Étude d'un FHE de troisième génération

Lucas Roux & Eric Sageloli

16 février 2019

Introduction

Un bref historique

Définition informelle : un FHE (Fully homomorphic encryption) est un cryptosystème dont les chiffrés sont sur définis sur un anneau R et ayant des opérations sur les chiffrés qui « commutent » avec les opérations d'addition, de multiplication et de multiplication par un scalaire.
Définition alternative : l'ensemble des messages est $\{0, 1\}$ et le cryptosystème commute avec l'opération NAND.

Un bref historique

Définition informelle : un FHE (Fully homomorphic encryption) est un cryptosystème dont les chiffrés sont sur définis sur un anneau R et ayant des opérations sur les chiffrés qui « commutent » avec les opérations d'addition, de multiplication et de multiplication par un scalaire.
Définition alternative : l'ensemble des messages est $\{0, 1\}$ et le cryptosystème commute avec l'opération NAND.

- 2009 : un premier plan par C. Gentry dans sa thèse :
  - idée du bootstrapping ;
- 2011 : premiers FHE de seconde génération : Z. Brakerski, V. Vaikuntanathan, J. Fan, F. Vercauteren :
  - basés sur LWE et ses variantes (comme RLWE) ;
  - une somme simple à définir ;
  - un produit en 2 étapes ;
- 2013 : premiers FHE de troisième génération : GWS par C. Gentry, B. Waters and A. Sahai, en 2013 :
  - basés sur LWE et ses variantes ;
  - produit et somme de même nature ;

Définition de GSW

GSW, premier essai :

Clé secrète : un vecteur $\vec{sk} \in \mathbb{Z}_q^n$
Clé publique : pk
Chiffrement : Encrypt(pk, μ) $= C \in \mathbb{Z}_q^{n \times n}$ telle que

$$C\,\vec{sk} = \mu\,\vec{sk}$$

Déchiffrement : évident : recherche de valeur propre
Opérations homomorphes :
Pour $C_i = \text{Encrypt}(\mu_i)$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant 2)$ et $\lambda \in \mathbb{Z}_q$,

- **Somme :** $C_1 + C_2$

$$(C_1 + C_2)\,\vec{sk} = (\mu_1 + \mu_2)\,\vec{sk}$$

- **Produit :** $C_1 \times C_2$

$$(C_1 \times C_2)\,\vec{sk} = C_1\left(\mu_2\,\vec{sk}\right) = (\mu_1\mu_2)\,\vec{sk}$$

- **Produit par scalaire :** λC_1
- **NAND :** $C_1 \times C_2 - \text{Id}$

GSW, seconde tentative

Clé secrète : un vecteur $\vec{sk} \in \mathbb{Z}_q^n$
Clé publique : pk
Chiffrement : Encrypt(μ) = $C \in \mathbb{Z}_q^{n\times n}$ telle que

$$C\vec{sk} = \vec{sk} + \vec{e} \qquad \text{avec } \vec{e} \text{ petit}$$

Déchiffrement : on prend un i tel que $\vec{sk}_i$ est grand

$$\begin{aligned}
\text{Decrypt}(\vec{sk}, C) = \left\lfloor \frac{\langle C_i, \vec{sk} \rangle}{\vec{sk}_i} \right\rceil &= \left\lfloor \frac{\mu \vec{sk}_i + \vec{e_i}}{\vec{sk}_i} \right\rceil \\
&= \left\lfloor \mu + \frac{\vec{e_i}}{\vec{sk}_i} \right\rceil \\
&= \mu
\end{aligned}$$

GSW, seconde tentative

Retour sur les opérations homomorphes :

- **Somme :** $C_1 + C_2$

$$(C_1 + C_2)\,\vec{sk} = (\mu_1 + \mu_2)\,\vec{sk} + \vec{e_1} + \vec{e_2}$$

- **NAND :** $C_1 \times C_2 - \mathrm{Id}$

$$\begin{aligned}(C_1 \times C_2 - \mathrm{Id})\,\vec{sk} &= C_1\left(\mu_2\vec{sk} + \vec{e_2} - \vec{sk}\right)\\ &= (\mu_1\mu_2 - 1)\,\vec{sk} + \mu_2\vec{e_1} + C_1\vec{e_2}\end{aligned}$$

analysons $\mu_2\vec{e_1} + C_1\vec{e_2}$:

- $\mu_2\vec{e_1}$ ne rajoute pas beaucoup d'erreur ;
- $C_1\vec{e_2}$ est plus problématique.

GSW, troisième tentative

On utilise une fonction Flatten qui a notamment les propriétés suivantes :

$$C \in \mathbb{Z}_q^{n \times n} \implies \text{Flatten}(C) \in \{0,1\}^{n \times n}$$

$$Flatten(C) \cdot \vec{sk} = C \cdot \vec{sk} \quad \text{pour un secret } \vec{sk} \text{ bien choisi}$$

Clé secrète : un vecteur $\vec{sk} \in \mathbb{Z}_q^n$ bien choisi
Clé publique : pk
Chiffrement : Encrypt(pk, μ) = Flatten(C) $\in \mathbb{Z}_q^{n \times n}$ pour C telle que

$$C\,\vec{sk} = \vec{sk} + \vec{e} \qquad \text{avec } \vec{e} \text{ petit}$$

Déchiffrement : on prend un i tel que $\vec{sk}_i$ est grand et :

$$\text{Decrypt}(\vec{sk}, C) = \left\lfloor \frac{\langle C_i, \vec{sk} \rangle}{\vec{sk}_i} \right\rceil$$

Opérations homomorphes : on applique Flatten aux précédentes opérations homomorphes.

Le problème Decisional Learning With Error (DLWE)

Paramètres : le paramètre de sécurité λ, la dimension $n = n(\lambda) \in \mathbb{N}$, le module $q = q(\lambda) \in \mathbb{N}$, une distribution $\chi = \chi(\lambda)$ à valeur dans $\mathbb{Z}_q$, un paramètre de nombre d'échantillons $m = m(\lambda) \in \mathbb{N}$.

Problème DLWE(n, q, χ, m) : distinguer si $A \in \mathbb{Z}_q^{m \times n+1}$

- a été échantillonnée uniformément ;
- $A = (\vec{b}^{\intercal} || B)$ où $B \in {\mathbb{Z}_q}^{m \times n}$ est échantillonnée uniformément et

$$\vec{b} = \vec{e} + B\vec{t}$$

  pour $\vec{e}$ échantillonné par χ et $\vec{t}$ uniformément.

En notant $\vec{sk} = (1 \ -\vec{t})$, on a

$$A\,\vec{sk} = \vec{e}$$

Hypothèse DLWE : il existe une famille de paramètres telle qu'aucun algorithme polynomial $\mathcal{A}$ n'ait un avantage non négligeable pour distinguer les deux cas.

Clé publique et sécurité IND-CPA

Idée : prendre pk $= A$, et χ qui échantillonne de petites valeurs.

Pour chiffrer $\mu \in \mathbb{Z}_q$:

$$C := \mu \,\mathrm{Id} + RA \qquad R \in \{0,1\}^{m\times n} \text{ tirée uniformément.}$$

Ainsi : $\quad C\,\vec{sk} = C\mu + R\vec{e} = C\mu + \vec{e'} \quad$ avec $\vec{e'}$ petit

Sécurité : pour des paramètres t.q l'hypothèse DLWE est vérifié :

- A est indistinguable d'une matrice choisie uniformément.
- $\nexists$ $\mathcal{A}$ algorithme polynomial probabiliste distinguant :
  - (A, RA)
  - un couple de matrices choisies uniformément.

C est indistinguable d'un one-time pad.

Mise en place d'un bootstrapping

Evaluation d'un circuit booléen, profondeur de NAND

Soit $a, b, c \in \{0, 1\}$ et C_a, C_b, C_c leurs chiffrés pour des clés $(\vec{sk}, \text{pk})$

$$\begin{tikzcd}
 & \text{NAND} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & & \text{hNAND} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\text{a} & & \text{NAND} \arrow[dl] \arrow[dr] & {} \arrow[rr] & & C_a & & \text{hNAND} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \text{b} & & \text{c} & & & C_b & & C_c
\end{tikzcd}$$

$\Pi(a, b, c)$ $\qquad\qquad$ $\text{Eval}(\Pi, C_a, C_b, C_c)$

Si le circuit Π a une profondeur de NAND assez faible :

$$\Pi(a, c, b) = \text{Decrypt}(\vec{sk}, \text{Eval}\,(\Pi, C_a, C_b, C_b))$$

On note :

$$\text{Encrypt}\,(\text{pk}, \Pi(a, c, b)) \approx \text{Eval}\,(\Pi, C_a, C_b, C_b)$$

FHE avec bootstrapping

$$C = D + \text{erreur}$$

$$C = D + \text{erreur} \xrightarrow{\text{Decrypt}(\vec{sk}, C)} \mu \xrightarrow{\text{Encrypt}(pk, \mu)} C_{\text{new}} = D + \text{erreur}$$

FHE avec bootstrapping

$$C = D + \text{erreur}$$

$$C = D + \text{erreur} \xrightarrow{\text{Decrypt}(\vec{sk}, C)} \mu \xrightarrow{\text{Encrypt}(pk, \mu)} C_{\text{new}} = D + \text{erreur}$$

Soit Π le circuit booléen tel que

$$\Pi(\overrightarrow{binsk}) = \text{Decrypt}\left(\vec{sk}, C\right)$$

FHE avec bootstrapping

$$C = D + \text{erreur}$$

$$C = D + \text{erreur} \xrightarrow{\quad \text{Decrypt}(\vec{sk}, C) \quad} \mu \xrightarrow{\quad \text{Encrypt}(pk, \mu) \quad} C_{\text{new}} = D + \text{erreur}$$

Soit Π le circuit booléen tel que

$$\Pi(\overrightarrow{binsk}) = \text{Decrypt}\left(\vec{sk}, C\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \text{Encrypt}\left(pk, \text{Decrypt}\left(\vec{sk}, C\right)\right) &= \text{Encrypt}\left(pk, \Pi(\overrightarrow{binsk})\right) \\ &\approx \text{Eval}\left(\Pi, \text{Encrypt}(pk, \overrightarrow{binsk})\right) \end{aligned}$$

- Si Π contient assez peu de NAND, on peut créer un FHE.

Déchiffrement homomorphe : description de Π

L'algorithme de déchiffrement est le suivant :

1. trouver i tel que $\vec{sk}_i$ est grand et une puissance de 2 ;
2. calculer $a = \langle C_i, \vec{sk} \rangle$
3. retourner $\lfloor \frac{a}{\vec{sk}_i} \rceil$

- On peut ramener le calcul du produit scalaire à une somme de nombres binaire ;
- La division est simplement un shift sur l'écriture binaire ;
- Calculer la valeur absolue implique essentiellement de faire un complément à 2.

Voyons comment sommer deux nombres binaires.

Sommer deux listes :

Somme classique de deux nombres binaires :

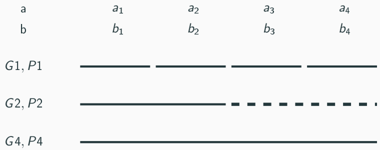
$$\begin{array}{cccccc}
 & a_1 \overset{c_1}{\curvearrowright} & a_2 \overset{c_2}{\curvearrowright} & \cdots & \overset{c_{s-1}}{\curvearrowright} a_s \\
+ & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\
\hline
 & r_1 & r_2 & \cdots & r_s
\end{array}$$

- a_1 et b_1 présents dans la formule booléenne de r_s
- profondeur de NAND en $\mathcal{O}(s)$

Sommer deux listes : carry lookahead adder

a	a_1	a_2	a_3	a_4
b	b_1	b_2	b_3	b_4
$G1, P1$				
$G2, P2$				
$G4, P4$				

Sommer deux listes : carry lookahead adder



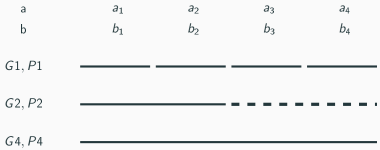
- G pour génération

$$\begin{array}{cccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$

- P pour propagation

$$\begin{array}{cccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ + & 1 & & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$

Sommer deux listes : carry lookahead adder



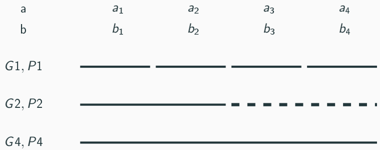
- G pour génération

$$\begin{array}{cccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$

$$(G1)_i = a_i \wedge b_i \quad (P1)_i = a_i \vee b_i$$

- P pour propagation

$$\begin{array}{cccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ + & 1 & & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$



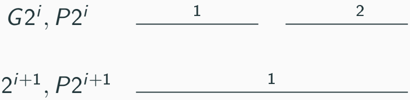
- G pour génération

$$\begin{array}{rccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$

- P pour propagation

$$\begin{array}{rccc} & a_3 & a_4 & \\ + & b_3 & b_4 & \\ + & 1 & & \\ \hline & X & X & 1 \end{array}$$

$$(G1)_i = a_i \wedge b_i \quad (P1)_i = a_i \vee b_i$$



$$\left(G2^{i+1}\right)_1 = \left(G2^i\right)_2 \vee \left(\left(G2^i\right)_1 \wedge \left(P2^i\right)_2\right)$$

$$\left(P2^{i+1}\right)_1 = \left(G2^i\right)_1 \wedge \left(P2^i\right)_2$$

Sommer deux listes : carry lookahead adder

<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$G1$, $P1$</td><td>0 0</td><td>0 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td>0 1</td></tr>
<tr><td>$G2$, $P2$</td><td colspan="2">0 0</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">0 0</td></tr>
<tr><td>$G4$, $P4$</td><td colspan="4">1 0</td><td colspan="4">0 0</td></tr>
<tr><td>$G8$, $P8$</td><td colspan="8">0 0</td></tr>
<tr><td>carry</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>

Sommer deux listes : carry lookahead adder

<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$G1$, $P1$</td><td>0 0</td><td>0 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td>0 1</td></tr>
<tr><td>$G2$, $P2$</td><td colspan="2">0 0</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">0 0</td></tr>
<tr><td>$G4$, $P4$</td><td colspan="4">1 0</td><td colspan="4">0 0</td></tr>
<tr><td>$G8$, $P8$</td><td colspan="8">0 0</td></tr>
<tr><td>carry</td><td>0</td><td>0</td><td>?</td><td>1</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>0</td></tr>
</table>

Sommer deux listes : carry lookahead adder

a	0	0	1	1	1	1	0	0
b	0	1	0	1	0	1	0	1
$G1$, $P1$	0 0	0 1	0 1	1 1	0 1	1 1	0 0	0 1
$G2$, $P2$	0 0		1 1		1 1		0 0	
$G4$, $P4$	1 0				0 0			
$G8$, $P8$	0 0							
carry	0	0	?	1	?	1	?	0

$$c_6 = G2_3 \vee (c_4 \wedge P2_3) = 1 \vee (1 \wedge 1) = 1$$

sommer deux listes : carry lookahead adder

<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$G1$, $P1$</td><td>0 0</td><td>0 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 1</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td>0 1</td></tr>
<tr><td>$G2$, $P2$</td><td colspan="2">0 0</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">1 1</td><td colspan="2">0 0</td></tr>
<tr><td>$G4$, $P4$</td><td colspan="4">1 0</td><td colspan="4">0 0</td></tr>
<tr><td>$G8$, $P8$</td><td colspan="8">0 0</td></tr>
<tr><td>carry</td><td>0</td><td>0</td><td>?</td><td>1</td><td>?</td><td>1</td><td>?</td><td>0</td></tr>
</table>

$$c_6 = G2_3 \vee (c_4 \wedge P2_3) = 1 \vee (1 \wedge 1) = 1$$

$$c_7 = G1_7 \vee (c_6 \wedge P1_7) = 0 \vee (1 \wedge 0) = 0$$

Effectuer un bootstrapping

Carry lookahead adder :

- profondeur de NAND en $\mathcal{O}(\log(s))$

Circuit booléen de déchiffrement Π :

- Profondeur de NAND en $\mathcal{O}(\log(\log(q)) + \log(n))$

Conclusion : Certains choix de paramètres permettent d'effectuer un bootstrapping en garantissant que le cryptosystème est IND-CPA.

Effectuer un bootstrapping

Carry lookahead adder :

- profondeur de NAND en $\mathcal{O}(\log(s))$

Circuit booléen de déchiffrement Π :

- Profondeur de NAND en $\mathcal{O}(\log(\log(q)) + \log(n))$

Conclusion : Certains choix de paramètres permettent d'effectuer un bootstrapping en garantissant que le cryptosystème est IND-CPA.

Taille des données permettant du bootstrapping :

paramètre de sécurité	taille de pk	taille de sk	taille d'un chiffré
$\lambda = 8$	3 Ko	113 Mo	135 Go
$\lambda = 16$	12 Ko	2 Go	6 To
$\lambda = 32$	45 Ko	32 Go	176 To

Un oeil sur le monde réel

The Gate Bootstrapping API

- librairie open source pour du C/C++
- s'appuie sur des travaux de I. Chillotti, N. Gama, M. Georgieve et M. Izabachène
- utilise une version modifiée du cryptosysteme GSW, avec une variante de LWE nommée TFHE.

Performances : pour un ordinateur 64-bit simple coeur (i7-4930MX) cadencé à 3.00GHz

- le bootstrapping se fait en un temps moyen de 52ms
- la clé de bootstrapping fait environ 24 Mo.

The Gate Bootstrapping API

- Alice génère des clés, chiffre deux nombres de 16 bits et les inscrits dans un fichier ;
- le cloud récupère les données, applique homomorphiquement la fonction minimum aux deux nombres et inscrit le résultat dans un fichier ;
- Alice récupère et déchiffre le résultat.

Performances : pour un paramètre de sécurité $\lambda = 110$ et sur un ordinateur 64-bit quadri-coeur (i5-7200U CPU) cadencé à 2.50GHz

- temps de 2.10s.

Données	Taille
Clé secrète	79 Mo
Clé publique et clé de bootstrapping	79 Mo
Chiffrement d'un bit	2 Ko
Chiffrement des deux nombres	64 Ko

Ce dont nous n'avons pas parlé

Concernant la définition de GSW :

- Flatten, dont nous avons caché la définition sous le tapis ;
- deux autres algorithmes de déchiffrement.

Concernant les choix de paramètres et la sécurité :

- hypothèses de sécurité sur DLWE, définitions équivalentes, lien LWE/DLWE ;
- les gaussiennes discrètes ;
- la librairie sagemath lwe_estimator pour estimer la sécurité de paramètres LWE ;
- notion de leveled FHE et choix de paramètres pour un leveled FHE.

Concernant le bootstrapping :

- optimisations supplémentaires pour sommer plusieurs nombres binaires ;
- contraintes de sécurité supplémentaires (sécurité circulaire).