$$

- Däremot vid mycket höga frekvenser så kommer lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} närma sig filterresistorns resistans R, eftersom

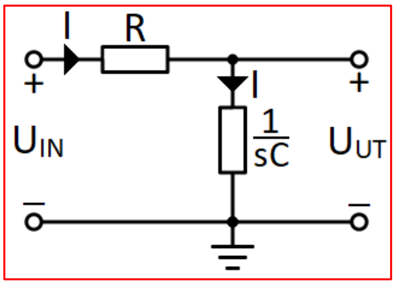
$$Z_{IN} = \frac{U_{IN}}{I_{IN}} = \frac{I\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{I} = R + \frac{1}{sC},$$

vilket medför att när frekvensen f närmar sig oändlighet så kommer reaktansen 1/(sC) närma sig noll, vilket medför att Z_{IN} kommer bli (nästan exakt) lika med filterresistorns resistans R, då

$$\lim_{f \to \infty} Z_{IN} = \lim_{f \to \infty} \left(R + \frac{1}{sC}\right) = R + 0 = R$$

- Därmed så ser vi att lågpass RC-filtrets inimpedans Z_{IN} har ett minimumvärde som är mycket nära filterresistorns resistans R.

2.3.4 - Lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT}



Lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} är lika med utspänningen U_{UT} dividerat med utströmmen I_{UT}, som är samma sak som strömmen I, eftersom det är strömmen I som flödar från pluspolen till minuspolen på utspänningen U_{UT} (via resistor R ned till jordpunkten, som är ansluten till minuspolen); därmed så är "utströmmen" I_{UT} samma sak som strömmen I.

- Högpassfiltrets utimpedans Z_{UT} är lika med filtrets utspänning U_{UT} dividerat med utströmmen I_{UT}:

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}},$$

där Z_{UT} är utimpedansen, U_{UT} är utspänningen och I_{UT} är filtrets utström, som är samma som strömmen I, vilket man enkel kan se, då det är strömmen I som flödar från utspänningen U_{UT}:s pluspol ned till dess minuspol (via resistor R till jordpunkten, som är direkt ansluten till minuspolen):

$$I_{UT} = I$$

- Vi såg tidigare att utspänningen U_{UT} ur ett lågpass RC-filter är lika med

$$U_{UT} = \frac{I}{sC}$$

- Därmed så kan lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} härledas med formeln

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{\left(\frac{I}{sC}\right)}{I} = \frac{I}{sC * I} = \frac{1}{sC}$$

där 1/(sC) är lika med filterkondensatorns reaktans.

- Som vi har sett tidigare så kommer reaktansen 1/(sC) gå mot oändlighet vid frekvenser när noll, då

$$\lim_{f \to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{"0"} = \infty$$

- **Kom ihåg:** lim för gränsvärde, f → 0 indikerar att frekvensen f närmar sig (men är inte exakt lika med) noll, "0" i reaktansens nämnare betyder att nämnaren är mycket nära (men inte exakt lika med) noll, och ∞ indikerar att reaktansen 1/(sC) närmar sig oändlighet.

- Vid mycket låga frekvenser så kommer därmed lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} (i olastat tillstånd) gå mot oändlighet, då

$$\lim_{f \to 0} Z_{UT} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{sC} = \lim_{f \to 0} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{"0"} = \infty$$

- Vid mycket höga frekvenser så kommer däremot lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} (i olastat tillstånd) gå mot noll, eftersom reaktansen 1/(sC) då kommer gå mot noll:

$$\lim_{f \to \infty} Z_{UT} = \lim_{f \to \infty} \frac{1}{sC} = \lim_{f \to \infty} \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- I olastat tillstånd så varierar alltså lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} från att vara obefintligt vid mycket höga frekvenser till att gå mot oändlighet vid mycket låga frekvenser:

$$0 \leq Z_{UT} \leq \infty$$

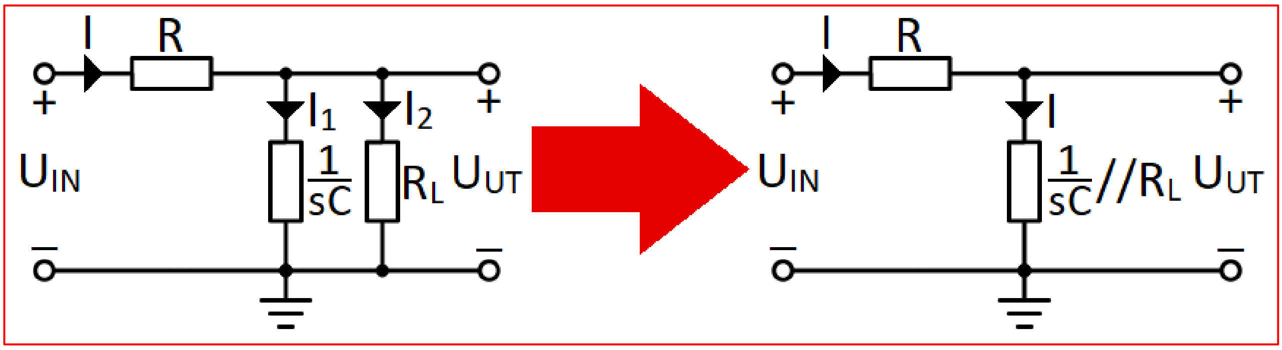
Lågpass RC-filtrets utimpedans i lastat tillstånd:

- Om vi däremot skulle placera en last på högpassfiltrets utgång, såsom i den vänstra figuren nedan, så hade lastens resistans R_L utgjort en parallellkoppling med filterkondensatorn C. Därmed så hade filterkondensatorns reaktans 1/(sC) utgjort en parallellkoppling med lastresistansen R_L.

- Vi hade kunnat förenkla kretsschemat nedan till vänster genom att ersätta filterkondensatorn samt lastresistansen med ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L och därigenom erhållit kretsschemat nedan till höger, som efterliknar ett olastat lågpass RC-filter i form och funktion. Därmed så hade lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} istället blivit lika med ersättningsimpedansen för parallellkopplingen (1/(sC))//R_L:

$$Z_{UT,lastat} = \frac{1}{sC}//R_L,$$

där 1/(sC) är filterkondensatorns reaktans och R_L är lastens resistans.



I lastat tillstånd så kommer filterkondensatorn C (Laplacetransformerad till dess reaktans 1/(sC)) samt lastens resistans R_L utgöra en parallellkoppling, såsom i den vänstra figuren ovan; filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastresistansen R_L utgör då en parallellimpedans (1/(sC))//R_L.

Vi kan därmed förenkla kretsschemat ovan genom att ersätta kondensatorn C samt lastresistansen R_L med ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L, såsom i den högra figuren ovan. Därmed så blir lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} lika med (1/(sC))//R_L. Om lastresistansen R_L är mycket högre än filterresistorns resistans R så kan filtrets brytfrekvens f_c beräknas som i olastat tillstånd, annars så måste vi använda formeln $|R_L - R|/(2\pi RC*R_L)$, som kan härledas via Laplacetransformering, se längre fram i kapitlet.

- Vi kan enkelt visa detta genom att förenkla den vänstra figuren ovan; notera att filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastresistansen R_L utgör en parallellkoppling. Vi kan ersätta dessa med ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L. Därefter återstår endast en impedans på utgången, alltså (1/(sC))//R_L, som därmed är lika med filtrets utimpedans Z_{UT}, eftersom

$$Z_{UT} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}},$$

där en formel för utspänningen U_{UT} kan härleda med Kirchhoffs spänningslag, där vi går från utspänningens pluspol ned till dess minuspol (som är direkt ansluten till jordpunkten); därmed så kör vi Kirchhoffs spänningslag från utspänningens pluspol via impedansen (1/(sC))//R_L ned till jordpunkten. Summan av alla spänningar ett helt varv i en krets är lika med noll, vilket ger

$$U_{UT} - \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I = 0,$$

som sedan kan transformeras till

$$U_{UT} = \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I$$

- Summan av utspänningen U_{UT} är alltså lika med spänningsfallet ((1/(sC))//R_L) * I över ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L.

- Vi ser också i figuren ovan att utströmmen I_{UT} är lika med strömmen I, eftersom denna ström flödar från utspänningens pluspol till dess minuspol (som är direkt ansluten till jordpunkten):

$$I_{UT} = I$$

- Därmed så blir lågpass RC-filtrets utimpedans Z_{UT} i lastat tillstånd lika med

$$Z_{UT,lastat} = \frac{U_{UT}}{I_{UT}} = \frac{\left(\frac{1}{sC}//R_L\right) * I}{I} = \frac{1}{sC}//R_L$$

- I lastat tillstånd så kommer filtrets brytfrekvens f_c bli påverkad av lastresistansen R_L, beroende på storleken på denna resistans i förhållande till filterresistansen R. I lastat tillstånd så kan lågpass RC-filtrets brytfrekvens beräknas med formeln

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L},$$

där f_c är brytfrekvensen, R är filterresistorns resistans, R_L är lastresistansen och C är filterkondensatorns kapacitans.

- Anta att vi har ett lågpass RC-filter där lastresistansen R_L är mycket högre än filterresistansen R:

$$R_L \gg R,$$

vilket medför att

$$|R_L - R| \approx R_L$$

- Därmed så kan vi förenkla formeln för lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd ovan, vilket ger approximationen

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{R_L}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{1}{2\pi RC},$$

- Om lastresistansen R_L är mycket större än filterresistorns resistans R så kan vi därmed beräkna brytfrekvensen f_c på samma sätt som i olastat tillstånd.

- Även om lastens resistans R_L hade varit mycket lägre än filterresistorns resistans R så hade vi kunnat beräkna filtrets brytfrekvens som i olastat tillstånd, med skillnaden att filterresistorns resistans R hade ersatts med lastresistansen R_L:

$$R_L \ll R,$$

vilket medför att

$$|R_L - R| \approx |-R| = R$$

- Därmed så kan formeln för lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd ovan förenklas, vilket ger approximationen

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{R}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{1}{2\pi R_L C}$$

- Om lastresistansen R_L är mycket mindre än filterresistorns resistans R så kan vi alltså beräkna lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c som i olastat tillstånd, med skillnaden att vi ersätter filterresistorns resistans R med lastresistansen R_L.

Givetvis finns det också fall då lågpass RC-filtret är lastat med en lastinduktans L_L eller en lastkapacitans C_L; dessa kommer påverka filtrets utimpedans Z_{UT} samt brytfrekvens f_c olika beroende på vilken frekvens det handlar om.

För att härleda formel för brytfrekvens samt utimpedans i dessa tillstånd så krävs Laplacetransformering. Dock kommer detta inte göras här, då detta kapitel hade blivit mycket långt. Vid behov så kan nödvändiga formel härleda genom att använda Laplacetransformering i enlighet med detta kapitel.

2.3.5 - Analys av lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd

- Lågpass RC-filtrets brytfrekvens i lastat tillstånd kan härledas genom Laplacetransformering av filtret, för att sedan beräkna dess överföringsfunktion H(s), som är ration av in- och utsignalen:

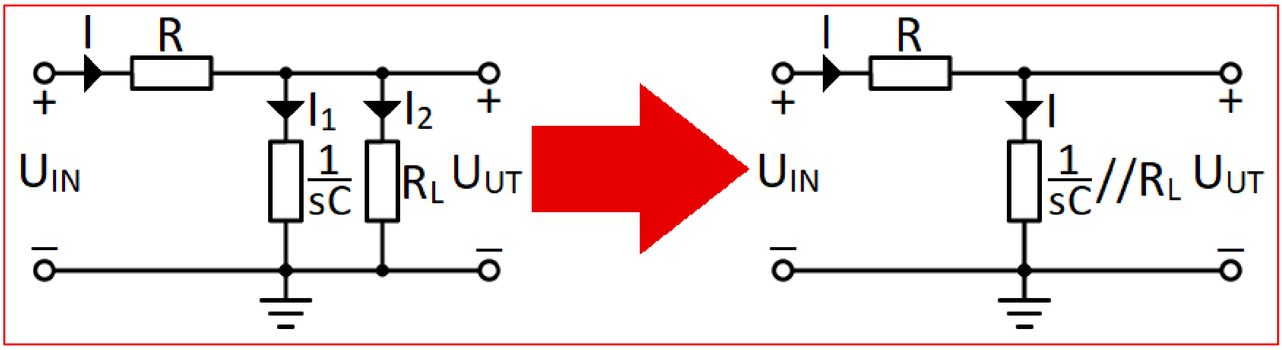
$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}},$$

där H(s) är filtrets överföringsfunktion* och U_{IN} samt U_{UT} är in- respektive utsignalen ur filtret.

*S:et i H(s) indikerar att värdet på överföringsfunktionen H beror på värdet på s; därmed så beror H indirekt på den aktuella frekvensen, vilket möjliggör t.ex. filter.

- Vid de frekvenser där överföringsfunktionen H(s) är lika med ett så blir utsignalen U_{UT} lika med insignalen U_{IN}, vilket betyder att filtret inte dämpar signaler vid denna frekvens; de släpps helt enkelt igenom obehindrat.

- Men ju närmare noll överföringsfunktionen H(s) når, desto mer dämpas inkommande signaler; som exempel, när H(s) är lika med noll så blir utsignalen U_{UT} lika med noll, oavsett storleken på insignalen U_{IN}.



Förenkling av kretsschemat på ett lastat lågpass RC-filter; vi ersätter filterkondensatorns reaktans 1/(sC) samt lastresistansen R_L med ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L, vilket ger kretsschemat ovan till höger, vars form är identiskt med ett olastat lågpassfilter. Därefter kan filtrets överföringsfunktion H(s) härledas via formeln för in- respektive utsignalen U_{IN} och U_{UT}.

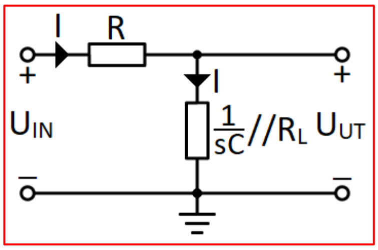
Eftersom samma ström I flödar genom filterresistor R samt ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L efter förenklingen så kan formeln för överföringsfunktionen H(s) härledas enkelt.

- Som synes i figuren ovan till höger så kommer strömmen I flöda genom både filterresistor R samt ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L ned till jordpunkten; att strömmen I inte delas upp i knutpunkten ovanför ersättningsimpedansen beror på att det inte finns någon väg för strömmen att flöda ned till jord via utsignalen U_{UT}, vilket medför att all ström då kommer flöda genom ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L till jord.

- Innan förenklingen av kretsschemat så flödade två olika strömmar genom filterkondensator C samt lastresistansen R_L, se strömmen I_1 och I_2 i den vänstra figuren ovan. Men efter att vi förenklade kretsschemat såsom figuren till höger så kommer samma ström I flöda genom filterresistor R samt ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L, vilket förenklar våra beräkningar.

- För att härleda en formel för överföringsfunktionen H(s) så behöver vi härleda en formel för insignalen U_{IN} samt utsignalen U_{UT}, vilket vi enkelt kan göra med Kirchhoffs spänningslag, som säger att summan av alla spänningar ett helt varv i en krets är lika med noll.

- Vi börjar med att härleda en formel för insignalen U_{IN}. Vi går ett varv från jordpunkten via U_{IN} (från minus- till pluspolen, vilket därför räknas som U_{IN}), sen via filterresistor R samt ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L ned till jordpunkten (vars spänningsfall räknas som negativa, då vi går från plus- till minuspolen). Vi får då formeln



För att härleda en formel för inspänningen U_{IN} så kör vi ett varv med Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten till inspänningen U_{IN}, sen via filterresistor R samt ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L tillbaka till jordpunkten.

$$U_{IN} - RI - I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) = 0,$$

vilket medför att

$$U_{IN} = RI + I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right)$$

- Genom att bryta ut strömmen I så erhålls formeln

$$U_{IN} = I\left(R + \frac{1}{sC}//R_L\right)$$

- Därefter härleder vi en formel för utsignalen U_{UT} på liknande sätt; vi kör Kirchhoffs spänningslag från jordpunkten via U_{UT}, sen via ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L ned till jordpunkten. Vi får då formeln

$$U_{UT} - I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right) = 0,$$

vilket medför att

$$U_{UT} = I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right)$$

- Därmed så kan vi härleda en formel för högpassfiltrets överföringsfunktion H(s):

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{I * \left(\frac{1}{sC}//R_L\right)}{I\left(R + \frac{1}{sC}//R_L\right)},$$

där vi kan ta bort strömmen I ur formeln, eftersom I förekommer i både täljaren och nämnaren:

$$\rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{sC}//R_L}{R + \frac{1}{sC}//R_L},$$

där R är den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av filtret, medan ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L är den reaktiva (frekvensberoende) delen.

- För att förenkla härledningarna nedan så ersätter vi ersättningsimpedansen (1/(sC))//R_L med Z:

$$Z = \frac{1}{sC}//R_L,$$

vilket ger formeln

$$H(s) = \frac{Z}{R + Z},$$

där R och Z är den resistiva respektive reaktiva delen av filtret.

- Formeln för överföringsfunktionen H(s) ovan kan förenklas genom att vi dividerar med Z i både täljaren och nämnaren. Då blir det ännu lättare att se hur överföringsfunktionen H(s) påverkas av den frekvensberoende delen:

$$\rightarrow H(s) = \frac{\left(\frac{Z}{Z}\right)}{\left(\frac{R}{Z}\right) + \frac{(Z)}{Z}} = \frac{1}{\frac{R}{Z} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}}$$

- Med denna formel så blir filtrets resistiva del lika med ett, medan filtrets reaktiva del blir lika med R/Z. Nu blir överföringsfunktionen ännu enklare att tyda; brytfrekvensen f_c uppnås när den reaktiva delen R/Z av överföringsfunktionen H(s) är lika ett, eftersom brytfrekvensen nås då den resistiva samt den frekvensberoende delen av filtret är lika stora och den resistiva delen av överföringsfunktionen är nu lika med ett. Detta medför att

$$Brytfrekvens \rightarrow \frac{R}{Z} = 1,$$

vilket ger

$$R = Z,$$

där

$$Z = \frac{1}{sC} // R_L = \frac{\frac{1}{sC} * R_L}{\frac{1}{sC} + R_L} = \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1}{sC} + R_L * \frac{sC}{sC}\right)} = \frac{\left(\frac{R_L}{sC}\right)}{\left(\frac{1 + sR_LC}{sC}\right)} = \frac{R_L}{1 + sR_LC}$$

- Därmed så gäller att

$$R = \frac{R_L}{1 + sR_LC}$$

- Vi kan transformera om formeln ovan för att kunna härleda en formel för s:

$$R = \frac{R_L}{1 + sR_LC} \rightarrow 1 + sR_LC = \frac{R_L}{R} \rightarrow sR_LC = \frac{R_L}{R} - 1 \rightarrow sR_LC = \frac{R_L - R}{R}$$

- Därmed så gäller att

$$sR_LC = \frac{R_L - R}{R}$$

vilket ger formeln

$$\rightarrow s = \frac{R_L - R}{RC * R_L},$$

där s vid brytfrekvensen är lika med brytvinkelfrekvensen w_c, som i sin tur är lika med

$$s = w_c = 2\pi f_c,$$

där w_c är lika med brytvinkelfrekvensen och f_c är lika med brytfrekvensen.

- Genom att ersätta s i Laplacetransformen med $2\pi f_c$ så erhålls formeln

$$s = 2\pi f_c \rightarrow 2\pi f_c = \frac{R_L - R}{RC * R_L}$$

- För att sedan härleda en formel för brytfrekvensen f_c så dividerar vi med 2π i både västerled och högerled. Då erhålls formeln

$$f_c = \frac{R_L - R}{2\pi RC * R_L}$$

- Notera att brytfrekvensen f_c inte kan understiga noll:

$$f_c \geq 0,$$

vilket medför att

$$\frac{R_L - R}{2\pi RC * R_L} \geq 0$$

- Dock är formeln för brytfrekvensen f_c ovan inte fullständigt; vad händer då lastresistansen R_L är mindre än filterresistorns resistans R? Då kommer ju brytfrekvensen f_c enligt formeln ovan understiga noll, eftersom

$$R_L < R \rightarrow R_L - R < 0,$$

vilket ger

$$f_c = \frac{R_L - R}{2\pi RC * R_L} < 0$$

- Detta kan inte stämma! Totalbeloppet hade varit korrekt, men vi hade fått ett minustecken framför brytfrekvensen.

- Som exempel, anta att vi har ett lågpass RC-filter vars brytfrekvens f_c skall sättas till 20 kHz. Vi förutsätter att filtret är olastat vid start. Eftersom vi skall dimensionera två komponenter så kan vi välja en av dem valfritt och anpassa den andra efter detta värde; vi väljer därmed att sätta filterresistorn R till 100 Ω:

$$R = 100\ \Omega,$$

vilket medför att vi bör sätta filterkondensatorn C så nära 80 nF som möjligt eftersom formeln för lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i olastat tillstånd kan beräknas med formeln

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC},$$

som kan transformeras om för att beräkna ett lämpligt värde på filterkondensator C:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_c} = \frac{1}{2\pi * 100 * 20k} \approx 800\ nF$$

- Närmaste standardvärde är 82 nF, som vi därmed hade använt:

$$C = 82\ nF,$$

vilket ger en brytfrekvens f_c runt 19,4 kHz, eftersom

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi * 100 * 82n} \approx 19{,}4\ kHz$$

- Anta nu att lågpass RC-filtret blir lastat med en lastresistans R_L som är 100 gånger större än filterresistorn, alltså 10 kΩ:

$$R_L = 10\ k\Omega$$

- Enligt den tidigare härledda formeln för lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd ovan så blir därmed brytfrekvensen knappt påverkad av lastresistansen R_L, då denna är så mycket högre än filterresistorns resistans R:

$$f_c = \frac{R_L - R}{2\pi RC * R_L} = \frac{10k - 100}{2\pi * 100 * 82n * 10k} \approx \frac{10k}{2\pi * 100 * 82n * 10k} = \frac{1}{2\pi * 100 * 82n} \approx 19{,}4\ kHz$$

- Detta är alltid fallet när lastresistansen R_L är mycket högre än filterresistorn R, vilket är en anledning till att lastresistansen bör hållas hög om möjligheten finns. Vi kan också härleda detta genom att förenkla formeln för brytfrekvensen f_c i lastat tillstånd, vilket vi kommer göra ett par sidor längre fram i kapitlet.

- Men vad hade hänt om det var tvärtom, alltså att filterresistorns resistans R vore satt till 10 kΩ och lastresistansen R_L vore 100 Ω?

- Brytfrekvensen f_c i lastat tillstånd borde teoretiskt sett bli samma som förut, då samtliga storheter i kretsen är samma (med skillnaden att resistanserna fick ombytta värden).

- Med formeln för brytfrekvensen f_c i lastat tillstånd ovan så blir dock brytfrekvensen ungefär lika med -19,4 kHz, eftersom

$$f_c = \frac{R_L - R}{2\pi RC * R_L} = \frac{100 - 10k}{2\pi * 10k * 82n * 100} \approx \frac{-10k}{2\pi * 10k * 82n * 100} = -\frac{1}{2\pi * 100 * 82n} \approx -19{,}4\ kHz$$

- Vi hade därmed kunnat försumma minustecknet; det är alltså totalbeloppet (absolutbeloppet) av differensen $R_L - R$ som påverkar brytfrekvensen f_c, inte själva beloppet.

- Därmed så modifierar vi formeln ovan för att gälla för absolutbeloppet av $R_L - R$, eftersom

$$|R_L - R| = \begin{cases} R_L - R \text{ då } R_L \geq R \\ R - R_L \text{ då } R_L < R \end{cases}$$

- Eftersom brytfrekvensen f_c inte kan understiga noll modifierar vi alltså formeln för lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c i lastat tillstånd till att gälla

$$f_c = \begin{cases} \dfrac{R_L - R}{2\pi RC * R_L} \text{ då } R_L \geq R \\ \dfrac{R - R_L}{2\pi RC * R_L} \text{ då } R_L < R \end{cases}$$

- Därmed så gäller följande formel för lågpass RC-filtrets brytfrekvens i lastat tillstånd (med resistiv lastresistans R_L):

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L},$$

  där f_c är brytfrekvensen, R_L är lastresistansen, R är filterresistorns resistans och C är filterkondensatorns kapacitans.

  $|R_L - R|$ är alltså absolutbeloppet av differensen mellan lastresistansen R_L samt filterresistorns resistans R, alltså totalbeloppet, där eventuellt minustecken försummas. Som exempel, om R_L är 100 Ω och R är lika med 1 kΩ så blir

$$R_L - R = 100 - 1k = -900\ \Omega,$$

  samtidigt som

$$|R_L - R| = |100 - 1k| = |-900\ \Omega| = 900\ \Omega$$

- Vi kan förenkla formeln ovan ifall lastresistansen R_L samt filterresistorns resistans R skiljer sig åt mycket i storlek; som vi har sett tidigare är det önskvärt att lastresistansen R_L sätts minst tio gånger högre än filterresistorn R om möjligheten finns.

- Som exempel, anta att vi har ett lågpass RC-filter där lastresistansen R_L är mycket högre än filterresistansen R. Vi kan då beräkna lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c som i olastat tillstånd, eftersom

$$|R_L - R| \approx R_L,$$

  då

$$R_L \gg R$$

- Därmed så kan vi förenkla den härledda formeln för brytfrekvens f_c ovan, vilket ger

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{R_L}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{1}{2\pi RC}$$

- Om lastresistansen R_L är mycket större än filterresistorns resistans R så kan vi därmed beräkna brytfrekvensen f_c på samma sätt som i olastat tillstånd, vilket vi också såg i exemplet där lastresistansen var 100 gånger större än filterresistorn R.

- Även i de fall då lastens resistans R_L hade varit mycket lägre än filterresistorns resistans R så hade vi kunnat beräkna filtrets brytfrekvens som i olastat tillstånd, med skillnaden att filterresistorns resistans R hade ersatts med lastresistansen R_L, eftersom

$$|R_L - R| \approx |-R| = R,$$

då

$$R_L \ll R,$$

- Därmed så kan vi förenkla den härledda formeln för brytfrekvens f_c i ovan, vilket ger

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{R}{2\pi RC * R_L} \approx \frac{1}{2\pi R_L C}$$

- Om lastresistansen R_L är mycket mindre än filterresistorns resistans R så kan vi alltså beräkna lågpass RC-filtrets brytfrekvens f_c som i olastat tillstånd, med skillnaden att vi ersätter filterresistorns resistans R med lastresistansen R_L.

- Men vad händer då lastresistansen R_L och filterresistorn är lika stora? Då kommer brytfrekvensen bli lika med noll, eftersom

$$f_c = \frac{|R_L - R|}{2\pi RC * R_L} = \frac{|0|}{2\pi RC * R_L} = 0,$$

då

$$R_L = R$$

- Därmed så kommer endast likström/likspänning passera lågpassfiltret, och även likströmmen kommer bli dämpas till viss del, till ungefär 30 %, vilket alltid är fallet vid brytfrekvensen på RC-filter, se nästa avsnitt för mer information.

- Det är därför viktigt att se till att storleken på lastresistansen R_L samt filterresistorn R skiljer sig mycket, minst tio gånger men helst ännu mer. Det enklaste är att använda ett lågt värde på filterresistorn R och kompensera med ett högre värde på filterkondensatorn C.

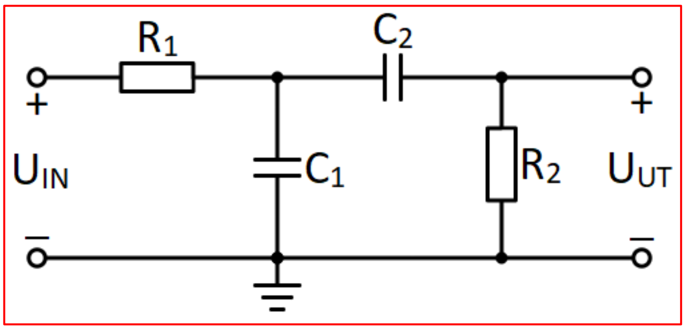
- Vanligt är också att lågpassfiltret följs av ett högpassfilter, vars inimpedans Z_{IN2} kommer utgöra lågpassfiltrets lastresistans, som i detta fall består utav en lastimpedans som vi kan kalla Z_L, se bandpassfiltret till höger.

- Eftersom vi delvis kan kontrollera högpassfiltrets inimpedans Z_{IN2} (via dess filterresistor R_2) så kan vi därmed se till att lastimpedansen Z_L blir så hög att brytfrekvensen inte påverkas överhuvudtaget.

- Brytfrekvensen f_{c1} på lågpassfiltret till höger kan beräknas med formeln

$$f_{c1} = \frac{|Z_L - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * Z_L},$$

där Z_L är lågpassfiltrets lastimpedans, som i detta fall ersätter lastresistansen R_L i våra tidigare exempel, och R_1 samt C_1 är filterresistorn samt filterkondensatorn i lågpassfiltret.



Bandpassfilter, där ett lågpass RC-filter följs av ett högpass RC-filter. Lågpassfiltrets lastimpedans Z_{L1} utgörs då av högpassfiltrets inimpedans Z_{IN2}. Genom att se till att högpassfiltrets filterresistor R_2 är mycket högre än lågpassfiltrets filterresistor R_1 så ser vi därmed till att lågpassfiltrets brytfrekvens inte påverkas av lastimpedansen Z_L till någon betydande grad.

- Lågpassfiltrets lastimpedans Z_L utgörs alltså av högpassfiltrets inimpedans Z_{IN2}, som kan beräknas med formeln

$$Z_L = Z_{IN2} = R_2 + \frac{1}{sC_2},$$

där R_2 och $1/(sC)_2$ är resistansen respektive reaktansen på högpassfiltrets filterresistorn R_2 samt filterkondensator C_2.

- Som synes i formeln ovan så varierar lastimpedansen Z_L med frekvensen; vid mycket höga frekvenser (då båda frekvensen f samt frekvensvariabeln s gör mot oändlighet), så kommer reaktansen $1/(sC)_2$ närma sig noll. Då nås minimumvärdet $Z_{L,min}$:

$$Z_{L,min} = \lim_{f\to\infty} Z_L = \lim_{f\to\infty} Z_L = \lim_{f\to\infty}\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = \lim_{f\to\infty}\left(R_2 + \frac{1}{2\pi f C_2}\right) = R_2 + \frac{1}{\infty} = R_2 + 0 = R_2$$

- Vid lastimpedansens minimumvärde $Z_{L,min}$ så kan därmed lågpassfiltrets brytfrekvens f_{c1} beräknas med formeln

$$f_{c1} = \frac{|Z_{L,min} - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * Z_{L,min}} \approx \frac{|R_2 - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * R_2}$$

- Genom att sätta att filterresistor R_2:s resistans är minst tio gånger högre än filterresistor R_1, helst ännu högre, så kan brytfrekvensen f_{c1} beräknas som på ett olastat lågpassfilter, eftersom

$$R_2 \gg R_1 \rightarrow |R_2 - R_1| \approx |R_2| = R_2,$$

vilket medför att

$$f_{c1} = \frac{|Z_{L,min} - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * Z_{L,min}} \approx \frac{|R_2 - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * R_2} \approx \frac{R_2}{2\pi R_1 C_1 * R_2} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1},$$

- Vid mycket låga frekvenser (då frekvensen f samt frekvensparametern s går mot noll) så kommer reaktansen $1/SsC_2$ närma sig oändlighet. Då nås maximumvärdet $Z_{L,max}$:

$$Z_{L,max} = \lim_{f\to 0} Z_L = \lim_{f\to 0} Z_L = \lim_{f\to 0}\left(R_2 + \frac{1}{sC_2}\right) = \lim_{f\to 0}\left(R_2 + \frac{1}{2\pi f C_2}\right) = R_2 + \frac{1}{"0"} = R_2 + \infty = \infty,$$

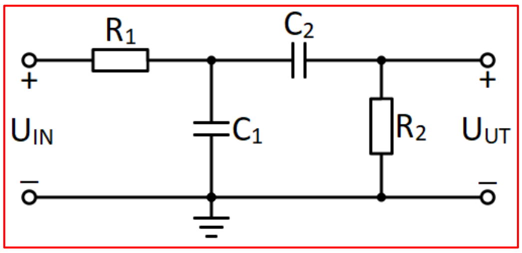
där ”0” betyder mycket nära, men inte exakt lika med noll, vilket medför att 1/”0” går mot oändlighet.

- Vid lastimpedansens maximumvärde $Z_{L,max}$ så kan därmed lågpassfiltrets brytfrekvens f_{c1} beräknas med formeln

$$f_{c1} = \frac{|Z_{L,max} - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * Z_{L,max}} \approx \frac{|\infty - R_1|}{2\pi R_1 C_1 * \infty} \approx \frac{|\infty|}{2\pi R_1 C_1 * \infty} = \frac{\infty}{2\pi R_1 C_1 * \infty} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1},$$

- Notera att så länge vi sätter högpassfiltrets filterresistor R_2 mycket högre än filterresistorn R_1 i lågpassfiltret så kan vi försumma eventuell lastimpedans Z_L från högpassfiltret och därmed beräkna brytfrekvensen f_{c1} som i olastat tillstånd.

- Detta gäller även för eventuell lastimpedans/lastresistans på högpassfiltrets utgång, som bör sättas minst tio gånger högre än filterresistor R_2 för att högpassfiltrets brytfrekvens f_{c2} skall kunna beräknas som i olastat tillstånd.



Sätt R_2 minst tio gånger högre än R_1 så kan lågpassfiltrets brytfrekvens f_{c1} beräknas som i olastat tillstånd; även eventuell last på högpassfiltrets utgång bör sättas minst tio gånger högre än R_2 för att beräkna brytfrekvensen f_{c2} på högpassfiltret som i olastat tillstånd.

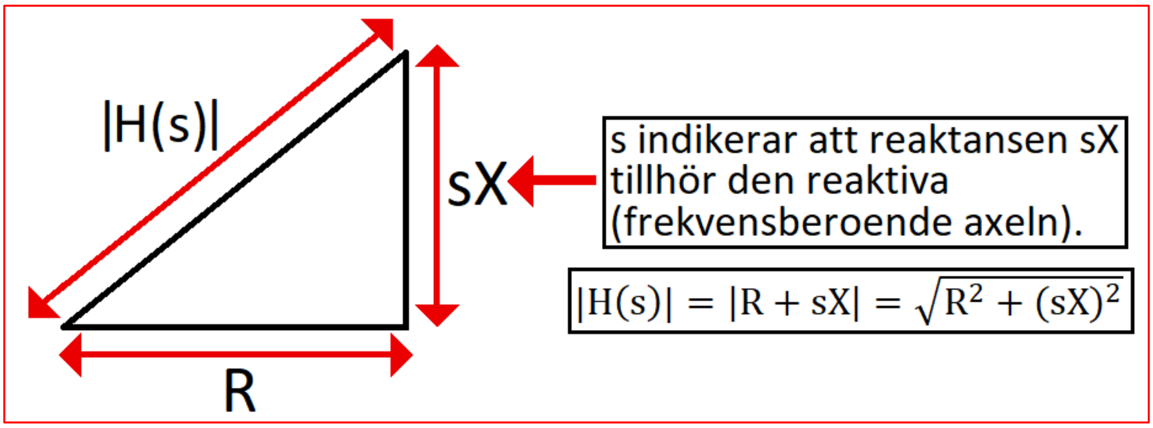
Kom ihåg: Sätt filterresistor R_2 minst tio gånger högre (gärna ännu högre) än filterresistor R_1 i ett bandpassfilter som består av ett lågpassfilter följt av ett högpassfilter, så kan lågpassfiltrets brytfrekvens f_{c1} beräknas som i olastat tillstånd.

2.3.6 - Härledning av lågpass RC-filtrets amplitudfunktion |H(s)|

- För att få en bild av hur insignalerna påverkas av lågpass RC-filtret vid olika frekvenser så måste summera bidragen från den resistiva (icke frekvensberoende) samt den reaktiva (frekvensberoende) delen av filtret till ett enda värde, precis som vi gjorde för motsvarande högpass RC-filter tidigare i kapitlet. Vi kan därför beräkna den så kallade amplitudfunktionen |H(s)| av överföringsfunktionen H(s).

- I avsnittet om högpass RC-filtret så presenterades det komplexa talplanet, där resistiva samt reella storheter ritas ut på olika axlar; reella storheter skrivs ut på x-axeln, medan reaktiva storheter skrivs ut på y-axeln, se figuren nedan.

- Som vi såg tidigare så har detta koncept lånats från komplexa tal i matematiken, där reella tal ritas ut i x-axeln och imaginära tal (tal som inte existerar i det reella talplanet, såsom roten ur negativa tal. Dock kommer vi inte repetera detta här; för mer information om komplexa tal, se föregående avsnitt om högpass RC-filter.



Komplext talplan, där amplitudfunktionen |H(s)| av en given överföringsfunktion H(s) = R + sX kan beräknas med Pythagoras sats, där den resistiva delen R samt den reaktiva delen sX ligger på var sin axel. Talet s indikerar att reaktansen sX är reaktiv (frekvensberoende); därför ritar vi ut sX som en storhet i y-led. Den resistiva (icke-frekvensberoende) delen av överföringsfunktionen (den resistiva delen) ritas istället ut som en storhet i x-led.

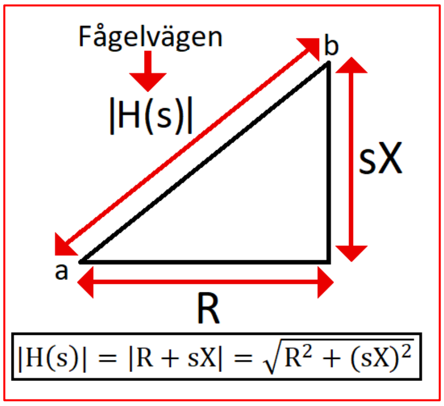
- För en given överföringsfunktion

$$H(s) = R + sX,$$

  där R är den resistiva delen och sX är den reaktiva delen av filtret (samt överföringsfunktionen), så kan vi alltså summera bidragen från dessa delar genom att beräkna överföringsfunktionens så kallade amplitudfunktion |H(s)|, som kan ses som ”fågelvägen”, alltså den absoluta sträckan, mellan punkt a och b, se figuren till höger.

- Notera att amplitudfunktionen |H(s)| ger oss den exakta sträckan mellan a till b, medan H(s) endast ger oss sträckan mellan a och b via de två ”vägarna” R och sX. För att ta reda på hur mycket lågpassfiltret dämpar signaler vid en given frekvens så är vi därför intresserade av motsvarigheten till den ”absoluta sträckan” mellan ”vägarna” R samt sX, alltså överföringsfunktionens amplitudfunktion |H(s)|.

- Amplitudfunktionen |H(s)| av överföringsfunktionen ger oss en bild utav överföringsfunktionens totala belopp vid en given frekvens f, där |H(s)|= 0 indikerar (100 % dämpning av inkommande signaler vid den angivna frekvensen f), |H(s)|= 1 indikerar ingen dämpning (alla signaler passerar obemärkt vid den angivna frekvensen f) och allt däremellan indikerar att inkommande signaler dämpas till en viss grad (vid den angivna frekvensen f); som exempel, en amplitudfunktion |H(s)| = 0,5 vid en given frekvens f indikerar att lågpassfiltret dämpar inkommande signaler med 50 % (vid denna frekvens).



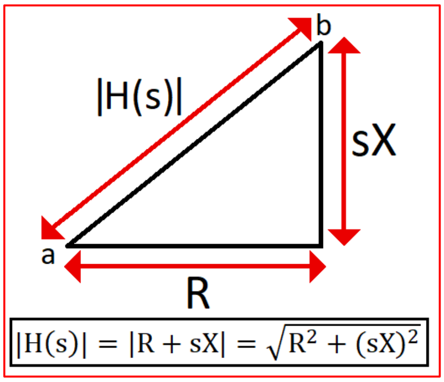
H(s) = R + sX kan tänkas vara sträckan från punkt a till b via vägarna R samt sX, medan |H(s)| är den absoluta sträckan mellan a och b, som i vardagligt tal kallas fågelvägen. Notera att endast |H(s)| indikerar den exakta sträckan mellan a och b, inte H(s).

När vi vill ta reda på hur mycket signaler dämpas vid en viss frekvens av lågpassfiltret så vill vi ta reda på motsvarigheten till den absoluta sträckan ovan, alltså amplitudfunktionen |H(s)|, som kan beräknas med Pythagoras sats.

- Som synes i figuren till höger så bildar den resistiva delen R samt den reaktiva delen sX av överföringsfunktionen H(s) en triangel, vars hypotenusa är lika med amplitudfunktionen |H(s)|, som därför kan beräknas som hypotenusan i en triangel via Pythagoras sats:

$$|H(s)| = |R + sX| = \sqrt{R^2 + (sX)^2},$$

där |H(s)| är amplitudfunktionen av överföringsfunktionen H(s), R är den resistiva (icke frekvensberoende) delen och sX är den reaktiva (frekvensberoende) delen av överföringsfunktionen.



Överföringsfunktionen H(s) = R + sX uppritat på ett komplext talplan, där storheterna R och sX bilar en triangel, vars hypotenusa är lika med amplitudfunktionen |H(s)|, som därmed kan beräknas med Pythagoras sats.

- För att kunna applicera formeln ovan för en given frekvens f så måste vi ersätta frekvensparametern s med

$$s = 2\pi f,$$

där f är den aktuella frekvensen, vilket medför att reaktansen

$$sX = 2\pi f X,$$

vilket medför att

$$|H(s)| = |R + sX| = \sqrt{R^2 + (sX)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi f X)^2}$$

- Men låt oss härleda amplitudfunktionen av ett lågpass RC-filter. Vi såg tidigare att överföringsfunktionen H(s) på ett olastat lågpass RC-filter är lika med

$$H(s) = \frac{U_{UT}}{U_{IN}} = \frac{1}{1 + sRC},$$

där den resistiva delen av överföringsfunktionen (samt filtret) är lika med ett och den reaktiva delen är lika med sRC.

- Amplitudfunktionen |H(s)| av denna överföringsfunktion är därmed lika med

$$|H(s)| = \left|\frac{U_{UT}}{U_{IN}}\right| = \frac{|U_{UT}|}{|U_{IN}|} = \frac{|1|}{|1 + sRC|} = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + (sRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}}$$

- Vid brytfrekvensen f_c så är absolutbeloppet av den resistiva delen och den frekvensberoende delen av överföringsfunktionen H(s) (samt amplitudfunktionen |H(s)|) lika stora; eftersom absolutbeloppet av den resistiva delen av H(s) är lika med ett så betyder detta att även absolutbeloppet av den reaktiva delen sRC är lika med ett, vilket medför att

$$Brytfrekvens \rightarrow sRC = 1 \rightarrow (sRC)^2 = 1^2 = 1$$

- Därmed så blir lågpass RC-filtrets amplitudfunktion |H(s)| lika med 1/ √2, alltså ca 0,707, precis som på motsvarande högpass RC-filter, eftersom

$$Brytfrekvens \rightarrow |H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

- Detta betyder att vid brytfrekvensen f_c så kommer storleken på utsignalen U_{UT} vara ca 70,7 % av storleken på insignalen U_{IN}, vilket betyder att lågpass RC-filtret dämpar signaler vars frekvens ligger runt brytfrekvensen f_c med ca 100 – 70,7 = 29,3 %. Ju högre över brytfrekvensen f_c vi kommer, desto mer kommer signalerna dämpas, vilket medför att amplitudfunktionen |H(s)| kommer närma sig noll. Detta indikerar att utsignalen U_{UT} närmar sig noll, oavsett värdet på insignalen U_{IN}.

- Ju lägre under brytfrekvensen f_c vi kommer, desto mindre kommer signalerna dämpas, vilket medför att amplitudfunktionen |H(s)| närmar sig ett. Detta indikerar att storleken på utsignalen U_{UT} kommer närma sig storleken på insignalen U_{IN}; när amplitudfunktionen |H(s)| är lika med ett så är utsignalen U_{UT} exakt lika med insignalen U_{IN}.

- Vi kan enkelt visa detta. När absolutbeloppet |1/sRC| av filtrets frekvensberoende del 1/sRC är mycket mindre än filtrets resistiva del (som är lika med ett), så blir amplitudfunktionen |H(s)| ungefär lika med ett, eftersom

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+(sRC)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,$$

  då

$$sRC \ll 1,$$

  vilket medför att

$$1+(sRC)^2 \approx 1$$

- När absolutbeloppet |1/sRC| av filtrets reaktiva del 1/sRC istället är mycket större än filtrets resistiva del (som är lika med ett), så kommer amplitudfunktionen |H(s)| av överföringsfunktionen H(s) närma sig noll, eftersom

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+(sRC)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{(sRC)^2}} = \frac{1}{sRC} \approx 0,$$

  då

$$\frac{1}{sRC} \gg 1,$$

  vilket medför att

$$1+(sRC)^2 \approx (sRC)^2,$$

  samt

$$\frac{1}{sRC} \approx 0$$

- Som vi såg tidigare så uppnås brytfrekvensen f_c när den reaktiva delen 1/sRC är lika med den resistiva delen av överföringsfunktionen (som är lika med ett), vilket leder till att amplitudfunktionen |H(s)| blir ungefär lika med 0,707, eftersom

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+(sRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

  då

$$Brytfrekvens \rightarrow sRC = 1,$$

  vilket medför att vi kan härleda en formel för frekvensparametern s vid brytfrekvensen:

$$s = \frac{1}{RC}$$

- Som vi har sett tidigare så lyder sambandet mellan frekvensparametern s samt frekvensen f enligt följande:

$$s = 2\pi f$$

- Vid brytfrekvensen f_c, då frekvensparametern s är lika med 1/RC, så gäller därmed att

$$s = 2\pi f_c = \frac{1}{RC}$$

  som kan transformeras för att härleda en formel för brytfrekvensen f_c:

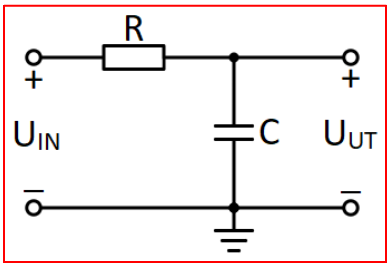
$$f_c = \frac{1}{2\pi RC},$$

  där R är filterresistorns resistans och C är filterkondensatorns kapacitans, vilket stämmer med tidigare härledningar och observationer.

- Antag att vi skall dimensionera lågpass RC-filtret till höger, vars brytfrekvens f_c sätts till 100 kHz. Vi antar att eventuell lastimpedans är så hög att denna kan försummas, exempelvis genom att vi dimensionerar efterföljande steg så att dess inimpedans (eller inresistans) är hög; vi kan då beräkna brytfrekvensen f_c som i olastat tillstånd:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC},$$

där R är filterresistorns resistans och C är filterkondensatorns kapacitans.



Lågpass RC-filter; vi antar att eventuell lastimpedans är så pass hög att denna kan försummas, i enlighet med tidigare observationer i kapitlet.

- Vi skall alltså dimensionera filterresistorn R samt filterkondensatorn C. Eftersom vi har två storheter att dimensionera så kan vi välja en av dem valfritt och anpassa den andra efter detta. Vi sätter därför filterresistor R till 10 Ω:

$$R = 10\ \Omega$$

- Därefter kan vi bestämma ett lämpligt värde på filterkondensatorn C genom att transformera formeln för brytfrekvensen f_c ovan till

$$C = \frac{1}{2\pi R f_c}$$

- Genom att sätta in värdena i formeln så ser vi att vi bör sätta filterkondensatorn C så nära 0,16 µF som möjligt, eftersom

$$C = \frac{1}{2\pi R f_c} = \frac{1}{2\pi * 10 * 100k} \approx 0{,}16\ \mu F$$

- Närmaste standardvärde är 0,15 µF, som vi därmed använder; då blir brytfrekvensen f_c ungefär 106 kHz, eftersom

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi * 10 * 0{,}15\mu} \approx 106\ kHz,$$

vilket är tillräckligt nära 100 kHz. Om vi hellre ville att brytfrekvensen f_c är något mindre än 100 kHz (istället för något högre än 100 kHz) så hade vi kunnat välja närmaste standardvärde över 0,16 µF, vilket är 0,18 µF; då hade brytfrekvensen f_c istället blivit ca 88,4 kHz.

- Lågpassfiltret skall alltså låta signaler vars frekvens understiger 100 kHz passera. Detta betyder att lågpass RC-filtrets amplitudfunktion |H(s)| bör vara ungefär lika med ett för frekvenser under 100 kHz och sedan minska mot noll vid ökad frekvens. Vi kan se om detta är fallet genom att beräkna lågpass RC-filtrets amplitudfunktion |H(s)| vid olika frekvenser.

- Tidigare i kapitlet så härleddes följande formel för lågpass RC-filtrets amplitudfunktion |H(s)|:

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}},$$

där den resistiva delen av filtret (samt överföringsfunktionen) är lika med ett och den reaktiva delen är lika med sRC, där frekvensparametern s och signalens frekvens f har följande samband:

$$s = 2\pi f$$

- Med våra valda värden på filterresistorn R (10 Ω) samt filterkondensatorn C (0,15 µF) så får vi följande formel för |H(s)|:

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (sRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (s * 10 * 0{,}15\mu)^2}}$$

- För en signal vars frekvens f är 10 kHz, alltså långt under brytfrekvensen f_c (som är runt 106 kHz) så bör amplitudfunktionen |H(s)| bli ungefär ett; genom att sätta in värden i formeln ovan så ser vi att detta är fallet, då

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+(sRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(s*10*0{,}15\mu)^2}},$$

vilket medför att vid frekvensen f = 10 kHz (då frekvensparametern s = 2π * 10 kHz), så gäller att

$$|H(2\pi*10k)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi*10*10k*0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}009)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

- Därmed så ser vi att för signaler vars frekvens långt understiger lågpassfiltrets brytfrekvens f_c så passerar de obemärkt; praktiskt taget så dämpar filtret inte dessa signaler överhuvudtaget.

- Men om vi närmar oss brytfrekvensen, såsom f = 80 kHz, så blir signalerna dämpade med ca 20 %, eftersom

$$|H(2\pi*80k)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi*80k*10*0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}75)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1{,}57}} \approx 0{,}8$$

- En amplitudfunktion |H(s)| på ca 0,8 betyder att storleken på utsignalen U_{UT} är ca 80 % av insignalen U_{IN}:s storlek, eftersom

$$|H(s)| = \frac{|U_{UT}|}{|U_{IN}|} \approx 0{,}8,$$

vilket medför att

$$|U_{UT}| \approx 0{,}8 * |U_{IN}|$$

- Därmed så dämpar lågpassfiltret inkommande signaler med ca 20 % vid en frekvens på 80 kHz. Ideellt så hade vi önskat att lågpassfiltret släppte igenom samtliga frekvenser under brytfrekvensen f_c fullständigt, men som vi tidigare har sett så är detta inte fallet; istället så sker dämpningen linjärt med ökad frekvens.

- Som vi tidigare har sett så dämpas inkommande signaler med ca 30 % vid brytfrekvensen f_c, som är 106 kHz i detta exempel, eftersom

$$|H(2\pi*106k)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi*106k*10*0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707,$$

vilket betyder att storleken på utsignalen U_{UT} är ca 70,7 % av insignalen U_{IN}:s storlek, eftersom

$$|H(s)| = \frac{|U_{UT}|}{|U_{IN}|} \approx 0{,}707,$$

vilket medför att

$$|U_{UT}| \approx 0{,}707 * |U_{IN}|$$

- Vid frekvenser som överstiger brytfrekvensen f_c, så kommer lågpassfiltrets dämpning av insignaler öka relativt linjärt med ökad frekvens, vilket leder till att amplitudfunktionen |H(s)| gradvis kommer närma sig noll. Som exempel, vid en frekvens f på 200 kHz så dämpas inkommande signaler med över 50 %, eftersom

$$|H(2\pi*200k)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi*200k*10*0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+(1{,}88)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{4{,}55}} \approx 0{,}47,$$

vid frekvensen f = 400 kHz så dämpas inkommande signaler med ca 74 %, eftersom

$$|H(2\pi * 400k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi * 400k * 10 * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (3{,}77)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{15{,}2}} \approx 0{,}26$$

och vid en frekvens f = 800 kHz så dämpas inkommande signaler med ca 87 %, eftersom

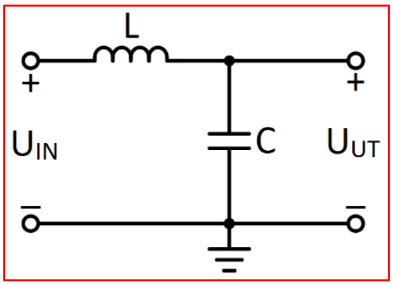
$$|H(2\pi * 800k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi * 800k * 10 * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (7{,}53)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{57{,}8}} \approx 0{,}13$$

- Notera att frekvensen fördubblades vid varje exempel ovan och vid varje fördubbling av frekvensen så fördubblades praktiskt taget också dämpningen av insignalerna, vilken man enkelt kan se då amplitudfunktionen |H(s)| halverades i varje exempel.

- Ideellt så hade lågpassfiltret dämpat samtligt signaler över brytfrekvensen f_c (i detta fall ca 106 kHz) fullständigt, vilket hade medfört en amplitudfunktion |H(s)| på noll i de sista exemplen ovan. Dock ser vi att detta inte är fallet; även vid frekvenser som är åtta ca åtta gånger högre än brytfrekvensen så släpps fortfarande ca 13 % av insignalerna igenom.

- Detta kan vara värt att tänka på ifall det är mycket viktigt att inte släppa igenom signaler över en viss frekvens; i så fall så bör brytfrekvensen sättas lägre, då dämpningen kommer vara högre vid de oönskade frekvenserna.

- Alternativt så kan ett lågpass LC-filter användas, där filterresistorn R ersätts en filterspole L. Som vi kommer se senare så har LC-filter mer önskvärda egenskaper är RC-filter. För ett lågpass LC-filter innebär detta att det hade dämpat frekvenser ovanför brytfrekvensen f_c effektivare samt släppt igenom mer av frekvenser nedanför brytfrekvensen.



Lågpass LC-filter, där en filterspole L används istället för en filterresistor, vilket leder till ett filter med förbättrade egenskaper.

- Som exempel, ett lågpass LC-filter med samma brytfrekvens f_c som RC-filtret ovan, alltså ca 106 kHz, och med identisk filterkondensator C på 0,15 µF hade behövt en filterspole L på 15 µH, eftersom dess brytfrekvens f_c har följande samband:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

där f_c är brytfrekvensen, L är filterspolens induktans och C är filterkondensatorns kapacitans. Genom att transformera formeln ovan så kan ett lämpligt värde på filterspolen L väljas:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \to \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_c} \to LC = \left(\frac{1}{2\pi f_c}\right)^2 = \frac{1}{(2\pi f_c)^2} \to L = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * C}$$

- Genom att sätta in värdena för brytfrekvensen f_c samt filterkondensatorn C så ser vi då att

$$L = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 * C} = \frac{1}{(2\pi * 106k)^2 * 0{,}15\mu} \approx 15\ \mu H$$

- Som vi kommer se längre fram i kapitlet så kan ett olastat lågpass LC-filters amplitudfunktion |H(s)| av härledas till

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2LC)^2}},$$

- Jämfört med lågpass RC-filtret ovan, där ca 13 % av insignalerna fortfarande släpptes igenom vid frekvensen f = 800 kHz, så hade motsvarande lågpass LC-filter endast släppt igenom ca 1,8 %, vilket betyder en dämpning på över 98 %, eftersom

$$|H(2\pi * 800k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + ((2\pi * 800k)^2 * 15\mu * 0{,}15\mu)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 56{,}8^2}} \approx \frac{1}{56{,}85} \approx 0{,}018$$