CHAPITRE 3

Probabilités 2

On approfondit dans ce module la connaissance des lois de probabilités en étudiant la loi exponentielle et la loi de Poisson, dans le contexte de processus aléatoires à temps continu. Une initiation aux processus aléatoires discrets permet d'élargir le champ d'étude des phénomènes aléatoires.

COURS

1 Loi exponentielle

Nouveauté pour les bacheliers professionnels

Cette partie concerne les trois groupements B, C et D à l'exception de Conception et industrialisation en microtechniques.

A. Définition

Le **TP1** sur la durée de bon fonctionnement d'un matériel non soumis à un phénomène d'usure et le **TP2** sur la radioactivité conduisent à étudier des variables aléatoires à densité, prenant leurs valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$, dont la fonction de densité est d'un type particulier.

DÉFINITION

La **loi exponentielle de paramètre** λ, où $\lambda > 0$, est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

La variable est ici notée t car elle correspond très souvent à un instant.

Exemple

Dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ on a $f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$ pour tout t positif.

$(e^u)' = u'e^u$.

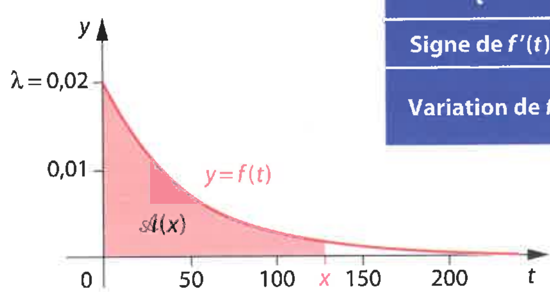
Pour tout x réel, $e^x > 0$.

$f'(t) = -(0{,}02)^2\, e^{-0{,}02t} < 0$.

$f(0) = 0{,}02$ car $e^0 = 1$.

Voir, au chapitre **1** du **tome 1**, la limite de e^u à la fin de la partie **2**.

$\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}02t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$: la courbe représentative de f a pour asymptote l'axe des abscisses.



t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$
Variation de f	$0{,}02 \searrow 0$

L'aire de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe et la droite verticale d'équation $t = x$, où $x > 0$, est :

$\mathscr{A}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donc ici $\mathscr{A}(x) = \int_0^x 0{,}02\, e^{-0{,}02t}\,dt$.

$\mathscr{A}(x) = [-e^{-0{,}02t}]_0^x$, donc $\mathscr{A}(x) = -e^{-0{,}02x} - (-e^0)$, $\mathscr{A}(x) = 1 - e^{-0{,}02x}$.

Nous venons de démontrer ci-dessus que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}02x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{A}(x) = 1$.

L'aire sous la courbe représentative de la fonction f est égale à 1 unité d'aire, alors que c'est l'aire d'une partie du plan illimitée à droite.

Remarque

Les propriétés obtenues dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ restent valables dans le cas général où $\lambda > 0$.

B. Calcul de probabilités

On étend à l'intervalle $[0, +\infty[$ les définitions et résultats concernant les variables aléatoires à densité sur $[a, b]$, notamment la loi uniforme sur $[a, b]$.

Une probabilité reste l'aire d'une partie de plan située sous la courbe de la fonction de densité.

À RETENIR

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

$\lambda > 0$.

Ici $x_1 = 0$ et $x_2 = x$ et $P(X \leq x) = \mathcal{A}(x)$.

Exemple

Reprenons le cas où $\lambda = 0{,}02$.

La probabilité que X prenne une valeur comprise entre 20 et 50 est $P(X \in [20, 50]) = \int_{20}^{50} 0{,}02e^{-0{,}02t}\, dt$, donc $P(X \in [20, 50]) = e^{-0{,}4} - e^{-1} \approx 0{,}302$.

La probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à 100 est $P(X \leq 100) = \int_0^{100} 0{,}02\, e^{-0{,}02t} dt$, donc $P(X \leq 100) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865$.

Voir l'exemple ci-dessus.

Les calculs d'intégrale sont effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. La démonstration détaillée est rédigée au paragraphe A pour le calcul de l'aire $\mathcal{A}(x)$.

C. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle

DÉFINITION

L'**espérance** d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est $\boldsymbol{E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\, f(t) dt}$, où f est la fonction de densité.

On étend à $[0, +\infty[$ la définition pour une loi à densité sur $[a, b]$.

Comme $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, on a $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$.

Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(t) = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.

$G'(t) = -e^{-\lambda t} - t(-\lambda)e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}(-\lambda)e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$.

Donc G est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = G(x) - G(0)$.

Or $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$ par définition de G.

Donc $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

La méthode d'intégration par parties, au programme de certains BTS, permet d'obtenir la valeur de l'intégrale $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$ sans donner, comme ici, la fonction G : voir l'exercice 6.

Cherchons la limite en $+\infty$ des deux premiers termes de cette somme.

$-xe^{-\lambda x} = -\frac{x}{e^{\lambda x}} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}$;

$\lim_{x \to +\infty} \lambda x = +\infty$ car $\lambda > 0$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ car l'inverse $\frac{e^X}{X}$ a pour limite $+\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$.

Nous avons déjà démontré que $\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$ est donc la somme de la constante $\frac{1}{\lambda}$ et de deux termes qui ont pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conclusion, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$, donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

PROPRIÉTÉ

> L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit la **loi exponentielle de paramètre λ** est $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\frac{1}{\lambda}$.

Ce résultat reste vrai dans le cas général où $\lambda > 0$: voir l'exercice 5.

Exemple

Pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$, l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{0{,}02}$, donc $E(X) = 50$.

Vous pouvez observer sur la figure du début du paragraphe A. que $E(X) = 50$ est l'abscisse du point où la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\lambda = 0{,}02$ coupe l'axe des abscisses.

Remarque

Avec un tableur ou une calculatrice on peut simuler une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur $]0, 1]$; ceci peut notamment permettre de conforter l'interprétation ci-dessus de l'espérance $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

La justification de la méthode de la transformation inverse mise en œuvre dans l'exercice 7, en remarquant que si U suit cette loi uniforme il en est de même de $1 - U$, n'est pas au programme des BTS.

D. Variance, écart type

DÉFINITION

> La **variance** d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est $\boldsymbol{V(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t^2 f(t)dt - (E(X))^2}$ où f est la fonction de densité.
>
> L'**écart type** est $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

On étend à $[0, +\infty[$ la définition pour une loi à densité sur $[a, b]$.

Comme $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, on a $\int_0^x t^2 f(t)dt = \int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$.

Soit H la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $H(t) = -t^2 e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda} t e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$.

Pour le calcul de cette intégrale sans la donnée de la fonction H, voir l'exercice 6.

$H'(t) = -2te^{-\lambda t} + \lambda t^2 e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda} te^{-\lambda t} + 2te^{-\lambda t} + \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t}$,

$H'(t) = \lambda t^2 e^{-\lambda t}$.

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$.

Donc H est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\lambda t}$.

$\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt = H(x) - H(0)$.

Or $H(0) = -\frac{2}{\lambda^2}$ par définition de H.

Donc $\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt = -x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda^2}$.

Cherchons la limite en $+\infty$ des trois premiers termes de cette somme.

$-x^2 e^{-\lambda x} = -\frac{x^2}{e^{\lambda x}} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{(\lambda x)^2}{e^{\lambda x}}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda x = +\infty$ car $\lambda > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ car l'inverse $\dfrac{e^x}{x}$ a pour limite $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 e^{-\lambda x} = 0$.

Voir la démonstration pour l'espérance $E(X)$.

Nous avons déjà démontré que $\lim\limits_{x \to 0} -xe^{-\lambda x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{\lambda} xe^{-\lambda x} = 0$.

Nous savons aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} = 0$.

$\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt$ est donc la somme de trois termes qui tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et de la constante $\dfrac{2}{\lambda^2}$.

Voir la définition de $V(X)$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt = \dfrac{2}{\lambda^2}$ et $V(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2$ par définition.

En conclusion, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

PROPRIÉTÉ

La **variance** d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Son **écart type** est $\boldsymbol{\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est répétée un très grand nombre de fois, l'écart type des valeurs prises par X mesurant la dispersion de ces valeurs autour de leur moyenne devient voisin de $\dfrac{1}{\lambda}$.

Nous avons vu que dans ce cas, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple

Pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$, l'écart type de X est $\sigma(X) = \dfrac{1}{0{,}02}$, donc $\sigma(X) = 50$.

E. Vocabulaire de la fiabilité

Il s'agit d'une courte introduction de ce vocabulaire sur un exemple, la fiabilité étant traitée au chapitre **5**.

Notons T la variable aléatoire qui, à tout élément d'un certain type, prélevé au hasard dans un stock, associe sa durée de bon fonctionnement (en heure) avant une défaillance.

Supposons que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 5.

Sa fonction de densité f est définie, pour tout $t \geq 0$ par $f(t) = 0{,}000\,5e^{-0{,}000\,5t}$.

Considérons l'événement A : la durée de bon fonctionnement de l'élément prélevé est inférieure à 1 000 heures.

A est aussi l'événement : l'élément prélevé a une défaillance avant 1 000 heures de fonctionnement.

Le calcul de $P(A) = P(T \leq 1000)$ à l'aide d'un tableur avec l'instruction
= LOI.EXPONENTIELLE (1000;0,0005;1) donne $P(A) \approx 0{,}393$.

Le dernier 1 peut être remplacé par VRAI.

Plus généralement, pour tout $t_1 \geq 0$, $P(T \leq t_1) = \int_0^{t_1} f(t)\, dt$, donc $P(T \leq t_1) = F(t_1) - F(0)$ où F est une primitive de la fonction de densité f.

Pour $f(t) = 0{,}000\,5e^{-0{,}0005t}$, $F(t) = -e^{-0{,}0005t}$ convient.

Donc $P(T \leq t_1) = 1 - e^{-0{,}0005t_1}$ car $F(0) = -1$.

La fonction $F : t \mapsto F(t) = 1 - e^{-0{,}0005t}$ est appelée **fonction de défaillance** car $F(t) = P(T \leq t)$ est la probabilité d'avoir une défaillance avant l'instant t.

> Plus généralement, **$F : t = 1 - e^{-\lambda t}$ est la fonction de défaillance pour une loi exponentielle de paramètre λ.**

L'événement contraire de $T \leq t$ est $T > t$.

$P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$, donc $P(T > t) = 1 - (1 - e^{-0{,}0005t})$, $P(T > t) = e^{-0{,}0005t}$.

La fonction $R : t \mapsto R(t) = e^{-0{,}0005t}$ est appelée **fonction de fiabilité** car $R(t) = P(T > t)$ est la probabilité de ne pas avoir de défaillance avant l'instant t.

> Plus généralement, **$R : t = e^{-\lambda t}$ est la fonction de fiabilité pour une loi exponentielle de paramètre λ.**

> AFNOR : Association Française pour la NORmalisation

Remarque

- Pour l'AFNOR, la **fiabilité** est « la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une période d'année ».
- La notation F de la fonction de défaillance a pour origine *Failure* : défaillance.
- La notation R de la fonction de fiabilité a pour origine *Reliability* : fiabilité.

L'espérance $\boldsymbol{E(T)}$ est notée habituellement **MTBF : Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement.**

À l'origine, MTBF est le sigle de *Mean Time Between Failures*, qui se traduit par « temps moyen entre (deux) défaillances ».

> De même, en maintenabilité, on introduit la Moyenne des Temps Techniques de Réparation, notée MTTR, dont l'origine est *Mean Time To Repaire* : temps moyen pour réparer.

On définit aussi le **taux d'avarie** instantané à l'instant t par $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $\dfrac{f(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$.

Ainsi la **loi exponentielle intervient dans le cas d'un taux d'avarie constant** : c'est souvent le cas après une période de rodage où certains composants électroniques peuvent s'avérer défectueux et avant que les frottements sur certaines pièces mécaniques n'entraînent des pannes dues à l'usure.

2 | Loi de Poisson

A. Champ d'intervention

Exemple

Dans un atelier, l'alimentation électrique est soumise à des microcoupures aléatoires, indépendantes les unes des autres. Cette indépendance signifie que les microcoupures passées n'ont aucune influence sur celles à venir : **le futur est indépendant du passé.**

> L'alimentation électrique s'arrête pendant une fraction de seconde et se rétablit spontanément aussitôt après.

Supposons que la variable aléatoire T mesurant le **temps d'attente entre deux microcoupures** suive une **loi exponentielle.**

Alors la variable aléatoire X mesurant le **nombre de microcoupures** sur une plage horaire fixée suit une loi de probabilité appelée **loi de Poisson.**

D'une manière générale, la loi de Poisson intervient pour mesurer un nombre de réalisations observées pendant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle (voir le **TP3**).

> Cette loi a été présentée en 1837 par Denis Poisson dans son ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, où il s'intéressait aux peines les plus lourdes.

L'idée à retenir est qu'une loi de Poisson intervient dans la modélisation de **phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé.**

Ainsi, une loi de Poisson peut intervenir dans des problèmes concernant :
- les pannes de machines,
- les sinistres (couverts ou non par une assurance),
- les appels téléphoniques dans un standard,
- les files d'attente,
- la mortalité,
- le temps de guérison de petites blessures,
- les stocks,
- …

Remarque

Il est à noter que si le nombre de taxis passant à un endroit donné pendant un certain intervalle de temps peut être mesuré par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson lorsque le trafic est fluide, il n'en est pas de même pour les autobus ou les trains, qui ont des heures de départ fixes : le futur, l'instant de leur passage à un endroit donné, n'est pas indépendant du passé, l'instant fixé de leur départ à un point fixe (terminus ou gare).

B. Calcul de probabilités

Définition

La définition d'une loi de Poisson est présentée ici comme une information culturelle en précisant que « *la connaissance d'une expression explicite de la loi de Poisson n'est pas attendue* ».

Extrait du programme de mathématique des BTS.

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ** positif lorsque sa loi de probabilité est :
pour tout nombre entier naturel k,

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$k!$, lu « factorielle k », est le produit de k par tous les entiers non nuls qui le précèdent : $k! = k(k-1)(k-2)...2\times 1$.
Par définition, $0! = 1$

Calcul de probabilités

Exemple

La variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant à l'accueil d'une maison de santé, par intervalle de temps de durée 10 minutes, entre 14 h 30 et 16 h 30, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Calculons la probabilité p_1 qu'entre 15 h et 15 h 10 min, 6 personnes se présentent à l'accueil de cette maison de santé. La valeur de $p_1 = P(X=6)$ est obtenue avec un tableur par l'instruction = LOI.POISSON (x ; λ ; 0) où $x = 6$ et $\lambda = 5$. $P(X=6) \approx 0{,}146$.

0 peut être remplacé par FAUX.

- Calculons la probabilité p_2 qu'entre 16 h 10 min et 16 h 20 min, 8 personnes au moins se présentent à l'accueil. $p_2 = P(X \geq 8)$, donc $p_2 = 1 - P(X \leq 7)$ en observant que l'événement contraire de $X \geq 8$ est $X < 8$, c'est-à-dire $X \leq 7$ car X ne prend que des valeurs entières. La valeur de $P(X \leq 7)$ est obtenue avec un tableur par l'instruction = LOI.POISSON (x ; λ ; 1) où $x = 7$ et $\lambda = 5$. $P(X \leq 7) \approx 0{,}867$, donc $P(X \geq 8) \approx 0{,}133$.

Cumul

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

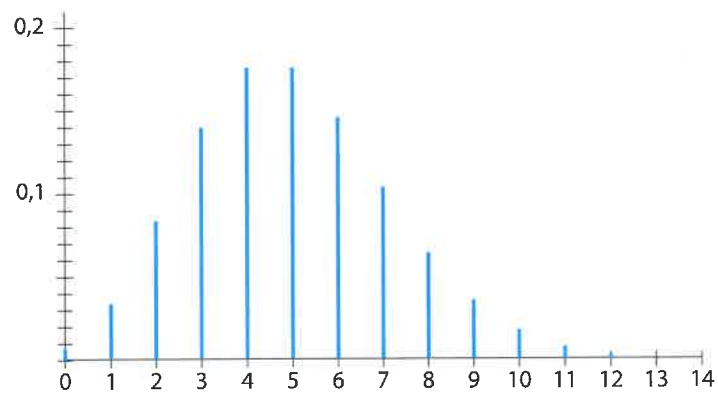
1 peut être remplacé par VRAI.

Représentation graphique

La loi de Poisson étant une loi discrète, comme la loi binomiale, sa représentation graphique est un diagramme en bâtons où l'extrémité supérieure de chaque segment est le point d'abscisse k et d'ordonnée $P(X = k)$.

Exemple

Représentation graphique de la loi $\mathcal{P}(5)$



k	$P(X = k)$
0	0,007
1	0,034
2	0,084
3	0,140
4	0,176
5	0,176
6	0,146
7	0,104
8	0,065
9	0,036
10	0,018
11	0,008
12	0,003
13	0,001
14	0,000

Remarque

En théorie l'entier k peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, mais on constate qu'assez rapidement $P(X = k) \approx 0$.

Pour $\mathcal{P}(5)$,
$P(X = 20) \approx 2{,}6 \times 10^{-7}$
et $P(X = 40) \approx 7{,}5 \times 10^{-23}$.

C. Espérance, variance, écart type

On démontre et nous admettons les résultats suivants.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\boldsymbol{E(X) = \lambda, \qquad V(X) = \lambda, \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent où X suit la loi $\mathcal{P}(5)$, on a $E(X) = 5$, $V(X) = 5$ et $\sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2{,}2$.

Ces résultats peuvent être interprétés de la façon suivante : pour un très grand nombre d'après-midi d'observation, en moyenne 5 personnes se présentent à l'accueil sur une période de dix minutes et l'écart type mesurant la dispersion autour de 5 est voisin de 2,2.

Remarque

Comme X peut prendre une infinité de valeurs entières k, l'espérance $E(X)$ est une somme d'une infinité de termes :
$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + \ldots$
que l'on note $E(X) = \sum_{k \geq 0} kP(X = k)$.

De même $V(X) = \sum_{k \geq 0} k^2 P(X = k) - (E(X))^2$.

On étend les égalités concernant l'espérance et la variance d'une loi binomiale données au paragraphe **2B** du chapitre **2**.

D. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Exemple

Dans une entreprise, on considère que la probabilité d'obtenir un article défectueux à la sortie d'une chaîne de fabrication est $p = 0{,}05$. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles.

Une étude statistique antérieure a conduit à attribuer la valeur 0,05 à cette probabilité.

Bien que ce prélèvement soit exhaustif, nous considérons que la production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à 120 tirages avec remise, donc indépendants, d'un article défectueux ou non. La variable aléatoire X mesurant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(120\,;0{,}05)$, et l'espérance mathématique de X est $120 \times 0{,}05 = 6$.

Un prélèvement exhaustif est effectué sans remise.

$E(X) = np$.

Comparons la loi de X avec celle d'une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(6)$.

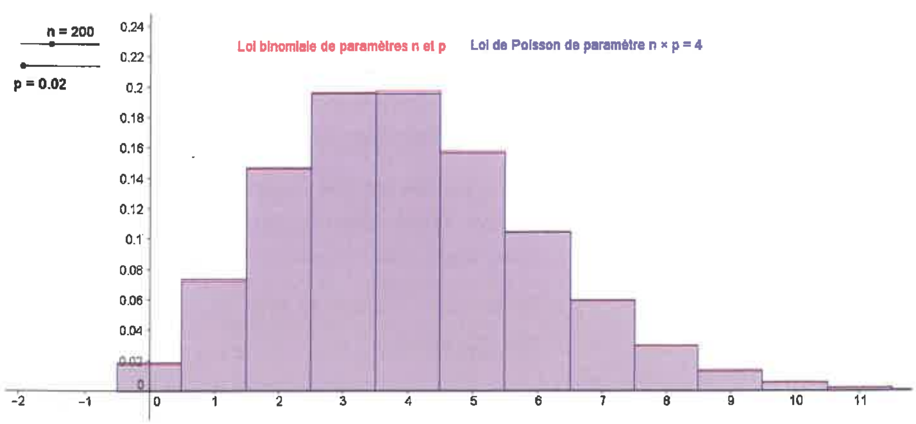
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=k)$	0,002	0,013	0,042	0,087	0,134	0,163	0,165	0,141	0,105
$P(Y=k)$	0,002	0,015	0,045	0,089	0,134	0,161	0,161	0,138	0,103

k	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$P(X=k)$	0,069	0,040	0,021	0,010	0,004	0,002	0,001	0,000	…
$P(Y=k)$	0,069	0,041	0,023	0,011	0,005	0,002	0,001	0,000	…

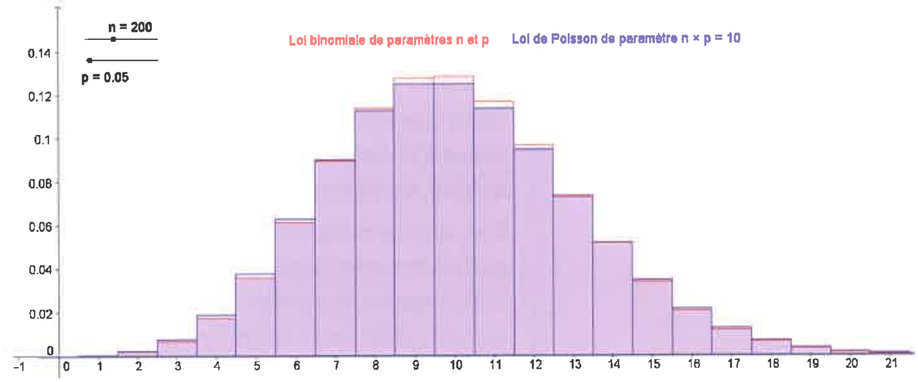
On observe que la loi de la variable Y est suffisamment proche de celle de X pour qu'on puisse utiliser la loi de Poisson pour calculer, par exemple, la probabilité qu'un échantillon de 120 articles contienne au moins un article défectueux, puis la probabilité que cet échantillon contienne au plus trois articles défectueux.

Nous pouvons poursuivre graphiquement la comparaison entre une **loi binomiale** $\mathcal{B}(\boldsymbol{n, p})$ et la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ de même espérance, c'est-à-dire avec $\boldsymbol{\lambda = np}$.

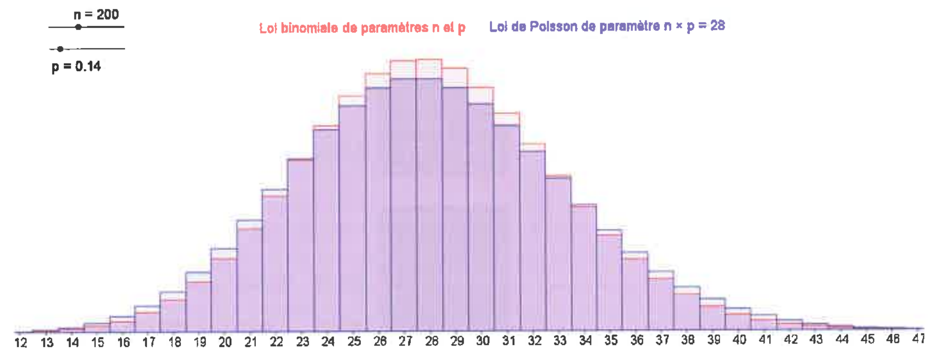
$n = 200$ et $p = 0{,}02$



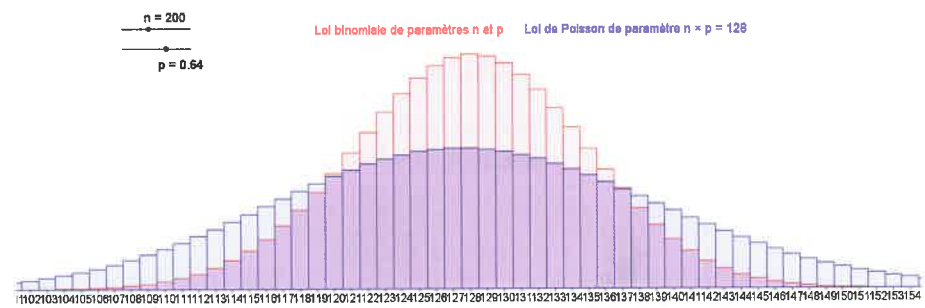
$n = 200$ et $p = 0{,}05$



$n = 200$ et $p = 0{,}14$



$n = 200$ et $p = 0{,}64$



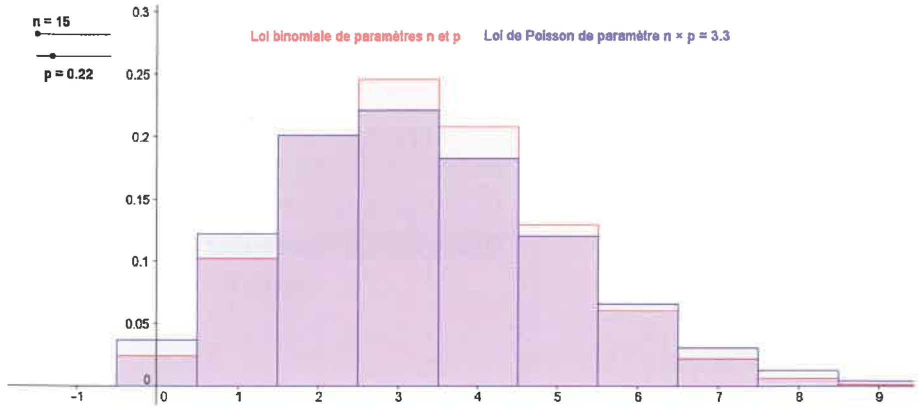
Nous constatons que pour n grand (ici $n = 200$), les histogrammes sont d'autant plus proches que p est petit.

Voir le paragraphe **3C** du chapitre **2**.

Dans le dernier cas ci-dessus où $p = 0{,}64$ les histogrammes, très différents, ont l'allure d'une courbe en cloche car les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale sont réunies.

Enfin pour n petit (ici $n = 15$), les histogrammes présentent des différences, non négligeables.

$n = 15$ et $p = 0{,}22$



Le théorème justifiant cette approximation est hors programme. Noter l'intérêt de cette approximation : on peut remplacer une loi dépendant de deux paramètres par une loi à un paramètre.
Les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson **n'ont pas à être mémorisées. La seule capacité exigible est de savoir que lorsqu'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, le paramètre de cette loi est donné par $\lambda = np$, c'est-à-dire que l'espérance est conservée.**

Ces observations numériques et graphiques nous permettent d'admettre la propriété suivante.

À RETENIR

Si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est très proche de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\boldsymbol{\lambda = np}$.

On convient en général d'utiliser cette approximation lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$, ou lorsque $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$.

3 | Exemples de processus aléatoires

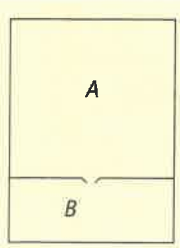
Cette partie concerne, dans le groupement B, Bâtiment, Conception et réalisation de carrosseries, Conception et réalisation des systèmes automatiques, Domotique, Environnement nucléaire, Géologie appliquée, Maintenance industrielle, Travaux publics.

Dans cette partie, nous nous intéressons à des **processus aléatoires**, c'est-à-dire à des successions, dans le temps, d'expériences aléatoires. L'objectif du programme des BTS concernés étant une initiation aux chaînes de Markov, nous nous limitons ici à des exemples simples permettant cependant de préciser la nature des problèmes à résoudre, soit par le calcul des probabilités dans les cas les plus élémentaires, soit par la mise en œuvre d'algorithmes permettant de réaliser des simulations à l'aide de l'outil informatique.

A. Graphe probabiliste à *N* sommets

Exemple 1

Une puce se déplace de façon aléatoire sur une surface constituée de deux parties A et B.



En assimilant la puce à un point, nous pouvons suivre en continu les déplacements de la puce.

Nous allons simplifier cette situation de deux façons :

– Nous ne distinguons que deux « **états** » pour la puce :
- elle est dans la partie A : c'est l'état 1 ;
- elle est dans la partie B : c'est l'état 2.

COURS

Par exemple, on observe la position de la puce toutes les 5 secondes

– Nous n'observons la position de la puce qu'à certains instants : l'instant initial ou instant 0, l'instant 1, l'instant 2,...

À l'instant initial, la puce est dans la partie A.

On dispose de deux informations supplémentaires :

Cette probabilité est constante.

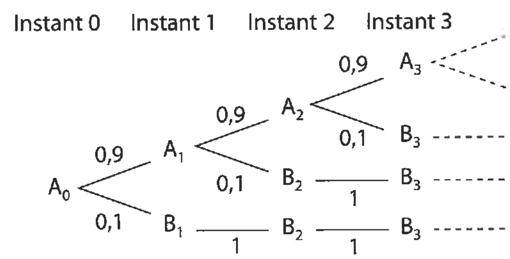
(1) Si la puce est dans la partie A à un instant i, la probabilité qu'elle soit dans la partie B à l'instant $i + 1$ est **0,1 quel que soit l'entier *i*.**

(2) Si la puce est dans la partie B, elle reste dans la partie B.

Nous pouvons représenter cette situation par un arbre.

Cet arbre a une infinité de branches.

A_i est l'événement : la puce est en A à l'instant i. De même pour B_i qui peut être constitué de plusieurs parties.



Nous pouvons aussi représenter cette situation par un **graphe probabiliste** réalisé de la façon suivante :

- Chaque état est représenté par un cercle dans lequel figure le nom de l'état qui peut être un numéro : ici nous avons deux états notés A et B ;
- S'il est possible de passer de l'état i à l'état j l'instant suivant, alors une flèche symbolise cette **transition** avec la probabilité de l'événement correspondant.

j peut être égal à i.

Nous obtenons ainsi un **graphe probabiliste à 2 états ou 2 sommets.**

La situation initiale « la puce est en A » et le graphe donnent les mêmes informations que l'arbre ci-dessus.

Remarque

- Sur le graphe nous observons que la seule flèche partant de l'état B correspond à une transition de probabilité 1.
L'état B est un **état absorbant.**
- Sur le graphe, **la somme des probabilités de toutes les flèches de transition qui partent d'un état est égale à 1.**

C'est la traduction de l'information (2).

Cette propriété est générale : elle s'applique à chacun des *N* sommets ou états de tout graphe probabiliste.

Exemple 2

Un joueur a 1 euro et veut posséder 3 euros. Pour cela il participe à un jeu Pile-Face supposé équiprobable où la mise pour chaque lancer de la pièce est de 1 euro.

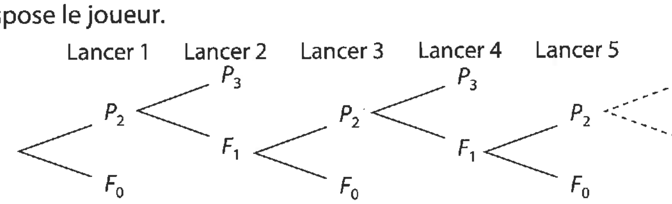
Si Pile sort, il récupère sa mise et gagne 1 euro.

Si Face sort, il perd sa mise de 1 euro.

La partie s'arrête s'il perd son dernier euro ou dès qu'il obtient 3 euros.

Représentons cette situation par un arbre où en indice de P et F figure la somme dont dispose le joueur.

Le jeu Pile-Face étant équiprobable, la probabilité de l'événement correspondant à chaque branche de l'arbre est égale à $\frac{1}{2}$.



Cet arbre a une infinité de branches.

Comme pour les arbres, lorsque toutes les transitions à partir d'un état donné sont équiprobables, on n'écrit pas les probabilités.

Nous pouvons aussi représenter cette situation par un **graphe probabiliste** où les états correspondent au nombre d'euros possédés par le joueur.

Nous obtenons un **graphe probabiliste à 4 états ou 4 sommets.**

La situation initiale « le joueur a 1 euro » et le graphe donnent les mêmes informations que l'arbre ci-dessus.

Si on arrive à un de ces états, on y reste.

Remarque

La partie s'arrêtant dès qu'on arrive à l'état 0 ou à l'état 3, on peut considérer ces deux états comme des **états absorbants**.

Exemple 3

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsqu'un sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif ; dans le cas contraire il est dit négatif.

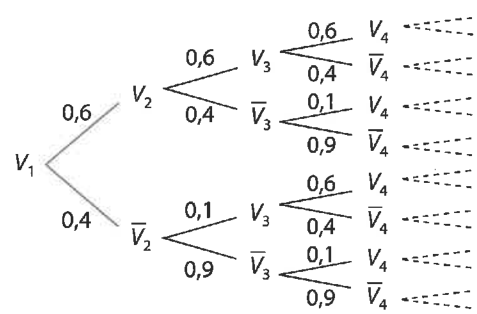
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif.

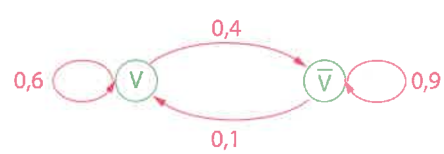
Représentons cette situation par un arbre où l'événement « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, $\overline{V_n}$ désignant l'événement contraire.

Cet arbre a une infinité de branches.



Nous pouvons aussi représenter cette situation par un **graphe probabiliste**.

L'état V correspond à la découverte de vestiges et l'état $\overline{\text{V}}$ à l'absence de vestiges découverts.



Nous obtenons un **graphe probabiliste à 2 états ou 2 sommets.**

La situation initiale « le premier sondage est positif » et le graphe donnent les mêmes informations que l'arbre ci-dessus

Remarque

Le graphe ne comporte **pas d'état absorbant.**

Exemple 4

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.

Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

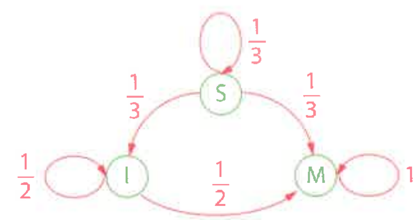
I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

M : « l'individu est malade et infecté ».

Les scientifiques estiment qu'un seul individu, malade et infecté, est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus aléatoire suivant :

- pour les individus sains, la probabilité de devenir porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la probabilité de devenir malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- pour les individus porteurs sains, la probabilité de devenir malades est égale à $\frac{1}{2}$.
- Nous pouvons représenter cette situation par un **graphe probabiliste à 3 sommets** correspondant aux 3 états.

> **Rappel** : dans un graphe probabiliste, la somme des probabilités de toutes les flèches qui partent d'un état est égale à 1.



Remarque

L'état M est le seul **état absorbant** du graphe.

B. Exemples de chaînes de Markov

Dans les quatre exemples introduits au paragraphe A, les probabilités de transition à un instant de l'état i à l'état j sont indépendantes de cet instant et des événements antérieurs qui ont amené à l'état i. De tels processus aléatoires sont appelés des **chaînes de Markov**, Andreï Markov (1856-1922) étant le mathématicien russe qui a publié en 1906 les premiers travaux à ce sujet.

> Ce sont les probabilités figurant sur les graphes.

Toute l'information utile pour prédire le futur en termes probabilistes est contenue dans l'état présent du processus aléatoire, c'est-à-dire dans le graphe et la situation initiale ; des informations supplémentaires concernant le passé n'apportent aucune amélioration.

> La notion de chaîne de Markov a depuis connu des généralisations, notamment en 1936 avec Andreï Kolmogorov, le mathématicien russe qui a introduit les axiomes des probabilités.

L'**exemple 1** du paragraphe A va nous permettre d'énoncer, et de résoudre dans ce cas élémentaire, la plupart des types de problèmes rencontrés avec une chaîne de Markov.

> L'**exemple 4** va nous permettre d'introduire la matrice de transition.

Calcul de la probabilité d'un événement

- Notons E_n l'événement : « la puce arrive dans la partie B à l'instant n ».

> Voir le paragraphe A.

$P(E_1) = 0{,}1$ d'après l'information (1).

$P(E_2) = 0{,}9 \times 0{,}1$ d'après la règle 1 des arbres de probabilités qui devient pour les graphes probabilistes : **la probabilité, partant d'un sommet (ou d'un état), d'effectuer un parcours donné est égale au produit de toutes les probabilités de transition de ce parcours.**

Pour E_2, le parcours comprend une fois la boucle autour de A, puis le passage de A à B.

$P(E_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1$ car le parcours comprend deux fois la boucle autour de A, puis le passage de A à B.

Donc $P(E_3) = 0{,}9^2 \times 0{,}1$.

Et ainsi de suite : $P(E_4) = 0{,}9^3 \times 0{,}1$ et, plus généralement,

> Le raisonnement par récurrence n'est pas explicitement au programme des BTS.

$\boldsymbol{P(E_n) = 0{,}9^{n-1} \times 0{,}1}$ **pour tout** $\boldsymbol{n \geq 1}$.

Nous observons que $P(E_n) = P(E_1) \times 0{,}9^{n-1}$ est de la forme $u_n = u_1 q^{n-1}$.

La suite des nombres $P(E_n)$ est donc une suite géométrique de premier terme $P(E_1) = 0{,}1$ et de raison $q = 0{,}9$.

• Notons F_n l'événement : « la puce est dans la partie B à l'instant n ».

> Les n événements E_i sont incompatibles deux à deux.

$F_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ où, pour tout i et j compris entre 1 et n, avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ car la puce ne peut pas arriver dans la partie B à deux moments différents d'après l'information (2) : « si la puce est dans la partie B, elle reste dans la partie B ».

Donc la probabilité, notée b_n, de l'événement F_n est :

$b_n = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$.

> Voir au chapitre 4 du **tome 1** le paragraphe 2C :
> $S_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

D'après ce qui précède, b_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 0,1 et de raison 0,9.

Donc $b_n = 0{,}1 \dfrac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9}$,

$\boldsymbol{b_n = 1 - 0{,}9^n}$ **pour tout** $\boldsymbol{n \geq 1}$.

> $\overline{F_n}$ est l'événement : « la puce est dans la partie A à l'instant n. »

Remarque

Le calcul de $b_n = P(F_n)$ peut aussi être effectué en calculant la probabilité $P(\overline{F_n}) = 1 - b_n$ de l'événement contraire.

Recherche de l'instant à partir duquel une condition est réalisée

Nous pouvons déterminer à partir de quel instant n la probabilité b_n que la puce soit dans la partie B à l'instant n devient supérieure à 0,5.

Les inégalités suivantes sont équivalentes :

$b_n \geq 0{,}5$; $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}5$; $1 - 0{,}5 \geq 0{,}9^n$; $0{,}5 \geq 0{,}9^n$

$\ln 0{,}9^n \leq \ln 0{,}5$ car la fonction ln est croissante, $n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}5$ car $\ln a^n = n \ln a$,

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$ car $\ln 0{,}9 < 0$ puisque $0{,}9 < 1$. Or $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$.

> À partir de l'instant 7, il y a plus de chances que la puce soit dans la partie B que dans la partie A.

Donc **la puce est dans la partie B à l'instant n avec une probabilité supérieure à 0,5 à partir de l'instant $n = 7$.**

COURS

Recherche de la tendance à long terme

Nous savons que la probabilité b_n de l'événement F_n « la puce est dans la partie B à l'instant n » est : $b_n = 1 - 0{,}9^n$ pour tout $n \geq 1$.

Voir au chapitre **4** du **tome 1** le paragraphe **3B**.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ puisque $0 < 0{,}9 < 1$.

Cette limite de la probabilité b_n de l'événement F_n signifie qu'**à long terme la situation « asymptotique » de la puce est de se trouver dans la partie B.**

L'**exemple 1** correspond à une situation élémentaire.

Ce résultat était intuitivement prévisible car il découle du fait que la puce peut entrer dans la partie B mais ne peut pas en sortir (**l'état B est absorbant**), alors qu'elle peut sortir de la partie A.

Recherche de la durée moyenne pour arriver à un état particulier

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire décrite dans l'**exemple 1**, associe l'instant n où la puce arrive dans la partie B.

L'événement $X = n$ est l'événement E_n défini au début du paragraphe **B**.

Donc $P(X = n) = 0{,}1 \times 0{,}9^{n-1}$.

n	1	2	3	4	...
$P(X=n)$	0,1	$0{,}1 \times 0{,}9$	$0{,}1 \times 0{,}9^2$	$0{,}1 \times 0{,}9^3$	...

Voir le paragraphe **2B** du chapitre **2**.

Par définition de l'espérance de la variable aléatoire X,

$E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) + \ldots,$

$E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}1 \times 0{,}9 + 3 \times 0{,}1 \times 0{,}9^2 + \ldots,$

$E(X) = 0{,}1(1 + 2 \times 0{,}9 + 3 \times 0{,}9^2 + \ldots),$

$E(X) = 0{,}1 \times \sum\limits_{n \geq 1} n \times 0{,}9^{n-1}.$

Cette égalité n'a pas à être mémorisée : elle est donnée dans l'énoncé de toute évaluation où elle est utile.

Admettons ici l'égalité suivante, valable notamment pour tout q tel que $0 < q < 1$:

$$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

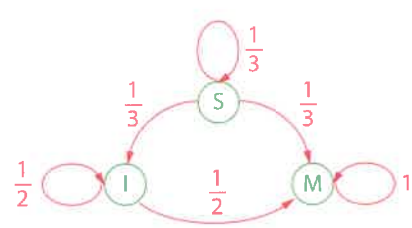
Ici $q = 0{,}9$; donc $\sum\limits_{n \geq 1} n0{,}9^n = \dfrac{1}{(1-0{,}9)^2} = 100.$

Donc $E(X) = 0{,}1 \times 100 = 10$ qui s'interprète de la façon suivante : **si on fait un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire décrite dans l'exemple 1, en moyenne la puce arrive dans la partie B à l'instant 10.**

Recherche et exploitation de la matrice de transition

Le calcul matriciel est traité au chapitre **6** du **tome 1**.

Reprenons l'**exemple 4** du paragraphe **A** pour lequel nous avons obtenu le graphe probabiliste à 3 sommets ou 3 états suivant.



Pour tout n, $s_n + i_n + m_n = 1$

Notons $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.

Nous avons ainsi $P_0 = (0{,}99 \quad 0 \quad 0{,}01)$ car à l'instant initial, une seule personne sur 100 est malade et infectée, les 99 autres étant saines.

Avec ces notations, le graphe ci-dessus se traduit par les trois relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n. \end{cases}$$

Nous allons montrer que ces trois relations peuvent aussi apparaître comme traduction de l'égalité entre la matrice ligne $P_{n+1} = (s_{n+1} \quad i_{n+1} \quad m_{n+1})$ et le produit de la matrice ligne $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ par une matrice carrée A d'ordre 3 définie de la façon suivante :

- Les 3 éléments de la première ligne sont les probabilités de transition du premier état, c'est-à-dire S, vers chacun des trois états S, I, M dans cet ordre : nous obtenons $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$.
- De même pour les 3 éléments de la deuxième ligne avec le deuxième état, c'est-à-dire I : nous obtenons $0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$.
- De même pour les 3 éléments de la troisième ligne avec le troisième état, c'est-à-dire M : nous obtenons $0 \quad 0 \quad 1$.

Donc $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons le produit $P_n \times A = (s_n \quad i_n \quad m_n) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous obtenons la matrice ligne $\left(\frac{1}{3}s_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n\right)$ qui, d'après les trois relations ci-dessus, est égale à la matrice ligne P_{n+1}. Nous avons donc **$P_{n+1} = P_n \times A$ pour tout entier naturel n.**

Plus généralement, pour une chaîne de Markov dont le graphe probabiliste a N sommets ou N états, la matrice de transition a N lignes et N colonnes.

La matrice A est appelée **matrice de transition**. Il résulte directement de sa définition qu'**une matrice de transition a tous ses éléments positifs ou nuls et que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.**

Remarque

Dans le cas où la matrice donnant l'état probabiliste au bout de n semaines est une matrice **colonne** $U_n = \begin{pmatrix} s_n \\ i_n \\ m_n \end{pmatrix}$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}99 \\ 0 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$, la **matrice de transition** B vérifie $\boldsymbol{U_{n+1} = B \times U_n}$ pour tout entier naturel n.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On a échangé les lignes et les colonnes de A. Dans B, c'est la somme des éléments de chaque **colonne** qui est égale à 1.

On a $B \times U_n$ au lieu de $P_n \times A$. L'ordre des matrices a changé dans ces deux produits.

La matrice de transition est utile pour déterminer, par exemple, l'état sanitaire de la population du village, en termes de probabilités, au bout de quatre semaines, c'est-à-dire $P_4 = (s_4 \quad i_4 \quad m_4)$.

1re méthode

Pour $n = 0$, la relation $P_{n+1} = P_n \times A$ s'écrit $P_1 = P_0 \times A$.

Donc $P_1 = (0{,}99 \quad 0 \quad 0{,}01) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_1 = (0{,}33 \quad 0{,}33 \quad 0{,}34)$.

Au bout d'une semaine, il y a à peu près autant de chances qu'une personne prise au hasard dans la population soit saine, porteuse saine ou malade.

Pour $n = 1$, la relation $P_{n+1} = P_n \times A$ s'écrit $P_2 = P_1 \times A$.

Donc $P_2 = (0{,}33 \quad 0{,}33 \quad 0{,}34) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = (0{,}11 \quad 0{,}275 \quad 0{,}615)$.

Nous obtenons de même :

$$P_3 = \left(\frac{0{,}11}{3} \qquad \frac{0{,}11}{3} + 0{,}137\,5 \qquad \frac{0{,}11}{3} + 0{,}752\,5\right)$$

et $P_4 = \left(\frac{0{,}11}{9} \qquad \frac{0{,}55}{18} + 0{,}068\,75 \qquad \frac{1{,}21}{18} + 0{,}821\,25\right)$.

En arrondissant au centième, $P_4 \approx (0{,}01 \quad 0{,}10 \quad 0{,}89)$.

Au bout de quatre semaines, il y a une chance sur 100 qu'un individu pris au hasard dans la population soit sain, 10 chances sur 100 qu'il soit porteur sain et 89 chances sur 100 qu'il soit malade.

2e méthode

Reprenons les égalités de matrices :

$P_1 = P_0 \times A$.

$P_2 = P_1 \times A$, donc $P_2 = (P_0 \times A) \times A$, Voir au chapitre 6 du **tome 1** la fin du paragraphe 1B.

$P_2 = P_0 \times (A \times A)$, donc $P_2 = P_0 \times A^2$.

Et ainsi de suite : $P_3 = P_0 \times A^3$, $P_4 = P_0 \times A^4, \ldots$

Pour obtenir $P_4 = (s_4 \quad i_4 \quad m_4)$, il suffit donc de multiplier la matrice ligne $P_0 = (0{,}99 \quad 0 \quad 0{,}01)$ par la matrice

Avec une calculatrice, on peut calculer $(6A)^4$ car la matrice 6A a tous ses éléments entiers et en déduire $A^4 = \frac{1}{6^4}(6A)^4$.

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{81} & \frac{65}{648} & \frac{575}{648} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{35}{48} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ obtenue à l'aide d'un logiciel.

Alors $P_4 = \left(\frac{0{,}11}{9} \quad \frac{7{,}15}{72} \quad \frac{63{,}25}{72} + 0{,}01\right)$, soit en arrondissant au centième,

$P_4 \approx (0{,}01 \quad 0{,}10 \quad 0{,}89)$.

Remarque

- La démarche de la 2e méthode se généralise : pour tout entier naturel n, $P_n = P_0 \times A^n$. En prenant n assez grand, nous pouvons ainsi explorer la tendance à long terme du phénomène étudié.
- Les relations $P_{n+1} = P_n \times A$ et $P_n = P_0 \times A^n$ ressemblent aux relations $u_{n+1} = qu_n$ et $u_n = u_0 q^n$ des suites géométriques, mais ici la multiplication des matrices n'est pas commutative et on ne définit pas de division des matrices.

Le raisonnement par récurrence n'est pas au programme des BTS.

On n'a pas $A \times B = B \times A$ pour toutes matrices A et B.

Ce qu'il faut savoir

Loi exponentielle

- La **fonction de densité** f est définie sur $[0, +\infty[$ par $\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$ où $\lambda > 0$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

Loi Poisson

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma(X) = \sqrt{X}$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

- **Lorsqu'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, le paramètre de cette loi est donné par $\lambda = np$.**

TRAVAUX PRATIQUES TICE

RÉPONSES P. 288

TP 1 Passer d'histogrammes de fréquences à une loi à densité avec GeoGebra

Temps de fonctionnement

On considère un matériel électronique dont le temps de bon fonctionnement, exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

A. Simulation des temps de fonctionnement et histogrammes des fréquences

On utilise le tableur de GeoGebra pour simuler 5 000 temps de bon fonctionnement, c'est-à-dire 5 000 réalisations de la variable aléatoire T. On suppose qu'un temps de bon fonctionnement est simulé par l'instruction -ln(random())/0.07.

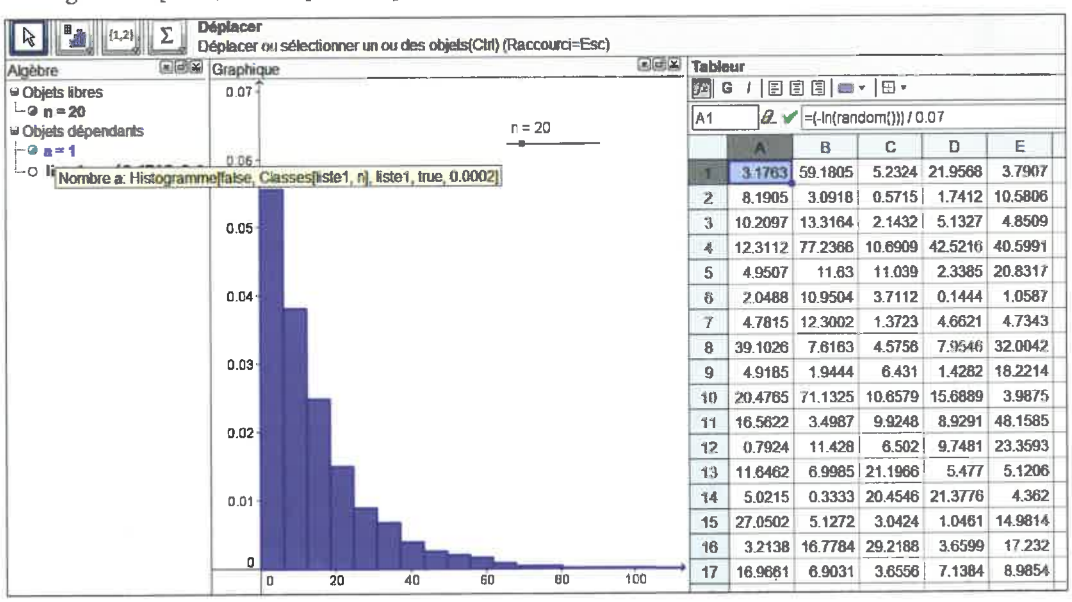
Entrer cette instruction en cellule A1 puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 1 000 et vers la droite jusqu'à la colonne E.

Sélectionner les 5 000 données, puis, par un clic droit, créer une liste (la liste est nommée liste1).

Pour visualiser les données, on les regroupe en n classes. Créer un curseur n allant de 5 à 30 avec un incrément 1.

On crée ensuite un histogramme « normalisé » c'est-à-dire tel que l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe correspondante.

Pour cela, entrer dans la barre de saisie l'expression :
Histogramme[false,Classes[liste1,n],liste1,true,1/5000].



	A	B	C	D	E
1	3.1763	59.1805	5.2324	21.9568	3.7907
2	8.1905	3.0918	0.5715	1.7412	10.5806
3	10.2097	13.3164	2.1432	5.1327	4.8509
4	12.3112	77.2368	10.6909	42.5216	40.5991
5	4.9507	11.63	11.039	2.3385	20.8317
6	2.0488	10.9504	3.7112	0.1444	1.0587
7	4.7815	12.3002	1.3723	4.6621	4.7343
8	39.1026	7.6163	4.5756	7.9546	32.0042
9	4.9185	1.9444	6.431	1.4282	18.2214
10	20.4765	71.1325	10.6579	15.6889	3.9875
11	16.5622	3.4987	9.9248	8.9291	48.1585
12	0.7924	11.428	6.502	9.7481	23.3593
13	11.6462	6.9985	21.1966	5.477	5.1206
14	5.0215	0.3333	20.4546	21.3776	4.362
15	27.0502	5.1272	3.0424	1.0461	14.9814
16	3.2138	16.7784	29.2188	3.6599	17.232
17	16.9661	6.9031	3.6556	7.1384	8.9854

1. Régler le curseur à $n = 20$ et appuyer plusieurs fois sur F9 pour observer plusieurs échantillons de taille 5 000. Quelle est la classe la plus fréquente ?

2. Soit t un réel positif. On s'intéresse à l'événement : « le temps de bon fonctionnement est inférieur ou égal à t », que l'on peut noter « $T \leq t$ ».
Créer un curseur t allant de 0 à 150.
Entrer dans la barre de saisie Fréquence=NbSi[x<=t,liste1]/5000.

a. En faisant plusieurs fois F9, donner une estimation de la probabilité $P(T \leq 15)$.

b. En faisant plusieurs fois F9, estimer, à l'unité, la valeur t_0 pour laquelle $P(T \leq t_0) = 0{,}5$. Cette valeur t_0 est le temps de bon fonctionnement médian, exprimé en semestres.

3. Augmenter le curseur n jusqu'à $n = 100$ et faire plusieurs fois F9. De quel type est le « profil » de l'histogramme ?

B. Courbe de densité et calculs d'aires

On introduit la courbe de densité représentant la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 0{,}07\ \mathrm{e}^{-0{,}07x}$.

1. Saisir f=Fonction[0.07*exp(-0.07*x),0,150]. Faire plusieurs fois F9. Que constate-t-on ?

2. **a.** Pour tout réel t positif, calculer $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire $F(15)$ et comparer avec l'estimation de $P(T \leq 15)$ effectuée à la question **A2a**.

c. Calculer une valeur approchée de $F(t)$ à l'aide de GeoGebra. Donner une interprétation graphique de $F(t)$.

d. Résoudre l'équation $F(t) = 0{,}5$ et comparer avec l'estimation effectuée à la question **A2b**.

e. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

TP 2 Montrer que la loi exponentielle répond à l'observation d'un taux de désintégration constant, avec Maxima

Désintégration radioactive

Dans son ouvrage *Le hasard*, Émile Borel rapporte les expériences de Marie Curie sur la désintégration nucléaire et, en particulier, l'invariance remarquable du taux de désintégration dans le temps : « Je citerai notamment une expérience très complète faite par Mme Curie, avec l'aide de ses préparateurs, et non encore publiée au moment où j'écris ces lignes. Cette expérience a porté sur 10 000 émissions et l'étude numérique, faite avec le plus grand soin par Mme Curie, concorde admirablement avec les prévisions théoriques. Cette concordance est la preuve expérimentale la plus complète de l'invariance de la radioactivité ».

On considère une matière radioactive et on note T la variable aléatoire qui à tout atome radioactif pris au hasard associe le temps d'attente avant sa désintégration.

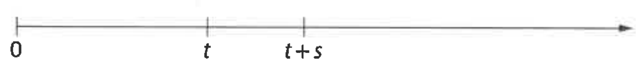
On suppose que T est une variable aléatoire continue de densité f, définie sur $]0, +\infty[$.

On désigne par F la primitive de f définie sur $[0, +\infty[$ par $F(t) = \int_0^t f(x)dx = P(T \leq t)$.

1. Montrer que $F(0) = 0$.

2. Émile Borel affirme : « en un temps donné, une substance radioactive déterminée se trouve perdre, en vertu du phénomène de la radioactivité, une proportion rigoureusement déterminée de son poids ».

Soit $t > 0$ et $s \geq 0$. On considère l'intervalle de temps $[t, t+s]$.



La proportion de masse théoriquement perdue par la substance pendant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ est égale au rapport de la proportion (théorique) d'atomes se désintégrant durant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ à la proportion (théorique) d'atomes non désintégrés au temps t.

a. Justifier que la proportion de masse théoriquement perdue par la substance pendant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ peut s'exprimer par le quotient : $\dfrac{P(t \leq T \leq t+s)}{P(T > t)}$.

b. Montrer que ce rapport peut s'écrire $\dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$.

3. On désigne par « taux moyen de désintégration par unité de temps entre t et $t+s$ » la quantité $\dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \times \dfrac{1}{s}$ et par « taux instantané de désintégration au temps t » la limite

$h(t) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \times \dfrac{1}{s}$. Montrer que $h(t) = \dfrac{F'(t)}{1 - F(t)}$.

4. Émile Borel affirme que la désintégration radioactive se « distingue » par son invariance, c'est-à-dire que, pour tout réel positif t, $h(t) = h$ où h est un nombre réel strictement positif (mesuré lors des expérimentations).

On a donc, pour tout réel positif t, $\dfrac{F'(t)}{1-F(t)} = h$.

En exploitant l'image d'écran suivante, fournie par un logiciel de calcul formel :

a. donner l'ensemble des fonctions F solutions de l'équation $\dfrac{F'(t)}{1-F(t)} = h$;

b. donner l'expression de $f(t)$.

```
(%i1) ode2('diff(F,t)/(1-F)=h, F, t);
(%o1) F=%e^(-h t)(%e^(h t)+%c)

(%i2) expand(%);
(%o2) F=%c %e^(-h t)+1

(%i3) ic1(%, t=0, F=0);
(%o3) F=%e^(-h t)(%e^(h t)-1)

(%i4) expand(%);
(%o4) F=1-%e^(-h t)

(%i5) diff(1-exp(-h*t),t,1);
(%o5) h %e^(-h t)
```

5. Quelle est la loi de la variable aléatoire T ?

Quelques mots d'histoire

Pierre Curie (1859-1906) épousa en 1895 une étudiante d'origine polonaise, Marie Sklodowska (1867-1934). Leur collaboration aboutit à la découverte du polonium et du radium, ce qui leur valut de recevoir en 1903, en commun avec Henri Becquerel, le prix Nobel de physique. Marie Curie, restée veuve, isola le radium pur et en détermina la masse atomique. Elle reçut, à ce titre, le prix Nobel de chimie en 1911.

Émile Borel (1871-1956) est un mathématicien et un homme politique français. Dès 1905, Émile Borel s'intéresse au calcul des probabilités. Ses responsabilités à la défense nationale pendant la Première Guerre mondiale l'amènent à s'intéresser aux mathématiques appliquées. Il est le premier à s'intéresser, dès les années 1920, à la théorie des jeux. Il est aussi l'auteur de nombreux ouvrages de culture générale scientifique et de vulgarisation.

TP 3 Introduire la loi de Poisson en lien avec la loi exponentielle avec Scilab ou Python

Modélisation du trafic Internet

On s'intéresse à la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. On admet que la variable aléatoire T correspondant au temps, en secondes, séparant l'arrivée de deux paquets de données à ce terminal suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 700$ et que les arrivées des paquets de données sont indépendantes les unes des autres.

On considère la variable aléatoire X qui, à toute durée de 0,01 seconde, fait correspondre le nombre de paquets de données arrivant à ce terminal. On souhaite étudier la loi de la variable aléatoire X.

1. On suppose que durant une durée de 0,01 seconde, il arrive deux paquets de données.

a. Que peut-on dire de la somme du temps d'attente du premier paquet et du temps d'attente entre le premier et le deuxième paquet ?

b. Que peut-on dire de la somme du temps d'attente du premier paquet et de chacun des temps d'attente entre les deux suivants ?

2. On admet que la loi exponentielle de paramètre 700 est simulée par l'instruction : – ln(alea)/700 où alea est un générateur de nombre aléatoires entre 0 et 1 (– ln(alea)/700 est un nombre positif).

On considère l'algorithme suivant.

> x prend la valeur – 1
> s prend la valeur 0
> **Tant que** $s \leq 0{,}01$
> s prend la valeur s – ln(alea)/700
> x prend la valeur $x + 1$
> **Fin du tant que**
> Afficher x

a. À quelle condition cet algorithme affiche-t-il la valeur 0 ?

b. Combien de fois la boucle « tant que » doit-elle être exécutée pour que l'algorithme affiche la valeur 2 ?

c. Interpréter les variables x et s dans le contexte de la simulation que produit cet algorithme.

3. Implanter le programme suivant, traduction de l'algorithme précédent sur Scilab ou Python.

```
x=-1
s=0
while s<=0.01
    s=s-log(rand())/700
    x=x+1
end
disp(x)
```

```python
from numpy import*
from random import*
def trafic():
    x=-1
    s=0
    while s<=0.01:
        s=s-log(random())/700
        x=x+1
    print(x)
```

Exécuter plusieurs fois le programme et noter le nombre de paquets de données simulé arrivant au terminal durant un centième de seconde.

Comparer le nombre moyen de paquets arrivant durant un centième de seconde à la valeur $700 \times 0{,}01 = 7$.

4. Modifier et compléter le programme précédent selon les images d'écran suivantes.

```
X=zeros(1,10000)
for i=1:10000
    x=-1
    s=0
    while s<=0.01
        s=s-log(rand())/700
        x=x+1
    end
    X(i)=x
end
F=zeros(1,21)
for i=0:20
    F(i+1)=frequence(i,X)
end
P=zeros(1,21)
for i=0:20
    P(i+1)=exp(-7)*7^i/factorielle(i)
end
clf
bar(0:20,[F',P'])
```

```python
from numpy import*
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt
def trafic(n):
    X=[]
    for i in range(1,n+1):
        x=-1
        s=0
        while s<=0.01:
            s=s-log(random())/700
            x=x+1
        X.append(x)
    A=[-0.5+i for i in range(0,22)]
    plt.hist(X,A)
    P=[n*exp(-7)*7**i/factorielle(i) for i in range(0,22)]
    plt.bar(A,P,0.5,color='r')
    plt.show()

def factorielle(n):
    if n>1:return n*factorielle(n-1)
    else:return 1
```

a. Exécuter le programme pour effectuer 10 000 simulations de la variable aléatoire X. Qu'observe-t-on sur le graphique ?

b. Dans le programme, la liste X contient les valeurs simulées de la variable aléatoire X et la liste P correspond aux résultats fournis par la loi de Poisson de paramètre 7.

Que peut-on conjecturer ? Renouveler les simulations.

TP 4 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson avec GeoGebra

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE. Il peut être utilisé pour un contrôle en cours de formation (CCF).

On souhaite comparer graphiquement, à l'aide de GeoGebra, la loi binomiale de paramètres n et p avec la loi de Poisson de même moyenne.

1. Créer un curseur n allant de 5 à 500 avec un incrément de 1 et un curseur p allant de 0 à 1 avec un incrément 0,01.

Calculer, avec GeoGebra, la moyenne m de la loi de Poisson à comparer avec la loi binomiale de paramètres n et p.

2. Représenter par un histogramme la distribution binomiale en saisissant l'instruction :

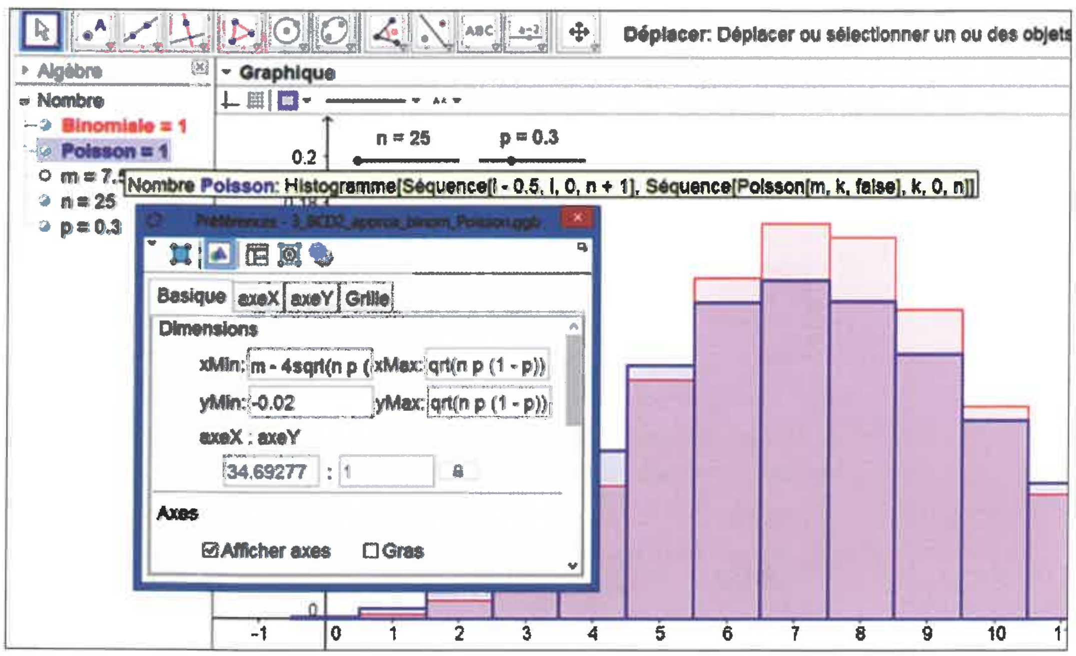
Binomiale=Histogramme[Séquence[i-0.5,i,0,n+1],Séquence[Binomiale[n,p,k,false],k,0,n]]

Représenter par un histogramme la distribution de Poisson en saisissant l'instruction :

Poisson=Histogramme[Séquence[i-0.5,i,0,n+1],Séquence[Poisson[m,k,false],k,0,n]]

Régler l'échelle graphique à xmin : m-4sqrt(n*p*(1−p)) ; xmax : m+4sqrt(n*p*(1−p)) ; ymin : -0.02 et ymax : 0.5/sqrt(n*p*(1−p))

Justifier le réglage de l'échelle des abscisses.



Appelez le professeur pour présenter votre fichier GeoGebra.

3. Indiquer, pour chacun des couples (n, p) suivants ceux pour lesquels ont peut considérer que les deux distributions sont « proches » :

(5 ; 0,4) ; (35 ; 0,4) ; (35 ; 0,08) ; (250 ; 0,08) ; (250 ; 0,02) ; (500 ; 0,02) et (500 ; 0,15).

4. On considère que l'on peut approcher la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson correspondante lorsque :

$n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$ ou lorsque $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$.

Ces conditions sont-elles compatibles avec vos observations précédentes ?

Appelez le professeur pour présenter vos réponses.

TP 5 Simuler un processus aléatoire simple et conjecturer un comportement asymptotique avec Scilab ou Python

Un TP pour approfondir.

Bon fonctionnement de deux machines

Une entreprise utilise deux machines identiques, qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. La probabilité de bon fonctionnement d'une machine durant un jour donné est 0,9. Lorsqu'une machine tombe en panne un jour donné, elle est réparée durant la nuit et est en état de marche le jour suivant avec la même fiabilité. En revanche, vu le temps nécessaire, on ne peut réparer qu'une seule machine à la fois.

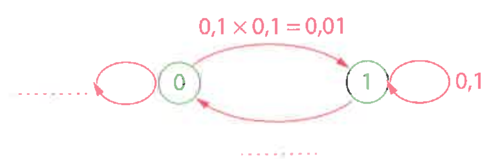
Chaque matin deux états sont possibles :
– état 0 : « les deux machines fonctionnent » ;
– état 1 : « une seule machine fonctionne ».

Le matin du jour n, on note :
– a_n la probabilité que les machines soient dans l'état 0 et
– b_n la probabilité que les machines soient dans l'état 1.

À l'état initial, on suppose que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

A. Simulation

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant représentant les deux états possibles du système.



2. On souhaite simuler l'évolution de ce système jusqu'au jour 5.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour simuler le passage d'un jour donné au jour suivant (où « alea » désigne un nombre aléatoire entre 0 et 1).

```
Saisir x
Si x = 0 alors  Si alea < 0,99 alors x = ........
                Sinon x = ........
                FinSi
Sinon  Si alea < 0,9 alors x = ........
       Sinon x = ........
       FinSi
FinSi
```

b. Modifier et compléter l'algorithme pour simuler l'évolution du système jusqu'au jour 5 et afficher son état le jour 5.

c. Compléter à nouveau l'algorithme pour effectuer 100 000 simulation et afficher les fréquences de chacun des deux états au jour 5.

3. Programmer cet algorithme sur le logiciel Scilab ou Python et l'exécuter. Quelles fréquences obtenez-vous (arrondir à 10^{-4}) ?

B. Calcul matriciel

1. Pour être dans l'état 0 le jour $n + 1$, deux cas sont possibles. Soit on était dans l'état 0 le jour n et les machines restent dans cet état avec une probabilité 0,99. Soit on était dans l'état 1 le jour n et les machines sont passées dans l'état 0 avec une probabilité 0,9.

On en déduit que :

$$a_{n+1} = a_n \times 0{,}99 + b_n \times 0{,}9.$$

Expliquer de façon analogue que :

$$b_{n+1} = a_n \times 0{,}01 + b_n \times 0{,}1.$$

2. Pour tout entier naturel n, on désigne par U_n la matrice ligne à deux colonnes :

$$U_n = (a_n \quad b_n) \text{ avec } U_0 = (1 \quad 0)$$

Déterminer la matrice T telle que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n\, T.$$

3. **a.** Montrer que $U_3 = U_0\, T^3$.

b. On a ci-dessous calculé U_3 à l'aide d'un logiciel.

```
(%i1) U0:matrix([1,0]);
(%o1) [1  0]

(%i2) T:matrix([0.99,0.01],[0.9,0.1]);
      [0.99  0.01]
(%o2) [0.9   0.1 ]

(%i3) U0.T^^3;
(%o3) [0.989019  0.010981]
```

```
-->U0=[1,0]
U0  =

   1.    0.

-->T=[0.99,0.01;0.9,0.1]
T  =

   0.99     0.01
   0.9      0.1

-->U0*T^3
ans  =

   0.989019     0.010981
```

Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $U_5 = U_0\, T^5$ à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice puis interpréter le résultat obtenu.

5. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, calculer T^{10}, T^{20} et T^{100} et interpréter les observations.

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES	Exercices corrigés
• Loi exponentielle	
Exploiter une simulation dans le cadre de la loi exponentielle.	7
Calculer une probabilité dans le cadre de la loi exponentielle.	2, 8, 9, 29, 35
Interpréter l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	2
• Loi de Poisson	
Calculer une probabilité dans le cadre de la loi de Poisson à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.	11, 12, 17, 36, 37, 40
Interpréter l'espérance et l'écart type.	
Déterminer le paramètre de la loi de Poisson approximant une loi binomiale donnée.	17, 36, 37, 40
• Exemples de processus aléatoire	
Représenter un processus aléatoire simple par un graphe probabiliste.	22, 24, 25, 28
Exploiter un graphe probabiliste pour calculer la probabilité d'un parcours donné.	25, 28

Loi exponentielle

1. ++ Calculs de probabilités

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,05.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
$P(X \in [25, 35])$, $P(X \leq 20)$ et $P(X > 40)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et donner une interprétation du résultat.

2. ++ Calculs de probabilités

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
$P(X \in [1, 3])$, $P(X \leq 6)$ et $P(X > 4)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation.

CORRIGÉ P. 291

3. ++ Événement de probabilité donnée

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.

Déterminer le nombre réel x tel que $P(X \leq x) = 0{,}3$. Arrondir à 10^{-2}.

4. ++ Événement de probabilité donnée

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

Déterminer le nombre réel x tel que $P(X \leq x) = 0{,}4$. Arrondir à 10^{-3}.

5. +++ Interprétation graphique de l'espérance

TICE

1. *Cas particulier*

a) Donner la fonction de densité f_2 de la loi exponentielle de paramètre 2.

b) Représenter sur l'écran d'une calculatrice ou d'un ordinateur la représentation graphique C_2 de f_2 ainsi que sa tangente T_2 en son point d'abscisse 0.

c) Calculer $f_2(0)$ et le nombre dérivé $f_2'(0)$.

d) Déterminer une équation de T_2 et en déduire l'abscisse du point où T_2 coupe l'axe des abscisses.

2. *Cas général*

Reprendre les questions **a)**, **c)** et **d)** en remplaçant 2 par λ, où $\lambda > 0$.

En déduire une interprétation graphique de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

6. ++++ Intégration par parties en probabilités

1. Soit $I(x)=\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$ où λ est une constante positive.

a) Calculer $I(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

2. Soit $J(x)=\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt$.

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$J(x)=-x^2e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}I(x).$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)$.

CORRIGÉ P. 291

7. ++++ Simuler une loi exponentielle avec la calculatrice ou le tableur

TICE

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.

a) Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations de la variable aléatoire X ?

b) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1]$, calculer $P(X \geq a)$.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T=-\frac{1}{\lambda}\ln X$ où λ est un réel strictement positif.

Montrer que les valeurs prises par la variable aléatoire T appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Soit t un réel de l'intervalle $[0, +\infty[$, montrer que $P(T\leq t)=1-e^{-\lambda t}$.

4. Déduire de la question précédente la fonction de densité f de la variable aléatoire T (on pourra montrer que, pour $t\geq 0, f(t)=\frac{d}{dt}P(T\leq t)$.

Quelle est la loi de T ?

5. Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$?

Effectuer une simulation d'une telle série de 10 valeurs.

CORRIGÉ P. 291

8. +++ Tremblements de terre avec le tableur

TICE

Le fichier « 3_BCD2_tremblements_terre » (au format Excel ou OpenOffice) fournit le nombre de jours qui séparent deux tremblements de terre graves sur la surface de la terre entre 1902 et 1977. Un tremblement de terre est grave si sa magnitude est au moins égale à 7,5 sur l'échelle de Richter ou s'il a causé la mort d'au moins 1 000 personnes. Il y a eu 63 tremblements de terre graves durant cette période, donc 62 valeurs du temps d'attente jusqu'au suivant.

1. Pour cette série de données :

– calculer le minimum, le maximum, la moyenne et l'écart type ;

– regrouper en classes d'amplitude 100 et représenter un histogramme normalisé des fréquences de chaque classe (l'aire de chaque rectangle égale la fréquence de la classe correspondante, pour cela sa hauteur égale la fréquence divisée par l'amplitude de la classe) ;

– d'après le « profil » de l'histogramme, envisager un modèle exponentiel en superposant le tracé d'une fonction de densité adaptée (on peut utiliser :
=LOI.EXPONENTIELLE(*x*;1/*moyenne*;FAUX)).

2. On suppose que la variable aléatoire T correspondant au temps d'attente, exprimé en jours, entre deux tremblements de terre graves à la surface du globe suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}002\,3$. Calculer la probabilité que ce temps d'attente dépasse 365 jours.

CORRIGÉ P. 292

9. +++ Éruptions du volcan Aso avec le tableur

TICE

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIII^e siècle. Le fichier « 3_BCD2_Aso » (au format Excel ou OpenOffice) fournit les années d'éruptions jusqu'au XIX^e siècle (à partir du XX^e siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas comparables). On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en années, entre deux éruptions.

1. Regrouper les temps d'attentes en classes d'amplitude 5 années. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de BTS ?

2. On note T la variable aléatoire qui, à chaque éruption prise au hasard, associe le temps d'attente de la prochaine éruption.

Calculer, en utilisant la loi proposée à la question précédente, la probabilité $P(T\geq 56)$.

Un temps de repos tel que celui qu'a connu le volcan entre 1709 et 1765 doit-il, selon ce modèle, être considéré comme exceptionnel ?

CORRIGÉ P. 292

Loi de Poisson

Calculer une probabilité dans le cadre de la loi de Poisson à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel. Interpréter l'espérance (exercices 10 à 15)

TI 82 stats – 83 Plus – 84 Plus
Avec instructions en français en bleu

▶ *Exemple :*

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda=5$.

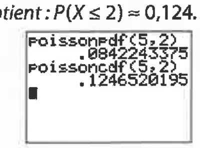
• *Pour calculer $P(X=2)$:* **poissonpdf(5,2)** *ou* **poissonFdp(5,2)**

on obtient : $P(X=2)\approx 0{,}084$.

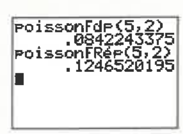
• *Pour calculer $P(X\leq 2)$:* **poissoncdf(5, 2)**

ou **poissonFRép(5,2)**

on obtient : $P(X\leq 2)\approx 0{,}124$.



ou

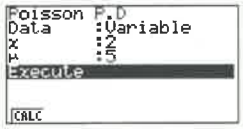


EXERCICES

CASIO Graph 35+, Graph 65, Graph 85

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Pour calculer $P(X=2)$:
POISN Ppd **Variable 2 5**
- Pour calculer $P(X \leq 2)$:
POISN Pcd **Variable 2 5**



10. + Utiliser la calculatrice

TICE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 2.

À l'aide d'une calculatrice, vérifier que : $P(X=1) \approx 0{,}271$; $P(X \leq 1) \approx 0{,}406$; $P(X > 2) \approx 0{,}323$.

11. + Déterminer une probabilité

TICE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1,8.

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, déterminer les probabilités suivantes. Arrondir à 10^{-3}.

a) $P(X=2)$; **b)** $P(X<2)$.

CORRIGÉ P. 292

12. + Loi de Poisson et bons de commande

TICE

Dans une entreprise de vente par correspondance une étude statistique a montré qu'il y avait 5 % de bons de commande comportant au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné.

Le nombre de bons de commande traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 5.

Déterminer, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, la probabilité de chacun des événements suivants :

a) E_1 : « il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100 » ;

b) E_2 : « il y a au plus 5 bons erronés parmi les 100 » ;

c) E_3 : « il y a plus de 5 bons erronés parmi les 100 ».

CORRIGÉ P. 292

13. + Faut-il réglementer la baignade ?

TICE

Une statistique officielle montre, qu'en France, il y a deux morts par an par noyade pour 100 000 habitants.

Soit X la variable aléatoire qui à toute ville d'environ 150 000 habitants tirée au hasard associe le nombre de ses habitants noyés pendant une année.

On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 3.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Il n'y a aucune noyade cette année dans une telle ville » ;

B : « Il y a deux noyades cette année dans une telle ville » ;

C : « Il y a cinq noyades cette année dans une telle ville » ;

D : « Il y a au plus trois noyades cette année dans la ville ».

Arrondir à 10^{-2}.

14. ++ Calculer une probabilité, interpréter l'espérance

TICE

3 % des bouteilles d'eau fabriquées par une usine sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prélevées au hasard dans la production d'une journée, associe le nombre de bouteilles défectueuses de ce lot. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 3.

1. Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour déterminer la probabilité de chacun des trois événements suivants :

A : « Un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse » ;

B : « Un tel lot a exactement deux bouteilles défectueuses » ;

C : « Un tel lot a au plus deux bouteilles défectueuses ».

Arrondir à 10^{-3}.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$. Donner une interprétation de $E(X)$.

15. ++++ Déterminer le paramètre d'une loi de Poisson

On admet qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, positif, lorsque, pour tout nombre entier naturel k, $P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

- $n!$ se lit factorielle n ;
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$;
- $n!$ s'obtient aisément avec une calculatrice. (Sur TI à partir de la touche math)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre λ sachant que $P(X=0) = 0{,}3$.

Arrondir à 10^{-2}.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson (exercices 16 à 20)

16. + Déterminer le paramètre de la loi de Poisson approximant une loi binomiale donnée

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Dans chacun des cas suivants donner le paramètre λ de la loi de Poisson approximant la loi suivie par X.

a) $n = 30$; $p = 0{,}02$.

b) $n = 36$; $p = 0{,}01$.

c) $n = 100$; $p = 0{,}05$.

17. ++ Production de bouchons

TICE

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour.

On admet que la probabilité qu'un bouchon, prélevé au hasard dans la production d'une journée, soit défectueux est 0,05.

On prélève, au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons, associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Déterminer l'espérance mathématique de X.

2. a) On approche la loi de la variable aléatoire X par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson obtenue au **a)**.

Calculer la probabilité qu'un tel échantillon contienne exactement 10 bouchons défectueux, c'est-à-dire $P(Y = 10)$. Arrondir à 10^{-3}.

CORRIGÉ P. 292

18. +++ Qualité des rouleaux de papier peint

TICE

Une entreprise fabrique en grande quantité des rouleaux de papier peint. Leur largeur est exprimée en centimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Dans un lot de rouleaux de papier peint, 3 % des rouleaux ne sont pas acceptables pour la largeur.

On prélève au hasard 100 rouleaux de ce lot pour vérification de la largeur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 rouleaux.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 rouleaux, associe le nombre de rouleaux non acceptables pour la largeur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, un rouleau ne soit pas acceptable pour la largeur.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un rouleau ne soit pas acceptable pour la largeur.

4. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au **4**.

a) Calculer $P(Y = 1)$ et $P(Y \leq 1)$.

b) Comparer les résultats obtenus au **2** et au **3** avec les résultats obtenus au **5** a).

19. +++ Contrôle de qualité

TICE

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. Pour contrôler la qualité de la production, on prélève au hasard un échantillon de 120 articles dans la production d'une journée. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 120 articles. On désigne par X la variable aléatoire qui associe, à tout prélèvement de 120 articles ainsi défini, le nombre d'articles défectueux de ce prélèvement.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner les paramètres de la loi suivie par X.

2. On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre de cette loi de Poisson.

3. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est le paramètre qui a été obtenu à la question **2**.

Déterminer à l'aide de cette loi de Poisson la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « L'échantillon contient au moins un article défectueux » ;

B : « L'échantillon contient au plus trois articles défectueux ».

20. +++ Des tiges pour du matériel informatique

TICE

Dans cet exercice, les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm.

Dans un lot de ce type de tiges, 2 % des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme de ce prélèvement.

1. Pour cette question on prend $n = 50$.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Calculer $P(X = 3)$.

2. Pour cette question on prend $n = 100$. La variable aléatoire X suit une loi binomiale que l'on décide d'approcher par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est le paramètre obtenu à la question **2** a). À l'aide de l'approximation de X par Y, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conforme.

21. +++ Simuler une loi de Poisson avec Scilab ou Python

ALGO

On considère une variable aléatoire X correspondant au nombre de « succès » durant une durée d'une unité de temps considérée au hasard, lorsque les temps d'attente entre deux « succès » sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre λ. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On admet également que la loi exponentielle de paramètre λ est simulée par l'instruction : $-\ln(\text{alea})/700$ où alea est un générateur de nombre aléatoires entre 0 et 1.

1. On considère l'algorithme suivant.

> x prend la valeur -1
> s prend la valeur 0
> **Tant que** $s \leq 1$
> s prend la valeur $s - \ln(\text{alea})/\lambda$
> x prend la valeur $x + 1$
> **Fin du tant que**
> Afficher x

a) À quelle condition cet algorithme affiche-t-il la valeur 0 ?

b) Interpréter les variables x et s dans le contexte de la simulation que produit cet algorithme.

c) Expliquer pourquoi cet algorithme simule une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

2. Implanter le programme suivant, traduction de l'algorithme précédent sur Scilab ou Python.

```
lambda=input("lambda = ")
x=-1
s=0
while s<=1
    s=s-log(rand())/lambda
    x=x+1
end
disp(x)
```

```
from numpy import*
from random import*

def simul_poisson(lam):
    x=-1
    s=0
    while s<=1:
        s=s-log(random())/lam
        x=x+1
    print(x)
```

Exécuter plusieurs fois le programme pour $\lambda = 2,5$ et noter le nombre de « succès » simulé.

Reprendre pour $\lambda = 15$.

CORRIGÉ P. 292

Exemples de processus aléatoires

22. +++ Représenter une situation à l'aide d'un graphe probabiliste

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

– Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.

– Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel n :

– p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;

– q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;

– $P_n = (p_n \quad q_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste : on a donc $P_0 = (1\ 0)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.

2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

b) Calculer M^2.

c) Déterminer l'état probabiliste P_2.

CORRIGÉ P. 293

23. +++

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, 80 % des adhérents ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B change d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur à 0.

On note a_n la probabilité qu'un adhérent ait un abonnement de type A la n-ième année.

On note b_n la probabilité qu'un adhérent ait un abonnement de type B la n-ième année.

Enfin on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de la n-ième année.

1. Déterminer P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.

4. Déterminer la matrice P_3. En déduire la probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement de type A la 3e année.

24. +++ Problème électoral

Dans une région européenne, deux partis s'affrontent aux élections tous les 4 ans. En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.

On admet qu'à partir de l'année 2010 :

– 14 % des électeurs votant pour le partie Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.
– 6 % des électeurs votant pour le partie Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.
Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de cette région choisi au hasard.

On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l'état « L'électeur vote pour le parti Phénix ».

1. a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.

b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

2. On appelle $E_n = (h_n \quad p_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On a donc $E_0 = (0{,}7 \quad 0{,}3)$.

Déterminer E_1 et E_4. (On arrondira les coefficients de E_4 au centième.) Interpréter les résultats.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$h_{n+1} = 0{,}8\, h_n + 0{,}06$.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$h_n = 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}8^n$.

À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

CORRIGÉ P. 293

25. ++++ Tendance à long terme pour l'exemple 3 du cours

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n. L'événement contraire est noté $\overline{V}_n$.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

3. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

> *Pour la limite d'une suite géométrique, se reporter à* **Ce qu'il faut savoir** *dans le chapitre* **4** *du tome 1.*

d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

CORRIGÉ P. 293

26. ++++ Une suite de l'exemple 4 du cours

On reprend le contexte de l'exemple 4 du cours sur les chaînes de Markov.

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle décrit dans l'exemple 4 puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B=\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après l'exemple 4 du cours, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0{,}01 \quad 0{,}10 \quad 0{,}89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. **a)** Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b) Démontrer que $B^3 = B^2$.

3. On admet les deux résultats suivants :

– Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

– Pour tout entier positif n, $Q_n = Q_0 \times B^n$.

a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

27. ++++ Une suite de l'exemple 2 du cours

On reprend le contexte de l'exemple 2 du cours sur les chaînes de Markov.

On appelle G l'événement : « le joueur gagne, c'est-à-dire obtient 3 euros ».

1. Le parcours le plus direct, c'est-à-dire comportant le moins de transitions, permettant au joueur de gagner est $1 \to 2 \to 3$.

Calculer la probabilité $P(g_1)$ que le joueur gagne avec ce parcours.

2. Énoncer de même, par une succession d'états, le parcours le plus direct, à l'exception du précédent, permettant au joueur de gagner.

Calculer la probabilité $P(g_2)$ que le joueur gagne avec ce parcours.

3. Énoncer de même le parcours le plus direct, à l'exception des deux précédents, permettant au joueur de gagner.

Calculer la probabilité $P(g_3)$ que le joueur gagne avec ce parcours.

4. On définit de même les événements g_4, g_5 et plus généralement g_n où n est un entier naturel non nul quelconque.

a) Donner sans explication les valeurs des probabilités $P(g_4)$ et $P(g_5)$.

b) On admet que l'on peut généraliser les résultats précédents à $P(g_n)$.

Exprimer $P(g_n)$ en fonction de n.

c) En déduire que les nombres $P(g_n)$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison est à préciser.

5. On rappelle que pour une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

a) En déduire $P(g_1) + P(g_2) + \ldots + P(g_n)$ en fonction de n.

b) Quelle est la limite de $P(g_1) + P(g_2) + \ldots + P(g_n)$ quand n tend vers $+\infty$?

c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

28. ++++ À partir du contexte de l'exemple 2 du cours (fin)

On reprend le contexte de l'exemple 2 du cours sur les chaînes de Markov.

On note B l'ensemble des éléments absorbants, c'est-à-dire l'ensemble des états correspondant à l'arrêt de la partie : $B = \{0, 3\}$.

1. Il existe un parcours permettant en une seule transition, c'est-à-dire avec un seul lancer de pièce, de passer de l'état 1 à B : c'est $1 \to 0$.

Donner la probabilité $P(t_1)$ que la partie s'arrête après un seul lancer de pièce.

2. Quel parcours permet en deux transitions de passer de l'état 1 à B ? Calculer la probabilité $P(t_2)$ que la partie s'arrête après deux lancers de pièce.

3. Même question avec trois transitions et $P(t_3)$, puis avec quatre transitions et $P(t_4)$, enfin avec cinq transitions et $P(t_5)$.

4. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un parcours unique comportant n transitions permettant de passer de l'état 1 à B.

On admet aussi que l'on peut généraliser les résultats précédents à $P(t_n)$.

Exprimer $P(t_n)$ en fonction n.

5. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire décrite dans l'exemple 2 du cours, associe le nombre n de transitions du parcours allant de l'état 1 à B, c'est-à-dire le nombre de lancers de pièce effectués.

On a donc $P(X = n) = P(t_n)$ pour tout entier naturel non nul n.

Par définition, l'espérance de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = \sum_{n\geq 1} nP(X = n).$$

Calculer $E(X)$ en admettant que, pour tout q tel que $0 < q < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Interpréter la valeur de $E(X)$ dans le contexte de l'exercice.

CORRIGÉ P. 294

EXERCICES pour le BTS

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS **(épreuve finale ou CCF)**.

Loi exponentielle

29. ++ Fiabilité d'une machine à embouteiller

On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, associe sa durée de vie avant une défaillance.

On note $P(T > t)$ la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.

On suppose que $P(T > t) = e^{-0{,}005\,t}$.

1. Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

2. Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à 0,8. Arrondir à l'entier.

CORRIGÉ P. 294

30. +++ Durée de vie de lampes

T est la variable aléatoire qui, à toute lampe d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures) avant la rupture du filament.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 5.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 2 000 h et 2 800 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est inférieure à 3 000 h »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 2 500 h »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est égale à 2 800 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

31. +++ Temps de bon fonctionnement d'une machine

T est la variable aléatoire qui, à toute machine à embouteiller d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en jours) avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,005.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est comprise entre 150 et 250 jours »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est inférieure à 275 jours »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est supérieure à 200 jours »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est égale à 220 jours ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

32. +++ Durée de vie de tubes fluorescents

T est la variable aléatoire qui, à tout tube d'un certain type prélevé au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures).

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,001 5.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement du tube prélevé est comprise entre 600 h et 700 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement du tube prélevé est inférieure à 800 h »,

C : « le tube prélevé fonctionne encore après 750 h »,

D : « le tube prélevé arrête de fonctionner à l'instant 670 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

33. +++ Claudius le jardinier

1. Claudius le jardinier a installé 10 bornes lumineuses pour baliser une allée du jardin. Chaque borne est équipée d'une ampoule halogène de 35 watts. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable T qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$.

a) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'une ampoule donnée fonctionne encore après 20 000 heures d'utilisation ?

2. Désireux de faire des économies, Claudius se rend dans un magasin spécialisé et achète 10 ampoules de nouvelle génération, fabriquées à partir de leds et ayant une puissance très faible de 1 watt. On peut lire sur l'étiquette du *blister* contenant une de ces ampoules que sa durée de vie moyenne est de 80 000 heures. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable aléatoire W qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre μ.

a) Calculer la valeur exacte de μ.

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-4}, qu'une ampoule de ce type fonctionne encore 20 000 heures après sa mise en service ?

Vocabulaire de la fiabilité

34. +++

Dans cet exercice, les probabilités sont à arrondir à 10^{-2} et les durées sont à arrondir au jour.

Une entreprise est spécialisée dans la réparation de matériel audiovisuel dont certains composants sont très fragiles. Elle souhaite proposer à ses clients une période de garantie, après réparation d'un composant défaillant. Une étude a été menée portant sur la fiabilité des composants après ce type de réparation. Cette étude montre que la moyenne des durées de bon fonctionnement d'un composant après réparation est de 500 jours.

On note X la variable aléatoire qui à tout appareil de ce type prélevé au hasard dans un dépôt de matériels réparés associe sa durée de bon fonctionnement, exprimée en jours. On admet que X suit une loi exponentielle.

1. Montrer que le paramètre de cette loi est $\lambda = 0{,}002$.

2. Calculer la probabilité qu'un appareil n'ait pas de défaillance au cours de l'année qui suit la réparation. (On considérera qu'une année compte 365 jours.)

3. Calculer la probabilité qu'un appareil tombe en panne au cours des deux années suivant la réparation.

4. L'entreprise décide de limiter à 6 % des appareils réparés la possibilité de retour sous garantie. Quelle période de garantie doit-elle alors proposer après une réparation ?

35. ++++

Notons T la variable aléatoire qui, à tout composant électronique d'un certain type, prélevé au hasard dans un stock, associe sa durée de fonctionnement (en heures) avant une défaillance.

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On désigne par R sa fonction de fiabilité et par F sa fonction de défaillance.

▶ *Voir le paragraphe 1 D du cours.*

1. Donner l'expression de $R(t)$ et celle de $F(t)$, en fonction de λ et de t.

2. À partir d'observations statistiques, on a pu évaluer que : $R(2\,000) = 0{,}8$.

Déterminer la valeur du paramètre λ, arrondie à 10^{-6}.

3. On prendra dans cette question $\lambda = 0{,}00011$.

a) Donner le temps moyen de bon fonctionnement de ce composant, arrondi à l'heure.

b) Calculer la probabilité $P(T > 3\,000)$, arrondie à 10^{-3}.

4. On admet dans cette question que les fonctionnements de deux composants identiques sont indépendants.

On admet qu'un montage de deux composants en série fonctionne si les deux composants fonctionnent simultanément et qu'un montage de deux composants en parallèle fonctionne si au moins un des deux composants fonctionne.

a) Quelle est la probabilité qu'un montage de deux composants en série fonctionne au-delà de 3 000 heures ? (Arrondir la valeur au millième.)

b) Même question pour un montage en parallèle.

CORRIGÉ P. 294

Avec la loi de Poisson

36. +++ Un QCM pour le BTS

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.

Chaque réponse rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

A. *Loi exponentielle*

On observe la durée de fonctionnement, exprimée en années, d'un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne.

Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X, suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 8 ans est, arrondie à 10^{-2} :

a) 0,18 ; **b)** 0,20 ; **c)** 0,80.

B. *Loi de Poisson*

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

1. La probabilité $P(X = 0)$, arrondie à 10^{-3}, est égale à :

a) 0,034 ; **b)** 0,07 ; **c)** 0,007.

2. La probabilité $P(X \leq 2)$ est égale à :

a) 0,125 ; **b)** 0,041 ; **c)** 0,118.

C. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}024$.

1. La probabilité $P(X \leq 2)$, arrondie à 10^{-3}, est égale à :

a) 0,432 ; b) 0,518 ; c) 0,568.

2. On approche la variable aléatoire X par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson.

Le paramètre de cette loi est :

a) $\lambda = 24$; b) 0,24 ; c) 2,4.

3. La probabilité $P(Z = 3)$, arrondie à 10^{-3}, est égale à :

a) 0,290 ; b) 0,209 ; c) 0,210.

CORRIGÉ P. 294

37. +++ Loi normale, loi binomiale et loi de Poisson

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique de précision en matière plastique. Les questions posées se rapportent à la mesure d'une des cotes de cette pièce.

Partie A : Loi normale.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote en millimètres.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne 60,3 et d'écart type 0,4.

On qualifie de conforme toute pièce dont la cote est comprise entre 59,5 mm et 61,1 mm.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production soit conforme.

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson.

On admet que 95 % des pièces produites sont conformes.

On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 80 pièces prélevées au hasard dans la production d'une journée, associe le nombre de pièces non conformes.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 80 pièces à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que l'on ait exactement trois pièces non conformes.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Donner le paramètre λ de cette loi.

b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a)**.

Utiliser la variable aléatoire Z pour calculer la probabilité d'obtenir au plus trois pièces non conformes.

CORRIGÉ P. 294

38. +++ Loi binomiale, approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, loi normale

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un industriel fabrique des tuyaux en PVC destinés à l'évacuation des eaux sanitaires des habitations.

A. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. On s'intéresse à une livraison importante de tuyaux en PVC pour un grand groupe du secteur de la construction.

On note E l'événement : « un tuyau prélevé au hasard dans la livraison est défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0{,}015$.

On prélève au hasard 20 tuyaux dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 tuyaux.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tuyaux défectueux de ce prélèvement.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des tuyaux ne soit défectueux.

c) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tuyaux au plus soient défectueux.

2. Les tuyaux sont expédiés dans les dépôts régionaux par lot de 200.

On prélève au hasard 200 tuyaux pour vérification dans un stock important. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 tuyaux.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 tuyaux, associe le nombre de tuyaux de ce prélèvement qui sont défectueux.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,015.

a) On considère que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au **a)**.

Calculer $P(Z \leq 4)$.

B. *Loi normale*

Dans cette partie, le résultat approché est à arrondir à 10^{-2}.

Dans cette partie on s'intéresse au diamètre extérieur des tuyaux, exprimé en millimètres.

On note D la variable aléatoire qui, à tout tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre extérieur.

On suppose que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,2.

Un tuyau ne peut être commercialisé que lorsque son diamètre extérieur est compris entre 39,6 mm et 40,4 mm.

Calculer la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production de la journée soit commercialisable.

39. +++ Variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales*

Une entreprise fabrique des jetons destinés à un établissement de jeux. On désigne par D la variable aléatoire qui, à tout jeton prélevé au hasard dans un stock important, associe son diamètre en millimètres. On désigne par E la variable aléatoire qui à tout jeton prélevé au hasard dans le stock associe son épaisseur en millimètres.

On suppose que les variables aléatoires D et E sont indépendantes.

Le cahier des charges de cette entreprise indique que le diamètre doit être égal à 29 ± 04 mm et que l'épaisseur doit être égale $2 \pm 0{,}1$ mm.

On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 29 et d'écart type 0,2 et que la variable aléatoire E suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type 0,04.

1. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait un diamètre conforme au cahier des charges.

2. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait une épaisseur conforme au cahier des charges.

3. En déduire la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production satisfasse les deux conditions du cahier des charges.

B. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

On note A l'événement : « un jeton prélevé dans la production d'une journée est non conforme au cahier des charges ».

On suppose que $P(A) = 0{,}06$.

On prélève au hasard dans la production d'une journée 100 jetons pour vérification. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 jetons.

On désigne par X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de 100 jetons associe le nombre de jetons non conformes de ce prélèvement.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en justifiant la réponse et en précisant les paramètres de cette loi.

2. Quelle est la probabilité d'avoir un seul jeton non conforme ?

3. On suppose que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi.

b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la valeur obtenue au **a)**.

Utiliser la variable aléatoire Y pour déterminer la probabilité d'avoir exactement 3 jetons ne répondant pas au cahier des charges.

c) Déterminer de même la probabilité d'avoir au moins 4 jetons ne répondant pas au cahier des charges.

40. +++ Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, loi normale, probabilités conditionnelles

Une entreprise produit des objets sur deux chaînes de montage, notées C_A et C_B dont les fonctionnements sont indépendants l'un de l'autre.

A. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.*

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Une étude a montré que lors d'un tirage au hasard d'un objet dans la production de la chaîne C_A, la probabilité que cet objet soit défectueux est égal à 0,09.

On prélève un lot de 100 objets dans la production de la chaîne C_A.

On admet que la production de la chaîne C_A est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 objets.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque lot prélevé associe le nombre d'objets défectueux qu'il contient.

1. a) Justifier que X suit une loi binomiale ; en donner les paramètres.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

c) Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux objets défectueux.

2. a) On admet que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson.

Donner son paramètre, λ.

b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a)**.

Utiliser la variable aléatoire Y pour calculer la probabilité qu'un lot contienne strictement plus de 90 objets non défectueux.

B. *Loi normale*

Lorsqu'on effectue un réglage sur la chaîne C_A la production est arrêtée. Dans ces conditions, on admet que la variable aléatoire Z qui à chaque arrêt de la chaîne associe sa durée, exprimée en minutes, suit une loi normale de moyenne 50 et d'écart type 9.

On considère l'événement E : « le réglage sur la chaîne C_A entraîne un arrêt d'une durée inférieure ou égale à 60 minutes ». Calculer $P(E)$. Arrondir à 10^{-2}.

C. *Probabilités conditionnelles*

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

La chaîne C_A produit 60 % des objets de la production totale, la chaîne C_B en produit 40 %.

On rappelle que lors d'un tirage au hasard d'un objet dans la production de la chaîne C_A, la probabilité que cet objet soit défectueux est égale à 0,09.

On admet de plus que, pour la production de la chaîne C_B, la probabilité que cet objet soit défectueux est égale à 0,15.

On prélève au hasard un objet dans la production d'une journée des deux chaînes.

On considère les événements suivants :

A : « l'objet prélevé provient de la chaîne C_A » ;

B : « l'objet prélevé provient de la chaîne C_B » ;

D : « l'objet prélevé est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation décrite dans l'énoncé.

2. Calculer $P(D)$.

3. Calculer la probabilité que l'objet prélevé provienne de la chaîne C_A sachant qu'il est défectueux.

CORRIGÉ P. 294

41. +++ Loi normale, approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un certain type de comprimés dont la masse est exprimée en milligrammes.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi normale*

Un comprimé de ce type est considéré comme acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [580, 620].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque comprimé prélevé au hasard dans la production, associe sa masse.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne 600 et d'écart type 9.

Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard dans la production soit acceptable pour la masse.

B. *Loi binomiale et approximations d'une loi binomiale*

On admet que 3 % des comprimés d'un lot important ne sont pas acceptables pour la masse.

On prélève au hasard N comprimés de ce lot pour vérification de la masse. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de N comprimés.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de N comprimés, associe le nombre de comprimés non acceptables pour la masse.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Dans cette question, on prend $N = 10$.

a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, exactement un comprimé ne soit pas acceptable pour la masse.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, au moins un comprimé ne soit pas acceptable pour la masse.

3. Dans cette question, on prend $N = 50$.

a) On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ à la valeur obtenue au **a)**. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 comprimés, au plus 2 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse.

4. Dans cette question, on prend $N = 1\,000$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

On note Z_2 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

a) Justifier les paramètres de cette loi normale.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 1 000 comprimés, au plus 25 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse, c'est-à-dire calculer $P(Z_2 \leq 25{,}5)$. ?

42. +++ Loi normale, approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, loi exponentielle

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique en série un certain type de panneaux d'isolation de 40 mm d'épaisseur.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi normale*

On note X la variable aléatoire qui, à chaque panneau pris au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,1.

Calculer la probabilité qu'un panneau prélevé au hasard dans la production de la journée :

a) ait une épaisseur inférieure à 39,8 mm ;

b) soit acceptable, c'est-à-dire ait une épaisseur appartenant à l'intervalle [39,80 ; 40,20] ;

c) ne soit pas acceptable.

B. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

1. On suppose désormais que la probabilité qu'un panneau prélevé au hasard dans un stock de l'usine ne soit pas acceptable est $p = 0{,}05$.

Un grossiste achète à l'entreprise les panneaux d'épaisseur 40 mm par lots de 200 panneaux. La constitution d'un lot est assimilée à un tirage de 200 panneaux avec remise. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 200 panneaux, associe le nombre de panneaux qui ne sont pas acceptables dans ce lot.

a) Quelle est la loi de probabilité de Y ? Justifier.

b) Calculer l'espérance et l'écart type de Y.

2.

*Les questions **a)**, **b)**, **c)** suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On décide d'approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson.

a) Le paramètre de cette loi de Poisson est :

10	100	190

b) En utilisant la loi de Poisson, la probabilité que, dans un lot de 200 panneaux, il y ait 5 panneaux non acceptables est :

0,38	0,03	0,04

c) En utilisant la loi de Poisson, la probabilité que, dans un lot de 200 panneaux il y ait plus de 5 panneaux non acceptables est :

0,06	0,07	0,93

C. *Loi exponentielle*

T est la variable aléatoire qui, à toute machine à fabriquer les panneaux d'isolation étudiés dans les parties A et B, prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement en jours avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.

1. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait pas de défaillance au cours de l'année qui suit sa mise en service, (on considère qu'une année compte 365 jours), c'est-à-dire calculer $P(T > 365)$.

2. Calculer la probabilité qu'une machine tombe en panne au cours des deux années suivant sa mise en service.

43. +++ Événements indépendants, probabilités conditionnelles, approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. *Événements indépendants et probabilités conditionnelles*

Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabriqué peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut a et défaut b.

On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut a » et B l'événement : « l'appareil présente le défaut b ».

Les probabilités des événements A et B sont : $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

*Les questions **1**, **2**, **3** et **4** suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La probabilité de l'événement E_1 : « l'appareil présente le défaut a et le défaut b » est :

0,06	0,006	0,0006

2. La probabilité de l'événement E_2 : « l'appareil est défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts » est :

0,9506	0,494	0,0494

3. La probabilité de l'événement E_3 : « l'appareil ne présente aucun défaut » est :

0,0494	0,9994	0,9506

4. Sachant que l'appareil est défectueux, la probabilité qu'il présente les deux défauts est, arrondie à 10^{-3} :

0,988	0,120	0,012

▶ *Dans la partie B, les résultats sont à arrondir au centième.*

B. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Les appareils sont conditionnés par lot de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils. Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil prélevé soit défectueux est 0,05. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux de ce prélèvement.

1. a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ. Au b), arrondir à 10^{-2}.

a) On choisit $\lambda = 5$; justifier ce choix.

b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.