

この包絡線がカージオイドになぜ似ているのか調べるために、具体的に包絡線を求めてみましょう。2 天体の回る軌道は離心率 0 の真円とします。(太陽系の惑星の離心率を見ても 0 に近く (地球: 0.0167, 金星: 0.00678), 十分に近似できると思われるので, ”楕円だから成り立たないのでは?” という心配はしなくても良い (?) と思います。)

また, 外側の軌道円の半径を 1 とし, 内側と外側の公転周期の整数比を $n_1 : n_2$ とします。

すると, Kepler の第 3 法則より, 内側の軌道円の半径を a とすると,

$$\frac{n_1^2}{a^3} = \frac{n_2^2}{1^3}$$

$$a = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

角速度は $\omega = \frac{2\pi}{T}$ と表せるため, 外側を回る天体の座標を $(\cos \frac{t}{n_2}, \sin \frac{t}{n_2})$, 内側を $(a \cos \frac{t}{n_1}, a \sin \frac{t}{n_1})$ とおけます。これらを通る直線の方程式は, 法線ベクトルを考えて,

$$\left(a \cos \frac{t}{n_1} - \cos \frac{t}{n_2} \right) y - \left(a \sin \frac{t}{n_1} - \sin \frac{t}{n_2} \right) x = a \sin(ht)$$

ただし, $h = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$ とおきました。

ここで,

$$a(t) = - \left(a \sin \frac{t}{n_1} - \sin \frac{t}{n_2} \right)$$

$$b(t) = \left(a \cos \frac{t}{n_1} - \cos \frac{t}{n_2} \right)$$

$$c(t) = a \sin(ht)$$

とおくと, 直線の方程式は $a(t)x + b(t)y = c(t)$ です。これと両辺を t で微分した式 $a'(t)x + b'(t)y = c'(t)$ を連立させて包絡線を求めると,

$$x(t) = - \frac{b(t)c'(t) - b'(t)c(t)}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}$$

$$y(t) = - \frac{c(t)a'(t) - c'(t)a(t)}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}$$

ですから, 頑張ると*1,

*1 これだけ見るとあっさりしてますが, Wolfram|Alpha を併用してやっとのことで計算できました…

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{\frac{a}{n_1} \cos\left(\frac{t}{n_2}\right) (\cos(ht) - a) + \frac{a}{n_2} \cos\left(\frac{t}{n_1}\right) (a \cos(ht) - 1)}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} \\
y(t) &= -\frac{\frac{a}{n_1} \sin\left(\frac{t}{n_2}\right) (\cos(ht) - a) + \frac{a}{n_2} \sin\left(\frac{t}{n_1}\right) (a \cos(ht) - 1)}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}}
\end{aligned}$$

となります．ベクトル的な表記をすると，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= -\frac{\frac{a}{n_1}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} (\cos(ht) - a) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{n_2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{n_2}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{\frac{a}{n_2}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} (a \cos(ht) - 1) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{n_1}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{n_1}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と比較的きれい(?) なので，カージオイドっぽいと言えなくもない．極方程式で書けそうなような，書けないような…