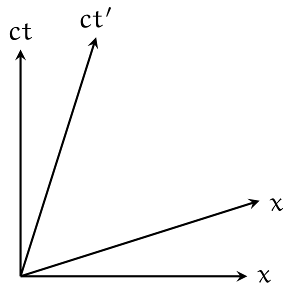
Lorentz 変換は，慣性系間であらゆる物理法則が同じ式で表されるような座標変換で，基準となる慣性系に対して速度 ν で等速直線運動している慣性系への変換は，$\beta = \frac{\nu}{c}$ として，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

で表されます．図形的には，下図のように新しい座標軸と元の座標軸とのなす角が同じであり，傾きが x' 軸が $\frac{\nu}{c}$，ct' 軸が $\frac{c}{\nu}$ となります．



Lorentz 変換の式を導出してみましょう．まず，Lorentz 変換は線形変換です．基準となる慣性系 S に対して ν_1 で動いている S'，さらに S' に対して ν_2 で動いている S'' を考えれば，S から S', S' から S'' の Lorentz 変換の合成が S から S'' の Lorentz 変換になるはずです．また，時刻と距離を λ 倍すれば結果も λ 倍になります．

よって，Lorentz 変換に対応する行列 L が存在します．ここで，斜交座標の考え方より，はじめに考えていた変換の逆変換，すなわち $(ct', x') \to (ct, x)$ の変換を考えると，軸の傾きがわかっていますから，γ を定数として，

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

となります．この逆変換，すなわち $(ct, x) \to (ct', x')$ の変換行列は L^{-1} であり，

$$L^{-1} = \frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

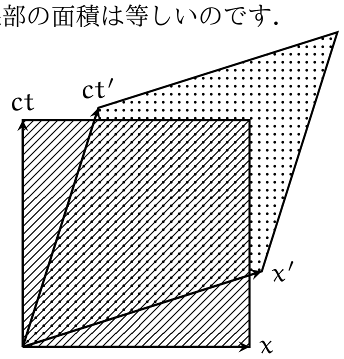
です．ここで，変換の逆を考えても，速度 ν の符号が変わるだけでその他は何も変わらず対等であることに注意すると，

$$\frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2)} = 1$$

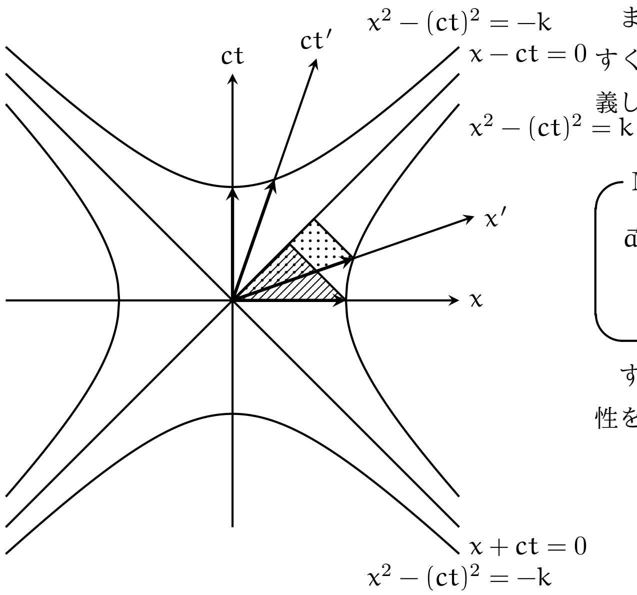
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

であり，γ は Lorentz 因子であることがわかります．L^{-1} は冒頭に示した Lorentz 変換の式の係数行列と一致しています．

つまり，Lorentz 変換行列 L の行列式は 1 であることがわかります．2 次の正方行列の行列式は，その行列が束ねている 2 ベクトルのなす平行四辺形の面積に等しく，変換行列を施すと面積は変換行列の行列式倍されますから，それが 1 ということは Lorentz 変換において軸のベクトルのなす平行四辺形の面積は不変であることがわかります．下図の斜線部の面積は等しいのです．



また，次図のように軸のベクトルの先端は双曲線に乗ります．



$v \to c$ と極限をとると，軸のベクトルが双曲線の漸近線の方に飛んで行き，新たな座標系が $x-ct=0$ の直線へと閉じていく様子が想像できます．$x^2-(ct)^2$ は Lorentz 変換において保存される不変量でした．時空図において光の軌跡を示す傾き ±1 の直線が，不変量を表す双曲線の漸近線となっていて，美しいと思います．

双曲線に乗るわけは面積に注目するとわかります．先ほど述べたように Lorentz 変換によって面積は変わらないため，2 ベクトルのなす平行四辺形の $\frac{1}{4}$ の図で斜線で塗られている三角形の面積も変わらず同じです．それを 2 つ貼り合わせた長方形の面積も一定ですから，双曲線に乗ります．図の双曲線を 45° 回転すると $xy=const.$ という反比例のグラフになり，xy が長方形の面積に対応することからわかると思います．

よく Lorentz 変換の説明で，$\beta=\frac{v}{c}=\tanh\theta$ と天下り的におくと，$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\cosh\theta$，$\frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\sinh\theta$ ときれいに変形できて，冒頭の式が

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

と表せるということを習いますが，双曲線関数が現れる背景には上記のようなことがあるのです．

また，内積空間の考え方を使うとすごくわかりやすくなります．Minkowski 内積を以下のように定義します．

Minkowski 内積

$\vec{a}=(x_1,ct_1)$, $\vec{b}=(x_2,ct_2)$ のとき，

$$\vec{a}*\vec{b}=x_1x_2-ct_1ct_2$$

すると，これは内積の公理のうち対称性，双線形性を満たします．

$$\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$$
$$(\lambda\vec{a})*\vec{b}=\lambda(\vec{a}*\vec{b})$$
$$(\vec{a}+\vec{b})*\vec{c}=\vec{a}*\vec{c}+\vec{b}*\vec{c}$$

ただ，ここで厄介なのが，ノルムを定義する際に要となる正値性 $\vec{a}*\vec{a}\geqslant 0$ が常には成り立たないことです．

$\vec{a}=(x,ct)$ のとき，$\vec{a}*\vec{a}=x^2-(ct)^2$ ですから，$\vec{a}*\vec{a}<0$ のときは因果的領域 $(x-ct)(x+ct)\leqslant 0$ 内の双曲線に乗っており，時間的ベクトルとなります．$\vec{a}*\vec{a}<0$ のときは空間的，$\vec{a}*\vec{a}=0$ のときは光的ベクトルとなります．つまり，物理的に連絡できる領域においては，常に $\vec{a}*\vec{a}\leqslant 0$ なのです[*1]．

Minkowski ノルムは絶対値をとって定義します．

Minkowski ノルム

時空ベクトル $\vec{a}$ に対して，

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{|\vec{a}*\vec{a}|}$$

Minkowski ノルムの 2 乗は Lorentz 変換における不変量 (の絶対値) になります．

今度は角度を定義することを考えます．時間的ベクトルでは，通常の内積の場合と逆に，常に $\vec{a}*\vec{a}\leqslant 0$ ですから，内積の公理から導かれる Cauchy-Schwarz の不等式の不等号が逆転します．

[*1] $\vec{a}*\vec{b}=ct_1ct_2-x_1x_2$ と定義すれば常に $\vec{a}*\vec{a}\geqslant 0$ となるでしょう．こちらで定義する場合もあるようです．

逆 Cauchy-Schwarz の不等式

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が時間的ベクトルならば，

$$|\vec{a} * \vec{b}| \geqslant \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$|\vec{a} * \vec{b}| < 0$ のとき (順時的ベクトルであるという)，Cauchy-Schwarz の不等式から，

$$1 \leqslant \frac{-(\vec{a} * \vec{b})}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

で，$\cosh\theta$ $(\theta \geqslant 0)$ の値域も 1 以上ですから，右辺を $\cosh\theta$ とおいて角を定義します．これを双曲角 (rapidity ともいうらしい) といいます．

双曲角 (rapidity)

$$\cosh\theta = \frac{-(\vec{a} * \vec{b})}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

このような内積空間を Minkowski 空間というようです．

Minkowski 空間において，冒頭の式を双曲線関数で表した係数行列

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

は，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cosh\theta \\ -\sinh\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix} &= -\cosh\theta\sinh\theta + \sinh\theta\cos\theta \\
&= 0 \\
\left\| \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ -\sinh\theta \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{|\cosh^2\theta - \sinh^2\theta|} \\
&= 1 \\
\left\| \begin{pmatrix} -\sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{|\sinh^2\theta - \cosh^2\theta|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

より，直交行列であることがわかります．特に，Euclid 空間における回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

に対応していることがわかります．よって，回転によって Euclid 空間におけるノルム (原点からの距離) が変わらないように，Minkowski 空間におけるノルム，すなわち不変量 $x^2 - (ct)^2$ は Lorentz 変換によって変わることはないことがわかります．

これを 2 次元に拡張すれば $x^2 + y^2 - (ct)^2$ となり双曲放物面を表すでしょう．3 次元も同様です．

また，$i\sinh\theta = \sin(i\theta)$, $\cosh\theta = \cos(i\theta)$ と複素数を使えば双曲線関数と三角関数がつながるので，冒頭の式を，

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & -\sin(i\theta) \\ \sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix}$$

と虚数角 $i\theta$ の回転と見ることもできます．