



ANALYSE ET MODÉLISATION STATISTIQUE
MULTI-ÉCHELLE DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES
FINANCIÈRES

RAPPORT DE PROJET
-M2 PROBABILITÉS & FINANCE-

High-frequency trading in a limit order
book
(Marco Avellaneda & Sasha Stoikov)

By:
Youssef Annaki

March, 24th 2022

Contents

1	Introduction	2
2	Construction du modèle	4
2.1	Dynamique du mid-price:	4
2.2	Problème d’optimisation à horizon finie:	4
2.3	Problème d’optimisation à horizon infinie:	5
2.4	Ordres limites:	6
2.5	L’intensité de trading:	7
3	Solution du problème	8
3.1	Prix bid & ask optimaux:	8
3.1.1	Première approche (approche de l’article):	8
3.1.2	Deuxième approche (approche dans [4])	10
4	Backtests	14
	References	20

1 Introduction

L'article analysé [5] s'intéresse au problème de placement optimal d'ordres limites bid & ask dans un carnet d'ordre. Un agent (Dealer, Market Maker,...) cherchera à maximiser son P&L tout en minimisant son exposition au risque de volatilité ainsi qu'au risque de transaction qui est directement lié à la probabilité d'exécution de l'ordre limite placé par l'agent. Ainsi, un ordre limite ne doit pas être au **fond du order book** (faible probabilité d'exécution) et pas **trop proche des best prices** (exposition à la volatilité et gain réduit), d'où l'intérêt de trouver un placement **optimal**.

Pour ce faire, à un agent est associée une fonction d'utilité qui reflète ses préférences en terme de position sur le carnet d'ordre et tout le problème **d'optimisation** sera basé sur cette fonction. L'agent sera caractérisé aussi, en plus de sa fonction d'utilité, par un inventaire (la quantité d'actifs détenus à l'instant initial), ainsi que par un paramètre d'aversion au risque de changement de prix.

L'étude proposée dans l'article se base sur un certain nombre d'hypothèses que je me permettrai de développer ou de remettre en question:

- Le risque d'asymétrie d'information et la présence de trader **informé** est négligé.
- Absence de compétition:
Cette hypothèse n'implique pas que l'agent est complètement isolé des autres acteurs présents dans le carnet d'ordre. En effet, on verra après que la stratégie proposée tiens compte (partiellement) de l'information dans le carnet (notamment le mid-price), et donc que l'agent **observe** le résultat des interactions des autres agents. Or, si l'agent est un Market Maker, le fait qu'il ne soit pas en compétition implique qu'il sera tenter de proposer des spreads importants maximisant son P&L, contrairement à la situation où d'autres Market Makers seront présents. Pour ce dernier raisonnement, je me suis inspiré du MRR model (Madhavan, Richardson, and Roomans 1997) qui donne quelques intuitions à ce sujet.
- Le prix effectif est donné par le mid price:
Il est bien clair que cette hypothèse est loin d'être réaliste puisqu'on sait très bien qu'un carnet d'ordre (et donc l'actif en question) est caractérisé par un bid-ask spread qui lui est directement lié au tick size [1]. L'existence de ce spread implique qu'il y a une incertitude sur le prix, et le prix effectif oscille entre le prix des best limits et autour du mid price. Cela fait que un changement de prix est observé que si les agents jugent que l'écart entre le prix effectif et le last traded price est suffisamment grand (on retrouve bien l'idée que les agents sont averses aux changements de prix). Dans le cadre de l'article analysé, le prix effectif est le reflet de l'équilibre/l'état du carnet d'ordre et est donc explicite.

Le placement optimal des prix côté ask et bid tiendra en compte de l'intensité d'arrivée des Market orders, du temporary market impact ainsi que de la distribution de la taille des Market order.

La détermination des prix optimaux se fera en deux étapes. D'abord, un prix d'indifférence ou prix de réservation est déterminé. Ce prix est propre à l'agent et tient en compte l'inventaire de ce dernier. Puis, un spread est calculé et qui dépend de l'état du carnet d'ordre, notamment de la distance des ordres à placer du mid-price, et donc de la probabilité d'exécution. Le prix final quoté est donc une combinaison entre le prix de réservation et le spread calibré sur le carnet d'ordre. On remarque bien que la stratégie de placement optimal

tiens en compte des considérations personnelles du risque de l'agent et de la dynamique du marché.

2 Construction du modèle

2.1 Dynamique du mid-price:

Comme mentionné dans l'introduction, le mid-price représente le bloc de base de la stratégie de placement optimal puisque c'est par rapport à ce dernier que les prix des ordres limitent de l'agent vont être fixés.

Dans l'article, un modèle diffusif est considéré pour ce mid-price et régit par un mouvement Brownien unidimensionnel. Pour des raisons de simplicité, le dynamique de ce mid-price est sans drift et avec une volatilité constante:

$$dS_u = \sigma dW_u, \quad (1)$$

avec $S_0 = s$. Le choix de cette dynamique est justifié dans l'article par le fait que l'agent n'a aucune information sur le drift ou la structure d'autocorrelation du prix de l'actif, et perçoit donc ce prix comme étant un pur bruit aléatoire. La première remarque que je peut faire concernant cette modélisation est le fait que le mid-price puisse prendre des valeurs négatives, ce qui n'est pas du tout acceptable. Or ce choix a été fait pour assurer le caractère borné de la fonction d'utilité proposée. D'autre part, on peut justifier le choix de cette dynamique par le fait qu'on se place sur des échelles de temps très petites où le trading haute fréquence prend place et où un mouvement Brownian arithmétique ressemble beaucoup à un mouvement Brownien géométrique.

2.2 Problème d'optimisation à horizon finie:

L'objectif de l'agent est de maximiser l'utilité exponentielle de son P&L à une date terminale T . Dans l'article, une fonction d'utilité convexe est considérée et les auteurs évoquent que: "This choice of convex risk measure is particularly convenient, since it will allow us to define reservation (or indifference) prices which are independent of the agent's wealth."

En effet, je ne suis pas d'accord avec ce dernier propos puisque, comme on le verra dans la suite, le reservation price va dépendre de l'inventaire de l'agent, et donc de sa richesse. D'autre part, en supposant que ce reservation price est indépendant de la richesse de l'agent, on aboutira en fin de compte à un reservation price identique pour tous les agents, ce qui rend le modèle proposé sans grand intérêt.

Avant de s'intéresser à une modélisation dynamique de l'agent, on analysera le problème dans le cas d'un agent "frozen" qui ne place pas d'ordre limite dans le carnet et qui détient une richesse initiale, notée x en dollars et une quantité q de l'actif S jusqu'à la date T . La fonction d'utilité de l'agent est donnée par

$$v(x, s, q, t) = \mathbb{E}_t[-\exp(-\gamma(x + qS_T))] \quad (2)$$

Elle est appelée fonction d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion). En parcourant les différents articles qui traitent le sujet du trading optimal avec contrôle stochastique, j'ai remarqué que ce choix de fonction d'utilité est assez classique. Elle peut être réécrite sous la forme

$$v(x, s, q, t) = -\exp(-\gamma x) \exp(-\gamma q s) \exp\left(\frac{\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T - t)}{2}\right) \quad (3)$$

qui montre bien la dépendance de cette fonction des paramètres du marché.

On définit le reservation bid price comme étant le prix qui rend l'agent indifférent entre son portefeuille présent, et son portefeuille avec un actif S supplémentaire. On définit de même le reservation ask price. Notons aussi que cette définition de prix ne concerne que l'agent

considéré.

Ainsi, le reservation bid price est défini par:

$$v(x - r^b(s, q, t), s, q + 1, t) = v(x, s, q, t) \quad (4)$$

Le reservation ask price est défini par:

$$v(x + r^a(s, q, t), s, q - 1, t) = v(x, s, q, t) \quad (5)$$

En combinant (1), (4), (5), on obtient les formules fermées

$$r^a(s, q, t) = s + (1 - 2q) \frac{\gamma \sigma^2 (T - t)}{2} \quad (6)$$

et

$$r^b(s, q, t) = s + (-1 - 2q) \frac{\gamma \sigma^2 (T - t)}{2} \quad (7)$$

On définit le reservation price ou indifférence prix par

$$r(s, q, t) = s - q \gamma \sigma^2 (T - t)$$

pour un agent qui détient q actif S . Ainsi, si $q > 0$, le reservation price est en dessous du mid-price ce qui signifie que l'agent désire liquider son inventaire en vendant l'actif. D'autre part, si $q < 0$ on retrouve la situation inverse.

2.3 Problème d'optimisation à horizon infini:

Le choix d'un temps terminal T dans le développement précédent implique que le reservation price dépend de $(T - t)$, et intuitivement plus l'agent est proche de T , moins il est exposé au risque de volatilité. Nous considérons maintenant une fonction objectif avec horizon infini

$$\hat{v}(x, s, q) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty -\exp(-\omega t) \exp(-\gamma(x + qS_t)) dt \right] \quad (8)$$

En définissant le reservation price comme précédemment, on trouve

$$\hat{r}^a(s, q) = s + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{(1 - 2q) \gamma^2 \sigma^2}{2\omega - \gamma^2 q^2 \sigma^2} \right) \quad (9)$$

$$\hat{r}^b(s, q) = s + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{(-1 - 2q) \gamma^2 \sigma^2}{2\omega - \gamma^2 q^2 \sigma^2} \right) \quad (10)$$

avec comme condition $\omega > \frac{1}{2} \gamma^2 q^2 \sigma^2$.

En analysant cette condition, on peut remarquer que $\sqrt{\frac{2\omega}{\gamma^2 \sigma^2}}$ forme une borne supérieure pour l'inventaire de l'agent. Dans la suite on choisira $\omega = \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 (q_{max} + 1)^2$ pour que les prix définies précédemment soient bornés. En effet, cette dernière condition revient à dire qu'un agent ayant un inventaire q (en valeur absolue) supérieur à q_{max} , ne peut pas placer d'ordre limite. Ce que j'interprète comme une limite de risque sur cet agent.

De plus, une autre condition sur q doit être explicitée pour que les prix reservations prices

soient bien définis. A ma grande surprise, l'article n'a pas abordé cette question, qui n'est pas à négliger. En effet, on doit aussi avoir,

$$q \in]-\infty; -1 - \sqrt{2(1 + \frac{\omega}{\gamma^2 \sigma^2})}] \cup [-1 + \sqrt{2(1 + \frac{\omega}{\gamma^2 \sigma^2})}; +\infty[$$

pour que \hat{r}^a soit bien défini, et

$$q \in]-\infty; -1 - \sqrt{2\frac{\omega}{\gamma^2 \sigma^2}}] \cup [-1 + \sqrt{2\frac{\omega}{\gamma^2 \sigma^2}}; +\infty[$$

pour que \hat{r}^b le soit aussi.

2.4 Ordres limites:

Dans cette section, on s'intéressera à un agent, caractérisé par son reservation price, capable de placer des ordres limites au prix p^b côté bid et au prix p^a côté ask pour l'achat/vente d'un seul actif S (order volume = 1) et s'attendra à ce que son ordre soit exécuté par un market order au prix choisi. On fait aussi l'hypothèse que les prix p^a et p^b peuvent être actualisés sans coût supplémentaire. Cela signifie que l'agent pourra adapter ses positions dans le carnet d'ordre à tout moment selon le niveau du mid-price. On note

$$\delta^b = s - p^b$$

et

$$\delta^a = p^a - s$$

Les deux distances δ^a et δ^b , ainsi que la forme du carnet d'ordre (order book depth, volumes at best, order book imbalance,...) déterminent la priorité d'exécution des ordres limites quand un market order de volume important arrive dans le book.

Il est aussi clair que l'arrivée d'une market order de volume Q important, implique un market impact et un mouvement considérable du prix d'équilibre. En notant p^Q le plus grand/petit (selon la nature du market order) prix auquel est exécuté le trade. On définit le temporary market impact par

$$\Delta p = p^Q - s$$

ou

$$\Delta p = s - p^Q$$

Remarquons que si le bid-ask spread est assez petit (ce qui dépend du tick size), Δp peut être assimilé au slippage. Ainsi, l'ordre limite placé par l'agent ne sera exécuté que si $\delta^a < \Delta p$ ($\delta^a > \Delta p$).

Cette forme du market impact a été reprise dans d'autres articles, notamment dans Bershova & Rakhlin [Bershova and Rakhlin, 2013], sauf qu'ils considèrent un market impact sous la forme d'un rendement :

$$\frac{p^Q - s}{s} \epsilon$$

où ϵ est le signe du trade.

D'autre part, on considère que l'ordre limite côté ask de l'agent va être exécuté suite à l'arrivée d'un market buy order avec une fréquence/intensité Poissonnienne $\lambda^a(\delta^a)$ décroissante en δ^a . De la même façon, l'ordre limite côté bid de l'agent va être exécuté suite à

l'arrivée d'un market ask order avec une fréquence/intensité Poissonnienne $\lambda^b(\delta^b)$ décroissante en δ^b .

L'hypothèse d'une intensité décroissante en la distance du mid-price est assez intuitive mais loin d'être parfaite puisque cette intensité dépend de beaucoup d'autres paramètres observables/quantifiables liés au carnet d'ordre. Or, en cherchant dans la littérature, je me suis convaincu que l'intensité considérée reste très raisonnable. En effet, il a été empiriquement observé Bouchaud et al. (2002) que cette intensité dépend fortement de la distance du bid/ask.

Le cadre de la modélisation des ordres ayant été présenté, on peut déduire que la richesse et l'inventaire de l'agent sont stochastiques et dépendent de l'arrivée des market buy/sell orders. En notant X_t la richesse de l'agent à l'instant t , on a

$$dX_t = p^a dN_t^a - p^b dN_t^b$$

où N_t^b est la quantité de l'actif S achetée par l'agent et N_t^a est la quantité de l'actif S vendue par ce dernier. N_t^b et N_t^a sont des processus de Poisson d'intensités λ^b et λ^a . La quantité de l'actif S détenue à l'instant t est

$$q_t = N_t^b - N_t^a.$$

L'objectif de l'agent capable de placer des ordres limites est

$$u(s, x, q, t) = \max_{\delta^a, \delta^b} \mathbb{E}_t[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_T))]$$

L'étape suivante consistera à déterminer la forme des intensités $\lambda^a(\delta^a)$ et $\lambda^b(\delta^b)$.

2.5 L'intensité de trading:

La fonction choisie pour modéliser l'intensité des Processus de Poisson définis ci-dessus doit être cohérente avec les phénomènes observés sur les marchés. On s'intéressera en particulier aux faits stylisés suivant:

- La fréquence des Market Orders.
- La distribution du volume de ces Market Orders.
- Le Temporary Market Impact d'un grand Marker Order.

Le fait de considérer ces trois faits stylisés pousse à considérer une intensité qui décroît comme fonction exponentielle ou fonction puissance. En effet, ce choix de fonctions est classique lors de la modélisation des flux d'ordres, et à titre d'exemple je cite l'article [2]. Pour des raisons de simplicité, on suppose que la fréquence Λ des Market buy/sell orders est constante. L'article propose une estimation de cette grandeur en divisant le volume total sur une journée par le volume moyen des Market Orders sur cette journée. Or, cette approche est loin d'être précise. En effet, on peut facilement se convaincre que cette fréquence n'est pas constante sur une journée. Il suffit de se rappeler les faits stylisés sur le traded volume et la volatilité réalisée sur une journée et remarquer que, l'activité juste après l'ouverture du marché et juste avant la fermeture étant beaucoup plus importante que l'activité en milieu de la journée, la fréquence des Market Orders ne sera pas stationnaire sur une journée. En notant par f^Q la densité du volume des Market Orders, on considère une fonction puissance pour cette dernière:

$$f^Q(x) \propto x^{-1-\alpha} \quad (11)$$

pour des x grands et $\alpha \in [1.4 : 1.54]$ selon le type d'actif (un grand nombre d'articles proposent des estimations du paramètre α).

D'autre part, en notant Δp le changement de prix à la suite d'une marker order de taille Q , on considère, en se basant sur Potters and Bouchaud [3], que

$$\Delta p \propto \ln(Q) \quad (12)$$

En rassemblant tous ces éléments, et par (11) et (12), on trouve

$$\lambda(\delta) = A \exp(-k\delta) \quad (13)$$

où $A = \frac{\Lambda}{\alpha}$, $k = \alpha K$ et K la constante de proportionnalité dans (12).

3 Solution du problème

3.1 Prix bid & ask optimaux:

3.1.1 Première approche (approche de l'article):

Dans cette sous-section, on présentera l'approche développée dans l'article puis dans la sous-section suivante, une autre méthode de résolution sera présentée.

Notre fonction objectif est

$$u(s, x, q, t) = \max_{\delta^a, \delta^b} \mathbb{E}_t[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_T))] \quad (14)$$

où le contrôle δ^a et δ^b dépendra du temps et de l'état du système (carnet d'ordre).

L'analyse de ce problème d'optimisation se base sur le principe de la programmation dynamique. L'idée est de montrer que u est la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 u_{ss} + \max_{\delta^b} \lambda^b(\delta^b)[u(s, x - s + \delta^b, q + 1, t)] + \max_{\delta^a} \lambda^a(\delta^a)[u(s, x + s + \delta^b, q - 1, t)] = 0 \\ u(s, x, q, T) = -\exp(-\gamma(x + qs)). \end{cases}$$

La solution de cette EDP non-linéaire est continue en les variables s , x et t et dépend des valeurs discrètes de l'inventaire q .

Puisque u peut de réécrire sous la forme

$$u(s, x, q, t) = -\exp(\gamma x) \exp(-\gamma \theta(s, q, t)) \quad (15)$$

Avec θ qui vérifie

$$\begin{cases} \theta_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \theta_{ss} - \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \theta_s^2 + \max_{\delta^b} [\frac{\lambda^b(\delta^b)}{\gamma} [1 - e^{\gamma(s - \delta^b - r^b)}]] + \max_{\delta^a} [\frac{\lambda^a(\delta^a)}{\gamma} [1 - e^{\gamma(s + \delta^a - r^a)}]] = 0 \\ \theta(s, q, T) = qs. \end{cases} \quad (16)$$

D'après la définition du reservation price, on a

$$r^b(s, q, t) = \theta(s, q + 1, t) - \theta(s, q, t) \quad (17)$$

et

$$r^a(s, q, t) = \theta(s, q, t) - \theta(s, q - 1, t) \quad (18)$$

Les reservations prices sont donc donnés par les relations implicites suivantes:

$$s - r^b(s, q, t) = \delta^b - \frac{1}{\gamma} \ln(1 - \gamma \frac{\lambda^b(\delta^b)}{\frac{\partial \lambda^b}{\partial \delta}(\delta^b)}) \quad (19)$$

et

$$r^a(s, q, t) - s = \delta^a - \frac{1}{\gamma} \ln(1 - \gamma \frac{\lambda^a(\delta^a)}{\frac{\partial \lambda^a}{\partial \delta}(\delta^a)}) \quad (20)$$

Ainsi, pour déduire les prix bid/ask optimaux, il faut procéder en deux étapes. D'abord, il faut résoudre l'EDP (21) pour obtenir les reservation prices $r^a(s, q, t)$ et $r^b(s, q, t)$. Puis, il faut résoudre les équations implicites (19) et (20) pour obtenir les distances optimales du mid-price $\delta^a(s, q, t)$ et $\delta^b(s, q, t)$.

Développement en q:

La grande difficulté vient du caractère hautement non linéaire de l'équation (21). C'est pour cette raison qu'on proposera un développement asymptotique en l'inventaire q . En combinant les équations (21), (19) et (20), et en utilisant les expressions exponentielles des intensités d'arrivée d'ordres, on obtient

$$\begin{cases} \theta_t + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{ss} - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma\theta_s^2 + \frac{A}{k+\gamma}(e^{-k\delta^a} + e^{-k\delta^b}) = 0 \\ \theta(s, q, T) = qs. \end{cases} \quad (21)$$

En considérant le développement asymptotique suivant

$$\theta(q, s, t) = \theta^0(s, t) + q\theta^1(s, t) + \frac{1}{2}q^2\theta^2(s, t) + \dots \quad (22)$$

D'après (18) et (17), on trouve que

$$r^a(s, q, t) = \theta^1(s, t) + (1 - 2q)\theta^2(s, t) + \dots \quad (23)$$

et

$$r^b(s, q, t) = \theta^1(s, t) + (-1 - 2q)\theta^2(s, t) + \dots \quad (24)$$

En utilisant les équations (23) et (24) ainsi que les conditions d'optimalité (19) et (20), on trouve la stratégie de placement optimale qui consiste à quoter un spread de

$$\delta^a + \delta^b = Z\theta^2(s, t) + \frac{2}{\gamma} \ln(1 + \frac{\gamma}{k}) \quad (25)$$

autour d'une reservation price donné par

$$r(s, q, t) = \frac{r^a + r^b}{2} = \theta^1(s, t) - 2q\theta^2(s, t) \quad (26)$$

En faisant un développement au premier ordre du taux d'arrivée d'ordre

$$\frac{A}{k+\gamma}(e^{-k\delta^a} + e^{-k\delta^b}) = \frac{A}{k+\gamma}(2 - k(\delta^a + \delta^b) + \dots)$$

et on utilisant l'équation (21), on obtient une forme explicite du reservation price et du spread à quoter

$$r(s, t) = s - q\gamma\sigma^2(T - t) \quad (27)$$

et

$$\delta^a + \delta^b = \gamma\sigma^2(T - t) + \frac{2}{\gamma}\ln(1 + \frac{\gamma}{k}) \quad (28)$$

ou encore,

$$\delta_t^b \approx \frac{1}{\gamma}\ln(1 + \frac{\gamma}{k}) + \frac{1 + 2q}{2}\gamma\sigma^2(T - t) \quad (29)$$

$$\delta_t^a \approx \frac{1}{\gamma}\ln(1 + \frac{\gamma}{k}) + \frac{1 - 2q}{2}\gamma\sigma^2(T - t) \quad (30)$$

3.1.2 Deuxième approche (approche dans [4])

Comme développé précédemment, l'article étudié propose une résolution du problème d'optimisation en recourant à des développements limités et des approximations asymptotiques. Or, dans [4] une approche de résolution directe est proposée et que je juge très intéressante. On verra par la suite que les approximations faites précédemment sont bien cohérentes.

Comme dans l'approche précédente, la fonction à optimiser est

$$u(s, x, q, t) = \sup_{(\delta_t^a)_t, (\delta_t^b)_t \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_t[-exp(-\gamma(X_T + q_T S_T))]$$

où \mathcal{A} est l'ensemble des processus prédictibles bornés inférieurement, γ est un paramètre d'aversion au risque de l'agent, X_T est le montant en cash au temps T et $q_T S_T$ est l'équivalent en cash de l'inventaire de l'agent.

La première étape est d'introduire l'équation HJB associé au problème d'optimisation. Plus précisément, on introduit le système d'EDP de HJB qui consiste en les équations indexées par $q \in (-Q; -Q + 1; \dots; Q - 1; Q)$ pour $(t, s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$:

Pour $|q| \leq Q$:

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x, q, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{ss}^2 u(t, x, q, s) \\ & + \sup_{\delta^b} \lambda^b(\delta^b) [u(t, x - s + \delta^b, q + 1, s) - u(t, x, q, s)] \\ & + \sup_{\delta^a} \lambda^a(\delta^a) [u(t, x + s + \delta^a, q - 1, s) - u(t, x, q, s)] = 0 \end{aligned}$$

Pour $q = Q$:

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x, Q, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{ss}^2 u(t, x, Q, s) \\ & + \sup_{\delta^a} \lambda^a(\delta^a) [u(t, x + s + \delta^a, Q - 1, s) - u(t, x, Q, s)] = 0 \end{aligned}$$

Pour $q = -Q$:

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x, -Q, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{ss}^2 u(t, x, -Q, s) \\ & + \sup_{\delta^b} \lambda^b(\delta^b) [u(t, x - s + \delta^b, -Q + 1, s) - u(t, x, -Q, s)] = 0 \end{aligned}$$

Avec comme condition finale:

$$\forall q \in (-Q; \dots; Q), u(T, x, q, s) = -exp(-\gamma(x + qs))$$

Pour résoudre ce problème, on recourt à un changement de variable:

Proposition 1 (Changement de variable pour HJB) Soit une famille $(v_q)_{|q| \leq Q}$ de fonctions positives solution de:

$$\forall q \in (-Q+1; \dots; Q-1), v'_q(t) = \alpha q^2 v_q(t) - \eta(v_{q-1}(t) + v_{q+1}(t))$$

$$v'_Q(t) = \alpha Q^2 v_Q(t) - \eta v_{Q-1}(t)$$

$$v'_{-Q}(t) = \alpha Q^2 v_{-Q}(t) - \eta v_{-Q+1}(t)$$

avec $\forall q \in (-Q; \dots; Q)$, $v_q(T) = 1$, où $\alpha = \frac{k}{2}\gamma\sigma^2$ and $\eta = A(1 + \frac{\gamma}{k})^{-(1+\frac{k}{\gamma})}$.
Ainsi, $u(t, x, q, s) = -\exp(-\gamma(x + qs))v_q(t)^{-\frac{\gamma}{k}}$ est solution de HJB.

La proposition suivante prouve l'existence d'une telle famille de fonctions:

Proposition 2 (Solution des EDO)

On introduit la matrice M définie par:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha Q^2 & -\eta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\eta & \alpha(Q-1)^2 & -\eta & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\eta & \alpha(Q-1)^2 & -\eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\eta & \alpha Q^2 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

où $\alpha = \frac{k}{2}\gamma\sigma^2$ et $\eta = A(1 + \frac{\gamma}{k})^{-(1+\frac{k}{\gamma})}$.

Définissons

$$v(t) = (v_{-Q}(t), v_{-Q+1}(t), \dots, v_0(t), \dots, v_{Q-1}(t), v_Q(t))' \quad (32)$$

$$= \exp(-M(T-t)) \times (1, \dots, 1)' \quad (33)$$

Alors, $(v_q)_{|q| \leq Q}$ est une famille de fonctions positives solution des équations dans la Proposition 1.

En utilisant le changement de variables précédent et par un argument de vérification, on est capable de trouver la forme explicite de la fonction valeur du problème de contrôle stochastique ainsi que les quotes optimales:

Théorème 1 (Solution du problème de contrôle) On considère $(v_q)_{|q| \leq Q}$ comme dans la proposition 2.

Alors, $u(t, x, q, s) = -\exp(-\gamma(x + qs))v_q(t)^{-\frac{\gamma}{k}}$ est la fonction valeur du problème de contrôle.

D'autre part, les quotes optimales sont données par:

$$s - s^{b*}(t, q, s) = \delta^{b*}(t, q) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_q(t)}{v_{q+1}(t)}\right) + \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), q \neq Q \quad (34)$$

$$s^{a*}(t, q, s) - s = \delta^{a*}(t, q) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_q(t)}{v_{q-1}(t)}\right) + \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), q \neq -Q \quad (35)$$

et le bid-ask spread de l'agent est:

$$\psi^*(t, q) = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_{q+1}(t)v_{q-1}(t)}{v_q(t)^2}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), |q| \neq Q$$

Pour avoir une idée sur la dynamique de δ^{a*} et δ^{b*} , je propose les figures suivantes:

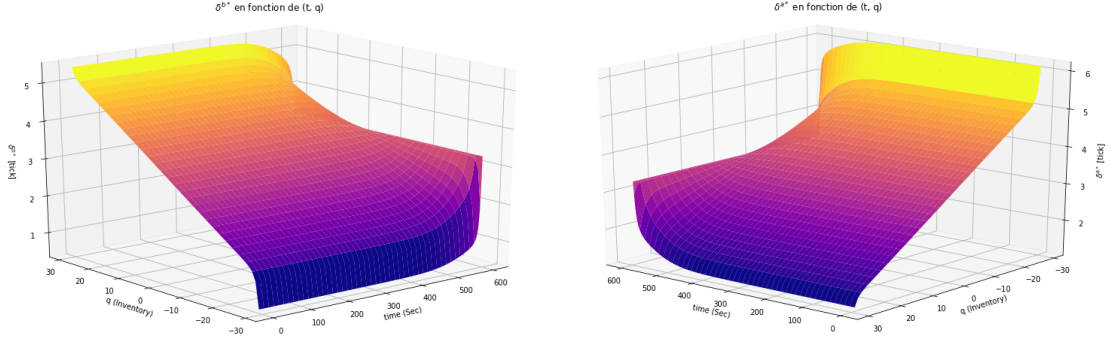


Figure 1: Comportement des optimal bid/ask quotes en fonction du temps et de l'inventaire.
 $\sigma = 0.3 \text{ Tick} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$, $A = 0.9 \text{ s}^{-1}$, $k = 0.3 \text{ Tick}^{-1}$, $\gamma = 0.01 \text{ Tick}^{-1}$, $T = 600s$

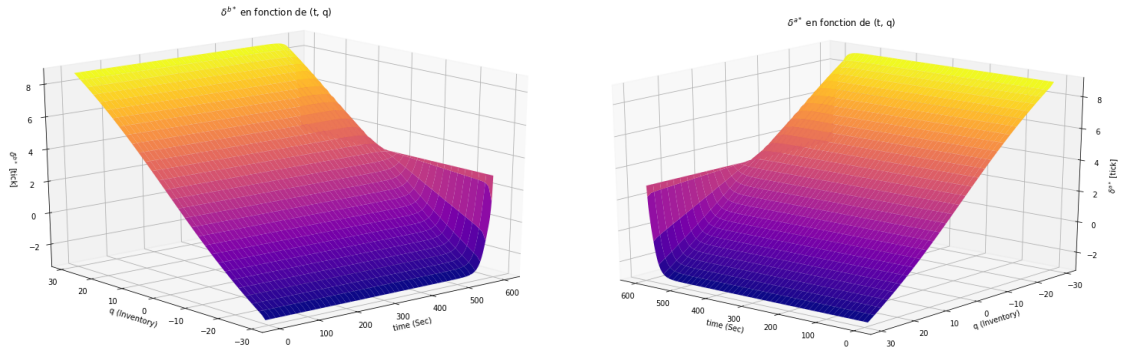


Figure 2: Comportement des optimal bid/ask quotes en fonction du temps et de l'inventaire.
 $\sigma = 0.3 \text{ Tick} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$, $A = 0.9 \text{ s}^{-1}$, $k = 0.3 \text{ Tick}^{-1}$, $\gamma = 0.1 \text{ Tick}^{-1}$, $T = 600s$

Les figures précédentes permettent de bien comprendre le comportement de l'agent ainsi que d'interpréter le paramètre γ .

Il a été évoqué précédemment que si l'inventaire q est positif, l'agent cherchera à liquider sa position en se plaçant du côté Ask, et si q est négatif, il se placera du côté Bid.

Les figures précédentes montrent bien que plus l'inventaire de l'agent est grand (en valeur positive), plus il est incité à avoir un petit spread et donc à placer ses ordres limites proche du best ask. Ce qui implique donc une exécution plus rapide. De la même manière, plus l'inventaire de l'agent est petit (en valeur négative), plus il est incité à avoir un petit spread et donc à placer ses ordres limites proche du best bid.

D'autre part, remarquons qu'en s'approchant de la maturité T , l'agent s'éloigne des best limits pour qu'il ne soit pas exécuté, puisque T représente pour lui un temps d'arrêt.

Concernant le paramètre γ , on peut interpréter ce dernier comme étant un paramètre

d'aversion au risque, au sens où plus γ est grand, plus l'agent cherche à minimiser son exposition à la volatilité (réduire le risque d'inventaire), et donc être exécuté le plus rapidement possible.

Ce qui justifie le fait que entre la figure 1 et la figure 2, la position optimale de l'agent peut être du côté opposé du carnet d'ordre (spread au mid négatif).

D'après mon interprétation, l'agent est prêt à réduire considérablement ses gains pour ne plus être exposé au risque de volatilité. Et j'interprète le spread au mid optimal négatif comme une pré-disposition à émettre un market order peu importe le slippage à subir (c'est comme si l'agent veut seulement se débarrasser de son inventaire).

Une autre remarque très importante est que les quotes optimales sont quasiment indépendantes de t , pour t loin de la maturité T .

En effet, on peut montrer que les approximations faites dans l'article analysé en utilisant un développement en q (sous section précédente) n'est rien d'autre qu'un développement de Taylor des quotes optimales pour t proche de T de la fonction spread obtenue dans cette partie.

D'autre part, la figure suivante représente l'évolution du bid/ask spread de la position optimale de l'agent.

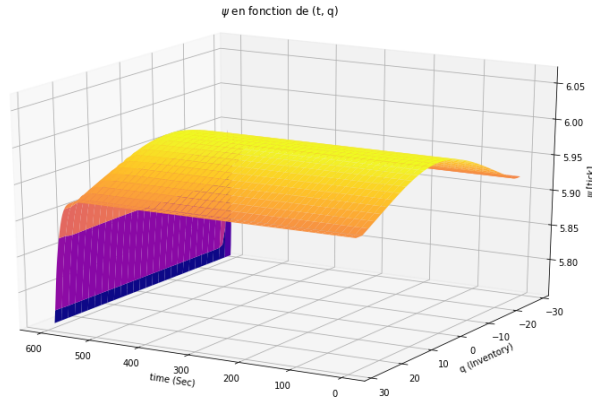


Figure 3: Comportement du bid/ask optimal quotes spread en fonction du temps et de l'inventaire.

$\sigma = 0.3 \text{ Tick} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$, $A = 0.9 \text{ s}^{-1}$, $k = 0.3 \text{ Tick}^{-1}$, $\gamma = 0.1 \text{ Tick}^{-1}$, $T = 600s$

Dans le cas où $T \rightarrow \infty$ (loin de la maturité), on a les formules asymptotiques suivantes:

$$\delta_{\infty}^{b*}(q) = \frac{1}{\gamma} \log\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right) + \frac{1+2q}{2} \sqrt{\frac{\sigma^2 \gamma}{2kA} \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right)^{1+\frac{k}{\gamma}}} \quad (36)$$

$$\delta_{\infty}^{a*}(q) = \frac{1}{\gamma} \log\left(1 + \frac{\gamma}{k}\right) + \frac{1-2q}{2} \sqrt{\frac{\sigma^2 \gamma}{2kA} \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right)^{1+\frac{k}{\gamma}}} \quad (37)$$

Lors des différentes simulations numériques j'ai remarqué que l'inconvénient majeur lors de l'utilisation des formules (35) et (34) est que certaines composantes du vecteur v (3.1.2) explosent, ce qui rend certaines paramétrisations du modèle impossible à étudier. En effet, un contrôle sur l'inventaire doit être fait pour assurer qu'il soit compris entre $-Q_{max}$ et $+Q_{max}$. C'est pour cette raison que je considérerai dans les simulations numériques, les formules (30) et (29).

Dans [4], des extensions du modèle sont présentées, notamment dans le cas d'une dynamique du mid-price avec drift et dans le cas d'un market impact qui est pris en compte.

4 Backtests

Dans cette partie, je mettrai en pratique la stratégie de placement optimal développée dans les sections précédentes. Avant de parler de backtest sur données historiques, il faut revenir sur quelques points concernant le modèle. Tout d'abord, il faut noter que le modèle de placement optimal analysé est développé dans un cadre de temps et prix continus et donc les quotes optimales générées peuvent être placées à n'importe quel niveau de prix. Or, comme on le sait bien, le marché à l'échelle de la microstructure est discret et est caractérisé par un tick-size. Pour éviter que les quotes optimales soient entre deux ticks, j'arrondirai ces quotes au plus proche niveau de prix dans le carnet d'ordre.

Durant le backtest, deux ordres limites (côté bid et ask) seront placés dans le carnet d'ordre selon les quotes optimales calculées de taille égale au Average Trade Size (ATS). Si l'un des deux ordres est exécuté, j'actualiserai les quotes optimales en prenant en compte la nouvelle version du carnet d'ordre (après exécution). Si aucun des deux ordres n'est exécuté sur une période Δt , alors j'actualiserai à nouveau les quotes optimales (ce qui correspondra à une annulation puis une nouvelle insertion d'ordre limite sur dans le book).

Concernant les paramètres, σ , A et k , ces derniers peuvent être calibrés sur les données trade-by-trade du carnet d'ordre. Comme indiqué dans [4], A et k dépendent au moins du bid/ask spread. Pour le backtest, je considérerai des valeurs choisies indépendamment du spread, et le paramètre γ est à fixer selon l'aversion au risque de l'agent.

Le backtest se fera sur des données trade-by-trade et on supposera que l'ordre placé par l'agent est exécuté une fois un trade a eu lieu au même prix ou à un niveau de prix supérieur (si l'ordre est placé du côté ask), ou à un niveau de prix inférieur (si l'ordre est placé du côté bid). Ainsi, je ne prends pas en compte la répartition des quantités placées sur chaque limite. L'ordre d'exécution est aussi négligé puisque introduire un ordre du type FIFO ou par fraction du volume dans la limite considérée compliquera considérablement la mise en application du modèle.

Je dispose des données trade-by-trade sur une journée de 5 stocks du CAC40 (AXA, BNP, CARREFOUR, LVMH, TOTAL).



Figure 4: Évolution du mid-price du cours de BNP

Dans ce qui suit, le backtest se fera sur l'action BNP.

Le spread optimal à quoter sera centré soit sur le mid-price et soit sur le réservation price. D'autre part, on comparera deux stratégies différentes. La stratégie **1** se base sur un spread centré sur le mid price et la stratégie **2** se base sur un spread centré sur le reservation price. On fixe $\sigma = 30\%$, $k = 0.3$, $A = 0.9$ et inventaire initial = 10.

$\gamma = 2$:

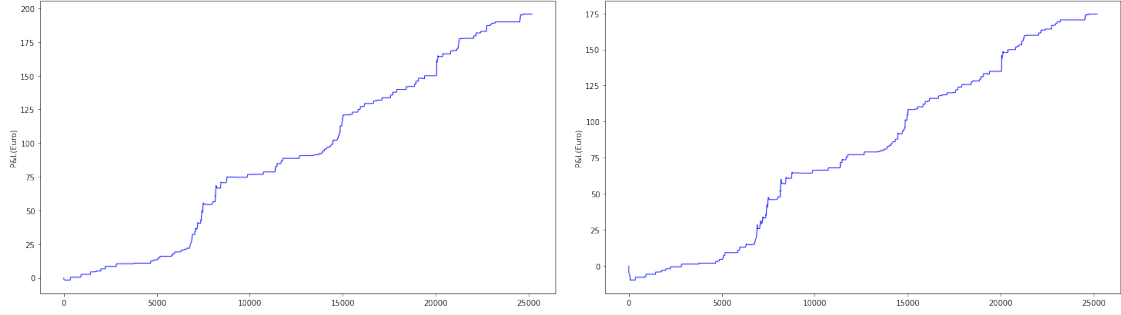


Figure 5: A gauche, stratégie **1**, à droite stratégie **2**

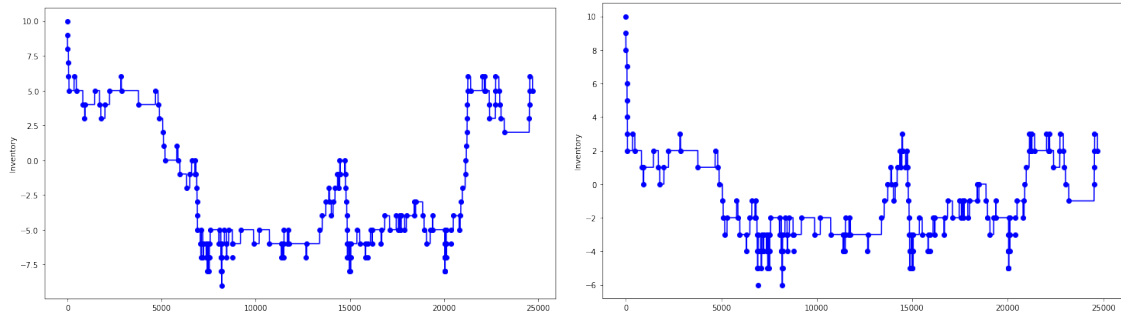


Figure 6: A gauche, stratégie **1**, à droite stratégie **2**

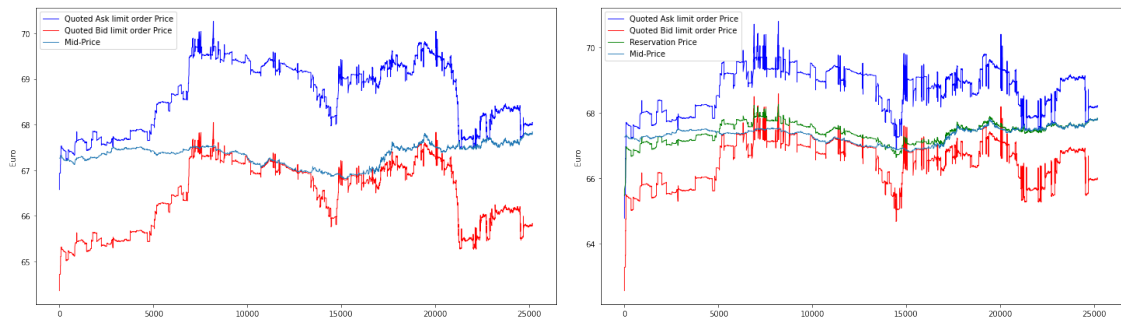


Figure 7: A gauche, stratégie **1**, à droite stratégie **2**

$\gamma = 0.1$:

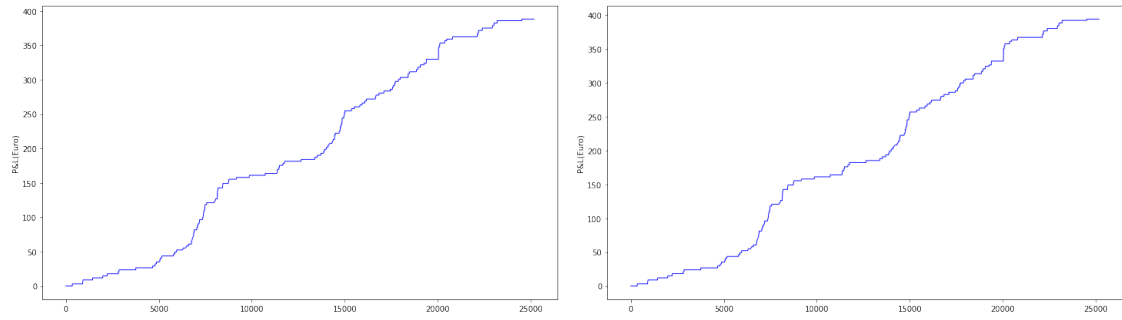


Figure 8: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

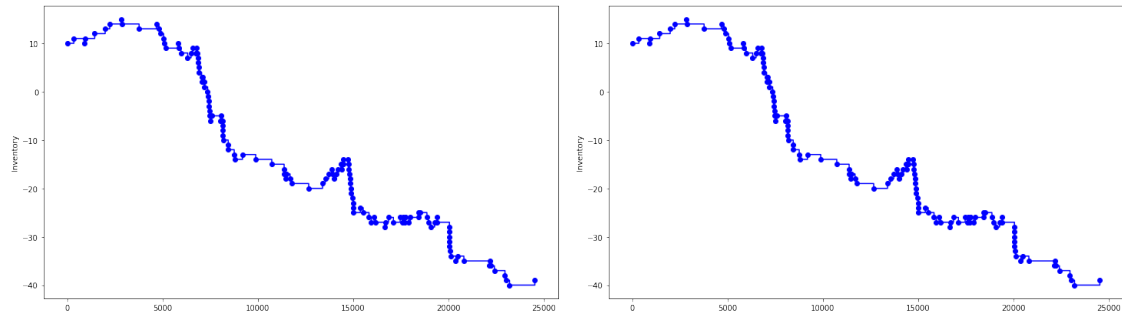


Figure 9: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

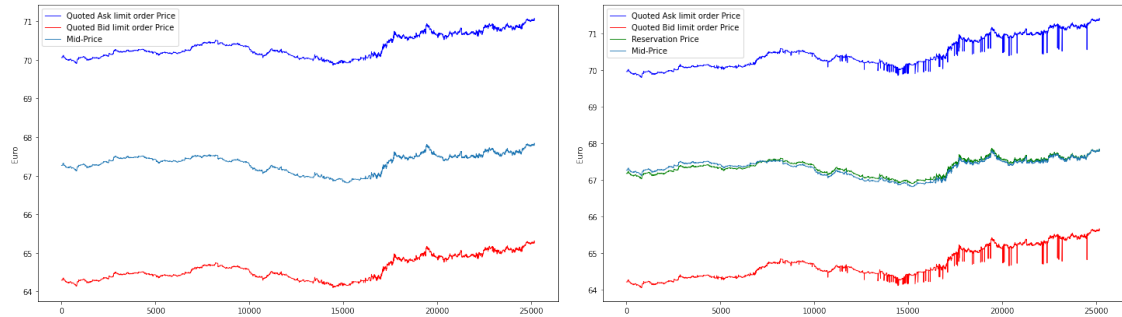


Figure 10: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

$\gamma = 10$:

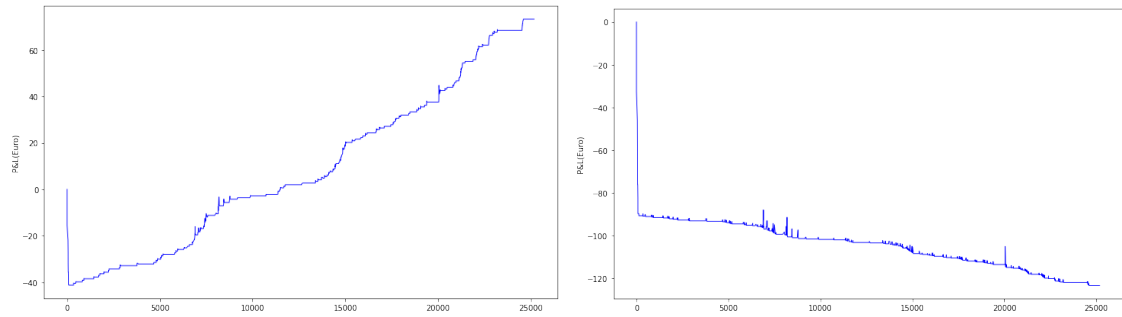


Figure 11: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

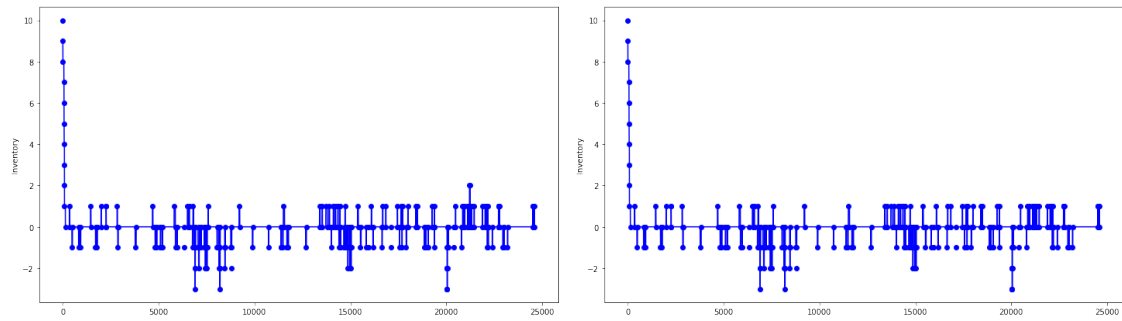


Figure 12: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

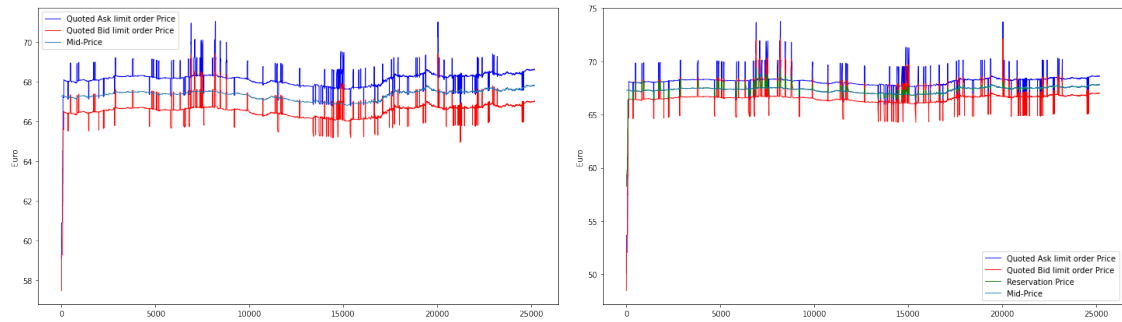


Figure 13: A gauche, stratégie 1, à droite stratégie 2

En comparant les figures précédentes, on voit très bien la dépendance de la performance de la stratégie par rapport au degré d'aversion au risque de volatilité de l'agent. Ainsi, plus γ est petit, plus l'agent est moins averse au risque, et plus il se permet de quoter un spread relativement grand et donc augmenter son $P\&L$. Cela s'accompagne par un taux d'exécution d'ordre qui est réduit, ainsi qu'une forte dépendance sur les Market Orders (ayant un volume important) pour être exécuté. De plus, cette agent faiblement averse au risque, n'hésite pas à avoir un inventaire important (en valeur absolue).

Inversement, plus γ est grand, plus l'agent cherche à être exécuté le plus rapidement possible, et donc quoter un spread qui est faible. Cela implique un $P\&L$ plus faible puisqu'il est exposé aux variations des best prices avec une faible marge de gains. De plus, l'inventaire de cet agent est moins important que celui d'un agent faiblement averse au risque et est mean reverting.

On peut qualifier ce dernier agent de "agent impatient" et dire qu'il adopte une stratégie du type "Pegging to the best".

Si on compare maintenant les deux stratégies, ces deux dernières ne présentent pas une grande différence pour de faibles valeurs de γ (agent faiblement averse au risque), puisque le reservation price est proche du mid price dans ce cas (voir formule (27)).

Or, pour de grandes valeurs de γ , le $P\&L$ de la stratégie centrée sur le reservation price n'est pas du tout satisfaisant. Pour comprendre la raison derrière cela, il faut comparer le reservation price et le mid price.

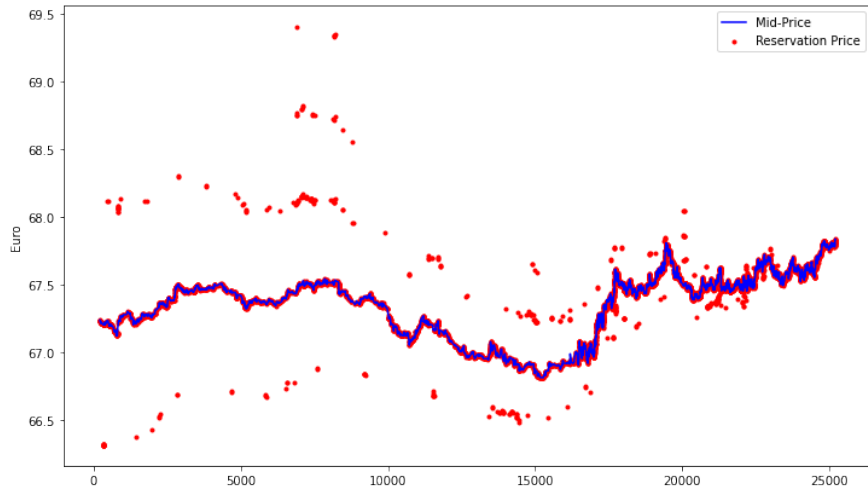


Figure 14

En effet, dans la figure (14), on voit que le reservation price (γ grand) s'écarte considérablement du mid price. Cela implique que les prix optimaux pour l'agent sont très loin des best limits, à tel point qu'on peut dire que ces prix quotés sont placés de façon un peu chaotiques. D'autre part, le fait que ces prix optimaux soient loin des best limits est en contradiction avec le caractère averse au risque de l'agent.

Pour conclure cette section de Backtest, je propose les tableaux comparatifs des deux stratégies pour le backtest (1 trading day) sur les données trade-by-trade, pour les mêmes valeurs des paramètres précédents et pour $\gamma = 2$.

Les valeurs présentées dans le tableau représentent les valeurs finales (à maturité T) obtenues pour chaque stratégie.

	$P\&L$ 1	Inventaire 1	$P\&L$ 2	Inventaire 2
BNP	195.67	5	174.47	2
LVMH	185.83	-5	184.6	-2
TOTAL	116.34	2	101.54	2
AXA	175.52	-5	158.6	-2
CARREFOUR	58.02	6	44.54	3

References

- [1] Zoltán Eisler, Jean-Philippe Bouchaud, Julien Kockelkoren (2009) The price impact of order book events : market orders, limit orders and cancellations. ArXiv.org, Capital Fund Management.
- [2] Ioane Muni Toke, Nakahiro Yoshida (2020) Marked point processes and intensity ratios for limit order book modeling. ArXiv:2001.08442v1.
- [3] M. Potters and J.-P. Bouchaud, More Statistical Properties of Order Books and Price Impact, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324 (2003).
- [4] O. Guéant, C-A. Lehalle, J. Fernandez-Tapia (2012) Dealing with the Inventory Risk: A solution to the market making problem. ArXiv:1105.3115v5.
- [5] Marco Avellaneda, Sasha Stoikov (2006) High-frequency trading in a limit order book.