



## PROBABILITÉS NUMÉRIQUES

RAPPORT DE PROJET  
-M2 PROBABILITÉS & FINANCE-

# Pricing Monte-Carlo d'Options barrière Up-and-In ( $UIC$ )

*fait par:*  
**Youssef Annaki**

April, 29th 2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Architecture et organisation du code C++</b>	<b>3</b>
2.1	Classe: <b>EulerScheme_BS</b> . . . . .	3
2.2	Classe: <b>MonteCarloPricing</b> . . . . .	4
2.3	Classe: <b>EulerScheme_BS_RR</b> . . . . .	4
2.4	Classe: <b>RR_extrapolation</b> . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Pricing Monte Carlo et analyses des résultats</b>	<b>5</b>
3.1	Schéma d'Euler de la diffusion . . . . .	5
3.2	Estimateur Monte Carlo du prix du contrat UIC (barrière statique) . . . . .	5
3.2.1	Cadre théorique . . . . .	5
3.2.2	Résultats Numériques . . . . .	7
3.3	Estimateur Monte Carlo du prix du contrat UOC (barrière mobile) . . . . .	10
3.3.1	Cadre Théorique . . . . .	10
3.3.2	Résultats numériques . . . . .	11
3.3.3	Vers la réduction de la variance par échantillonnage préférentiel . . . . .	12
3.4	Extrapolation multi-level de Richardson-Romberg pour le pricing des contrats UIC . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>
	<b>References</b>	<b>16</b>

# 1 Introduction

Dans ce projet, on s'intéresse au pricing d'options barrière, plus précisément le cas d'un Call UP and In (UIC). Il s'agit d'un type de call à barrière, dont l'activation s'effectue si et seulement si le sous-jacent franchit une certaine barrière prédéfinie et dont le payoff est

$$(S_T - K)_+ 1_{\sup_{t \in [0 : T]} S_t \geq D}. \quad (1)$$

où

- S: Processus prix du sous-jacent.
- K: Strike.
- D; Barrière.
- T: Maturité.

Pour ce faire on exploitera la parité  $UIC_t + UOC_t = Call_t$  et on se concentrera sur le pricing numérique d'un contrat Call Up and Out (UOC).

Le fait que ce type de contrat soit path dependent rend la détermination du prix de ce dernier plus difficile puisque le pricing nécessite la connaissance la connaissance de la trajectoire complète du processus jusqu'à maturité. D'autre part, des formules fermées pour le prix de ces options barrières n'existent que dans des cas très restreints, par exemple dans le cadre de Black&Scholes. Cela pousse à favoriser le calcul numérique type Monte Carlo pour le pricing de ces contrats. Ce calcul numérique s'accompagne par une discrétisation de la trajectoire du processus prix du sous-jacent et donc une perte de l'information relative à la trajectoire du prix. L'objectif est donc d'avoir une estimation assez fine du prix du contrat sans avoir accès à toute la trajectoire du prix du sous-jacent.

Gobet [1, 2] a montré que, sous des hypothèses de régularité du payoff (notamment le caractère borné), l'erreur faible associé à une discrétisation de type Euler discrète était de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ , où  $N$  désigne le nombre d'échantillonnage de l'intervalle  $[0:T]$ . De même, il a démontré que l'erreur faible associée à un schéma de type Euler continu présente une erreur faible en  $\mathcal{O}(N^{-1})$ . Or, puisque  $x \rightarrow (x - K)_+$  n'est pas bornée, on s'attend à ce qu'on ne retrouve pas les mêmes vitesses de convergence.

## 2 Architecture et organisation du code C++

Durant l'implémentations des différentes fonctions et classes relatives au pricing des contrats barrière, l'objectif principal était toujours de favoriser l'optimalité du code. Ainsi, les différentes classes sont assez générales et faciles à manipuler. Il est vrai qu'on s'est focalisé sur une modélisation dans un cadre de Black&Scholes (ce qui peut contredire un peu le caractère "général" du code) mais cela est motivé par le fait que dans ce cadre d'étude on a facilement accès au prix exact des différents contrats, ce qui permet donc d'analyser les erreurs d'estimation. Néanmoins, il faut bien souligner le fait qu'adapter le code à un cadre de volatilité locale, stochastique ou autre est tout à fait envisageable et il suffit d'introduire les fonctions relatives au paramètre drift et volatilité.

Concernant l'aspect pratique de l'implémentations, notre code orbite principalement autour de 4 classes principales (2 pour le pricing en utilisant les estimateurs "classiques" et 2 autres pour les estimateurs basé sur l'extrapolation multi-level de R-R).

Le fichier .zip qui accompagne ce rapport contient un fichier **main.cpp**, un fichier header **Pricing\_headers.h** et un fichier **PricingBarrier\_UOC.cpp** dans lequel les différentes classes sont implémentées.

Les graphiques dans ce rapport sont faits sur Python. En effet, on stockait les résultats des calculs numériques dans des fichiers .csv sur C++ qu'on utilisait sur Python.

Pour utiliser le code dans le fichier .zip, le fichier **main.cpp** est assez explicite. Dans ce dernier, on trouve la déclaration des paramètres (choix de l'utilisateur) ainsi que trois blocs de code de quatre lignes. Chaque bloc est relatif à un type de calcul (Pricing d'un UIC à barrière statique, pricing d'un UIC à barrière mobile et le pricing d'un UIC par extrapolation R-R). Pour utiliser un bloc de code, il suffit de mettre en commentaire les deux autres.

### 2.1 Classe: EulerScheme\_BS

Cette classe représente l'élément central pour le pricing des options à barrière statique et mobile par les estimateurs "classiques" (Section 3.2 et 3.3). Elle permet de définir les paramètres du modèle dans l'ordre suivant via le constructeur:

**Paramètre de discretisation en temps ( $N$ ), Maturité, Prix en  $t = 0$  du sous-jacent, taux d'intérêt, volatilité, niveau de la barrière, type de schéma, type de barrière et finalement le paramètre de la barrière  $u_0$  (pour une barrière mobile: Section 3.3).**

L'argument **type de schéma** est une chaîne de caractère avec "D" pour le schéma discret et "C" pour le schéma continu. De même, **type de barrière** est une chaîne de caractère avec "S" pour une barrière statique et "M" pour une barrière mobile. Notons aussi que l'argument **paramètre de la barrière** a une valeur pré définie égale à 0 et donc il n'est nécessaire de le déclarer que si on est dans le cas d'une barrière mobile.

Au sein de cette classe, on trouve la méthode **Simulate\_Scheme** qui permet la simulation du schéma considéré. Cette méthode est construite de façon optimale de tel sorte qu'on ne stocke pas les valeurs simulés du schéma mais plutôt on calcule les grandeurs dont on a besoin au fur et à mesure (dans notre cas la valeur maximale de la trajectoire simulée, la valeur à maturité et le coefficient correctif (Section 3.1) dans le cas du schéma continu). Ainsi, l'output est un vecteur qui contient uniquement ces grandeurs.

## 2.2 Classe: MonteCarloPricing

C'est la classe qui permet de calculer l'estimateur Monte-Carlo du prix des options barrières considérées. Pour éviter de redéfinir une nouvelle fois les différents paramètres du modèle, cette classe hérite de la classe **EulerScheme\_BS**. Le constructeur de cette classe prend les arguments suivants:

**Paramètre de discretisation en temps ( $N$ ), Maturité, Prix en  $t = 0$  du sous-jacent, taux d'intérêt, volatilité, nombres de simulation Monte-Carlo, niveau de risque de l'intervalle de confiance, strike, niveau de la barrière, type de schéma, type de barrière et finalement le paramètre de la barrière  $u_0$ .**

Au sein de cette classe on a défini les méthodes **d\_positive**, **d\_negative** (notation de la formule fermé du prix d'une option vanille  $B\&S$ ) et **Call\_Price** qui donne le prix d'une option Call européenne dans le modèle de  $B\&S$ .

On retrouve aussi la méthode **MC\_estimation** qui permet de calculer l'estimateur du prix. Cette méthode retourne un vecteur de 2 deux éléments. Le premier argument est l'estimateur du prix et le deuxième argument représente la largeur de l'intervalle de confiance pour cet estimateur.

## 2.3 Classe: EulerScheme\_BS\_RR

Cette classe est similaire à **EulerScheme\_BS** sauf qu'elle est adaptée à l'extrapolation multi-level de Richardson-Romberg et admet les arguments suivant:

**Paramètre de discretisation en temps ( $N$ ), Maturité, Prix en  $t = 0$  du sous-jacent, taux d'intérêt, volatilité, niveau de la barrière, ordre de l'extrapolation, type de schéma.**

## 2.4 Classe: RR\_extrapolation

Cette classe est similaire à **MonteCarloPricing** sauf qu'elle est adaptée à l'extrapolation multi-level de Richardson-Romberg et hérite de la classe **EulerScheme\_BS\_RR**. Elle admet les arguments suivant:

**Paramètre de discretisation en temps ( $N$ ), Maturité, Prix en  $t = 0$  du sous-jacent, taux d'intérêt, volatilité, nombres de simulation Monte-Carlo, niveau de risque de l'intervalle de confiance, strike, niveau de la barrière, ordre de l'extrapolation, type de schéma.**

### 3 Pricing Monte Carlo et analyses des résultats

Dans tout ce qui suit, on se placera dans le cadre d'un modèle Black&Scholes pour pouvoir exploiter les formules fermées des prix d'options et établir une étude comparative entre le prix exact et l'estimation Monte Carlo de ce dernier.

Ainsi soit  $(S_t)_{t \geq 0}$  le processus prix du sous-jacent du contrat UIC tel que

$$dS_t = b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad (2)$$

où

- $b(t, S_t) = rS_t$  avec  $r > 0$  le taux d'intérêt sans risque.
- $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$  avec  $\sigma > 0$  la volatilité du prix du sous-jacent.
- $(W_t)_{t \geq 0}$ : Mouvement Brownien Standard.

#### 3.1 Schéma d'Euler de la diffusion

Tout au long de ce rapport ainsi que pour les implémentations numériques, on se basera essentiellement sur le schéma d'Euler discret et continu et on établira des comparaisons entre les deux schémas pour le pricing des options barrière. Ainsi, soit  $N$  le nombre d'échantillonnage sur l'intervalle  $[0:T]$  (on considère un échantillonnage discret régulier) et  $(t_k)_{k \in (0, \dots, N)}$  les points d'échantillonnage de l'intervalle  $[0:T]$  tels que  $t_k = \frac{T}{N}k$ . Ainsi, le schéma d'Euler discret  $(\bar{S}_{t_k})_{k \in (0, \dots, N)}$  est défini par

$$\bar{S}_{t_{k+1}} = r\bar{S}_{t_k} \frac{T}{N} + \sigma\bar{S}_{t_k} \sqrt{\frac{T}{N}} Z_{k+1} \quad (3)$$

où  $(Z_k)_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$  est une suite de variables aléatoires i.i.d.

D'autre part, le schéma d'Euler continu est défini par

$$\tilde{S}_t = r\tilde{S}_{\underline{t}}(t - \underline{t}) + \sigma\tilde{S}_{\underline{t}}(W_t - W_{\underline{t}}). \quad (4)$$

où  $\underline{t} = t_k$  pour  $t \in [t_k : t_{k+1}[$ .

#### 3.2 Estimateur Monte Carlo du prix du contrat UIC (barrière statique)

##### 3.2.1 Cadre théorique

L'idée de l'estimateur par schéma continu du prix du contrat UOC (et donc du prix du contrat UIC par la formule de parité) repose sur la notion de pont-brownien ainsi que sur un pré conditionnement. En effet, en considérant le pont Brownien  $Y_t^{W,T,y} = \frac{t}{T}y + W_t - \frac{t}{T}W_T$  sur  $[0:T]$  arrivant à  $y$  en  $T$  et associé au mouvement brownien  $(W_t)_t$ , on sait que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0:T]} Y_t^{W,T,y} \leq z\right) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{2}{T}z(z-y)), & z \geq \max(0, y), \\ 0, & z \leq \max(0, y), \end{cases} \quad (5)$$

On en déduit donc que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0:T]} (x + (y-x)\frac{t}{T} + \lambda Y_t^{W,T}) \leq z\right) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{2}{T\lambda^2}(z-x)(z-y)), & z \geq \max(x, y), \\ 0, & z < \max(x, y), \end{cases} \quad (6)$$

où  $Y^{W,T}$  est le pont Brownien standard associé à  $W$ .

Ainsi, en posant

$$G_{x,y}^{N,k}(z) = [1 - \exp(-\frac{2N}{T\sigma^2(t_k, x)}(z-x)(z-y))]1_{z \geq \max(x,y)}, \quad (7)$$

et en remarquant que

$$((G_{x,y}^N)^{-1}(1-u) = \frac{1}{2}(x+y + \sqrt{(x-y)^2 - 2T\sigma^2(t_k, x)\log(u)/N})), \quad (8)$$

on déduit la loi conditionnelle de  $\max_{t \in [0:T]} \bar{S}_t$ , ce qui nous permettra de déterminer une formule générale pondérée pour  $\mathbb{E}((\tilde{S}_T - K)_{+1} \sup_{t \in [0:T]} \tilde{S}_t \leq D)$  qui est une approximation du payoff d'un contrat UOC  $\mathbb{E}((S_T - K)_{+1} \sup_{t \in [0:T]} S_t \leq D)$ .

Ainsi, la formule à exploiter pour l'implémentation numérique est donnée par:

$$\mathbb{E}((\tilde{S}_T - K)_{+1} \sup_{t \in [0:T]} \tilde{S}_t \leq D) = \mathbb{E}((\bar{S}_T - K)_{+1} \max_{0 \leq k \leq D} \bar{S}_{t_k} \leq D \prod_{k=0}^{N-1} (1 - \exp(-\frac{2N}{T} \frac{(\bar{S}_{t_k} - D)(\bar{S}_{t_{k+1}} - D)}{\sigma^2(t_k, \bar{S}_{t_k}))) \quad (9)$$

En utilisant la formule (9) pour un contrat UOC ainsi que la formule fermée  $B\&S$  pour le prix d'un Call vanille, on déduit un estimateur du prix d'un contrat UIC.

Concernant l'estimation du prix du contrat UOC par le biais d'un schéma d'Euler discret, on approche simplement  $\mathbb{E}((S_T - K)_{+1} \sup_{t \in [0:T]} S_t \leq D)$  par

$$\mathbb{E}((\bar{S}_T - K)_{+1} \max_{0 \leq k \leq N} \bar{S}_{t_k} \leq D). \quad (10)$$

En comparant les expressions (9) et (10), on remarque l'existence d'un coefficient correctif supplémentaire dans (9) qui permet de prendre en compte le fait que entre deux instants de discrétisation  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , le schéma continu a une certaine dynamique/évolution qui doit être prise en compte (d'où le rôle des ponts Brownien).

D'autre part, pour l'analyse de l'erreur faible qui se fera dans la sous-section suivante, on aura besoin du prix exacte du contrat UOC dans la cadre de  $B\&S$ . Ce dernier est donné par la formule

$$\begin{aligned} Call^{U\&O}(S_0, r, \sigma, T) &= Call^{BS}(S_0, K, r, \sigma, T) - Call^{BS}(S_0, D, r, \sigma, T) \\ &\quad - e^{-rT}(D - K)\mathcal{N}(d^-(D)) - (\frac{L}{S_0})^{1+\mu}(Call^{BS}(S_0, K', r, \sigma, T) \\ &\quad - Call^{BS}(S_0, D', r, \sigma, T) - e^{rT}(D' - K')\mathcal{N}(d^-(L'))), \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$K' = K(\frac{S_0}{D})^2, D' = D(\frac{S_0}{D})^2, d^-(D) = \frac{\log(\frac{S_0}{D}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \text{ and } \mu = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

### 3.2.2 Résultats Numériques

Grâce à la parité UIC/UOC et aux expressions (10) et (9), on est capable d'estimer le prix d'un contrat UIC. Pour les applications numériques, on considérera les valeurs de paramètres suivantes:

- $S_0 = 100$
- $T = 1$
- $K = 110$
- $r = 0.01$
- $\sigma = 0.2$
- $D = 120$
- $q = 0$  (repo rate)

Ainsi, on a que  $Call^{BS} = 4.61012$  et  $UIC^{BS} = 4.47147$ .

Les figures suivantes résument le résultat des calculs numériques

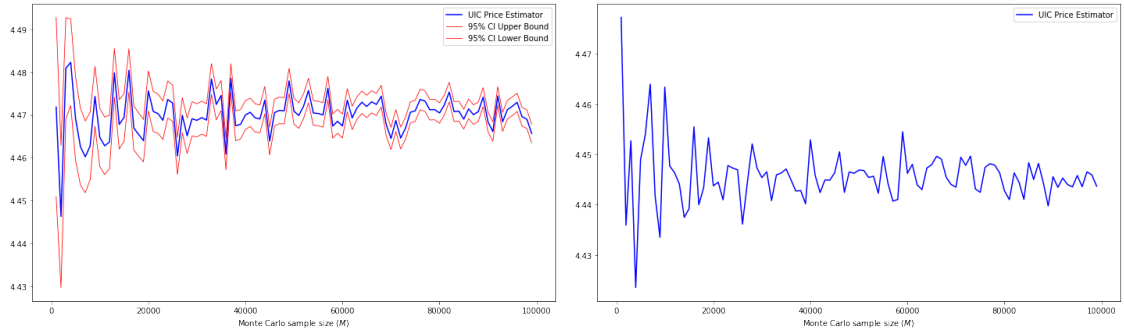


Figure 1: Convergence de l'estimateur Monte Carlo pour le schéma continu (à gauche) et le schéma discret (à droite) avec  $N = 500$

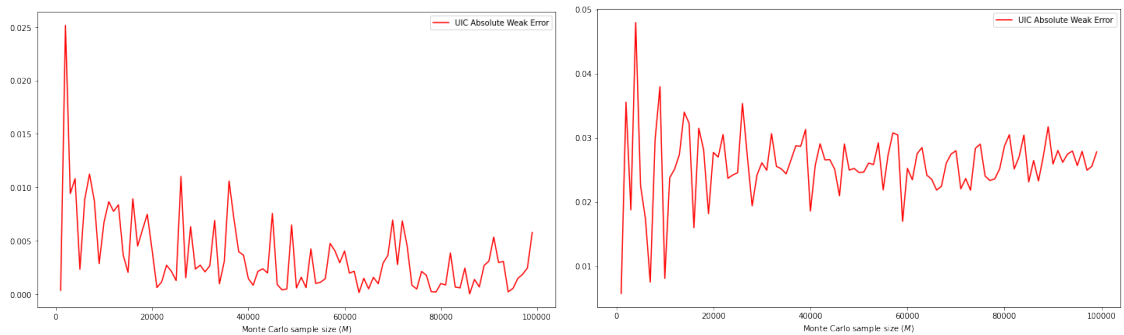


Figure 2: Évolution de l'erreur faible pour le schéma continu (à gauche) et le schéma discret (à droite) avec  $N = 500$



D'après la figure (1)<sup>1</sup>, on peut dire que les deux estimateurs Monte Carlo converge bien à partir de 80000 itérations, mais vers des valeurs différentes. En effet, l'estimateur basé sur le schéma d'Euler continu converge bien vers le prix exact d'un contrat UIC et l'écart entre la valeur limite de l'estimateur basé sur le schéma discret et le prix exact est de l'ordre de  $\sim 0.0278$ . Cet écart disparaît pour le schéma continu grâce au coefficient correctif introduit dans (9). Ainsi, l'utilisation de l'estimateur avec schéma continu permet d'aboutir à une erreur relative de l'ordre de  $\sim \left| \frac{4.4657004 - 4.47147}{4.47147} \right| = 0.0012903$  avec un nombre de simulations Monte Carlo relativement petit. Pour le schéma discret on a  $\sim \left| \frac{4.443663 - 4.47147}{4.47147} \right| = 0.0062185$ .

Maintenant qu'on a analysé la convergence des estimateurs Monte Carlo en fonction de la taille de l'échantillon MC, il serait intéressant d'analyser la convergence des estimateurs en fonction du paramètre de discrétisation  $N$  de l'intervalle temporelle, ce qui nous permettra de faire le lien et des comparaisons avec les résultats de [1, 2]. On fixe donc  $M = 20000$ .

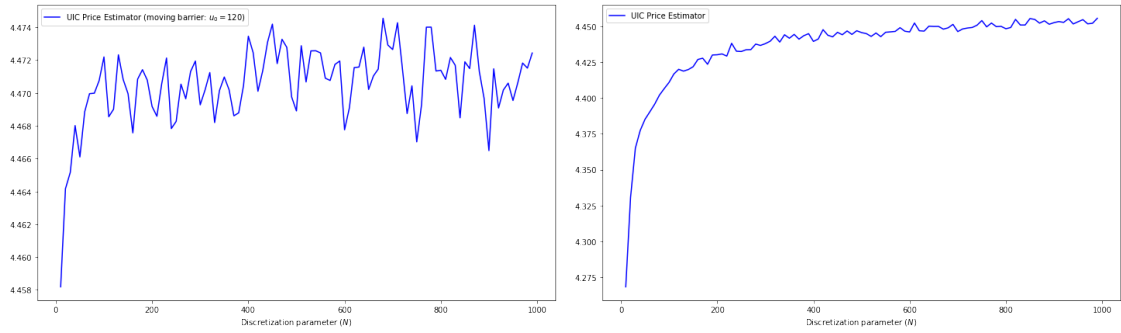


Figure 3

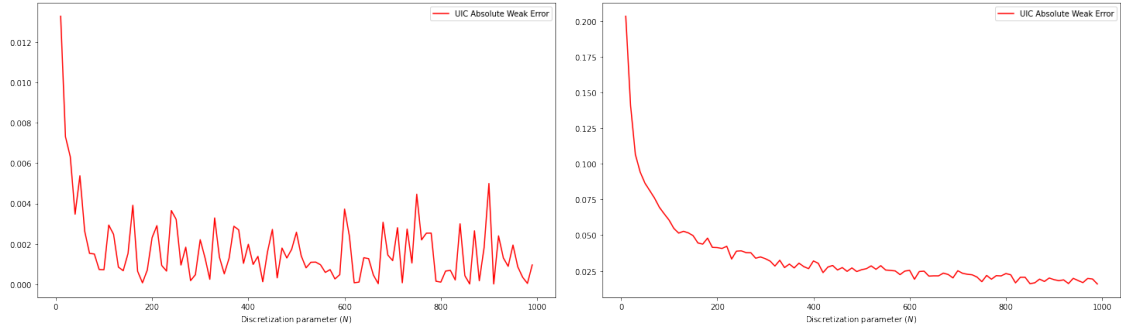


Figure 4

---

<sup>1</sup>Le fait qu'on a pas tracé l'évolution de l'intervalle de confiance pour cet estimateur est du au fait que la largeur de cet intervalle est très grande ce qui ne permet pas de mettre en évidence l'évolution de l'estimateur.

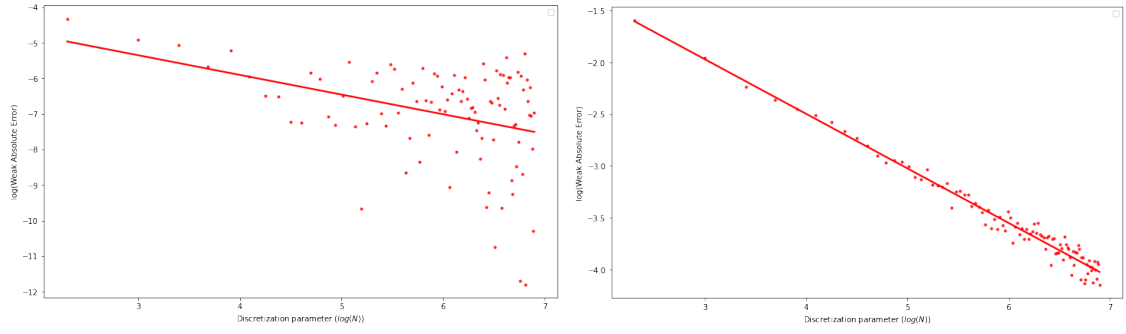


Figure 5

D'après les résultats numériques, la décroissance de l'erreur faible pour le schéma discret est en  $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$  avec  $\alpha = -0.526$  ce qui est proche du résultat démontré dans [1]. D'autre part, pour le schéma continu l'erreur faible décroît en  $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$  avec  $\alpha = -0.553$  ce qui n'est pas en accord avec [1] malgré la convergence de l'erreur vers 0. D'autre part, on remarque que l'erreur faible du schéma discret ne converge pas vers 0 ce qui encore une fois est en désaccord avec les résultats de [1, 2].

Ce manque de cohérence entre nos résultats et ceux de [1, 2] est justifié par le fait que certaines hypothèses nécessaires évoqués dans [1, 2], et qui garantissent la convergence des différents estimateurs, ne sont pas vérifiés. Cela est dû au fait que  $x \rightarrow (x - K)_+$  n'est pas borné comme indiqué dans l'introduction et donc selon les paramètres du modèle, on aura un comportement différent de l'estimateur du prix.

Néanmoins, on arrive à avoir une convergence satisfaisante en  $M$  et en  $N$  pour l'estimateur basé sur le schéma continu, qui est moins rapide que ce que les résultats théoriques suggèrent.

### 3.3 Estimateur Monte Carlo du prix du contrat UOC (barrière mobile)

Dans cette section, nous allons considérer le cas d'une barrière mouvante, et plus particulièrement le cas d'une barrière de la forme  $D(t) = u_0 + t$ . Cette barrière est un cas particulier puisque [3] traite le cadre d'options avec des barrières supérieures et inférieures dépendantes du temps de façon régulière.

#### 3.3.1 Cadre Théorique

L'idée principale dans [3] pour aborder ce type de problème est de se ramener au cas d'option à barrière statique en recourant à des transformations particulières, ce qui nous permettra d'appliquer les méthodes de la section précédente. Comme précédemment, on se concentrera sur les contrats UOC et le prix des contrat UIC sera déduit grâce à la formule de parité UIC/UOC.

Le pricing des contrats à barrière mouvante se base sur le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tel que

$$Y_t = \frac{S_t}{D(t)} \quad (12)$$

et le fait de remarquer que le payoff d'un contrat UOC peut s'écrire sous la forme

$$(D(T)Y_T - K)_+ 1_{Y_t \leq 1, \forall t \in [0:T]} = (D(T)Y_T - K)_+ 1_{\sup_{t \in [0:T]} Y_t \leq 1} \quad (13)$$

ce qui transforme la barrière mobile en barrière statique.

D'autre part, par application du lemme d'Itô, le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est régi par l'EDS

$$dY_t = Y_t \left( \left( r - \frac{1}{D(t)} \right) dt + \sigma dW_t \right) \quad (14)$$

En considérant les deux schémas d'Euler discret et continu suivants (avec les mêmes notations précédentes),

$$Y_{t_k} = Y_{t_{k-1}} \left( 1 + \left( r - \frac{1}{u_0 + t_{k-1}} \right) \frac{T}{N} + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} Z_{k+1} \right), \quad (15)$$

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{\underline{t}} \left( 1 + \left( r - \frac{1}{u_0 + \underline{t}} \right) (t - \underline{t}) + \sigma (W_t - W_{\underline{t}}) \right), \quad (16)$$

on déduit l'estimateur du prix du contrat UOC pour les deux schémas précédents. Un estimateur de  $\mathbb{E}((S_T - K)_+ 1_{\sup_{t \in [0:T]} S_t \leq D(t)})$  et donc donné, pour le schéma discret, par

$$\mathbb{E}((D(T)\bar{Y}_T - K)_+ 1_{\max_{0 \leq k \leq N} \bar{Y}_{t_k} \leq 1}) \quad (17)$$

et pour le schéma continu par

$$\mathbb{E}((D(T)\tilde{Y}_T - K)_+ 1_{\sup_{t \in [0:T]} \tilde{Y}_t \leq 1}) = \mathbb{E}((\bar{Y}_T - K)_+ 1_{\max_{0 \leq k \leq D} \bar{Y}_{t_k} \leq 1} \prod_{k=0}^{N-1} (1 - \exp(\frac{-2N}{T} \frac{(\bar{Y}_{t_k} - 1)(\bar{Y}_{t_{k+1}} - 1)}{\sigma^2(t_k, \bar{Y}_{t_k})))) \quad (18)$$

### 3.3.2 Résultats numériques

Grâce à la parité UIC/UOC et aux expressions (10) et (9), on est capable d'estimer le prix d'un contrat UIC. On considère aussi les mêmes valeurs des paramètres ainsi que  $u_0 = 120$ . Les figures suivantes résument le résultat des calculs numériques

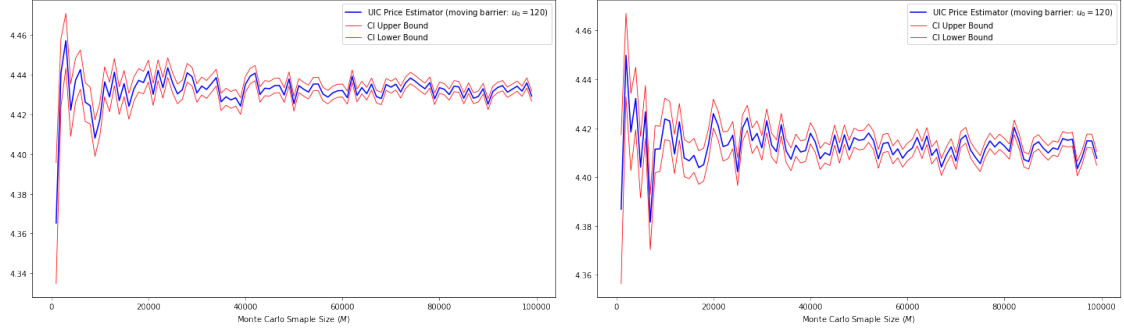


Figure 6: Convergence de l'estimateur Monte Carlo pour le schéma continu (à gauche) et le schéma discret (à droite) avec  $N = 1000$

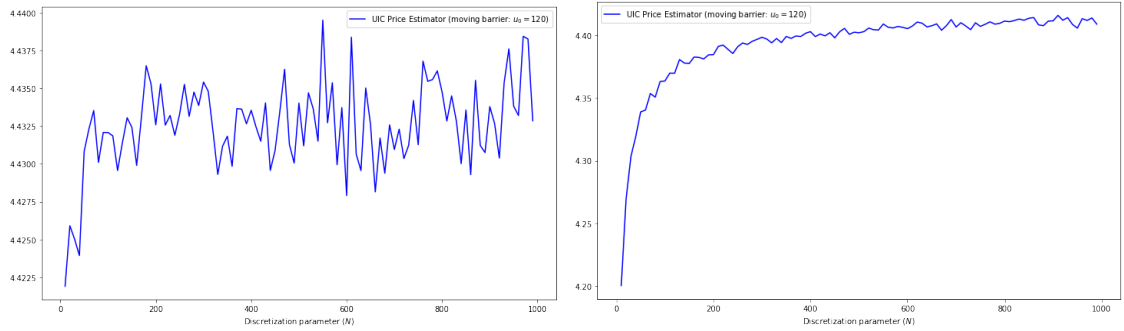


Figure 7: Convergence de l'estimateur Monte Carlo pour le schéma continu (à gauche) et le schéma discret (à droite) en fonction de  $N$  avec  $M = 10000$

Comme dans le cas d'une barrière statique, on remarque que les deux estimateurs convergent vers deux valeurs différentes, la différence étant un peu près de l'ordre de  $\sim 0.02$ . De plus, comparé à la convergence en  $M$  des estimateurs pour le contrat à barrière fixe, on peut dire que cet estimateur est satisfaisant pour  $M \sim 30000$  dans le cas de la barrière mobile contrairement à  $M \sim 80000$  pour la barrière fixe.

Il sera intéressant aussi d'analyser l'évolution de l'erreur faible pour ces estimateurs. La seule difficulté est d'avoir accès au prix exacte du contrat UIC pour ce type de barrière linéaire dans le cadre de B&S. En effet, [4] a traité le sujet du pricing d'options à barrières supérieures et inférieures non constantes et a proposé une formule fermée pour le prix de ces options dans le cas de barrières exponentielles uniquement. [5] propose non pas une formule fermée mais un encadrement du prix de ce type de contrats avec des bornes exprimées en fonction de doubles intégrales.

L'absence d'une formule fermée pour le prix rend donc l'étude de l'erreur faible impossible dans notre cas.

### 3.3.3 Vers la réduction de la variance par échantillonnage préférentiel

L'objectif dans cette sous-section est de traiter le cas où  $u_0 \gg S_0$  (Ce cas est plus adapté à notre approche précédente) pour la barrière mobile. Ce cas est assez particulier car, dans le cadre du pricing d'un contrat UIC, mène à une situation de sous-échantillonnage. Plus exactement, la probabilité d'être en dessus de la barrière est très faible et donc on n'obtient pas assez d'information à partir de la simulation des trajectoires du prix du sous-jacent. C'est ainsi qu'on va recourir à l'échantillonnage préférentiel permettant un changement de probabilité optimal éliminant tout sous-échantillonnage ou sur-échantillonnage.

L'approche à adopter dans le cas des contrats d'options barrière n'est pas triviale. En effet, on s'est inspiré des résultats de [6]. Dans cet article une méthode d'échantillonnage préférentiel est proposée et est basé sur un exponential twisting. La grande difficulté est d'adapter le pricing dans le cadre d'une barrière mobile à cette approche de l'échantillonnage préférentiel. En effet, dans [6] l'approche proposée est valable dans un cadre B&S avec drift et volatilité constante. Or dans la sous-section précédente, on a introduit le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  qui est à drift dépendant du temps, ce qui rend impossible l'adoption de la méthode [6] dans notre cas.

### 3.4 Extrapolation multi-level de Richardson-Romberg pour le pricing des contrats UIC

L'idée dans cette section est d'essayer d'adapter la méthode d'extrapolation multi-level de Richardson-Romberg à l'estimation du prix d'un contrat UIC.

Cette méthode repose sur l'hypothèse fondamentale que l'erreur faible de discretisation temporelle induite par le schéma d'Euler admet un développement asymptotique d'ordre  $R \geq 2$ . Plus exactement, si  $f$  est une fonction borélienne bornée ou à croissance polynomiale,  $(X_t)_{t \geq 0}$  solution forte unique d'une EDS et  $T > 0$  alors

$$\mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{c_k}{n^k} + \mathcal{O}(n^{-R}) \quad (19)$$

où  $c_k, k = 1, \dots, R-1$  sont des constantes réelles ne dépendants pas du paramètre de discrétisation  $n$ .

Comme évoqué précédemment, les résultats relatifs aux vitesses de décroissance de l'erreur faible pour le schéma d'Euler introduits dans [1, 2] ne sont généralement pas vérifiés dans le cas des options barrières et donc il est difficile d'avoir un apriori sur le développement asymptotique de l'erreur faible pour le schéma d'Euler. Néanmoins, en s'inspirant de [7], on fera l'hypothèse que l'erreur faible pour le schéma d'Euler discret admet le développement suivant

$$\mathbb{E}((S_T - K)_+^1 \sup_{t \in [0 : T]} S_{t \leq D}) = \mathbb{E}((\bar{S}_T - K)_+^1 \sup_{t \in [0 : T]} \bar{S}_{t \leq D}) + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{c_k}{n^{\frac{k}{2}}} + \mathcal{O}(n^{-\frac{R}{2}}), \quad (20)$$

Ainsi que l'erreur faible pour le schéma d'Euler continu admet le développement suivant

$$\mathbb{E}((S_T - K)_+^1 \sup_{t \in [0 : T]} S_{t \leq D}) = \mathbb{E}((\tilde{S}_T - K)_+^1 \sup_{t \in [0 : T]} \tilde{S}_{t \leq D}) + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{c_k}{n^k} + \mathcal{O}(n^{-R}), \quad (21)$$

Dans la suite, on considérera les cas où  $R = 2$  et  $R = 3$ .

En gardant les mêmes notations que dans [7], les coefficients optimaux de l'extrapolation

multi-levels pour le schéma discret assurant un contrôle de la variance des estimateurs sont donnés par

- $R = 2$ :

- $\alpha_1 = -(1 + \sqrt{2})$
- $\alpha_2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$

- $R = 3$ :

- $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}$
- $\alpha_2 = -2\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}$
- $\alpha_3 = 3\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}$

Ainsi que pour le schéma continu on considère

- $R = 2$ :

- $\alpha_1 = -1$
- $\alpha_2 = 2$

- $R = 3$ :

- $\alpha_1 = \frac{1}{2}$
- $\alpha_2 = -4$
- $\alpha_3 = \frac{9}{2}$

D'autre part, une simulation consistante et optimale des mouvements brownien des différents schéma a été faite en suivant les résultats de [7]. De plus, on se concentrera sur l'extrapolation R-R du schéma d'Euler avec pont brownien, ce qui permettra de réduire considérablement la complexité combinatoire. Les résultats des simulations son présentés si-dessus:

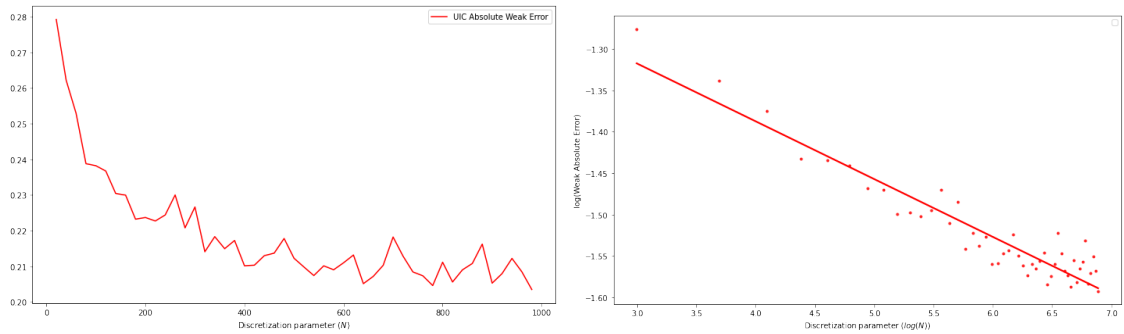


Figure 8: Convergence de l'estimateur Monte Carlo ( $R = 2$ ) pour le schéma discret en fonction de  $N$  avec  $M = 50000$

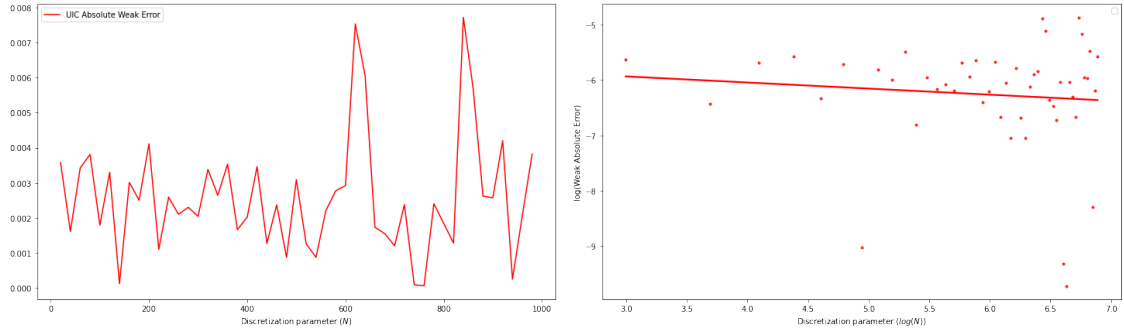


Figure 9: Convergence de l'estimateur Monte Carlo ( $R = 2$ ) pour le schéma continu en fonction de  $N$  avec  $M = 50000$

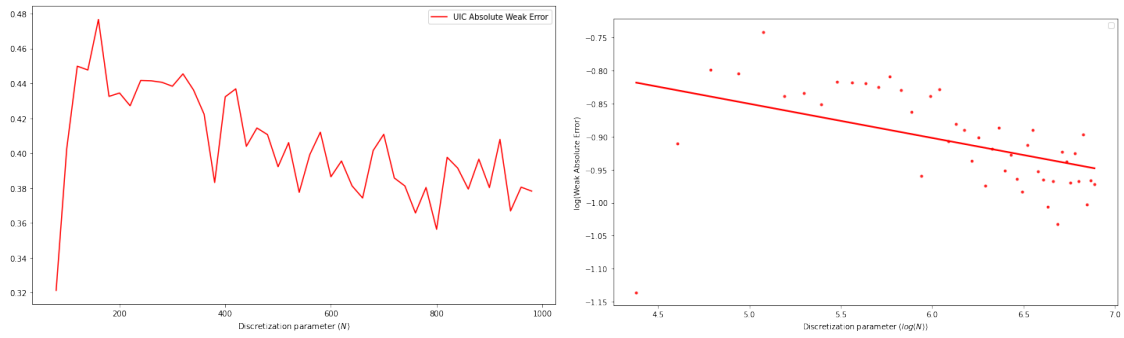


Figure 10: Convergence de l'estimateur Monte Carlo ( $R = 3$ ) pour le schéma discret en fonction de  $N$  avec  $M = 50000$

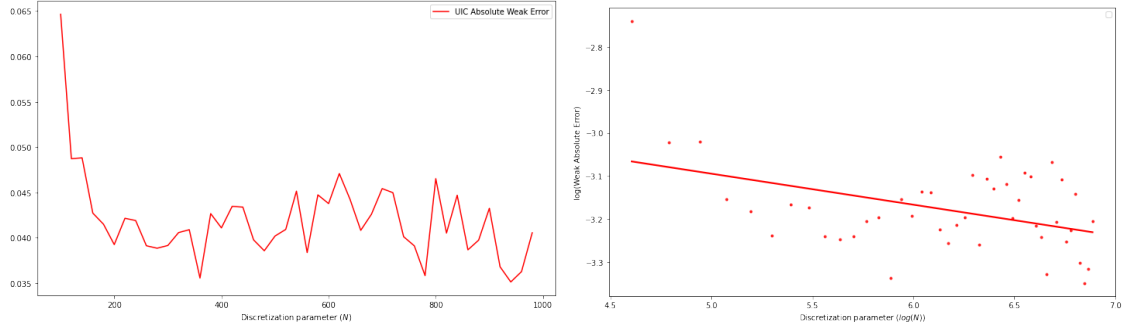


Figure 11: Convergence de l'estimateur Monte Carlo ( $R = 3$ ) pour le schéma continu en fonction de  $N$  avec  $M = 50000$

D'après les résultats numériques, on a que, pour  $R = 2$ , la décroissance de l'erreur faible pour le schéma discret est en  $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$  avec  $\alpha = 0.08125$  alors que pour le schéma continu on a  $\alpha = 0.072106$ .

Les résultats obtenus ne sont pas en accord avec nos attentes. En effet, on s'attendait à avoir une amélioration de la vitesse de convergence des estimateurs. Plus exactement, avoir une convergence au moins en  $\mathcal{O}(N^{-1})$  pour le schéma discret et au moins en  $\mathcal{O}(N^{-2})$  pour le schéma continu.

Or, parmi les extrapolations proposées, une extrapolation de R-R d'ordre 3 avec un schéma d'Euler continu permet d'avoir une erreur faible assez petite.

## 4 Conclusion

Les options barrières représentent un cas pratique de produit financier traité sur les marchés dont le payoff n'est pas régulier ou borné. Cette caractéristique fait qu'un grand nombre de résultats théoriques de convergence des estimateurs du prix de ces contrats ne sont pas vérifiés. Cette situation complique la démarche à adopter pour pricer ces contrats puisqu'on est quasiment pas sûr d'avoir des approximations du prix qui sont satisfaisantes.

Les résultats numériques présentés dans ce rapport insiste sur cet aspect. En effet, on a vu que non seulement les vitesses de convergence théoriques ne sont pas vérifiées en pratique mais aussi que la convergence de certains estimateurs vers la vraie valeur du prix n'est pas garantie, notamment pour le schéma d'Euler discret. Cette remarque est aussi valable pour les méthodes multi-level où l'objectif est d'améliorer les vitesses de convergence et d'avoir un contrôle optimal de la variance puisqu'on a pas pu aboutir à des résultats satisfaisants.



## References

- [1] Emmanuel GOBET (2000) Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes.
- [2] Emmanuel GOBET (2021) EULER SCHEMES AND HALF-SPACE APPROXIMATION FOR THE SIMULATION OF DIFFUSION IN A DOMAIN.
- [3] L.C.G Rogers and O.Zane: Valuing Moving Barrier Options.
- [4] Naoto Kunitomo (1992) Pricing Options With curved boundaries.
- [5] G.W.P Thompson: Bounds on the value of barrier options with curved boundaries.
- [6] Giray Ökten, Emmanuel Salta, Ahmet Göncü (2008) On pricing discrete barrier options using conditional expectation and importance sampling Monte Carlo.
- [7] Gilles Pagès (2007) Multi-step Richardson-Romberg Extrapolation: Remarks on Variance Control and Complexity.