渲染基础理论的介绍(1)

Tags: **computer graphics**

基础概念

辐射度学 Radiometry

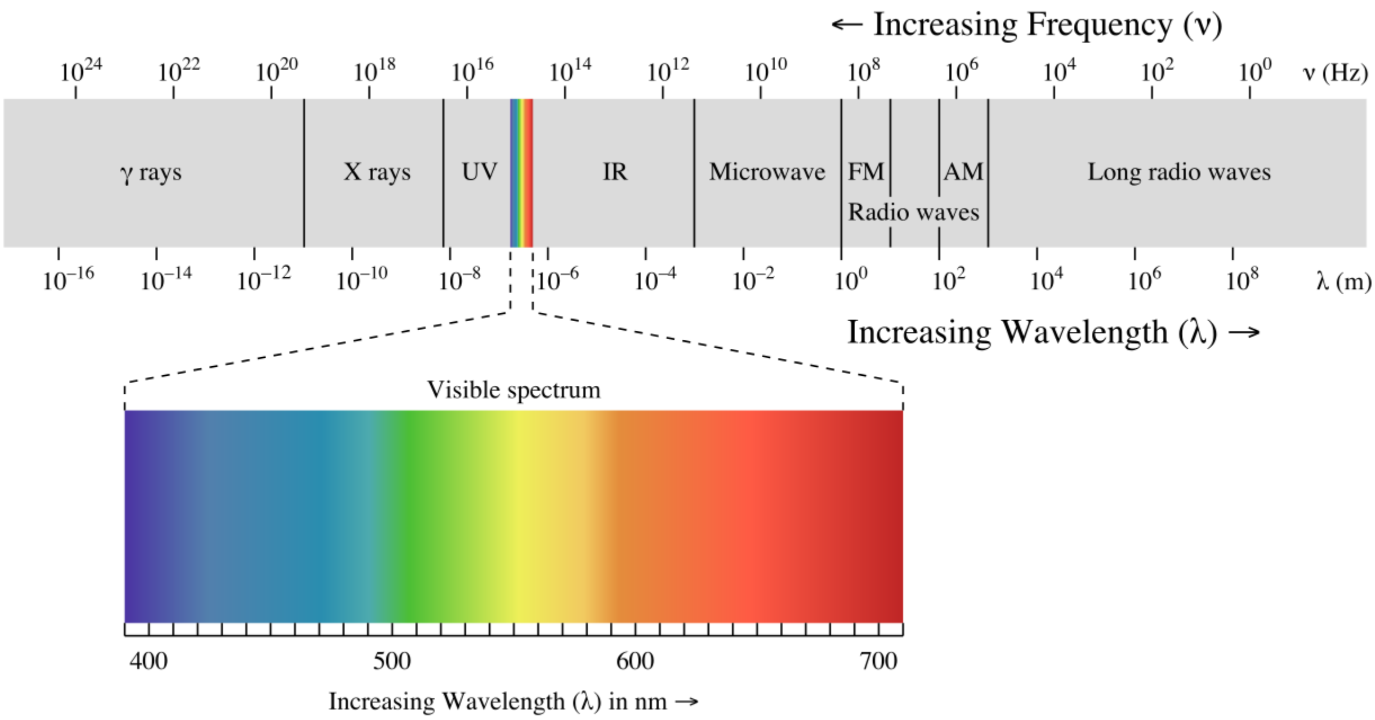
辐射度学是指测量电磁辐射(包括可见光)的一系列技术，它是和观察者无关的。而近似的光度学(photometric)，是观察者相关的。这里我所说的观察者无关，是指测量值和人眼并无关系，是绝对值。

基于辐射度学来做渲染，需要了解下面这些东西：

- 光谱 Spectrum
- 光谱功率分布(SPD, spectral power distribution)
- XYZ 和 RGB 两种CIE颜色系统以及它们之间、它们和SPD之间的转换
- 辐射通量(Flux)
- 立体角(Solid Angle)
- 辐射照度(Irradiance)
- 辐射亮度(Radiance)

光谱 Spectrum

现实中大部分光源（非直接光源也算），发射出的光都是复合光，即是由不同波长的色光混合而成的。 光谱就是指所有光波的**分布**。光谱图如下：

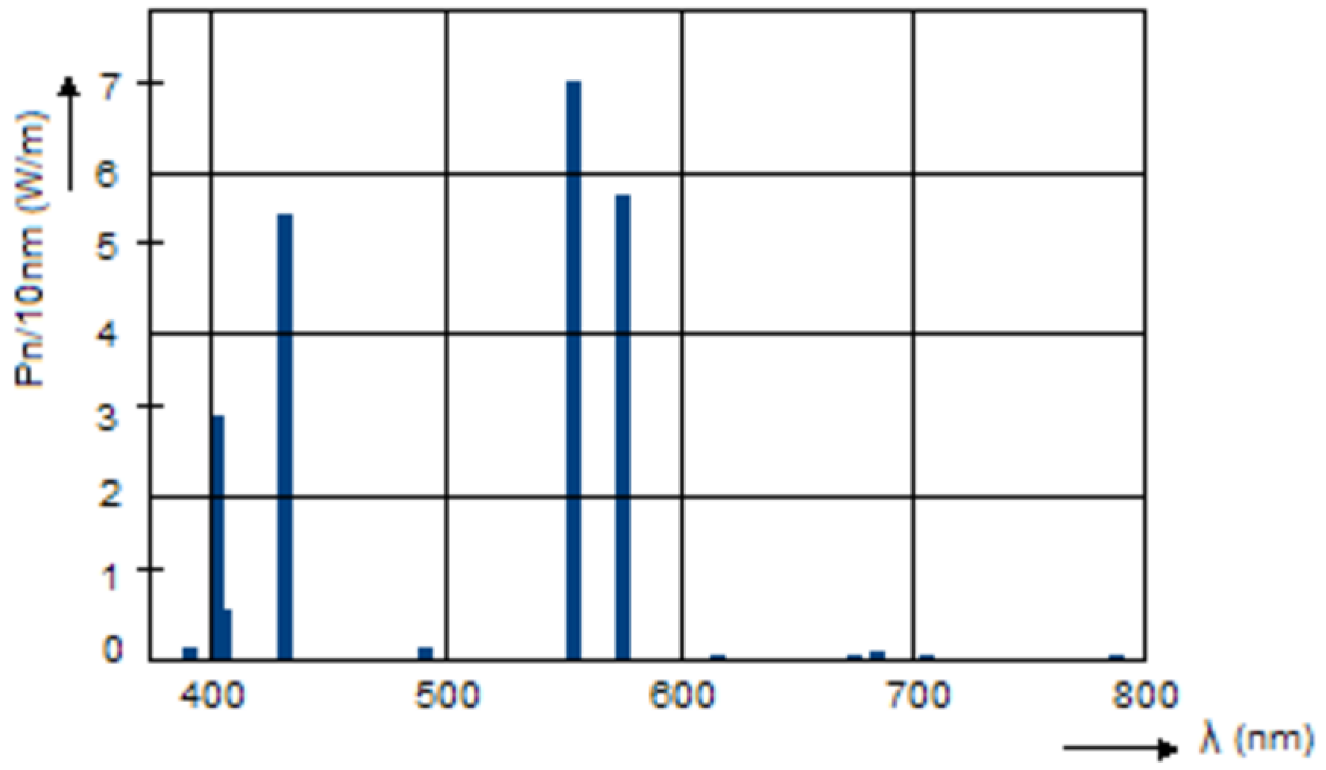


其中波长在 390 nm 到700 nm之间的光波称为可见光。

光谱功率分布spectral power distribution

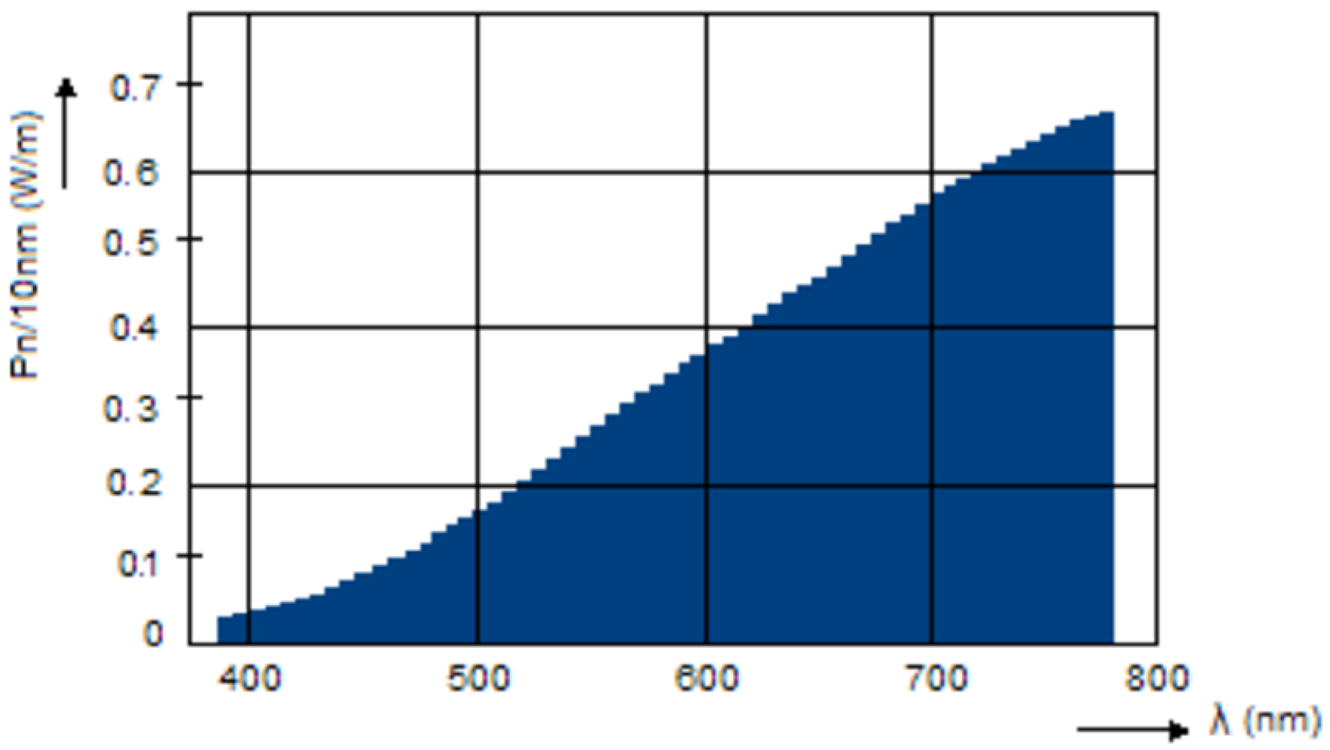
光谱功率分布描述的是这样一件事情：对于一个直接或间接光源物体，它发射出的复合光中各个波长的色光分别有多少能量，或者说，这个光源的能量是如何分布到各个波长的光波的？

譬如，水银灯的光主成分是波长为404.7, 407.8, 435.8, 546.1, 577.0, 579.0纳米的光波（见下图）。这意味着能量分布非常不平衡，主要集中在这几个波长上了，相当于离散了。



上图就是水银灯的SPD曲线了。

而白炽灯的SPD曲线是这样子的：

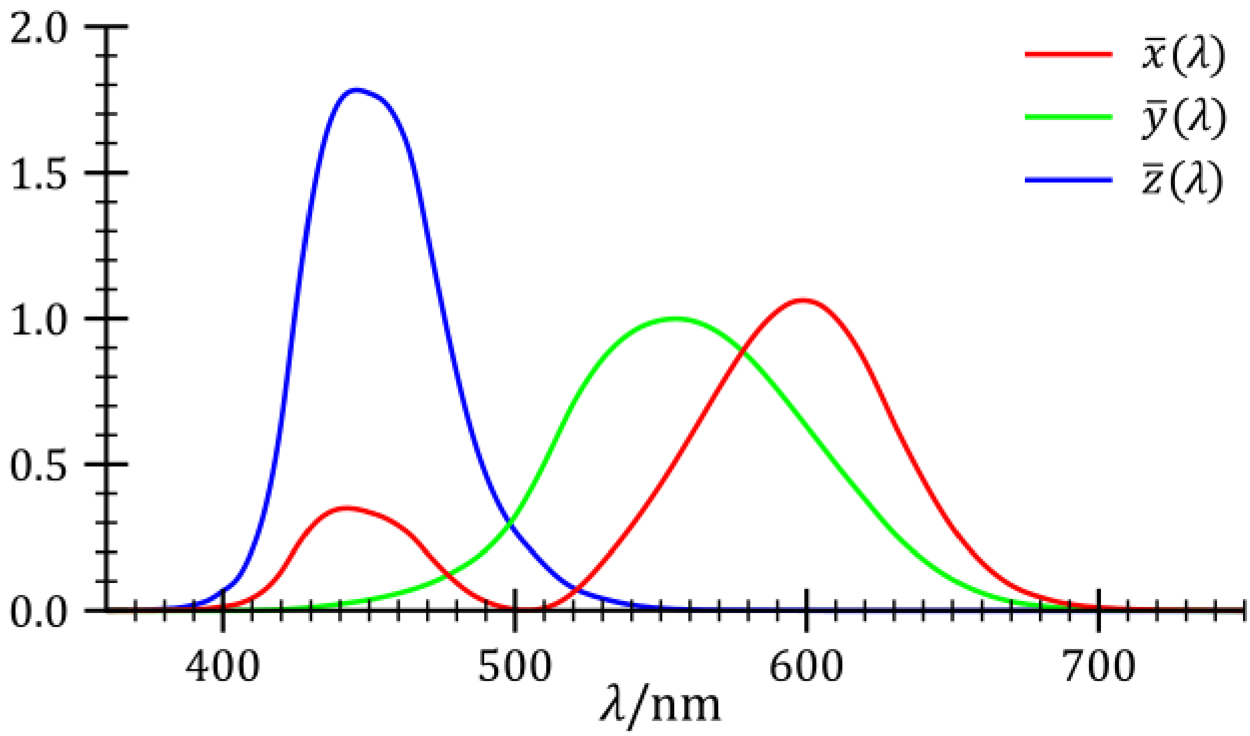


注意上面两个图中，横轴是指波长，纵轴是指每单位纳米(10纳米一个单位)的波长的功率（能量）。

SPD曲线都是用Spectroradiometers 这种专门仪器测量的。

SPD一般用符号P(λ)表示。

XYZ 三色刺激值(tristimulus vlaues)



(CIE标准观察者颜色匹配函数)(The CIE standard observer color matching functions)

当看到CIE standard observer字眼时，其实指的就是上面这个图。这个图是通过测量获得的，好处是这个图相当于一个数据表，当需要把SPD曲线转换成XYZ三刺激值时，就可以用这个图做，坏处是它不是数学描述出来的，那么应用起来就有一定限制性。

那么SPD如何转换到XYZ呢？公式如下：

$$X = \int_{\lambda} \bar{x}(\lambda)P(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$Y = \int_{\lambda} \bar{y}(\lambda)P(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$Z = \int_{\lambda} \bar{z}(\lambda)P(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

这里面用到了积分，但因为匹配函数是非数学描述的（上面的图的3条曲线），所以这个公式不可用，然而我们可以另辟蹊径，用采样和线性叠加的方法计算XYZ：

$$X = \sum_i \overline{x}_i P_i$$

$$Y = \sum_i \overline{y}_i P_i$$

$$Z = \sum_i \overline{z}_i P_i$$

这里的下标i代表第几个刻度的采样。采样间隔(spacing)一般是1到20纳米，采样空间(span)是整个可见光波段（这个波段的具体范围取决于实际需求和SPD曲线）。

通过SPD计算XYZ：Computing XYZ From Spectral Data

XYZ和RGB之间的互相转换

XYZ到RGB

公式是：

$$\begin{bmatrix} R_{\text{linear}} \\ G_{\text{linear}} \\ B_{\text{linear}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & 1.8758 & 0.0415 \\ 0.0557 & -0.2040 & 1.0570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

(此矩阵只适用于 sRGB 定义中的RGB)

(对于右边的输入值XYZ，也是有要求的，这是因为左边的\(RGB_{linear} \)的取值范围是[0,1]，所以右边的XYZ也需要做规范化。在我的下一篇文章中会介绍这部分。)

得到的\(RGB_{linear} \)是线性空间的，有什么意义呢？因为一般渲染器都是在线性空间下进行光照计算的，所以这个\(RGB_{linear} \)可直接用到光照等计算中。但是当要把最终的渲染结果输出时，例如写入到位图文件或显示到屏幕上，就需要对每个像素的\(RGB_{linear} \)做gamma校正，校正成sRGB，公式如下：

$$C_{\text{srgb}} = \begin{cases} 12.92 C_{\text{linear}}, & C_{\text{linear}} \le 0.0031308 \\ (1+a) C_{\text{linear}}^{1/2.4} - a, & C_{\text{linear}} > 0.0031308 \end{cases}$$

- where $a = 0.055$

校正后的sRGB是单位化的，各个分量的取值范围是[0.0, 1.0]，输出时需要乘以255并取整。

RGB到XYZ

当输入的RGB是sRGB时，需要做逆gamma校正，公式如下：

$$C_{\text{linear}} = \begin{cases} \frac{C_{\text{srgb}}}{12.92}, & C_{\text{srgb}} \le 0.04045 \\ \left(\frac{C_{\text{srgb}}+a}{1+a}\right)^{2.4}, & C_{\text{srgb}} > 0.04045 \end{cases}$$

- where $a = 0.055$ and where C is R, G, or B.

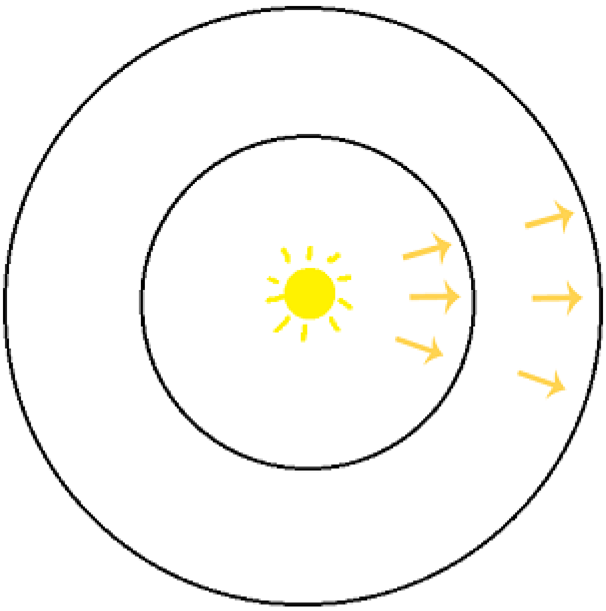
得到线性空间的RGB值后，就可以用下面的公式转换到XYZ空间：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4124 & 0.3576 & 0.1805 \\ 0.2126 & 0.7152 & 0.0722 \\ 0.0193 & 0.1192 & 0.9505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\text{linear}} \\ G_{\text{linear}} \\ B_{\text{linear}} \end{bmatrix}$$

辐射通量(Flux)

辐射通量(Radiant Flux)，指的是单位时间到达一块平面(或一个局部空间区域)的能量总和。单位是焦耳每秒(joules/second，，J/s)，或瓦特(watts，W)。符号是\(\Phi \)。

一个点光源发射出去的能量大小可以用Flux来描述。其中要注意的是，Flux描述的是单位时间的能量，那么对于点光源来说，Flux只和光源的强弱有关，所以下图的2个圆圈的Flux值是一样的。



辐射照度(Irradiance)

Irradiance翻译成中文是辐射度/辐照度/辐射照度。定义了辐射通量后，就可以定义辐射照度了，辐射照度指的是单位面积**接收**的辐射通量，单位是\(W/m^{2}\)。根据这个定义用符号E表示。

单位面积**发射**出去的辐射通量，则称之为Radiant exitance，即辐射出射度，用符号M表示。

E和M的公式（from wiki）：

$$ E_{e} = \frac{ \partial\Phi_{e} }{ \partial A } $$

$$ M_{e} = \frac{ \partial\Phi_{e} }{ \partial A } $$

可见E和M的公式是一致的，区别在于上下文是入射还是出射。

(下文用关键词辐射照度表示E、辐射出射度表示M，辐射度表示E或M，辐射度具体是E还是M根据上下文判断)

以上面的点光源来分析，可以知道上图中内圆圈的M比外圆圈的M大，这是因为内圆圈的面积更小而点光源的Flux值恒定，所以内圆圈的E值就大。

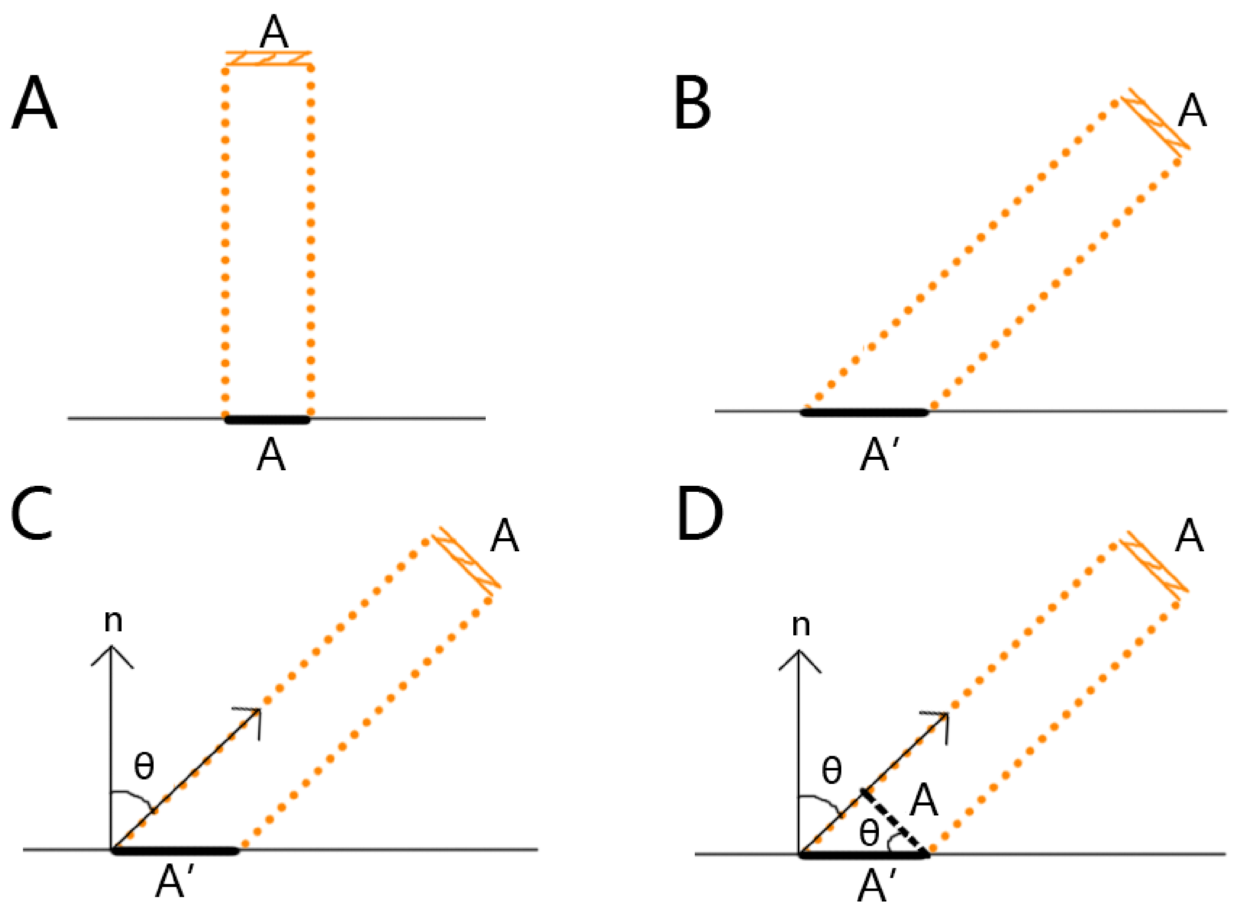
用公式表示：

$$ M = \frac{ \text{点光源辐射通量} }{ \text{球的表面积} } = \frac{\Phi}{4\pi r^{2} } $$

可见，Φ恒定，半径r越小，那么M越大。

下面讲一下E的问题。

当假设光源在无限远处时，可把光源认为是一块平面（这种光源叫方向光）。此时，光源平面与被照射平面存在2种情形：光源平面与被照射平面平行（下图中的A）、光源平面与被照射平面不平行（下图中的B）：



(图中的平面附近的A指的是面积Area)

当光源平面与被照射平面平行时，有：

$$E_{1} = \frac {\Phi}{ A }$$

当光源平面与被照射平面不平行时，需要根据平面的法向量和光线方向的夹角θ，先求出$A^{'}$：

$$cos\theta = \frac { A }{ A^{'} }$$

$$A^{'}= \frac { A }{ cos\theta }$$

于是得到：

$$E_{2} = \frac {\Phi}{ A^{'} } = \frac {\Phi}{ \frac { A }{ cos\theta } } = \frac { \Phi cos\theta }{ A }$$

也可以记为

$$E = \frac { \Phi cos\theta }{ A^{\perp } }$$

($A^{\perp }$) 指A'在光线的方向的正交平面上的投影)

微分形式：

$$dE = \frac { d\Phi cos\theta }{ dA^{\perp } }$$

根据这个式子，可以想到，当θ逼近0度时，cosθ等于1，法向量和光线方向平行（上图中的A）；当θ逼近90度时，cosθ等于0，辐射照度E为0（光线垂直于法向量了）。

立体角(Solid Angle)

立体角的介绍请访问：立体角(Solid Angle)详解

辐射亮度(Radiance)

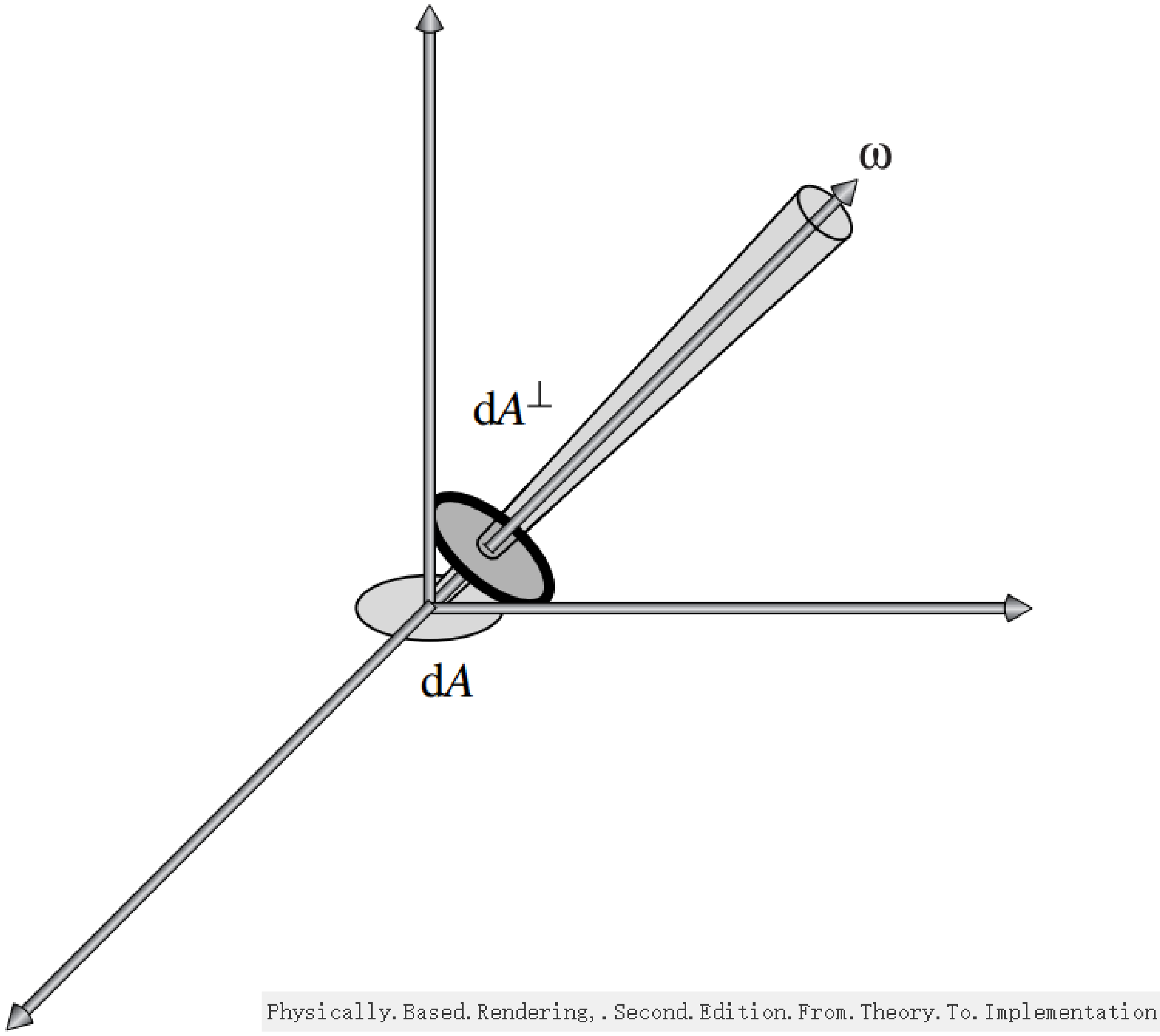
辐射亮度是指辐射通量与单位面积(注意，是与光线方向正交的那块)单位立体角的比值。符号为L。定义式如下：

$$L = \frac { d\Phi }{ d\omega dA^{\perp } } = \frac { d\Phi }{ d\omega dA cos\theta }$$

或：

$$L = \frac { \Phi }{ \omega A^{\perp } }$$

物理含义如下图所示：

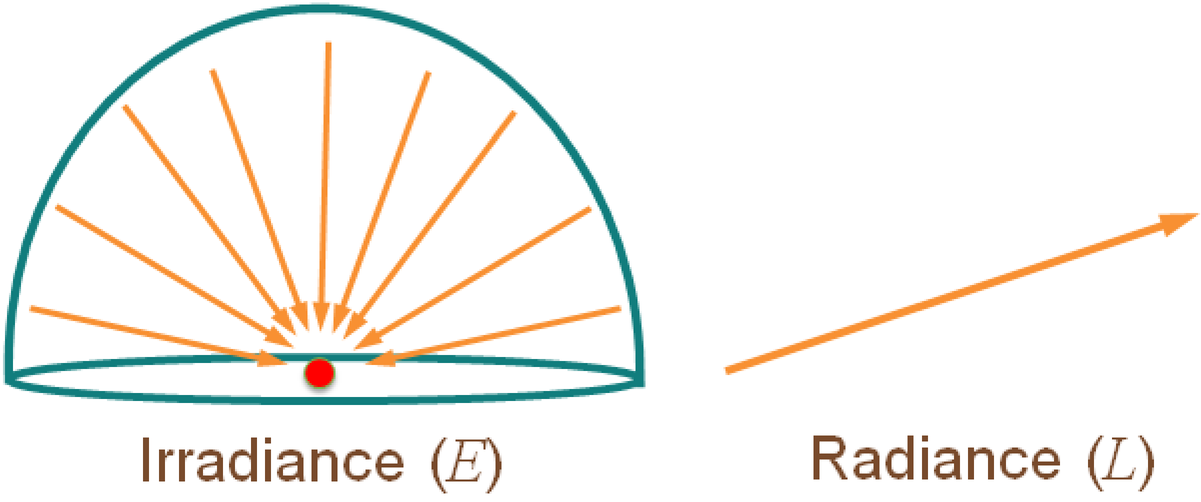


辐射度和辐射亮度L的关系像"总体"和"个体"，可以对比下两者的公式来理解：

$$ E = \frac { \Phi }{ A } $$

$$ L = \frac { \Phi }{ \omega A^{\perp } } $$

E是指进入目标区域的总辐射通量与目标区域总面积的比值；而L是指进入目标区域的总辐射通量与目标区域总面积、**总的入射立体角**的比值，也就是说L是比E多除了立体角。直观图示如下：



Advances in Real-Time Rendering in Games

也就是说其实E和L可以认为是同一个东西，只是L描述的是E的局部。用一句话记住两者的区别：有特定方向时是L，无特定方向时是E。这个区别相当重要，因为它体现在了渲染方程中。

注意：在计算机图形学中，辐射亮度L比起上面其他物理量，相对突出很多，例如下面要介绍的渲染方程就会看到很多L。

另外，就像辐射度有区分进(in)或出(out)，L当然也是有分的，不过大部分情况L是指出(out)。如上图，左边的是E是进，右边的L是出。

如果要求平面上某点p的某方向ω的辐射亮度L，可用下面的符号表示：

$$ L(p,\omega) $$

其中，ω的方向需要注意，因为它是一个立体角，立体角的圆心是p，ω的朝向必然是从圆心p往外（向量起点是p）。

实际上，需要区分成入射(input)和出射(output)2种辐射亮度L，用下面2个符号表示：

$$ L_{i}(p,\omega) $$

$$ L_{o}(p,\omega) $$

且在现实世界中有：

$$ L_{i}(p,\omega) \neq L_{o}(p,\omega) $$

（这是因为有部分能量转化成热能，即被吸收了）

还有，上面的这个p不能简单认为真的是一个无体积的点，它也可能是一个无限小的平面块，即它是一个有面积A、有法向量n的“点”。对于这样一个“点”，我们可以求出它的上半球(沿着n的方向)的辐射照度值$E(p, n)$：

$$ E(p, n) = \int _{\Omega } L_{i} (p,\omega) |cos\theta |d\omega $$

分析下这个式子的由来。首先搬出上文给出的L和E的公式：

$$ L = \frac { d\Phi }{ d\omega dA^{\perp } } $$

$$ dE = \frac { d\Phi cos\theta }{ dA^{\perp } } $$

所以有：

$$ d\Phi = L d\omega dA^{\perp } $$

$$ dE = \frac { d\Phi cos\theta }{ dA^{\perp } } = \frac { L d\omega dA^{\perp } cos\theta }{ dA^{\perp } }
= L d\omega cos\theta $$

对上式做整个半球的积分，就得到了：

$$ E = \int _{\Omega }L|cos\theta |d\omega $$

也就是：

$$ E(p, n) = \int _{\Omega } L_{i} (p,\omega) |cos\theta |d\omega $$

其中的$ cos\theta $加绝对值是因为我们求的是半球的积分，立体角$\omega $和法向量的夹角必然是锐角，锐角的余弦值必然大于等于0。

如果把式子中的$d\omega $替换成球形角(Sphere Angle)，则得到：

$$ d\omega = sin\theta d\theta d\phi $$

$$ E(p, n) = \int _{\Omega } L_{i} (p,\omega) |cos\theta |sin\theta d\theta d\phi $$

这个式子是不对的，因为积分那里用了立体角，需要将其转换成对$\theta 和 \phi $的积分。因为这里积分的是半球，那么$\theta $的取值范围是$ [0,\frac {π}{2}] $、$\phi $的取值范围是$ [0,2π] $：

$$ E(p, n) = \int _{0 }^{ 2π } \int _{0 }^{ \frac {π}{2} } L_{i} (p,\theta ,\phi) cos\theta sin\theta d\theta d\phi $$

（因为已经明确限定了$\theta $的取值范围，所以$ cos\theta $必然大于等于0，可去掉绝对值符号）

这条积分公式同时也适用于出射光的情况：

$$ M(p, n) = \int _{0 }^{ 2π } \int _{0 }^{ \frac {π}{2} } L_{o} (p,\theta ,\phi) cos\theta sin\theta d\theta d\phi $$

注意，不同于E，这条M的积分公式省略了一个东西：反射系数f。f一般和材质、入射角、出射角有关。上式中默认任意角度的f为1。

这么简单的公式，特别适合用来模拟简单的有方向光照：漫反射光（diffuse）。

在微分尺度下，diffuse光的$L_{o} (p,\theta ,\phi) $是一个常量值，意味着对于来自某一光源某一方向的入射光，辐射到任意方向的辐射亮度L都是相等的，于是上式可以求出积分：

\[M(p, n) = L_{o} (p,\theta ,\phi) \int _{0 }^{ 2π } \int _{0 }^{ \frac {π}{2} } cos\theta sin\theta d\theta d\phi \]

\[= L_{o} (p,\theta ,\phi) \int _{0 }^{ 2π } (\frac {1}{2}sin^{2}\theta)\rvert ^{\frac {π}{2}}_{0} d\phi \]

\[= L_{o} (p,\theta ,\phi) \int _{0 }^{ 2π } (\frac {1}{2}sin^{2}\frac {π}{2} - \frac {1}{2}sin^{2}0) d\phi \]

\[= L_{o} (p,\theta ,\phi) \int _{0 }^{ 2π } \frac {1}{2} d\phi \]

\[= L_{o} (p,\theta ,\phi) \frac {1}{2}(2π - 0) \]

\[= L_{o} (p,\theta ,\phi) π \]

这个公式叫做lambertian's reflectance，很重要。例如若要计算一个点到摄像机的diffuse，就可以直接求出\(L_{o} = \frac {M}{\pi } \)。其中的M其实很简单，因为M表示的只是来自一个光源一个方向的入射光，认为是一个RGB值就行了。

关于这个公式我找到的最佳资料是这个。

渲染方程 Rendering Equation

把wiki的渲染方程贴进来：

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda, t) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda, t) + \int_\Omega f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda, t)\, L_i(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda, t)\, (\omega_i \cdot \mathbf{n})\, \mathrm{d}\,\omega_i$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Rendering_equation

各个组成元素的解释：

- **λ** 指代波长为λ的光
- **t** 某一时间点
- **x** 指空间上的某个点，也即被渲染的点(微分平面) (其实应该写成p吧)
- **n** 被渲染的点(平面)的法向量，可以人为指定也可以根据一定规则自动生成
- \(\omega _{o} \) 出射光线的方向（是一个立体角)，起点在x(被渲染的点)
- \(\omega _{i} \) 入射光线的反方向（是一个立体角)，起点也在x，所以才叫反方向
- \(L_{o}(x, \omega _{o}, λ, t) \) 在t时刻、从x点往\(\omega _{o} \)方向的光(λ)的总辐射亮度(Radiance)

- $L_{e}(x, \omega _{o}, \lambda, t)$ 指x点自身发射出的辐射亮度(Radiance)，其他参数含义同$L_{o}(x, \omega _{o}, \lambda, t)$
- Ω是以x为圆心的单位半球，半球的朝向和法向量**n**一致
- $\int _{ \Omega } \cdots d\omega _{i}$ 指对这个半球做积分
- $f_{r}(x, \omega _{i}, \omega _{o}, \lambda, t)$ BRDF函数，函数的返回值是一个比值标量(ratio scalar)
- $L_{i}(x, \omega _{i}, \lambda, t)$ 在t时刻、沿着$\omega _{i}$方向进入x点的光(λ)的辐射亮度(Radiance)
- $\omega _{i} \cdot n$ 是一个衰减比值(一般是0到1)，指入射光的方向和法向量的夹角$\theta _{i}$，这个夹角导致产生的衰减。原因请参考上面的**辐射通量**小节。这个参数也可以写成$\cos \theta _{i}$

这个方程可以用一句话概括：**出辐射亮度等于自身辐射亮度加上入辐射亮度积分乘以反射系数f。**

$$出辐射亮度L_{o} = 自身辐射亮度L_{e} + f_{r} \int L_{i} = L_{e} + L_{r}$$

wiki的渲染方程太规范了，下面展示一个简化的渲染方程：

$$L_{o}(p, \omega _{o}) = L_{e}(p, \omega _{o}) + \int _{\Omega }f(p, \omega _{o}, \omega _{i}) L_{i}(p, \omega _{i}) |\cos \theta _{i}|d\omega _{i}$$

能简化成这个式子的原因是，在做渲染器的时候，本来就是把t值固定的，即做动画渲染的话，也是把动画离散成一帧帧来渲染，对每一帧来说t值是常量值；而另外的λ值蕴含在颜色空间(XYZ RGB)中。

渲染方程最难理解的就是+号右边的那坨：

$$\int _{\Omega }f(p, \omega _{o}, \omega _{i}) L_{i}(p, \omega _{i}) |\cos \theta _{i}|d\omega _{i} （ = L_{r} ）$$

为什么这坨东西是L？不是有个积分符号吗？不就是辐射度了？这么想就错了。

虽然上文已经说过:"有特定方向时是L，无特定方向时是E"。但这里的这个积分，有一个关键的东西：

$$f(p, \omega _{o}, \omega _{i})$$

这是个系数（可以理解为一个范围为[0,1]的浮点数），这个系数和多个参数如入射角、出射角有关，不是常数，于是把它放到了积分符号右边。L_{i}乘以一个百分比系数，相当于是算**这个角度的这条光纤的辐射亮度L_{i}对特定方向的L_{r}的贡献值**。这些贡献值全部加起来，才是真正的反射辐射亮度L_{r}。

整个渲染方程可以说就是在求出射方向到底有多少辐射通量（为什么不是L？因为被渲染区域的面积一般都限定为单位面积，即等于1，所以L相当于Φ），辐射通量一旦确定就可

以知道这个被渲染区域的颜色。

基于光线追踪的离线渲染中，是可以直接基于上面的渲染方程去做工程实现的。（相比而言，实时渲染更多的是用各种trick技术来近似渲染方程。）

参考资料

http://blog.csdn.net/candycat1992/article/details/46228771

http://www.poynton.com/GammaFAQ.html

http://www.poynton.com/PDFs/GammaFAQ.pdf

Useful Color Equations

RGB/XYZ Matrices

http://www.joshbarczak.com/blog/?p=272

https://seblagarde.wordpress.com/2012/01/08/pi-or-not-to-pi-in-game-lighting-equation/

http://www.codinglabs.net/article_physically_based_rendering.aspx

http://www.codinglabs.net/article_physically_based_rendering_cook_torrance.aspx

Written on July 10, 2016

博主将十分感谢对本文章的任意金额的打赏^_^

推荐使用**微信支付**

Wyman (**伟)

微信支付

支付宝
ALIPAY

打开支付宝[扫一扫]

Wyman