

この包絡線がカージオイドになぜ似ているのか調べるために、具体的に包絡線を求めてみましょう。2 天体の回る軌道は離心率 0 の真円とします。(太陽系の惑星の離心率を見ても 0 に近く (地球: 0.0167, 金星: 0.00678), 十分に近似できると思われるので, ”楕円だから成り立たないのでは?” という心配はしなくても良い (?) と思います。)

また, 外側の軌道円の半径を 1 とし, 内側と外側の公転周期の整数比を $n_1 : n_2$ とします。

すると, Kepler の第 3 法則より, 内側の軌道円の半径を a とすると,

$$\frac{n_1^2}{a^3} = \frac{n_2^2}{1^3}$$

$$a = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

角速度は $\omega = \frac{2\pi}{T}$ と表せるため, 外側を回る天体の座標を $(\cos \frac{t}{n_2}, \sin \frac{t}{n_2})$, 内側を $(a \cos \frac{t}{n_1}, a \sin \frac{t}{n_1})$ とおけます。これらを通る直線の方程式は, 法線ベクトルを考えて,

$$\left(a \cos \frac{t}{n_1} - \cos \frac{t}{n_2} \right) y - \left(a \sin \frac{t}{n_1} - \sin \frac{t}{n_2} \right) x = a \sin(ht)$$

ただし, $h = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$ とおきました。

ここで,

$$a(t) = - \left(a \sin \frac{t}{n_1} - \sin \frac{t}{n_2} \right)$$

$$b(t) = \left(a \cos \frac{t}{n_1} - \cos \frac{t}{n_2} \right)$$

$$c(t) = a \sin(ht)$$

とおくと, 直線の方程式は $a(t)x + b(t)y = c(t)$ です。これと両辺を t で微分した式 $a'(t)x + b'(t)y = c'(t)$ を連立させて包絡線を求めると,

$$x(t) = - \frac{b(t)c'(t) - b'(t)c(t)}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}$$

$$y(t) = - \frac{c(t)a'(t) - c'(t)a(t)}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}$$

ですから, 頑張ると*1,

*1 これだけ見るとあっさりしてますが, Wolfram|Alpha を併用してやっとのことで計算できました…

$$x(t) = -\frac{\frac{a}{n_1} \cos\left(\frac{t}{n_2}\right) (\cos(ht) - a) + \frac{a}{n_2} \cos\left(\frac{t}{n_1}\right) (a \cos(ht) - 1)}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}}$$

$$y(t) = -\frac{\frac{a}{n_1} \sin\left(\frac{t}{n_2}\right) (\cos(ht) - a) + \frac{a}{n_2} \sin\left(\frac{t}{n_1}\right) (a \cos(ht) - 1)}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}}$$

となります。ベクトル的な表記をすると、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{\frac{a}{n_1}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} (\cos(ht) - a) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{n_2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{n_2}\right) \end{pmatrix} \\ -\frac{\frac{a}{n_2}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} (a \cos(ht) - 1) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{n_1}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{n_1}\right) \end{pmatrix}$$

と比較的きれい(?) なので、カージオイドっぽいと言えなくもない。極方程式で書けそうなような、書けないような…

ちょっと変形してみると、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{\frac{a}{n_1}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} (\cos(ht) - a) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{n_2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{n_2}\right) \end{pmatrix} \\ -\frac{\frac{a}{n_2}}{\frac{a^2}{n_1} - a\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cos(ht) + \frac{1}{n_2}} \left(\cos(ht) - \frac{1}{a} \right) \begin{pmatrix} a \cos\left(\frac{t}{n_1}\right) \\ a \sin\left(\frac{t}{n_1}\right) \end{pmatrix}$$

です。(ベクトルが2天体の位置ベクトルに一致するようにした) すると、興味深いことに、ベクトルの前に
 ついている部分を2項の間で和を取ると1になっています!(きれい)

大雑把には、 $h = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$ が $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}$ に比べ小さいため分母の \cos の項の変動を無視すれば、 $r = a \cos \theta + b$
 という極方程式のパスカルの蝸牛形(カージオイドの一般形)になります。2つの位置ベクトルがかかっていますが、そこは斜交座標的な考え方で、通常のパスカルの蝸牛形が回転したようなものが出てくるのではない
 かと思われます。こんな感じで捉えられますかね… (n_1, n_2 を適当に設定した時の包絡線はパスカルの蝸牛
 形の組み合わせのように思われました)