бания функции в точке, существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$\omega(f; U(x_0) \cap X) < \omega(f; x_0) + \eta. \qquad (23.46)$$

Точка x_0 является точкой прикосновения множества X_ϵ, поэтому существует такая последовательность $x_n \in X_\epsilon, n = 1, 2, \dots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, следовательно, найдется такой номер n_0, что $x_{n_0} \in U(x_0) \cap X_\epsilon$. Согласно определению колебания функции в точке, отсюда вытекает, что что

$$\omega(f; U(x_0) \cap X) \geqslant \omega(f; x_{n_0}) \qquad (23.47)$$

(окрестность $U(x_0)$ является и окрестностью точки x_{n_0}).

Таким образом,

$$\omega(f; x_0) \underset{(20.36)}{>} \omega(f; U(x_{n_0}) \cap X) - \eta \underset{(23.47)}{\geqslant}$$
$$\underset{(23.47)}{\geqslant} \omega(f; x_{n_0}) - \eta \geqslant \epsilon - \eta, \qquad (23.48)$$

ибо $x_{n_0} \in X_\epsilon$, следовательно, $\omega(f; x_{n_0}) \geqslant \epsilon$.

Так как $\omega(f; x_0) \underset{23.48}{>} \epsilon - \eta$ при любом $\eta > 0$, то $\omega(f; x_0) \geqslant \epsilon$, т. е. $x_0 \in X_\epsilon$. Лемма доказана.□

Следствие 1 вытекает из того, что всякая точка прикосновения подмножества (в данном случае X_ϵ) является и точкой прикосновения самого множества (в данном случае X), поэтому если $x \in \overline{X_\epsilon}$, то $x \in \overline{X}$. В случае замкнутого множества X имеем $\overline{X} = X$, поэтому $x \in \overline{X_\epsilon} \cap X$, а тогда, согласно лемме 3, $x \in X_\epsilon$, т. е. множество X_ϵ содержит все свои точки прикосновения, что и означает его замкнутость.

Следствие 2 вытекает из того, что отрезок является ограниченным множеством и, следовательно, любое его подмножество также ограничено. □

Прежде чем изучать дальнейшие свойства колебаний функций, докажем одну геометрическую лемму. Предварительно введем понятие покрытия.

Система (конечная или бесконечная) интервалов такая, что каждая точка некоторого заданного множества принадлежит по крайней мере одному из интервалов системы, называется *покрытием* этого множества интервалами.