Ekstremal meseleler nazaryýeti dersi näme?

Bilmeli ýönekeý soraglary:

1. Ekstremal meseleler nazaryýeti nämäni öwrenýär? Jogaby: maksimum we minimum tapmak meselelerini we olary çözmek usullaryny işläp taýýarlamagy öwrenýär.
2. *Maksat funksiýasy näme?* Jogaby: Minimumy ýa-da maksimumy gözlenýän funksiýa maksat funksiýasy diýilýär.
3. *Ekstremal meseläniň umumy görnüşi nähili?* Jogaby: Umumy ýagdaýda mesele aşakdaky ýaly bolýar: *käbir X giňişlikde kesgitlenen, $x \in D$ $(D \subset X)$ çäklendirmesi bolan $f: X \to R$ funksiýanyň ekstremumyny (maksimumyny we minimumyny) tapmaly*. Bu mesele gysgaça şeýle ýazylýar: $f(x) \to extr;\ x \in D$. Bir üýtgeýän ululykly funksiýa üçin $X = R$, birnäçe üýtgeýän ululykly funksiýa üçin bolsa $X = R^n$ bolar. Has umumy ýagdaýda X çyzykly, normalaşdyrylan ýa-da topologik giňişlik bolup biler.
4. Stasionar nokat näme? Jogaby: Ekstremal meselelerde ekstremumyň zerur şertlerini meseläniň çözüwi kanagatlandyrmalydyr. Ekstremumyň zerur şertlerini ýazmak bilen biz nokatlaryň bu şertleri ýerine ýetirýän käbir köplügini tapýarys. *Stasionar nokatlar*, *kritiki nokatlar* ýa-da *ekstremal nokatlar* diýlip atlandyrylýan bu nokatlar köplügi ekstremumlaryň absolýut köplüginden, hat-da ekstremumlaryň lokal köplüginden hem giň bolmagy mümkin.
5. Fermanyň teoreması. Jogaby: Goý, $f: R \to R$ bir üýtgeýän ululykly funksiýa bolsun. Eger $\hat{x}$ nokat f funksiýanyň lokal ekstremum nokady $(\hat{x} \in \operatorname{locextr} f)$ we f funksiýa $\hat{x}$ nokatda differensirlenýän bolsa $\left(f \in D(\hat{x})\right)$, onda $f'(\hat{x}) = 0$ bolar.
6. Minimumyň II tertipli zerur şertleri nähili kesgitlenýär? Jogaby: Goý, f funksiýa $\hat{x}$ nokatda iki gezek differensirlenýän bolsun $\left(f \in D^2(\hat{x})\right)$. Eger $\hat{x}$ nokat f funksiýanyň lokal minimum nokady $(\hat{x} \in \operatorname{locmin} f)$ bolsa, onda $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) \geq 0$ bolar.
7. Minimumyň II tertipli ýeterlik şertleri nähili kesgitlenýär? Jogaby: Goý, f funksiýa $\hat{x}$ nokatda iki gezek differensirlenýän bolsun $\left(f \in D^2(\hat{x})\right)$. Eger $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$ bolsa, onda $\hat{x}$ nokat f funksiýanyň lokal minimum nokady bolar $(\hat{x} \in \operatorname{locmin} f)$.
8. Kwadrat üçagza baradaky esasy teorema nähili kesgitlenýär? Jogaby: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ kwadrat üçagza $\hat{x} = -\frac{b}{2a}$ bolanda ekstremal baha eýedir. Eger $a > 0$ bolsa, onda bu baha iň kiçi bolar, we eger $a < 0$ bolsa, onda ol iň uly bolar. Eger f_{max} bar bolsa, onda f_{min} bolmaz we tersine.
9. Esasy teoremanyň ulanylyşyna degişli mysal getirmeli. Jogaby: Şol bir perimetre eýe bolan hemme gönüburçluklaryň içinde iň uly meýdana eýe bolýany kwadratdyr.

10. Položitel sanlaryň orta geometrik bahasy baradaky teorema. Jogaby: Položitel sanlaryň islendik mukdarynyň orta geometrik bahasy olaryň orta arifmetiki bahasyndan uly däldir: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
11. Minimumlaşdyrmanyň göni usullary nämeden ybarat? Jogaby: Eger bir üýtgeýän ululykly funksiýanyň minimumyny tapanlarynda funksiýanyň seredilýän aralygyň nokatlaryndaky bahalaryny peýdalanýan bolsalar we onuň önümleriniň bahalaryny peýdalanmaýan bolsalar, onda şeýle usullara *göni usullar* diýilýär.
12. Minimumlaşdyrmanyň gowşak usullary. Jogaby: Goý, bir üýtgeýän ululykly hakyky skalýar $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň kiçi bahasyny ýa-da anyk aşaky çägini, ýagny $\hat{f}$ ululygy tapmak talap edilsin. Eger funksiýanyň bahalarynyň hasaplanjak hemme x_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N)$ nokatlary öňünden saýlansa (funksiýanyň bu nokatlardaky bahalary hasaplanmanka), onda $\hat{f}$ ululygyň gözlegi *gowşak usul* diýlip atlandyrylýar.
13. Minimumlaşdyrmanyň yzygiderli usullary. Jogaby: Goý, bir üýtgeýän ululykly hakyky skalýar $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň kiçi bahasyny ýa-da anyk aşaky çägini, ýagny $\hat{f}$ ululygy tapmak talap edilsin. Eger x_k nokatlar yzygiderli saýlansa (indiki nokady saýlamak üçin funksiýanyň öňki nokatlarda hasaplanan bahalaryndan peýdalanýarlar), onda onda $\hat{f}$ ululygyň gözlegi *yzygiderli usul* diýlip atlandyrylýar.
14. Kesimi altyn kesme diýlip nämä aýdylýar? Jogaby: Kesimi *altyn kesme* diýlip ony tutuş kesimiň uzynlygynyň uly böleginiň uzynlygyna bolan gatnaşygynyň uly böleginiň uzynlygynyň kiçi böleginiň uzynlygyna bolan gatnaşygyna deň bolan iki sany deň bolmadyk böleklere bölmek usulyna aýdylýar.
15. Çäklendirilmedik tükenikli ölçegli meseläniň goýluşy. Jogaby: Goý, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ käbir endiganlyga eýe bolan n hakyky üýtgeýän ululykly funksiýa bolsun. Endiganlyk diýip funksiýanyň kesgitli differensirlenmegine düşüneris. Eger f funksiýa $\hat{x}$ nokatda k gezek differensirlenýän bolsa, onda $f \in D^k(\hat{x})$ diýip ýazarys. *Çäklendirilmedik tükenikli ölçegli endigan mesele* diýlip $f(x) \to \text{extr}$ meselä aýdylýar.
16. Çäklendirilmedik tükenikli ölçegli meselede ekstremumyň I tertipli zerur şerti. Jogaby: Eger $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ nokat n üýtgeýänli $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiýanyň lokal ekstremum nokady ($\hat{x} \in \text{locextr}\, f$) we f funksiýa $\hat{x}$ nokatda differensirlenýän bolsa ($f \in D(\hat{x})$), onda $f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0$.
17. n üýtgeýänli funksiýalaryň II önümleriniň matrisasy nähili kesgitlenýär? Jogaby: $A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$.
18. Güberçek köplükleriň birnäçesiniň kesişmesi we birleşmesi nähili bolar? Jogaby: kesişmesi güberçek köplük bolar, birleşmesi güberçek bolman hem biler.

19. Bolsanyň meselesi nähili kesgitlenýär? Jogaby: *Bolsanyň meselesi* diýlip üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň $C^1([t_0, t_1])$ (bölekleýin-üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň $KC^1([t_0, t_1])$ giňişligindäki $B(x) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt + l\big(x(t_0), x(t_1)\big) \to extr$ çäklendirilmedik ekstremal meselä aýdylýar.
20. Wariasion hasaplamanyň ýönekeýje meselesi nähili kesgitlenýär? Jogaby: Wariasion hasaplamanyň ýönekeýje meselesi diýlip $C^1([t_0, t_1])$ (ýa-da $KC^1([t_0, t_1])$) giňişlikdäki $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt \to extr,\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ ekstremal meselä aýdylýar.