Modelo Cinemático de um Braço Robótico RRR

1. Definição do Sistema

Considere um braço robótico composto por três juntas rotacionais (RRR) e três elos com comprimentos L_1, L_2, L_3.

As variáveis articulares são:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

A primeira junta gira em torno do eixo Z (rotação da base), e as juntas θ_2 e θ_3 movimentam-se em um plano vertical (r, z).

—

2. Cinemática Direta

As coordenadas cartesianas do efetuador (x, y, z) em função dos ângulos são dadas por:

$$x = \cos(\theta_1)\left[L_2\cos(\theta_2) + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\right] \tag{1}$$
$$y = \sin(\theta_1)\left[L_2\cos(\theta_2) + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\right] \tag{2}$$
$$z = L_1 + L_2\sin(\theta_2) + L_3\sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{3}$$

—

3. Cinemática Inversa

Dada uma posição desejada (x, y, z), determinam-se os ângulos articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ conforme:

3.1 Cálculo de θ_1

$$\theta_1 = \arctan 2(y, x)$$

3.2 Cálculo de θ_2 e θ_3

Seja:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z' = z - L_1$$

A partir da lei dos cossenos, obtém-se:

$$\cos(\theta_3) = \frac{r^2 + z'^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3} \tag{4}$$

$$\theta_3 = \arccos(\cos(\theta_3)) \tag{5}$$

Então:

$$\theta_2 = \arctan 2(z', r) - \arctan 2\left(L_3 \sin(\theta_3), L_2 + L_3 \cos(\theta_3)\right) \tag{6}$$

—

4. Deslocamento Angular entre Duas Posições

Se o efetuador se move de uma posição inicial (x_0, y_0, z_0) para uma posição final (x, y, z), os ângulos iniciais e finais são dados por:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \\ \theta_{3,0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_f = \begin{bmatrix} \theta_{1,f} \\ \theta_{2,f} \\ \theta_{3,f} \end{bmatrix}$$

obtidos via as mesmas equações de cinemática inversa para cada posição.
O vetor de **deslocamento angular** é então:

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{1,f} - \theta_{1,0} \\ \theta_{2,f} - \theta_{2,0} \\ \theta_{3,f} - \theta_{3,0} \end{bmatrix}$$

—

5. Conversão para Passos de Motor

Se cada motor de passo possui:

- N_{step}: número de passos por revolução (ex.: 200),
- R_i: relação de engrenagem da junta i,

então o deslocamento em passos para cada junta é:

$$\Delta S_i = \frac{R_i}{360/N_{step}} \cdot \Delta\theta_i \left(\frac{180}{\pi}\right)$$

ou de forma vetorial:

$$\boldsymbol{\Delta S} = \frac{N_{step}}{360} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta\theta} \left(\frac{180}{\pi} \right)$$

—

6. Observações

- As equações assumem um único braço planar para as juntas 2 e 3.
- Para trajetórias contínuas, pode-se interpolar as posições desejadas e calcular $\boldsymbol{\theta}(t)$ ao longo do tempo.
- Há duas soluções possíveis ("cotovelo para cima" e "para baixo") dependendo do sinal de $\sin(\theta_3)$.