Corrigés et réponses

- Les corrigés des exercices dont le numéro est en vert.
- Les réponses des TP Tice et des QCM

Corrigés Réponses

CHAPITRE 1

Réponses des TP TICE

TP1 **1.** $\overline{x} = 264\ g$.

2. $\sigma = 2\ g$.

3. 45 mesures sont dans l'intervalle [262, 266] soit 75 %.

TP2 Demande pour un modèle de parka

2. La calculatrice donne $r \approx -0{,}98$.

3. En arrondissant les coefficients à 10^{-2}, la droite d'ajustement de y en x donnée par la calculatrice a pour équation : $y = -4{,}55\,x + 883{,}11$.

4. Pour $x = 130$ €, la demande mensuelle peut être évaluée à : $-4{,}55 \times 130 + 883{,}11 \approx 292$ parkas.

5. En arrondissant les coefficients à 10^{-2}, la droite d'ajustement de x en y donnée par la calculatrice a pour équation : $x = -0{,}21\,y + 192{,}29$.

6. Pour une demande mensuelle de $y = 300$ parkas, on obtient $x = -0{,}21 \times 300 + 192{,}29$ soit environ 150 €.

TP3 Chiffre d'affaires d'une grande entreprise

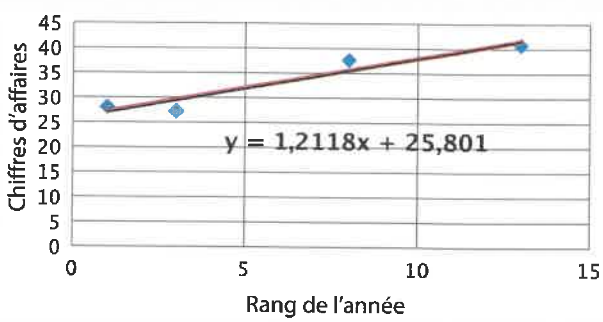
A. 1. $\overline{x}$ est calculé en B7 et $\overline{y}$ est calculé en C7.

2. La formule entrée en B9 est =C7-B8*B7 où C7 correspond à $\overline{y}$, B8 à a et B7 à $\overline{x}$.

3. Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs, alors que les écarts au carré sont tous positifs.

4. On trouve $a = 1{,}2$.

B. 1. Le tableur donne comme équation :
$y = 1{,}2118x + 25{,}801$.



2. On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

3. On obtient $r \approx 0{,}96$.

4. La fonction PREVISION du tableur affiche la valeur 44 (milliards d'euros) si l'on arrondit l'affichage à 0 décimale. On constate que $1{,}2118 \times 15 + 25{,}801 = 43{,}978$.

TP4 Simulation de nuages de points

A. 1. Puisque la formule =ALEA() fournit un nombre au hasard entre 0 et 1, =2*ALEA() fournit un nombre au hasard entre $2 \times 0 = 0$ et $2 \times 1 = 2$. Donc la formule =2*ALEA()–1 fournit un nombre au hasard entre $0 - 1 = -1$ et $2 - 1 = 1$.

2. Voir l'image d'écran de l'énoncé (les résultats obtenus sont différents à chaque simulation).

Remarque : on peut fixer les valeurs extrêmes des axes des graphiques à -4 et 4 de façon à ce que les axes soient stables lors des différentes simulations.

B. 1. L'ajustement affine est de meilleure qualité lorsque le nuage de points est de forme « allongée » autour de la droite d'ajustement.

2. a. On peut utiliser les formules :
=COEFFICIENT.CORRELATION(A4:A503;B4:B503) ou
=COEFFICIENT.CORRELATION(B4:B503;A4:A503) et
=COEFFICIENT.CORRELATION(A4:A503;C4:C503) ou
=COEFFICIENT.CORRELATION(C4:C503;A4:A503).

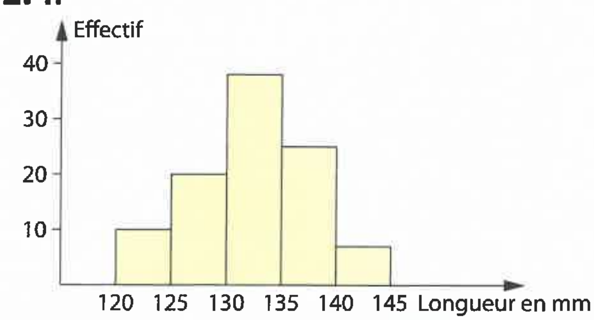
b. Le signe du coefficient de corrélation n'est pas lié à la qualité de l'ajustement. Il est positif lorsque la droite d'ajustement a un coefficient directeur positif et négatif lorsque la droite d'ajustement a un coefficient directeur négatif.

c. Non car 0,1 par exemple est plus grand que $-0{,}9$ et l'ajustement affine est bien meilleur lorsque le coefficient de corrélation a la seconde valeur (on peut observer de nombreux autres exemples).

d) Parmi les deux coefficients de corrélation, celui qui est le plus proche de 1 ou de -1 correspond à l'ajustement affine de meilleure qualité.

Corrigés des exercices

2. 1.



On a pris le point de coordonnées (115, 0) pour point d'intersection des axes portant les graduations.

2. Il y a $100 - 17 = 83$ pièces non défectueuses, ce qui représente un pourcentage de 83 %.

3. Avec une calculatrice, on obtient $\overline{x} = 132{,}45$ mm et $\sigma \approx 5{,}32$ mm.

7. 1.

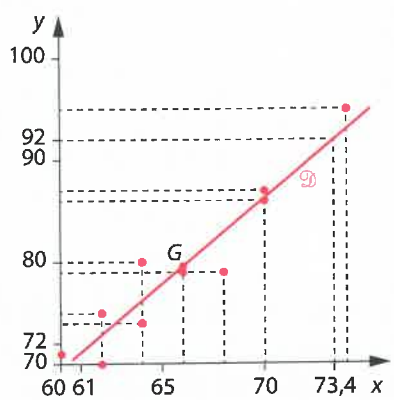
Notes	Effectif
2,5	1
5	2
5,5	1
6	1
6,5	1
7	3
7,5	1
8,5	2
9	2
9,5	3
10,5	1

Notes	Effectif
11	1
11,5	3
12	1
12,5	1
13,5	2
15	3
16	2
16,5	2
17,5	1
18,5	1

9. 1. Dans le département A, moins de 25 % des habitants ont moins de 25 ans alors que dans le département B, au moins 25 % des habitants ont moins de 25 ans, donc la proportion de personnes de moins de 25 ans est inférieure dans le département A à la proportion dans le département B.
2. L'écart interquartile dans le département A est environ égal à : $66 - 27 = 39$, alors que dans le département B, il est de $52 - 20 = 32$, donc la dispersion des âges autour de l'âge médian est plus importante pour le département A que pour le département B.

13. 1. $y = 414{,}9x + 113\,911{,}1$
2. $414{,}9 \times 6 + 113\,911{,}1 \approx 116\,401$.
On peut estimer à 116 401 hectolitres le volume des ventes l'année de rang 6.

16. 1.



2. Avec une calculatrice, on obtient G(66 ; 79,6).
3. Avec une calculatrice, on obtient $r \approx 0{,}949$.
Le coefficient de corrélation linéaire étant très voisin de 1, un ajustement affine du nuage de points se trouve justifié.

4. Avec une calculatrice, on obtient $y = 1{,}682x - 31{,}4$.
5. Pour $x = 77$, on a $y = 1{,}682 \times 77 - 31{,}4$ donc $y \approx 98$.

18. Nombre d'utilisateurs de Facebook
1. Le nuage de points est de forme suffisamment allongée pour envisager un ajustement affine.
2. Une équation de la droite d'ajustement fournie par le tableur est : $y = 209{,}52\,x - 11{,}77$.
3. a) On utilise l'équation précédente. La cellule B15 affiche la valeur 209,52 et la cellule C15 la valeur – 11,77. La cellule B17 contient le nombre d'années écoulées depuis le 01/01/2008.
b) La cellule C18 contient la formule =B$15*B18+C$15.

20. 1. On obtient : G(7,5).
2. a) On obtient : $y = 0{,}55x + 0{,}64$.
b) $y = 0{,}55 \times 12 + 0{,}64 = 7{,}24 \approx 7$.
3. a) On obtient : $x = 1{,}50y - 0{,}50$.
b) $x = 1{,}50 \times 10 - 0{,}50 = 14{,}5 \approx 15$.
c) $x = 1{,}50y - 0{,}50$ s'écrit $1{,}50y = x + 0{,}50$; $y = \frac{1}{1{,}5}x + \frac{0{,}5}{1{,}5}$, en arrondissant à 10^{-2}, $y = 0{,}67x + 0{,}33$. Ce n'est pas la même équation qu'au **2. a)**.

22. 1. a)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8,929	9,131	9,282	9,460	9,659

b) Les cinq points sont « presque » alignés. On peut envisager un ajustement affine de ce nuage.
2. a) $y = 0{,}179x + 8{,}756$.
b) $\ln p = 0{,}179x + 8{,}756$. D'où $p = e^{0{,}179x+8{,}756}$.
c) $p = e^{0{,}179 \times 7+8{,}756} \approx 22\,226$.

27. 1. On réalise sans aucune difficulté les deux figures.
2. Une calculatrice donne :
pour la série des (x_i, y_i), $y = 0{,}20x - 0{,}25$ et $r \approx 0{,}890$;
pour la série des (x_i, z_i), $z = 0{,}26x + 1{,}21$ et $r' \approx 0{,}666$.
3. La corrélation entre le nombre de prêts de livres et le nombre de nouveaux lecteurs inscrits est moins mauvaise que celle obtenue avec le nombre de nouveaux livres, ce qui apparaît déjà sur les deux figures de la question **1**.

Réponses des QCM

30. 1. Réponse c). **2.** Réponse b).
3. Réponse b). **4.** Réponse a).

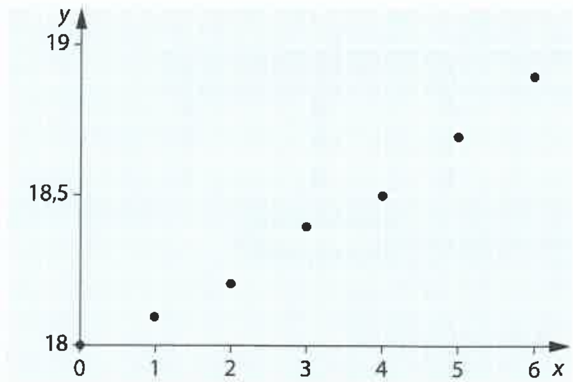
31. 1. Réponse b). **2.** Réponse a). **3.** Réponse b).

32. Réponse a).

33. 1. Réponse a). **2.** Réponse b).
3. Réponse b). **4.** Réponse c).

34. 1. Réponse b). **2.** Réponse b).
3. Réponse a). **4.** Réponse b).

35. **1.** Les axes portant les graduations se coupent au point de coordonnées (0, 18).



2. Avec une calculatrice on obtient pour valeur approchée arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique double : $r \approx 0{,}992$.

▶ *r est très proche de 1 ; il existe une forte corrélation entre x et y.*

3. Avec une calculatrice on obtient pour équation de la droite de régression $\mathcal{D}$ de y en x, avec la précision demandée : $y = 0{,}15x + 17{,}95$.

4. Le remplacement des moules est nécessaire dès que la masse moyenne y des agglomérés n'est plus dans l'intervalle [16,5 ; 20], c'est-à-dire d'après la question **3.** dès que $0{,}15x + 17{,}95 > 20$.

Cette inéquation est équivalente à $x = \dfrac{20 - 17{,}95}{0{,}15}, x > 13{,}7$.

L'unité pour x étant la quinzaine, le remplacement des moules est nécessaire tous les six mois environ.

42. **1.**

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = \ln n_i$	7,204	6,230	5,429	4,357	3,555

2. Avec une calculatrice, on obtient $y = -0{,}92x + 7{,}19$.

3. Pour $x = 6$, on obtient $y = 1{,}67$.

donc $1{,}67 = \ln n$, $n = e^{1{,}67}$,

▶ *$b = \ln a$ équivaut à $a = e^b$ (avec $a > 0$).*

$n \approx 5{,}3$.

On peut estimer à 5 le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation.

46. **1. a)** La formule entrée en C2 est =LN(B2).

b) On a $y = \exp(-0{,}250\,2x + 6{,}080\,7)$.

2. a) La formule entrée en C2 est =3*B2.

Le calcul s'effectue avec les décimales non affichées dans la colonne B.

b) La formule entrée en D2 est =A2*B2.

c) La formule entrée en E2 est =D2-C2.

d) Le résultat d'exploitation est $xy - 3y = (x-3)e^{-0{,}25x+6}$.

e) Le bénéfice est maximal pour $x = 7$ c'est-à-dire 700 €.

f) On a $f'(7) = 0$.

CHAPITRE 2

Travaux pratiques TICE

TP1 Gagner à un jeu vidéo

A. 1. a. La cellule B2 affiche « T » dans 50 % des cas, affiche « O » dans 25 % des cas et affiche « L » dans 25 % des cas.

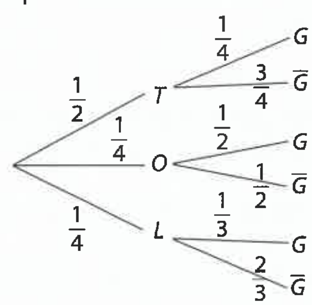
b. Si la cellule B2 contient la valeur T, la cellule C2 affiche 1 dans un quart des cas et affiche 0 sinon. Si la cellule B2 contient la valeur O, la cellule C2 affiche 1 dans un cas sur deux et affiche 0 sinon. Si la cellule B2 ne contient ni la valeur T, ni la valeur O (c'est-à-dire contient la valeur L), la cellule affiche 1 dans un tiers des cas et affiche 0 sinon.

c. Cette instruction écrit bout à bout le contenu des cellules B2 et C2.

2. On peut utiliser les formules :

=NB.SI(D2:D10001;"T0")/10000 ;
=NB.SI(D2:D10001;"O0")/10000 ;
=NB.SI(D2:D10001;"O1")/10000 ;
=NB.SI(D2:D10001;"L0")/10000 et
=NB.SI(D2:D10001;"L1")/10000.

B. 1. Arbre complété :



2. En utilisant l'arbre précédent, on obtient :

$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Ce qui confirme l'estimation obtenue par simulation.

TP2

1. Chaque semaine, on est en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes pouvant, chacune, déboucher sur deux issues possibles : le bras du robot n° i connaît une panne (avec la probabilité $p = 0{,}05$) ou non.

La variable aléatoire X qui, à chaque semaine, associe le nombre de robots dont le bras a connu une panne suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}05$.

2. $E(X) = 5$. Sur un grand nombre de semaines, il y a en moyenne 5 pannes par semaine.

3. a) 0,081.

b) 0,118.

c) 0.011.

TP3 A. 1. L'instruction permet de simuler une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire un tirage aléatoire d'une boule dans l'urne contenant 52 boules marquées « 1 » et 99 948 boules marquées « 0 ».

2. et **3.**

F5... =NB.SI(B5972:CW5972;">=9")

	A	B	C	D	E	F	G
5970	5968	0	0	0	0	0	0
5971	5969	0	0	0	0	0	0
5972	total	6	1	4	3	4	5
5973							
5974	Fréquence observée d'un nombre de cas supérieur ou égal à 9 :					1	%

4. On peut évaluer cette probabilité à moins de 1 %.

B. 1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5\,969$ et $p = 0{,}000\,52$.

2. On a $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \approx 0{,}004\,7$ c'est-à-dire 0,47 %.

B... =1-LOI.BINOMIALE(8;5969;0,00052;VRAI)

	A	B	C	D
5976	P(X >= 9) =	0,00470812		

3. L'explication qu'une telle observation à Woburn est due au hasard, correspondant au modèle considéré dans ce TP, est très peu probable.

TP4 Moyenne et écart type du générateur aléatoire

A. 1. Voir l'image d'écran pour un exemple de réalisation sur tableur.

2. On peut estimer la moyenne sur un très grand nombre de valeurs à 0,5 et l'écart type à 0,29.

B. 1. a. La valeur 0,5 correspond au centre de l'intervalle [0, 1].

b. $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

2. a. $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. **b.** $V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29$.

TP5 Vers la courbe de Gauss

A. 1. a. La répartition des valeurs n'est pas uniforme : la fréquence la plus importante est celle de la classe centrale. Les classes extrêmes sont peu fréquentes.

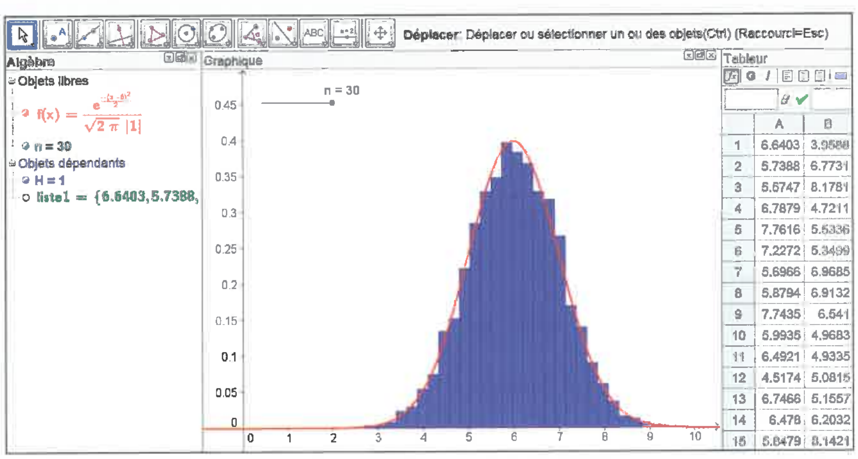
b. La classe la plus fréquente est celle contenant l'entier 6.

c. Mêmes réponses pour $n = 11$.

2. Le « profil » de l'histogramme est celui d'une courbe dont le maximum est pour $x = 6$, en forme de « cloche ».

B. 1. Lorsque l'on fait F9, on observe des histogrammes dont les « profils » fluctuent, de façon assez proche, autour de la courbe tracée.

2. D'après la fenêtre algèbre, $f(x) = \dfrac{e^{\frac{-(x-6)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.



TP6 Montant des factures

1. $P(600 \leq X \leq 2\,000) \approx 0{,}724$.

2. $P(X \leq 600) \approx 0{,}274$.

3. Le montant recherché est 1 770,54 €.

TP7

1. La formule =LOI.NORMALE(100;115;30;VRAI) donne $P(X \leq 100) \approx 0{,}309$.

2. La formule =LOI.NORMALE(100;115;30;VRAI)-LOI.NORMALE(80;115;30;VRAI) donne $P(80 \leq X \leq 100) \approx 0{,}187$.

3. La formule =LOI.NORMALE.INVERSE(0,05;115;30) affiche environ 65,654.

A1 =LOI.NORMALE.INVERSE(0,05;115;30)

	A	B	C	D
1	65,6543912			

On prend $a = 65{,}7$.

TP8 Espérance et variance de $aX + b$, $X + Y$ et $X - Y$

A. 1. On peut entrer en B4 la formule =B3^2.

B7 =LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();C$2;C$3)

	A	B	C	D	E	F	G
1		X	Y			Xi	Yi
2	Espérance	2	-3		moyenne	2,12107174	-3,11710514
3	Ecart type	4	6		variance	15,9170831	34,7398825
4	Variance	16	36				
5							
6	Xi	Yi					
7	-4,47903211	-0,45662411					
8	0,78363955	-7,96633396					
9	0,76465485	-10,9833837					
10	0,12662501	-12,3926561					
11	6,12489662	0,11498553					

2. La formule entrée en A7 simule une réalisation de la variable aléatoire X.

3. La formule entrée en B7 simule une réalisation de la variable aléatoire Y.

4. a. La valeur affichée en F2 fluctue autour de $2 = E(X)$.
La valeur affichée en G2 fluctue autour de $-3 = E(Y)$.

b. La valeur affichée en F3 fluctue autour de $16 = V(X)$.
La valeur affichée en G3 fluctue autour de $36 = V(Y)$.

B. 1. a. La formule entrée en C7 permet la simulation d'une réalisation de la variable aléatoire $aX + b = 10X$.

b. L'affichage de la cellule H2 fluctue autour de 20. Celui de la cellule H3 autour de 1 600.

$E(10X) = 10E(X) = 10 \times 2 = 20$.

$V(10X) = 10^2V(X) = 100 \times 16 = 1\,600$.

2. L'affichage de la cellule H2 fluctue autour de 25. Celui de la cellule H3 autour de 1 600.

$E(10X + 5) = 10E(X) + 5 = 10 \times 2 + 5 = 25$.

$V(10X + 5) = 10^2V(X) = 100 \times 16 = 1\,600$.

3. $V(aX + b) = a^2V(X) = a^2 \times 16 = 1$ d'où $a^2 = \dfrac{1}{16}$.

On peut prendre $a = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ ou $a = -0{,}25$.

$E(aX + b) = aE(X) + b = 2a + b = 0$ d'où $b = -2a$. Si l'on prend $a = 0{,}25$ alors $b = -0{,}5$. Si l'on prend $a = -0{,}25$ alors $b = 0{,}5$.

On vérifie par simulation que ces valeurs conviennent.

C. 1. a. L'affichage de la cellule D7 simule une réalisation de la variable aléatoire $X + Y$.

b. L'affichage de la cellule E7 simule une réalisation de la variable aléatoire $X - Y$.

J3 =VAR(E7:E1006)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		X	Y			Xi	Yi	a*Xi+b	Xi+Yi	Xi-Yi
2	Espérance	2	-3		moyenne	2,10780719	-2,98659131	0,0269518	-0,87878412	5,0943985
3	Ecart type	4	6		variance	15,6404758	35,9928017	0,97752974	52,1083688	51,1581862
4	Variance	16	36							
5	a et b	0,25	-0,5							
6	Xi	Yi	a*Xi+b	Xi+Yi	Xi-Yi					
7	2,24435799	8,22092072	0,0610895	10,4652787	-5,97656273					
8	2,13382712	-4,8581873	0,03345678	-2,72436018	6,99201442					
9	8,69614472	-18,0763544	1,67403618	-9,38020965	26,7724991					

2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2-3=-1$.
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=16+36=52$.
3. $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=2+3=5$.
$V(X-Y)=V(X)+V(Y)=16+36=52$.
4. a. $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=2-E(Y)=0$. d'où $E(Y)=2$.
On vérifie que si la cellule C2 contient la valeur 2, la cellule J2 fluctue autour de 0.
b. $V(X-Y)=V(X)+V(Y)=16+V(Y)$.
Comme $V(Y)\geq 0$, on ne peut pas avoir $V(X-Y)=1$.

TP9 Approche du théorème de la limite centrée grâce au tableur

A. 1. $E(\overline{X})=\frac{1}{12}(E(X_1)+\ldots+E(X_{12}))=\frac{1}{12}\times 6=\frac{1}{2}$.
2. Les variables X_i étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances.
D'où $V(\overline{X})=\frac{1}{12^2}(V(X_1)+\ldots+V(X_{12}))=\frac{1}{12^2}\times 12\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12^2}$.
On en déduit que $\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\frac{1}{12}$.

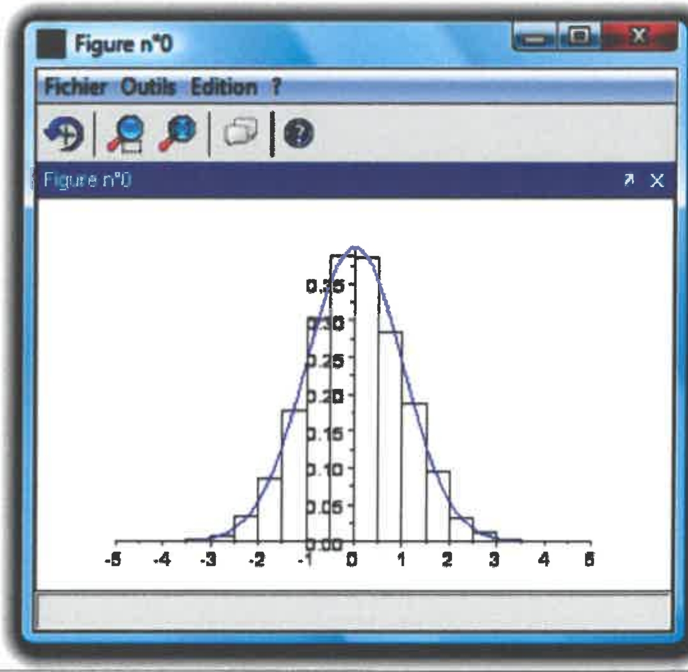
B. 1. On entre en A1 la formule =(1/12)*(…+ … + …) où l'on colle dans la somme entre parenthèses douze fois le terme LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();0,5;1/RACINE(12)). (L'utilisation du fichier disponible permet d'éviter cette peine.)
2. La variable $\overline{X}$ suit la loi normale de paramètres de moyenne $\frac{1}{2}$ et d'écart type $\frac{1}{12}$.
3. Après sélection des cellules M2 à M18, on peut utiliser la formule matricielle =FREQUENCE(A1:J100;L2:L18) que l'on entre par Control+Shift+Entrée.
On peut entrer en O2 la formule =LOI.NORMALE(N2;1/2;1/12;FAUX)*50.
Remarque : la multiplication par 50 s'explique par le fait que les classes ont pour largeur 0,05, que la probabilité d'obtenir une valeur dans une classe donnée est approximativement $0{,}05\times f(c)$ *où c est le centre de la classe et f la fonction de densité de la loi normale. Pour 1 000 valeurs simulées, l'effectif théorique de chaque classe est alors approximativement* $0{,}05\times f(c)\times 1\,000=f(c)\times 50$.
On observe que les effectifs simulés (points rouges sur l'image d'écran) sont proches des effectifs théoriques (courbe bleue sur l'image d'écran). Cela permet de vérifier que la loi de $\overline{X}$ est bien celle donnée à la question précédente.

C. 1. L'espérance de la loi uniforme sur [0, 1] est $\frac{1}{2}$ et sa variance est $\frac{1}{12}$ (voir le cours).
2. On peut entrer en A1 la formule :
=(1/12)*(ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA()+ALEA())
3. On observe que les effectifs simulés (points rouges sur l'image d'écran) sont proches des effectifs théoriques (courbe bleue sur l'image d'écran). Cela permet de vérifier que la loi de $\overline{X}$ est proche de la loi normale de moyenne $\frac{1}{2}$ et d'écart type $\frac{1}{12}$ (ce qu'affirme le théorème de la limite centrée, voir le cours).

TP10

1. a. La fonction f atteint son maximum pour $m=f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
b. La calculatrice, ou le tableur, fournit :
$P(Z\notin[-5,5])\approx 6.10^{-7}$.
c. Cette aire vaut environ une unité d'aire (puisque f est une densité de probabilité).
2. a. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-5, 5]$.
b. La variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $[0, m]$.
c. Une réalisation (x, y) correspond au choix d'un point au hasard dans le rectangle correspondant à $-5\leq x\leq 5$ et $0\leq y\leq m$.
d. Il y a rejet lorsque le point de coordonnées (x, y) est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction f.
e. La probabilité de rejet correspond à la proportion de l'aire du rectangle située au-dessus de la courbe représentative de f c'est-à-dire $\frac{10m-1}{10m}=1-\frac{\sqrt{2\pi}}{10}\approx 0{,}75$.
f. Sachant que x est accepté, la probabilité qu'il se situe entre a et b correspond au rapport de l'aire rouge, valant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, à l'aire bleue, valant approximativement 1.
On en déduit que cette valeur x constitue une simulation d'une réalisation de la variable aléatoire Z.
3. Exemple de programme sur Scilab.

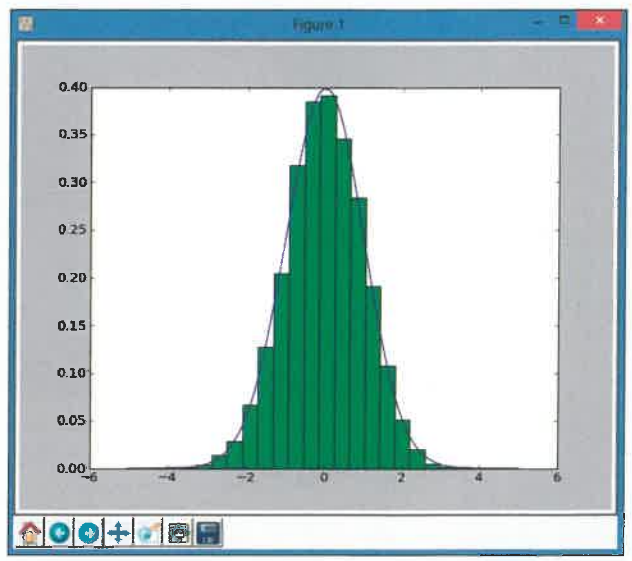
```
m=1/sqrt(2*%pi)
function y=f(x)
    y=m*exp(-x*x/2)
endfunction
X=zeros(1,10000)
for i=1:10000
x=-5+10*rand()
y=m*rand()
while y>f(x)
    x=-5+10*rand()
    y=m*rand()
end
X(i)=x
end
clf
classes=linspace(-5,5,21)
histplot(classes,X)
x=linspace(-5,5,100)
plot(x,f)
```



Exemple de programme sur Python et exécution.

```python
from numpy import*
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()

def rejet(n):
    m=1/sqrt(2*pi)
    f=lambda x : m*exp(-x*x/2)
    x=linspace(-5,5,100)
    plt.plot(x,f(x))
    X=[]
    for i in range (1,n+1):
        x=-5+10*random()
        y=m*random()
        while y>f(x):
            x=-5+10*random()
            y=m*random()
        X.append(x)
    plt.hist(X,20,normed=1)
    plt.show()
```



Corrigés des exercices

1. Par définition, $A \cap B = \varnothing$.
On sait que, pour tous événements incompatibles A et B,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Donc $P(A \cup B) = 0{,}8$.
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(\bar{A}) = 0{,}7$.
$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, $P(\bar{B}) = 0{,}5$.

3. 1. On sait que, pour tous événements A et B :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
On a donc $0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}6 - P(A \cap B)$,
$P(A \cap B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

2. Par définition, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
$P_A(B) = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$.
De même $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
$P_B(A) = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$

5. 1. $F \cap S$: « l'élève rencontré est une fille qui pratique un sport ».
$G \cap \bar{S}$: « l'élève rencontré est un garçon qui ne pratique aucun sport ».

2. $P(S) = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$; $P(F \cap S) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$;
$P(\bar{S}) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$; $P(G \cap \bar{S}) = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$.

3. $P_S(F) = \dfrac{30}{80} = 0{,}375$; $P_{\bar{S}}(G) = \dfrac{8}{20} = 0{,}4$.

4. $P(F \cap S) = 0{,}3$; $P_S(F) \times P(S) = 0{,}375 \times 0{,}8 = 0{,}3$.
$P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S)$. De même pour la seconde égalité.

5. $P_G(S) = \dfrac{50}{58} \approx 0{,}86$.

8. 1. On peut réaliser le tableau suivant.

	Bleu	Rouge	Total
Voyelles	6	0	6
Consonnes	10	10	20
Total	16	10	26

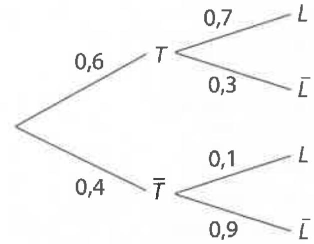
a) Tous les tirages sont équiprobables.
Il y a 16 cartons avec une lettre bleue,
d'où $P(A) = \dfrac{16}{26} = \dfrac{8}{13}$.
Il y 20 consonnes, d'où $P(B) = \dfrac{20}{26} = \dfrac{10}{13}$.

b) $A \cap B$ est l'événement : « la lettre est une consonne bleue ». D'où $P(A \cap B) = \dfrac{10}{26} = \dfrac{5}{13}$.

c) $A \cup B$ est l'événement : « la lettre est bleue ou est une consonne ».
D'où $P(A \cup B) = \dfrac{8}{13} + \dfrac{10}{13} - \dfrac{5}{13} = \dfrac{13}{13} = 1$.

2. $P_A(B) = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$. $P_B(A) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$.

9. 1.



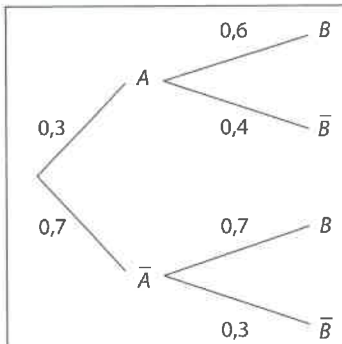
2. $P_T(L) = 0{,}7$; $P_T(\bar{L}) = 0{,}3$; $P_{\bar{T}}(L) = 0{,}1$; $P_{\bar{T}}(\bar{L}) = 0{,}9$.

3. $P(A) = P(T \cap L) = 0{,}42$. $P(B) = P(\bar{T} \cap \bar{L}) = 0{,}36$.

4. $P(T \cap L) = 0{,}42$ et $P(\bar{T} \cap L) = 0{,}04$.

5. $P(L) = P(T \cap L) + P(\bar{T} \cap L) = 0{,}46$.

10. 1. et **2.**

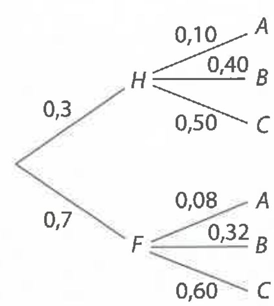


Probabilité du résultat
$P(A \cap B) = 0{,}18$
$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}12$
$P(\bar{A} \cap B) = 0{,}49$
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}21$

3. À l'aide de la règle 2 du paragraphe **1** du cours, on obtient :
$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{B}) = 0{,}12 + 0{,}21$;
$P(\bar{B}) = 0{,}33$.

13. 1. • 10 % des hommes appartiennent à la catégorie a, d'où : $P_H(A) = 0{,}10$.
• 40 % des hommes appartiennent à la catégorie b, d'où : $P_H(B) = 0{,}40$.
• 8 % des femmes appartiennent à la catégorie a, d'où : $P_F(A) = 0{,}08$.
• 60 % des femmes appartiennent à la catégorie c, d'où : $P_F(C) = 0{,}60$.

2.



$P(H \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}1$
$P(H \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}4$
$P(H \cap C) = 0{,}3 \times 0{,}5$
$P(F \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}08$
$P(F \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}32$
$P(F \cap C) = 0{,}7 \times 0{,}6$

3. a) $P(H \cap C) = 0{,}3 \times 0{,}5$; $P(H \cap C) = 0{,}15$.

b) En utilisant la règle 2 de la fin du paragraphe **1** du cours, on obtient :
$P(B) = P(H \cap B) + P(F \cap B)$;
$P(B) = 0{,}120 + 0{,}224$; $P(B) = 0{,}344$.

c) On cherche $P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)}$.
On a :
$P(F \cap C) = 0{,}42$.
$P(C) = P(F \cap C) + P(H \cap C)$,
$P(C) = 0{,}42 + 0{,}15$, $P(C) = 0{,}57$.
D'où $P_C(F) = \dfrac{0{,}42}{0{,}57}$; $P_C(F) = 0{,}74$.

18. 1. $P(A) = \dfrac{5}{3} > 1$ est une donnée aberrante. En effet, pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc

$$\frac{2}{5} = P(A) \times \frac{3}{4},\ P(A) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}},$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3},\ P(A) = \frac{8}{15}.$$

3. $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}}$,

$$P_A(B) = \frac{2}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{3}{4}.$$

20. 1. On a : $A = E_1 \cap E_2$ et $B = E_1 \cup E_2$.
2. • Les événements E_1 et E_2 sont indépendants donc
$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$, $P(A) = 0{,}02 \times 0{,}04$,
$P(A) = 0{,}0008$.
• $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$,
$P(E_1 \cup E_2) = 0{,}02 + 0{,}04 - 0{,}0008$, $P(B) = 0{,}0592$.
3. $C = \overline{B}$ donc $P(C) = 1 - P(B)$, $P(C) = 0{,}9408$.

25. 1.

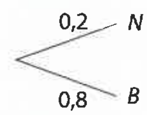
	Basket-ball	Volley-ball	Natation	Total
Demi-pensionnaires	40	40	50	130
Externes	26	35	59	120
Total	66	75	109	250

2. $P(E) = \dfrac{120}{250} = 0{,}48$; $P(B) = \dfrac{66}{250} = 0{,}264$;
$P(E \cap B) = \dfrac{26}{250} = 0{,}104$.
3. a) $P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B)$,
$P(E \cup B) = 0{,}48 + 0{,}264 - 0{,}104 = 0{,}64$.
b) $P(E) \times P(B) = 0{,}48 \times 0{,}264 = 0{,}12672$.
$P(E) \times P(B) \neq P(E \cap B) = 0{,}104$.
E et B ne sont pas indépendants.

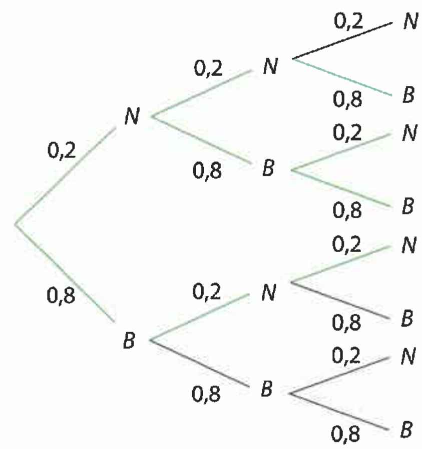
c) Soit N l'événement : « l'adhérent a choisi la natation ».
$P(B \cap N) = 0$. B et N sont incompatibles.
d) $P_E(B) = \dfrac{P(B \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E \cap B)}{P(E)}$, $P_E(B) = \dfrac{0{,}104}{0{,}48} \approx 0{,}22$.
On peut aussi déduire directement du tableau que
$P_E(B) = \dfrac{26}{120} \approx 0{,}22$.

27. Contrôle antidopage
1. L_3 n'a pu être obtenu avec cet algorithme puisqu'il contient des éléments identiques. Les autres oui.
2. Cet algorithme permet de tirer au sort 3 coureurs à la fin de la course pour qu'ils subissent un contrôle antidopage.

28. 1.



2. a)



b) $P(E) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$.
c) Il y a trois chemins possibles pour réaliser l'événement F : (N, N, B) ; (N, B, N) et (B, N, N).
Donc $P(F) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2$,
$P(F) = 0{,}032 + 0{,}032 + 0{,}032 = 0{,}096$.

31. a) $P(X = 3) \approx 0{,}276$.
$P(X = 0) \approx 0{,}047$.
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.
La calculatrice donne directement $P(X \leq 2) \approx 0{,}544$.
b) $P(X = 6) \approx 0{,}047$. $P(X \leq 2) \approx 0{,}179$.
$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}959$.

36. 1. • La variable aléatoire X mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de 30 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}08$.
• Donc, la variable aléatoire X qui associe à chaque prélèvement de ce type le nombre de barres non conformes de ce prélèvement suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}08$.
2. $P(X = 0) \approx 0{,}08$.

3. 90 % des barres au moins ne sont pas mises au rebut. Donc, au plus 10 % des barres sont mises au rebut. On cherche donc ($P(X \leq 3)$).
$P(X \leq 3) \approx 0{,}78$.

44. Explorer les diagrammes en bâtons des lois binomiales

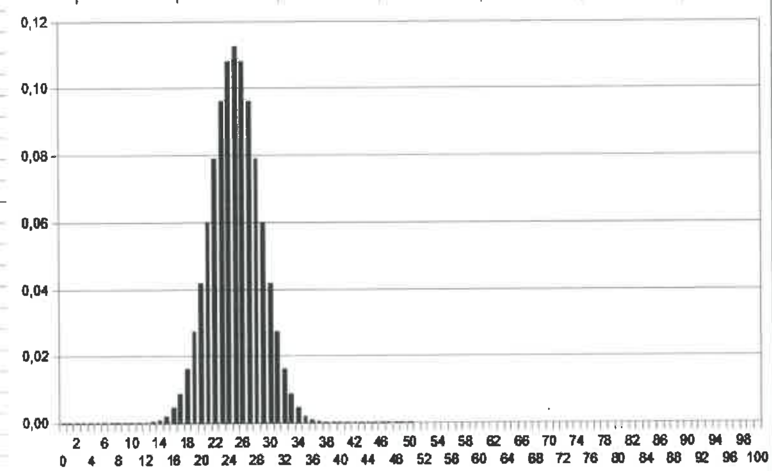
1. a) Les diagrammes sont symétriques.

b) $p = 0{,}5$; n pair : deux modes ; n impair : un mode.

c) $n = 20$, $p = 0{,}1$ ou $= 0{,}9$: diagramme très dissymétrique.
$p = 0{,}45$: diagramme peu dissymétrique.

2. a) $p = 100$; $n = 50$ et $n = 100$: diagramme « en cloche », décalé à droite et plus dispersé pour $n = 100$.

	A	B	C
1	$n = 50$		$p = 0{,}5$
2			
3	k	$P(X = k)$	
4	0	0,000000	
5	1	0,000000	
6	2	0,000000	
7	3	0,000000	
8	4	0,000000	
9	5	0,000000	
10	6	0,000000	
11	7	0,000000	
12	8	0,000000	
13	9	0,000002	
14	10	0,000009	
15	11	0,000033	
16	12	0,000108	
17	13	0,000315	
18	14	0,000833	
19	15	0,001999	
20	16	0,004373	
21	17	0,008746	
22	18	0,016035	
23	19	0,027006	
24	20	0,041859	
25	21	0,059799	



b) $n = 100$. $p = 0{,}01$ ou $p = 0{,}99$: diagramme très dissymétrique. $p = 0{,}1$ ou $p = 0{,}9$: diagramme peu dissymétrique.

46. 1. On procède comme à l'exercice corrigé **36**.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}3$.

2. $P(X \leq 5) \approx 0{,}989$.

3. $E(X) = np = 2{,}4$.
$V(X) = 8 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 1{,}68$.
$E(X)$ représente le nombre moyen de boules rouges obtenues par prélèvement si on réalise un très grand nombre de prélèvements.

55. b) $P(12 \leq X \leq 28) = P(X \leq 28) - P(X \leq 12)$.
Donc $P(12 \leq X \leq 28) \approx 0{,}945 - 0{,}055$,
$P(12 \leq X \leq 28) \approx 0{,}890$.

56. 1. $P(X \leq 8) = 0{,}159$.
$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$ donc $P(X > 8) = 0{,}841$.

2. $P(9 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 9) = 0{,}533$.
$P(7 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 7) = 0{,}910$.

66. 1. La probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable est
$P(21{,}95 \leq X \leq 22{,}05) \approx 0{,}950$.

2. $22{,}05 = 22 + 0{,}05 = m + 2\sigma$ et
$21{,}95 = 22 - 0{,}05 = m - 2\sigma$.
Donc $P(21{,}95 \leq X \leq 22{,}05) = P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$ où X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
D'après le cours, cette probabilité est égale à 0,95.

67. Pourquoi la courbe « en cloche » est-elle « normale » ?

1. a) L'algorithme fait appel 12 fois à la fonction random.

b) En sortie d'algorithme, la variable x est la somme de 12 réalisations de la fonction random.

c) La moyenne de la fonction random est 0,5.
La moyenne des valeurs de x en sortie d'algorithme est donc 6 et celle de $x - 6$ est 0.

2. Algorithme modifié (en gras)

```
Pour i = 1 à 10 000
    Affecter à x la valeur random
    Pour k allant de 1 à 11
        Affecter à x la valeur x + random
    FinPour
Affecter à X(i) la valeur x − 6
FinPour
Afficher la liste X
```

3. La courbe en cloche de la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1 correspond au « profil » de l'histogramme normalisé des fréquences obtenues avec 10 000 simulations.
On peut considérer que l'algorithme de la question **1.** simule assez correctement une réalisation d'une variable aléatoire de loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

68. 1. a) $P(X \leq 40) \approx 0{,}96$.
$P(X \leq 29) \approx 0{,}05$.
$P(30 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 29) \approx 0{,}91$.

2. a) La loi normale approchant une loi binomiale a même espérance et même écart type.
$\mu = np$, donc ici $\mu = 50 \times 0{,}7 = 35$
$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, donc ici $\sigma = \sqrt{50 \times 0{,}7 \times 0{,}3}$
$\sigma = \sqrt{10{,}5} \approx 3{,}24$.
b) $P(30 \le Y \le 40) = P(Y \le 40) - P(Y \le 30) \approx 0{,}88$.
c) Le résultat 0,91 obtenu avec la loi binomiale et le résultat 0,88 obtenu avec la loi normale sont proches.

70. 1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}7$. Pour la justification, procéder comme dans l'exercice **38**.
b) $E(X) = 70$ et $\sigma(X) = 4{,}6$.
c) $P(X = 60) \approx 0{,}008\ 5$.
2. a) La loi normale approchant une loi binomiale a la même espérance et même écart type : donc $\mu = 70$ et $\sigma \approx 4{,}6$.
b) $P(Y \ge 79{,}5) \approx 0{,}019\ 2$.
c) $P(54{,}5 \le Y \le 85{,}5) \approx 0{,}999\ 2$.

73. 1. On sait que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $X + Y = Z$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
La moyenne, c'est-à-dire l'espérance de Z, est donc $22 + 18 = 40$.
L'écart type de Z est donc $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Z suit la loi $\mathcal{N}(40, 5)$.
2. En arrondissant à 10^{-3}, on obtient : $P(34 \le Z \le 48) \approx 0{,}034$.

76. Le niveau monte !
La variable aléatoire $\overline{X}$, qui mesure la moyenne des notes des échantillons aléatoires avec remise de taille n, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Avec $\mu = 12$, $\sigma = 3$ et $n = 100$, on peut déduire que $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(12\ ; 0{,}3)$.
$P(12{,}5 \le \overline{X} \le 12{,}9) \approx 0{,}0466$.

77. 1. F suit la loi normale de paramètres $p = 0{,}52$ et $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}52 \times 0{,}48}{400}} \approx 0{,}025$.
La probabilité d'avoir dans un échantillon de 400 nouveau-nés un pourcentage de garçons compris entre 50 % et 54 % est :
$P(0{,}50 \le F \le 0{,}54) \approx 0{,}58$.
2. La probabilité d'avoir dans un échantillon de 400 nouveau-nés un pourcentage de filles inférieur à 45 % est : $P(F \ge 0{,}55) \approx 0{,}12$.

Réponses des QCM

78. $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{2}{3}$.

$$P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P_A(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

79. 1. $P_A(B) = 0{,}7$.
2. $P(A \cap B) = 0{,}14$.
3. $P(B) = 0{,}22$.

80. 1. $P(A \cap B) = 0{,}06$.
2. $P(A \cup B) = \dfrac{7}{18}$.

81. 1. Réponse c).
2. Réponse b).
3. Réponse b).

82. Réponse c).

83. 1. Réponse c).
2. Réponse c).

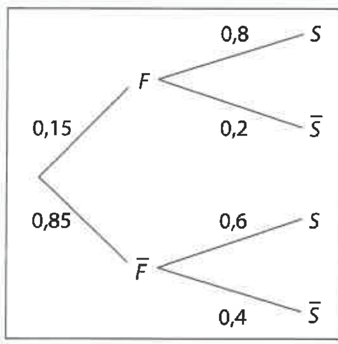
84. 1. $m = 20$.
2. $\sigma \approx 4{,}43$.

85. 1. $f(t) = \dfrac{1}{5}$.
2. $P(3 \le U \le 5) = 0{,}4$.

Corrigés des exercices pour le BTS

87. 1. a) La formule en H4 calcule la fréquence des jours sans danger et sans alarme.
b) Sur 10 000 jours simulés, il y a 9 939 jours sans danger ni alarme.
2. Il y a eu 2 jours avec danger et sans alarme.
3. a) Sur 10 000 jours simulés, l'alarme s'est déclenchée 59 jours.
b) La formule entrée en I8 est =H3/I3.
c) D'après l'affichage en I8, il y a 46 fausses alarmes parmi les 59 alarmes soit environ 78 % de fausses alarmes.

88. On peut construire l'arbre suivant :



Probabilité du résultat
- $P(F \cap S) = 0{,}15 \times 0{,}80 = 0{,}12$
- $P(F \cap \overline{S}) = 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}03$
- $P(\overline{F} \cap S) = 0{,}85 \times 0{,}60 = 0{,}51$
- $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}85 \times 0{,}40 = 0{,}34$

1. a) $P(F) = 0{,}15$.
b) À la seconde étape, les nombres inscrits sur les branches sont des probabilités conditionnelles. Donc, $P_F(S) = 0{,}80$.
2. a) $F \cap S$ est l'événement : « la fiche choisie indique que le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité et qu'il a réalisé des achats d'un montant supérieur ou égal à 50 € ».
b) $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0{,}12$; $P(F \cap S) = 0{,}12$.

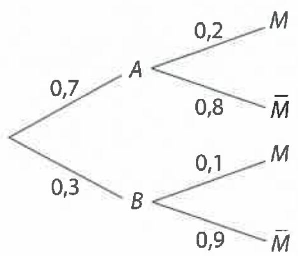
▶ *Ce résultat a été calculé ci-dessus.*

$P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S)$.

▶ *D'après la règle 2 du paragraphe 1 du cours.*

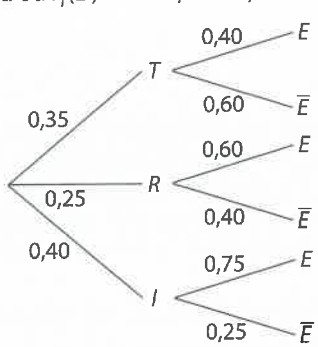
$P(S) = 0{,}12 + 0{,}51$; $P(S) = 0{,}63$.

89. 1. a) La source A fournit 70 % de la production.
D'où $P(A) = 0{,}7$.
La source B fournit 30 % de la production. D'où $P(B) = 0{,}3$.
b) 20 % des bouteilles produites par la source A sont « magnésiennes ». D'où $P_A(M) = 0{,}2$.
10 % des bouteilles produites par la source B sont « magnésiennes ». D'où $P_B(M) = 0{,}1$.
2. On réalise l'arbre pondéré suivant :



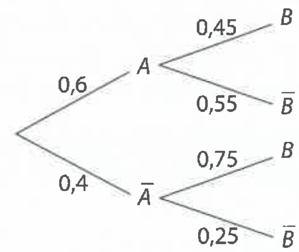
3. a) $P(A \cap M) = P(A) \times P_A(M) = 0{,}7 \times 0{,}2$; $P(A \cap M) = 0{,}14$.
b) $P(B \cap M) = P(B) \times P_B(M) = 0{,}3 \times 0{,}1$; $P(B \cap M) = 0{,}03$.
4. $P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M)$;
$P(M) = 0{,}14 + 0{,}03$; $P(M) = 0{,}17$.
5. On cherche $P_M(A)$.
$P_M(A) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$; $P_M(A) = \dfrac{0{,}14}{0{,}17}$.
En arrondissant à 10^{-2}, on obtient $P_M(A) \approx 0{,}82$.

92. 1. • Parmi les personnes dont la principale source d'information est la télévision, 40 % lisent aussi la presse écrite.
D'où $P_T(E) = 0{,}40$.
• Parmi les personnes dont la principale source d'information est la radio, 40 % ne lisent pas la presse écrite.
D'où $P_R(\overline{E}) = 0{,}40$.
2. • 25 % des personnes ont la radio pour principale source d'information. D'où $P(R) = 0{,}25$.
On en déduit que $P(I) = 0{,}40$.
• $P_T(E) = 0{,}40$, d'où $P_T(\overline{E}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$.
• $P_R(E) = 0{,}40$, d'où $P_R(\overline{E}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$.
• $P_I(E) = 0{,}75$, d'où $P_I(\overline{E}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.



3. a) $T \cap E$ est l'événement : « la personne a pour principale source d'information la télévision et lit la presse écrite ».
$P(T \cap E) = P(T) \times P_T(E) = 0{,}35 \times 0{,}40 = 0{,}14$.
b) $P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}25 \times 0{,}60 = 0{,}15$.
$P(I \cap E) = P(I) \times P_I(E) = 0{,}40 \times 0{,}75 = 0{,}30$.
$P(E) = P(T \cap E) + P(R \cap E) + P(I \cap E)$.
$P(E) = 0{,}14 + 0{,}15 + 0{,}30$; $P(E) = 0{,}59$.

94. Voyagiste
1.



2. a) On affecte à a la valeur 0,6, à b la valeur 0,45 et à c la valeur 0,75.
La condition est vérifiée, on calcule
$p = 0{,}6 \times 0{,}45 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}75$ et on affiche 0,57.
b) L'algorithme vérifie que les données introduites sont des probabilités (nombres compris entre 0 et 1) puis, si la condition est remplie, calcule la probabilité $P(B)$.

95. 1. On a $E_1 = A \cap B$.
Les deux événements A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, c'est-à-dire $P(E_1) = 0{,}03 \times 0{,}02$;
$P(E_1) = 0{,}000\,6$.
2. On a $E_2 = A \cup B$.
Pour tous événements A et B,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, c'est-à-dire
$P(E_2) = 0{,}030\,0 + 0{,}020\,0 - 0{,}000\,6$; $P(E_2) = 0{,}049\,4$.
3. E_3 est l'événement contraire de l'événement E_2.
$E_3 = \overline{E_2}$, donc $P(E_3) = 1 - P(E_2)$, $P(E_3) = 1 - 0{,}049\,4$,
$P(E_3) = 0{,}950\,6$.

▶ *On peut aussi écrire que $E_3 = \overline{A} \cap \overline{B}$, en admettant que, puisque les événements A et B sont indépendants, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants,*
$P(E_3) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$
$P(E_3) = (1 - 0{,}03) \times (1 - 0{,}02) = 0{,}97 \times 0{,}98 = 0{,}950\,6$.

4. On cherche $P_{E_2}(E_1)$.
On sait que, si $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Donc $P_{E_2}(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$. On a $E_1 \cap E_2 = E_1$.
Donc $P_{E_2}(E_1) = \dfrac{P(E_1)}{P(E_2)}$, $P_{E_2}(E_1) = \dfrac{0{,}000\,6}{0{,}049\,4}$,
en arrondissant à 10^{-3}, on obtient : $P_{E_2}(E_1) \approx 0{,}012$.

98. 1. a) • La variable aléatoire X mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de 20 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$.
• Donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}4)$.
b) $P(X = 5) \approx 0{,}074\,6$.
c) On cherche $P(X \geq 2) = P(A)$.
$P(\overline{A}) = P(X < 2) = P(X \leq 1)$.

$P(\bar{A}) \approx 0{,}000\,5$;
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$, $P(A) \approx 0{,}999\,5$.

2. a) L'énoncé donne $P(S) = 0{,}25$ et $P_S(E) = 0{,}4$.
La définition de probabilités conditionnelles donne :
$P_S(E) = \dfrac{P(E \cap S)}{P(S)}$, d'où $P(E \cap S) = P_S(E) \times P(S)$,
$P(E \cap S) = P(S \cap E) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}10$.

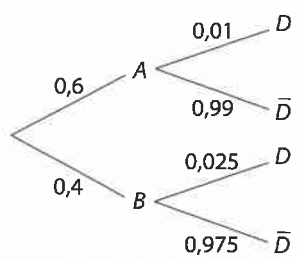
b) L'énoncé donne $P(J) = 0{,}75$ et $P_J(E) = 0{,}08$.
$P_J(E) = \dfrac{P(E \cap J)}{P(J)}$, d'où $P(E \cap J) = P_J(E) \times P(J)$,
$P(E \cap J) = P(J \cap E) = 0{,}08 \times 0{,}75 = 0{,}06$.

c) On a $P(E) = P(S \cap E) + P(J \cap E)$,
$P(E) = 0{,}10 + 0{,}06$, $P(E) = 0{,}16$.

▶ *On peut réaliser un arbre pondéré.*

100. A. 1. $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}4$; $P_A(D) = 0{,}01$; $P_B(D) = 0{,}025$.

2.



3. $P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}01 = 0{,}006$.
$P(B \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}025 = 0{,}010$.

4. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}016$.

B. 1. $P(245 \le X \le 255) \approx 0{,}68$.

2. $h = 2\sigma = 10$.

101. A. 1. On est en présence d'un tirage avec remise de 50 tiges, donc de 50 épreuves aléatoires indépendantes, chacune ayant deux issues : « la tige est défectueuse » événement de probabilité 0,1 ou « la tige n'est pas défectueuse » événement de probabilité 0,9.
Donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50\,;\,0{,}1)$.

2. $P(X \le 2) \approx 0{,}111\,7$.

B. 1. $P(77{,}5 \le Y \le 82{,}5) \approx 0{,}682\,6$.

2. a) On cherche $P(77 \le Y \le 86)$
$P(77 \le Y \le 86) \approx 0{,}876\,7$.

b) La probabilité qu'une pièce tirée au hasard dans la production soit défectueuse est $1 - 0{,}876\,7 = 0{,}123\,3$.
Il y a donc environ 12,3 % de pièces défectueuses.

104. A. 1. $P(D) = 0{,}03$; $P_D(\bar{A}) = 0{,}94$; $P_{\bar{D}}(A) = 0{,}92$.

2. a) $P_D(A) = 0{,}06$.

b) $P(A \cap D) = 0{,}0018$; $P(A \cap \bar{D}) = 0{,}892\,4$.

3. $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) = 0{,}894\,2$.

4. $P_A(D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(A)} \approx 0{,}002$.

▶ *Réaliser un arbre pondéré.*

B. 1. $n = 10$ et $p = 0{,}97$.

2. $P(X = 0) \approx 0{,}74$.

3. $P(X = 9) \approx 0{,}23$.

4. $P(X \ge 9) \approx 0{,}97$.

C. 1. $P(4{,}6 \le Y \le 5{,}4) \approx 0{,}68$.

2. $h \approx 0{,}66$.

▶ *Pour déterminer h avec la calculatrice, se reporter au* **TP6** *de ce chapitre.*

107. 1. a) Pour justifier, procéder comme au corrigé de l'exercice 98 page 286.
• Donc la variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}3$.

b) On cherche $P(X \le 1)$.
En arrondissant à 10^{-2},
on obtient : $P(X \le 1) \approx 0{,}04$.

2. a) On sait que, lorsque cela est possible, la loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par la loi normale de paramètres m et σ avec $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

▶ *Les conditions de cette approximation ne sont pas exigibles au BTS.*

Avec $n = 150$ et $p = 0{,}3$, on obtient $m = 150 \times 0{,}3$, $m = 45$, et $\sigma = \sqrt{45 \times 0{,}7}$, $\sigma = \sqrt{31{,}5}$, en arrondissant à 10^{-1}, on obtient $\sigma = 5{,}6$.

b) On cherche $P(Z \le 40{,}5)$. En arrondissant à 10^{-2},
$P(Z \le 40{,}5) \approx 0{,}21$.

112. 1. La moyenne est $390 + 208 = 598$.
L'écart type est $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

2. Z suit la loi $\mathscr{N}(598,\,5)$; $P(590 \le Z \le 610) \approx 0{,}937$.

114. A. 1. $P(X \ge 55) \approx 0{,}106$ et $P(48 \le X \le 52) \approx 0{,}383$.

2. On trouve $r \approx 42$.

▶ *On peut se reporter au* **TP6** *pour obtenir le résultat précédent.*

B. 1. Procéder comme au corrigé de l'exercice 98 page 286.
Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0{,}03)$.

2. $P(Y \le 2) \approx 0{,}997$.

C. 1. a) $B = 0{,}2 \times 19Z - 750 = 3{,}8Z - 750$.

b) On sait que si a et b sont des constantes réelles, si X est une variable aléatoire, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$.
Donc, $E(B) = 3{,}8E(Z) - 750$, avec $E(Z) = 1\,190$.
$E(B) = 3{,}8(1\,190) - 750$,
$E(B) = 3\,772$.
$V(B) = V(3{,}8Z - 750)$,
$V(B) = 3{,}8^2V(Z)$, avec $V(Z) = \sigma^2 = 130^2$,
$V(B) = 3{,}8^2 \cdot 130^2$, donc $\sigma(B) = \sqrt{V(B)}$,
$\sigma(B) = 3{,}8 \times 130$, $\sigma(B) = 494$.

2. a) $P(Z \ge 3\,500) \approx 0{,}709$.

b) $0{,}709 < 0{,}75$. Le directeur commercial a tort.

Travaux pratiques TICE

TP1 Temps de fonctionnement

A. 1. La classe la plus fréquente est la première, celle des plus petits temps de fonctionnement.

2. a) On peut estimer $P(T \leq 15)$ à 0,65 environ.

b) On peut estimer t_0 à $t_0 \approx 10$.

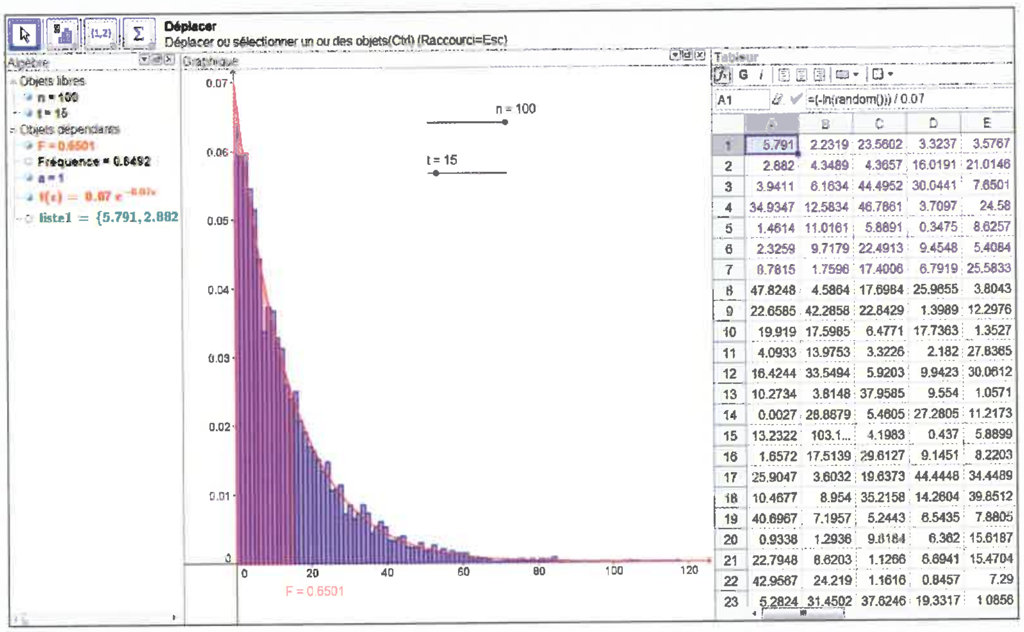
3. Le « profil » de l'histogramme est du type « exponentiel » (décroissance très rapide).

B. 1. On constate que le « profil » de l'histogramme est très proche de la courbe représentative de la fonction f.

2. a) On a $F(t) = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}07x}\right]_0^t = -\mathrm{e}^{-0{,}07t} + 1$.

b) $F(15) = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}05} \approx 0{,}65$.

c) $F(t)$ est l'aire, en unités d'aires, comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$.



d) On résout $1 - \mathrm{e}^{-0{,}07t} = 0{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}07t} = 0{,}5 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0{,}5}{0{,}07} \approx 9{,}9$.

e) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-0{,}07t} = 1$. L'aire située entre la courbe représentative de f et les axes de coordonnées vaut une unité d'aire.

TP2 Désintégration radioactive

1. On a $F(0) = \int_0^0 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. $P(T > t)$ correspond à la proportion (théorique) d'atomes non désintégrés au temps t.

$P(t \leq T \leq t+s)$ correspond à la proportion (théorique) d'atomes se désintégrant durant l'intervalle de temps $[t, t+s]$.

On a ensuite $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$ et

$$P(t \leq T \leq t+s) = \int_t^{t+s} f(x)\,dx = \int_0^{t+s} f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx$$
$$= F(t+s) - F(t).$$

3. C'est la définition de la dérivée (on retrouve la notion de vitesse instantanée).

4. a) L'ensemble des fonctions F solutions de l'équation $\dfrac{F'(t)}{1 - F(t)} = h$ est l'ensemble des fonctions du type $F(t) = c\mathrm{e}^{-ht} + 1$ où c est un nombre réel quelconque.

b) Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = h\mathrm{e}^{-ht}$.

5. La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre h.

TP3 Modélisation du trafic Internet

1. a) La somme du temps d'attente du premier paquet et du temps d'attente entre le premier et le deuxième paquet est inférieure ou égale à 0,01.

b) La somme du temps d'attente du premier paquet et de chacun des temps d'attente entre les deux suivants est supérieure à 0,01.

2. a) L'algorithme affiche 0 lorsque la boucle « tant que » n'est effectuée qu'une seule fois, c'est-à-dire lorsque la première valeur de – ln(alea)/700 simulée est supérieure à 0,01.

b) Pour un affichage $x = 2$, il faut trois exécutions de la boucle « tant que ».

c) x correspond au nombre de paquets reçus durant 0,01 s. s correspond à la somme des temps d'attentes entre les paquets.

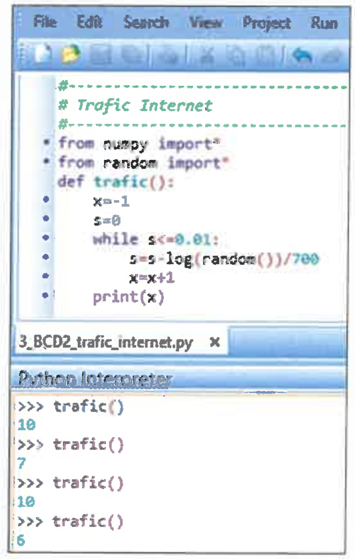
3. Un exemple d'observations de valeurs fournies par l'algorithme est donné par l'image d'écran.

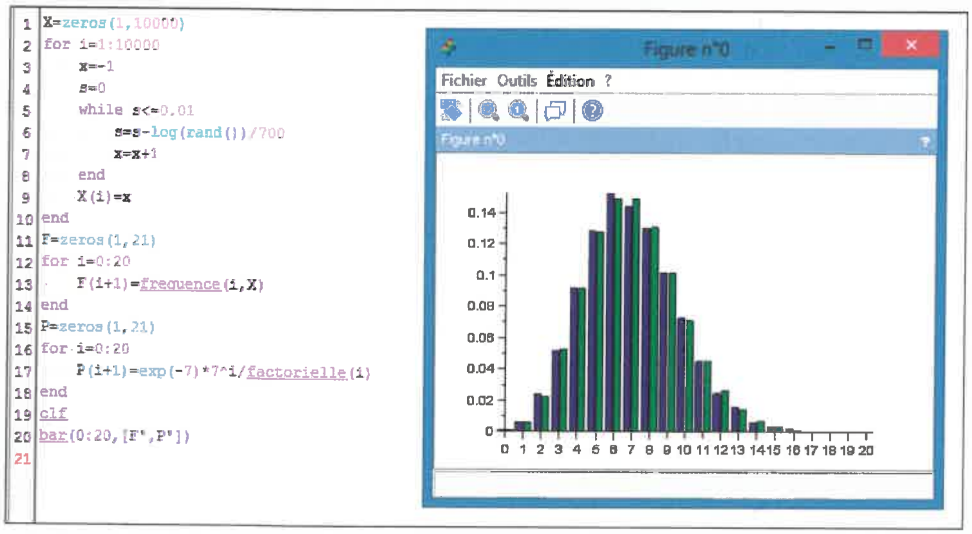
On observe qu'en moyenne le nombre de paquets de données reçus durant un centième de seconde est proche de 7 (ceci d'autant plus que le nombre de simulations est important).

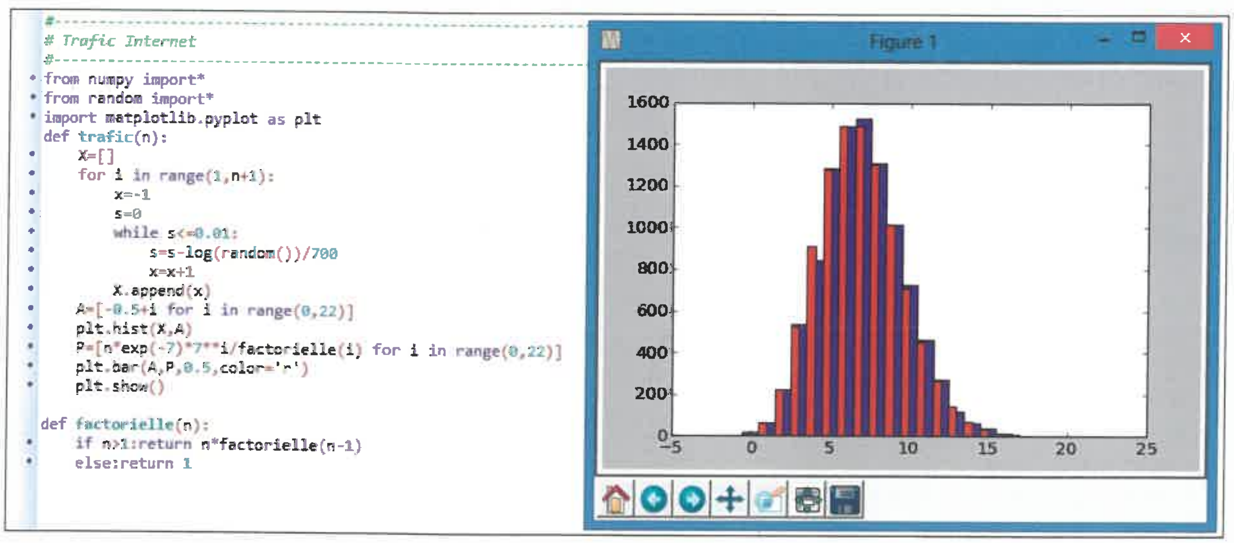
4. Les images d'écran suivantes montrent deux simulations de 10 000 réalisations de la variable aléatoire X.

a) On constate que les deux diagrammes sont très proches.

b) On peut conjecturer que X suit la loi de Poisson de paramètre 7.







TP4 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

1. $m = np$.

2. L'écart type de la loi binomiale est donné par : $\sqrt{np(1-p)}$. La presque totalité des réalisations d'une variable aléatoire sont situées entre la moyenne plus ou moins quatre écarts types.

3. Pour (n, p) valant (5 ; 0,4) ; (35 ; 0,4) ; (250 ; 0,08) et (500 ; 0,15) les distributions sont assez éloignées.

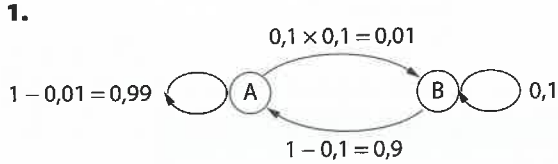
Pour (35 ; 0,08) ; (250 ; 0,02) et (500 ; 0,02) les deux distributions sont proches.

4. Les couples (5 ; 0,4) ; (35 ; 0,4) ; (250 ; 0,08) et (500 ; 0,15) ne vérifient pas les conditions sur n et p.

Les couples (35 ; 0,08) ; (250 ; 0,02) et (500 ; 0,02) vérifient les conditions.

TP5 Bon fonctionnement de deux machines

A. 1.



2. a)

```
Saisir x
Si x = 0 alors Si alea < 0,99 alors x = 0
                  Sinon x = 1
                  FinSi
Sinon Si alea < 0,9 alors x = 0
          Sinon x = 1
          FinSi
FinSi
```

b)

```
x = 0
Pour n = 1 à 5 Faire
  Si x = 0 alors  Si alea < 0,99 alors x = 0
                    Sinon x = 1
                    FinSi
  Sinon  Si alea < 0,9 alors x = 0
           Sinon x = 1
           FinSi
  FinSi
FinPour
Afficher x
```

c)

```
a = 0 ; b = 0 //comptent le nombre d'états finaux en 0 et en 1
Pour k = 1 à 100 000 Faire
  x = 0
  Pour n = 1 à 5 Faire
    Si x = 0 alors  Si alea < 0,99 alors x = 0
                      Sinon x = 1
                      FinSi
    Sinon Si alea < 0,9 alors x = 0
        Sinon x = 1
        FinSi
    FinSi
  FinPour
  Si x = 0 alors affecter à a la valeur a + 1
  Sinon affecter à b la valeur b + 1
  FinSi
FinPour
Afficher a / 100 000 et b / 100 000
```

3. Programmation et exemple de simulation.

Avec Scilab :

```
a=0;b=0
for k=1:100000
    x=0
    for n=1:5
        if x==0 then
            if rand()<0.99 then
                x=0
                else x=1
            end
        else
            if rand()<0.9 then
                x=0
                else x=1
            end
        end
    end
    if x==0 then a=a+1
        else b=b+1
    end
end
afficher("Fréquence état 0 : "+string(a/100000))
afficher("Fréquence état 1 : "+string(b/100000))
```

```
Fréquence état 0 : 0.9893
Fréquence état 1 : 0.0107
```

Avec Python :

```
#------------------------------------------------------------------
# Simulation du bon fonctionnement de deux machines au jour 5
#------------------------------------------------------------------
from random import*

def bon_fonctionnement():
    a=0;b=0
    for k in range(1,100001):
        x=0
        for n in range(1,6):
            if x==0:
                if random()<0.99:
                    x=0
                else:
                    x=1
            else:
                if random()<0.9:
                    x=0
                else:
                    x=1
        if x==0:
            a=a+1
        else:
            b=b+1
    print("Frequence etat 0 : ",a/100000)
    print("Frequence etat 1 : ",b/100000)
```

3_BCD2_fonctionnement_2_machines.py

Python Interpreter

```
>>>
>>> bon_fonctionnement()
Frequence etat 0 :  0.98928
Frequence etat 1 :  0.01072
>>> bon_fonctionnement()
Frequence etat 0 :  0.98891
Frequence etat 1 :  0.01109
>>>
```

B. 1. Pour être dans l'état 1 le jour $n+1$, deux cas sont possibles. Soit on était dans l'état 0 le jour n et les machines sont passées dans l'état 1 avec une probabilité 0,01. Soit on était dans l'état 1 le jour n et les machines sont restées dans l'état 1 avec une probabilité 0,1.

2. $T = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

3. a) $U_3 = U_2\,T = U_1\,T\,T = U_0\,T\,T\,T = U_0\,T^3$.

b) Le matin du jour 3, la probabilité de l'état 0 est environ 0,989 02 et la probabilité de l'état B est environ 0,010 98.

4. Voir ci-après les calculs menés avec Maxima et Scilab.

Le matin du jour 5, la probabilité de l'état 0 est environ 0,989 01 et la probabilité de l'état 1 est environ 0,010 99.

5. Les décimales des coefficients de la matrice T^n se stabilisent rapidement quand n augmente. Le système se stabilise : chaque matin, la probabilité de l'état 0 est environ 0,989 01 et la probabilité de l'état 1 est environ 0,010 99.

```
(%i4) U0.T^^5;
(%o4) [0.9890110539  0.0109889461]

(%i5) T^^10;
(%o5) [0.98901098901137  0.010989010988628]
      [0.9890109889765   0.010989011023496]

(%i6) T^^20;
(%o6) [0.98901098901099  0.010989010989011]
      [0.98901098901099  0.010989010989011]

(%i7) T^^100;
(%o7) [0.98901098901099  0.010989010989011]
      [0.98901098901099  0.010989010989011]
```

```
-->U0*T^5
ans  =

   0.9890110539    0.0109889461

-->T^10
ans  =

   0.9890109890114    0.0109890109886
   0.9890109889765    0.0109890110235

-->T^20
ans  =

   0.9890109890110    0.0109890109890
   0.9890109890110    0.0109890109890

-->T^100
ans  =

   0.9890109890110    0.0109890109890
   0.9890109890110    0.0109890109890
```

Corrigés des exercices

2. 1. $P(X \in [1, 3]) = \int_1^3 0{,}2e^{-0{,}2}\,dt$, donc

$P(X \in [1, 3]) = \left[-e^{-0{,}2t}\right]_1^3$, $P(X \in [1, 3]) = -e^{0{,}6} + e^{0{,}2} \approx 0{,}270$.

$P(X \leq 6) = \left[-e^{-0{,}2t}\right]_0^6$, donc $P(X \leq 6) = -e^{-1{,}2} + 1 \approx 0{,}699$.

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$, donc $P(X > 4) = 1 - \left[-e^{-0{,}2t}\right]_0^4$,

$P(X > 4) = 1 - (-e^{-0{,}8} - 1)$, donc $P(X > 4) = e^{-0{,}8} \approx 0{,}449$.

2. $E(X) = \dfrac{1}{0{,}2}$, donc $E(X) = 5$.

Lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir la variable aléatoire X est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X est proche de 5.

6. 1. a) On pose $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, donc $v(t) = -e^{-\lambda t}$.

D'après la formule de l'intégration par parties,

$$I(x) = [-te^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt,$$

$I(x) = -xe^{-\lambda x} + \left[-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x$, $\quad I(x) = -xe^{-\lambda x} - \dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$.

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-\lambda x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = \dfrac{1}{\lambda}$.

2. a) On pose $u(t) = t^2$, donc $u'(t) = 2t$, et $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, donc $v(t) = -e^{-\lambda t}$.

D'après la formule de l'intégration par parties,

$$J(x) = [-t^2e^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^x 2te^{-\lambda t}\,dt,$$

$J(x) = -x^2e^{-\lambda x} + \dfrac{2}{\lambda} I(x)$, où $I(x)$ est défini ci-dessus.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-\lambda x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = \dfrac{1}{\lambda}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

7. 1. a) On simule X en faisant rand ou Ran# sur la calculatrice, ou ALEA() sur tableur et en répétant autant de fois que désiré.

b) On a, pour tout $a \in]0, 1]$, $P(X \geq a) = \int_a^1 1\,dx = 1 - a$.

2. Si $x \in]0, 1]$, $-(1/\lambda) \ln x \in [0, +\infty[$ donc T est à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. On a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P(T \leq t) = P(-(1/\lambda) \ln X \leq t)$ $= P(X \geq e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda}$ car $e^{-\lambda t} \in]0, 1]$.

4. Si $t < 0$ alors $f(t) = 0$ car T est à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Si $t \geq 0$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$

d'où $f(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda\, e^{-\lambda t}$.

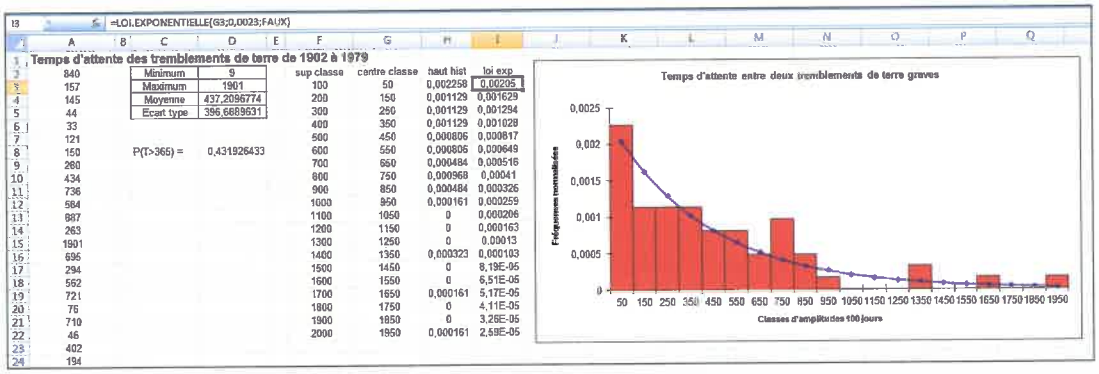
On reconnaît la fonction de densité de loi exponentielle de paramètre λ. Il s'agit donc de la loi de la variable aléatoire T.

5. D'après ce qui précède, on peut simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0,005 par l'instruction :

– ln(rand) / 0,005 c'est-à-dire – 200 ln(rand) ou – 200 ln(Ran#) sur calculatrice ; ou – 200*LN(ALEA( )) sur tableur.

8. Tremblements de terre avec le tableur

1. On prend comme paramètre de la loi exponentielle, l'inverse de la moyenne observée (pour avoir une espérance égale à la moyenne observée).
L'ajustement obtenu convient.



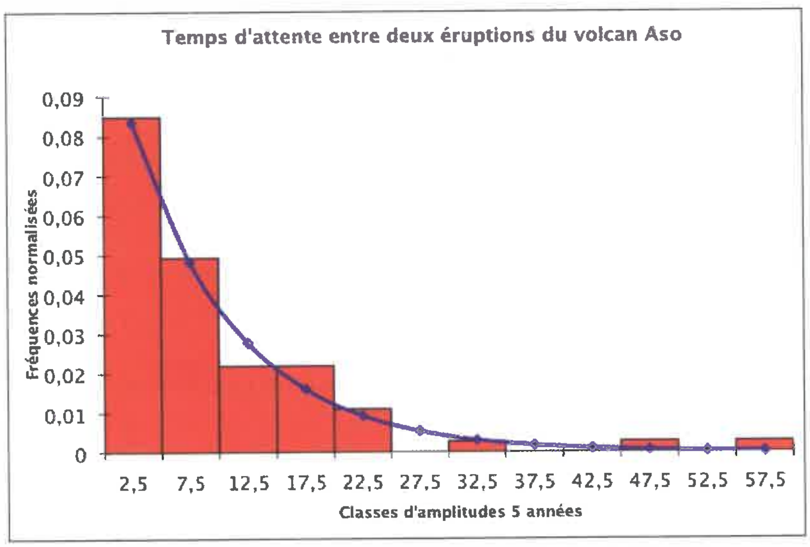
I3 =LOI.EXPONENTIELLE(G3;0,0023;FAUX)

	A	C	D	F	G	H	I
1	Temps d'attente des tremblements de terre de 1902 à 1979						
2	840	Minimum	9	sup classe	centre classe	haut hist	loi exp
3	157	Maximum	1901	100	50	0,002258	0,00205
4	145	Moyenne	437,2096774	200	150	0,001129	0,001629
5	44	Ecart type	396,6889631	300	250	0,001129	0,001294
6	33			400	350	0,001129	0,001028
7	121			500	450	0,000806	0,000817
8	150	P(T>365) =	0,431926433	600	550	0,000806	0,000649
9	260			700	650	0,000484	0,000516
10	434			800	750	0,000968	0,00041
11	736			900	850	0,000484	0,000326
12	584			1000	950	0,000161	0,000259
13	887			1100	1050	0	0,000206
14	263			1200	1150	0	0,000163
15	1901			1300	1250	0	0,00013
16	695			1400	1350	0,000323	0,000103
17	294			1500	1450	0	8,19E-05
18	562			1600	1550	0	6,51E-05
19	721			1700	1650	0,000161	5,17E-05
20	76			1800	1750	0	4,11E-05
21	710			1900	1850	0	3,26E-05
22	46			2000	1950	0,000161	2,59E-05
23	402						
24	194						

2. On a $P(T > 365) = 1 - P(T \leq 365) \approx 0{,}43$ obtenu, avec le tableur, en faisant :
=1-LOI.EXPONENTIELLE(365;0,0023;VRAI).

9. Éruptions du volcan Aso avec le tableur

1. Minimum : 1 an ; maximum : 56 ans ; moyenne : 9,28 ans ; écart type : 10,25 ans.
Le profil de l'histogramme suggère une loi exponentielle. La moyenne étant 9,28, on peut prendre comme paramètre de la loi exponentielle $\lambda \approx 1/9{,}28 \approx 0{,}11$ (valeur arrondie à 10^{-2}).



2. On a $P(T \geq 56) = 1 - P(T < 56) = 1 - \int_0^{56} 0{,}11\mathrm{e}^{-0{,}11t}\,dt \approx 0{,}002$.
On peut aussi utiliser l'instruction =1-LOI.EXPONENTIELLE(56;0,11;VRAI).
Une telle période de repos est donc, dans ce modèle, assez exceptionnelle.

11. **a)** $P(X = 2) \approx 0{,}268$; **b)** $P(X < 2) = P(X \leq 1) \approx 0{,}423$.

12. **a)** $P(E_1) \approx 0{,}176$;
b) $P(E_2) \approx 0{,}441$;
c) $P(E_3) = 1 - P(E_2) \approx 0{,}559$.

17. **1.** Y suit la loi $\mathscr{B}(80 ; 0{,}05)$; $E(Y) = 4$.
2. $\lambda = 4$, $P(Y_1 = 10) \approx 0{,}004$.

21. Simuler une loi de Poisson avec Scilab ou Python

1. a) L'algorithme affiche 0 lorsque la boucle « tant que » n'est effectuée qu'une seule fois, c'est-à-dire lorsque la première valeur de – ln(alea)/700 simulée est supérieure à 0,01.
b) x correspond au nombre de « succès » durant une unité de temps. s correspond à la somme des temps d'attentes entre les « succès ».

c) x est le plus grand entier k tel que la somme de k temps d'attentes consécutifs soit inférieure ou égale à une unité de temps. D'après l'énoncé il s'agit de la simulation d'une réalisation d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre identique à celui de la loi exponentielle correspondant aux temps d'attente, c'est-à-dire λ.

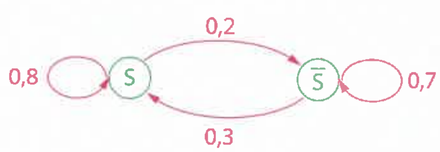
2. Réalisation de simulations avec Python :

```
#------------------------------------------------
# Simulation loi de Poisson de parametre lam
#------------------------------------------------
from numpy import*
from random import*

def simul_poisson(lam):
    x=-1
    s=0
    while s<=1:
        s=s-log(random())/lam
        x=x+1
    print(x)
```

```
3_BCD2_simul_Poisson.py
Python Interpreter
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>>
>>> simul_poisson(1.5)
3
>>> simul_poisson(1.5)
1
>>> simul_poisson(1.5)
2
>>> simul_poisson(1.5)
1
>>> simul_poisson(15)
13
>>> simul_poisson(15)
10
>>> simul_poisson(15)
12
>>> simul_poisson(15)
15
>>> simul_poisson(15)
14
>>>
```

22. 1.



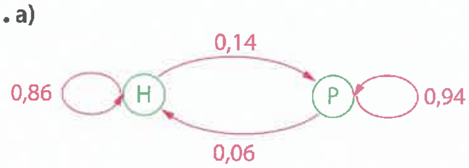
2. a) $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

c) $P_2 = P_0M^2$ car $P_2 = P_1M$ et $P_1 = P_0M$.

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ donc $P_2 = (0,7 \quad 0,3)$.

24. 1. a)



b) $M = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,14 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$.

2. On appelle $E_n = (h_n \quad p_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$; donc h_n désigne la probabilité qu'un habitant de Girouette vote pour le parti Hirondelle l'année $2010 + n$, et p_n désigne la probabilité qu'un habitant de Girouette vote pour le parti Phenix cette même année.

On a donc $E_0 = (0,7 \quad 0,3)$.

$E_1 = E_0 \times M = (0,62 \quad 0,38)$.

Donc en 2011, la probabilité qu'un habitant de Girouette vote pour le parti Hirondelle est 0,62 et la probabilité qu'il vote pour le parti Phenix est de 0,38.

On peut dire aussi que le parti Hirondelle recueille 62 % des voix, et le parti Phenix 38 %.

$E_4 = E_3 \times M = E_2 \times M \times M = E_1 \times M \times M \times M = E_1 \times M^3$

À la calculatrice, on trouve $E_4 \approx (0,46 \quad 0,54)$

On peut dire qu'en 2014 le parti Hirondelle devrait recueillir à peu près 46 % des voix, et le parti Phenix 54 %.

3. $E_{n+1} = E_n \times M$, donc $\begin{cases} h_{n+1} = 0,86h_n + 0,06p_n \\ p_{n+1} = 0,14h_n + 0,94p_n \end{cases}$

Donc $h_{n+1} = 0,86h_n + 0,06p_n$; or, pour tout entier n, $h_n + p_n = 1$ donc $p_n = 1 - h_n$.

Donc $h_{n+1} = 0,86h_n + 0,06(1 - h_n) = 0,8h_n + 0,06$.

4. L'inéquation $h_n < 0,32$ est équivalente à :

$0,3 + 0,4 \times 0,8^n < 0,32$; $\quad 0,4 \times 0,8^n < 0,02$; $\quad 0,8^n < \dfrac{0,02}{0,4}$

$0,8^n < 0,05$; $\quad \ln(0,8^n) < \ln 0,05$;

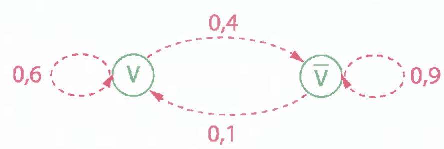
$n \ln 0,8 < \ln 0,05$; $\quad n > \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,8}$.

car $\ln 0,8 < 0$.

$\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,8} \approx 13,4$ donc $n = 14$; la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera inférieure à 0,32 à partir de 14 années.

Remarque : on peut trouver à la calculatrice que $h_{13} \approx 0,322 > 0,32$ et que $h_{14} \approx 0,318 < 0,32$.

25. 1.



2. Deux flèches arrivent à l'état V :

- une flèche partant de V avec la probabilité 0,6
- une flèche partant de $\overline{V}$ avec la probabilité 0,4.

Donc $p_{n+1} = 0,6_{pn} + 0,1(1 - p_n)$,

$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ pour tout entier naturel non nul n.

3. a) Pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2$.

Donc $u_{n+1} = 0,5p_n + 0,1 - 0,2$

$u_{n+1} = 0,5p_n - 0,1$

$u_{n+1} = 0,5(p_n - 0,2)$

$u_{n+1} = 0,5\, u_n$.

Donc la suite u est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = u_1q^{n-1}$ donc $u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1}$.

Par définition, $u_n = p_n - 0,2$ donc $p_n = u_n + 0,2$.

$p_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2$.

c) $p_n = \dfrac{0,8}{0,5} 0,5^n + 0,2$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ car $0 < 0{,}5 < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}2$.

d) Si on procède à de très nombreux sondages, environ 2 sur 10 (ou 1 sur 5) donne lieu à la découverte de vestiges.

28. 1. $P(t_1) = \dfrac{1}{2}$.

2. $1 \to 2 \to 3$.

$P(t_2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

3. $1 \to 2 \to 1 \to 0$ $\quad P(t_3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.

$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$ $\quad P(t_4) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$ $\quad P(t_5) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$.

4. $P(t_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Les deux résultats admis dans l'énoncé s'expliquent de la façon suivante (**non demandée**) :

• Si n est impair (1, 3, 5, …), alors $n = 2p + 1$ avec p entier et le parcours unique qui convient est $1 \to 0$ précédé de p fois le cycle $1 \to 2 \to 1$.

• Si n est pair (2, 4, …), alors $n = 2p$ avec p entier et le parcours unique qui convient est $1 \to 2 \to 3$ précédé de p fois le cycle $1 \to 2 \to 1$.

5. $E(X) = \sum\limits_{n \geq 1} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc d'après l'égalité admise,

$$E(X) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Si on fait un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire décrite dans l'exemple 2 du cours, en moyenne la partie s'arrête après 2 lancers de pièce.

Corrigés des exercices pour le BTS

29. 1. On cherche $P(T > 200)$.

$P(T > 200) = e^{-0{,}005 \times 200}$, $P(T > 200) = e^{-1}$,

$P(T > 200) \approx 0{,}368$.

2. On cherche t pour que $P(T > t) = 0{,}8$,

ce qui est équivalent à $e^{-0{,}005t} = 0{,}8$, $-0{,}005t = \ln 0{,}8$,

$t = -\dfrac{1}{0{,}005}\ln 0{,}8$, $t \approx 44$ jours.

35. 1. La fonction de fiabilité est définie par :

$$R(t) = e^{-\lambda t} (R(t) = P(T > t)).$$

La fonction de défaillance est définie par :

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. $R(2\,000) = 0{,}8$ est équivalent à :

$$e^{-2\,000\lambda} = 0{,}8 \text{ ; donc } \lambda = \frac{\ln 0{,}8}{-2\,000} \approx 0{,}000\,112.$$

3. a) Le temps moyen de bon fonctionnement est l'espérance $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 9\,091$ heures.

b) $P(T > 3\,000) = e^{-0{,}000\,11 \times 3\,000} \approx 0{,}719$.

4. a) $P[(T_1 > 3\,000) \cap (T_2 > 3\,000)]$

$= P(T_1 > 3\,000) \times P(T_2 > 3\,000) \approx 0{,}719 \times 0{,}719 \approx 0{,}517$.

b) $P[(T_1 > 3\,000) \cup (T_2 > 3\,000)]$

$= P(T_1 > 3\,000) + P(T_2 > 3\,000)$

$- P[(T_1 > 3\,000) \cap (T_2 > 3\,000)] \approx 0{,}921$.

36. 1. Réponse **b)** ($P(X > 8) = e^{-(0{,}2 \times 8)} \approx 0{,}20$).

2. a) $P(X = 0) \approx 0{,}07$.

b) $P(X \leq 2) \approx 0{,}125$.

3. a) $P(X \leq 2) \approx 0{,}568$.

b) $\lambda = 2{,}4$.

c) $P(Z = 3) \approx 0{,}209$.

37. A. $P(59{,}5 \leq X \leq 61{,}1) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

(Ce qui se retrouve directement à la calculatrice.)

B. 1. La variable aléatoire Y mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de 80 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}05$.

• Donc la variable aléatoire Y qui associe à chaque prélèvement de 80 pièces le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiales de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}05$.

2. $P(Y = 3) \approx 0{,}20$.

3. a) $\lambda = np = 80 \times 0{,}05 = 4$.

b) $P(Z \leq 3) \approx 0{,}43$.

40. A. 1. a) On procède comme au corrigé de l'exercice 37, page 294.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}09$.

b) $E(X) = np = 9$. $\quad V(X) = np(1 - p) = 8{,}19$.

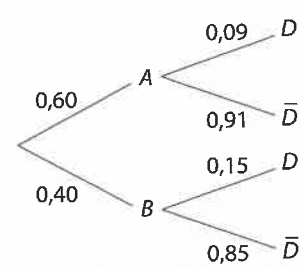
c) $P(X = 2) \approx 0{,}004$.

2. a) $\lambda = np = 9$.

b) $P(Y > 90) = P(Y \leq 9) \approx 0{,}587$.

B. $P(Z \leq 60) \approx 0{,}87$.

C. 1.



2. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$,

$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}09 + 0{,}40 \times 0{,}15 = 0{,}114$.

3. $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}054}{0{,}114} \approx 0{,}474$.

Réponses des TP TICE

TP1

1. Pour chaque échantillon, $s^2 = \frac{10}{9} s_{10}{}^2$ donc $s^2 > s_{10}^2$.
Si l'on admet qu'en moyenne, sur un grand nombre d'échantillons, s^2 vaut (pratiquement) $\frac{1}{12}$ alors, en moyenne, sur un grand nombre d'échantillons, la variance des échantillons s_{10}^2 est plus petite que $\frac{1}{12}$.

2. a) On constate, en faisant F9, que la moyenne de s_{10}^2 est inférieure à $\frac{1}{12}$.
b) On constate, en faisant F9, que la moyenne de s^2 est très proche de $\frac{1}{12}$, soit au-dessus, soit en dessous.

3. On observe un écart plus important par rapport à $\frac{1}{12}$ avec la variance de l'échantillon s_{10}^2 qu'avec l'estimation de la variance s^2.

TP2

A. 1. a) Si H_0 est vraie, X suit la loi binomiale de paramètre 20 et 1/3 car on est en présence de la répétition de 20 épreuves indépendantes, à deux issues possibles (bonne réponse avec la probabilité 1/3 ou mauvaise réponse) et où la variable aléatoire correspond au nombre de succès.
b) $P(X \geq 10) \approx 0{,}092$ et $P(X \geq 11) \approx 0{,}038$. D'où $a = 11$.
La zone critique au seuil de 5 % est [11, 20].

2. Soit x le nombre de bonnes réponses de l'étudiant.
Si $x \geq 11$, H_0 est rejetée, on considère que l'étudiant ne répond pas au hasard et il est reçu à l'examen. Si $x \leq 10$, H_0 est acceptée, on considère que l'étudiant répond au hasard et il est recalé à l'examen.

B. 1. On observe des erreurs de décisions : H_0 n'est pas toujours acceptée quand elle est vraie ou refusée quand elle est fausse.

2. Des étudiants répondant au hasard ($p = 1/3$) sont acceptés ($x \geq 11$), cas rares. Des étudiants ne répondant pas au hasard ($p = 0{,}6$) sont recalés ($x \leq 10$), c'est le cas le plus fréquent.

3. D'après la question A.1.b. $P(X \geq 11) \approx 0{,}038$. Le risque de première espèce est d'environ 3,8 %.

4. Si X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,6, $P(X \leq 10) \approx 0{,}245$.
Cet étudiant a en effet un risque de seconde espèce d'environ 24,5 %.

C. 1. a) F suit la loi normale de moyenne $\frac{1}{3}$ et d'écart type $\sqrt{\frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{30}$.
b) On trouve $h \approx 0{,}41$.

2. Soit x le nombre de bonnes réponses de l'étudiant.
Si $x \geq 42$, H_0 est rejetée, on considère que l'étudiant ne répond pas au hasard et il est reçu à l'examen. Si $x \leq 41$, H_0 est acceptée, on considère que l'étudiant répond au hasard et il est recalé à l'examen.

3. a) Si $p = p_0$ alors F suit la loi normale de moyenne p_0 et d'écart type $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{100}}$ et $f(p_0) = P(F > 0{,}41)$
$= 1 - P(F \leq 0{,}41)$.
b) On a $f(0{,}4) \approx 0{,}42$ et $f(0{,}6) \approx 0{,}999\,95$.
Ce test de 100 questions est plus « puissant » que celui de 20 questions en ce sens que son pouvoir discriminant est plus important.

TP3

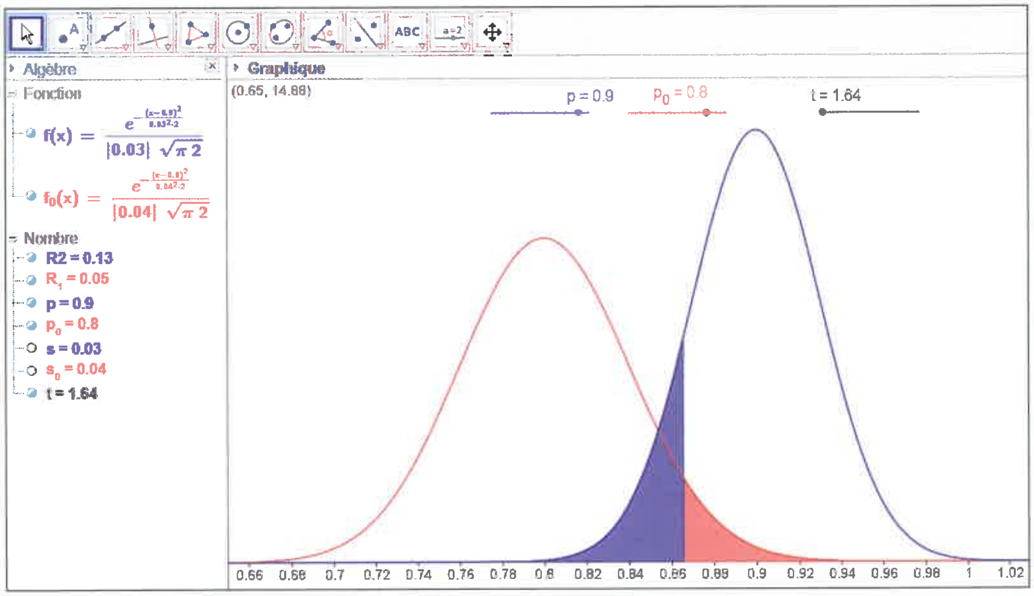
A. 1. Si H_0 est vraie, F suit approximativement la loi normale de moyenne 0,9 et d'écart type $\sqrt{\frac{0{,}9 \times 0{,}1}{100}}$.

2. a) Lorsque H_0 est vraie, la probabilité de rejeter à tort H_0 est égale à l'aire située entre la courbe représentative de f_0 (puisque H_0 est vraie) et l'axe des abscisses pour des abscisses situées dans la zone critique, c'est-à-dire inférieures à $p_0 - ts_0$.
b) Si $t = 1{,}64$, $R_1 \approx 0{,}05$. Si $t = 2{,}33$, $R_1 \approx 0{,}01$.

3. a) Lorsque H_0 est fausse, p vaut 0,8 et la probabilité d'accepter H_0 à tort est égale à l'aire située entre la courbe représentative de f (qui correspond à la vérité) et l'axe des abscisses pour des abscisses situées dans la zone d'acceptation du test, c'est-à-dire supérieures à $p_0 + ts_0$.
b) Si $t = 1{,}64$, $R_2 \approx 0{,}10$. Si $t = 2{,}33$, $R_2 \approx 0{,}23$.
On constate que lorsque R_1 diminue, R_2 augmente.

4. On observe sur l'échantillon $f = 0{,}84$.
Au seuil de 5 % ($t = 1{,}64$), H_0 est rejetée et l'on considère que p est inférieure à 0,9.
Au seuil de 1 % ($t = 2{,}33$), H_0 est acceptée et l'on considère que p vaut 0,9.

B. 1. R_1 est défini par Intégrale[f_0 , p_0+t*s_0 , 1].
2. R_2 est défini par Intégrale[f , 0 , p_0+t*s_0].
3. Si $t = 1{,}64$, $R_2 \approx 0{,}13$. Si $t = 2{,}33$, $R_2 \approx 0{,}41$.
4. On observe sur l'échantillon $f = 0{,}84$.
Au seuil de 5 % ($t = 1{,}64$), H_0 est acceptée et l'on considère que p vaut 0,8.
Au seuil de 1 % ($t = 2{,}33$), H_0 est acceptée et l'on considère que p vaut 0,8.



TP4

A. 1. On est en présence de 50 épreuves aléatoires indépendantes pouvant, chacune, déboucher sur deux issues possibles : le capot présente un défaut (avec la probabilité $p = 0{,}2$) ou non.

La variable aléatoire X qui, à chaque échantillon, associe le nombre de capots présentant un défaut suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$.

2. On a $0{,}2 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}2 \times 0{,}8}{50}} \approx 0{,}09$ et

$0{,}2 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}2 \times 0{,}8}{50}} \approx 0{,}31$.

Les limites de contrôle sont 0,09 et 0,31.

4. On peut commencer par observer la fréquence des points situés en dehors des limites de contrôle lorsque $p = 0{,}2$. Elle est de moins de 5 %.

Si $p = 0{,}2$ l'intervalle de fluctuation asymptotique $[0{,}09 ; 0{,}31]$ est tel que F a une probabilité d'environ 95 % d'y prendre ses valeurs. La probabilité de commettre une erreur de décision lorsque $p = 0{,}2$ est donc de l'ordre de 5 %. Il s'agit de l'erreur de première espèce liée au test.

Un calcul plus précis est possible à l'aide de la loi binomiale. La probabilité de cette erreur est :
$1 - P(50 \times 0{,}09 \leq X \leq 50 \times 0{,}31) = 1 - P(5 \leq X \leq 15)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$. On trouve environ 4,9 %.

B. On peut, dans un premier temps, observer par simulation la fréquence des erreurs de seconde espèce consistant à accepter l'hypothèse H_0 alors que celle-ci est fausse (points situés entre les lignes de contrôle alors que $p \neq 0{,}2$) : environ 60 %.

On peut faire un calcul avec la loi binomiale. La probabilité d'erreur de seconde espèce lorsque $p = 0{,}3$ est $P(50 \times 0{,}09 \leq X \leq 50 \times 0{,}31) = P(5 \leq X \leq 15)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}3$. On trouve environ 57 %.

TP5

A. 1. a) D'après le cours, si X suit la loi normale de moyenne 39,9 et d'écart type 0,05, $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 39,9 et d'écart type $\dfrac{0{,}05}{\sqrt{5}}$ soit environ 0,022.

b) On trouve $h \approx 0{,}043$.

2. Règle de décision au seuil de 5 % :
On calcule la moyenne $\overline{x}$ des cotes d'un échantillon aléatoire de taille 5.
Si $39{,}857 \leq \overline{x} \leq 39{,}943$ alors H_0 est acceptée, sinon H_0 est refusée.

4. Par construction, cette probabilité (risque d'erreur de première espèce) est 0,05.

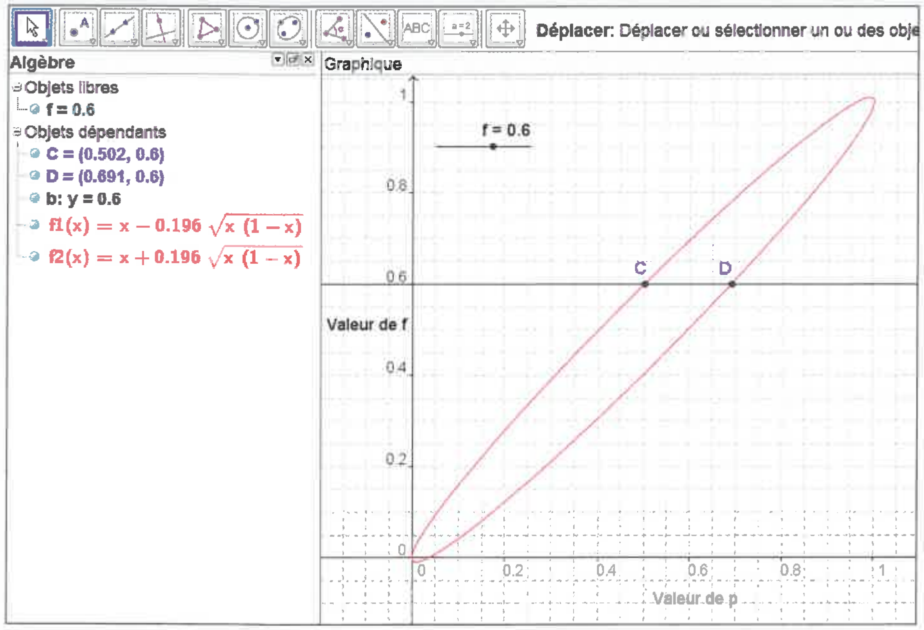
B. On calcule $P(39{,}857 \leq \overline{X} \leq 39{,}943)$ où $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 39,95 et d'écart type 0,022. On trouve environ 0,375.

TP6

1. b) On obtient, comme intervalle de fluctuation asymptotique de F à 95 % les intervalles suivants :
- pour $p = 0{,}4$; $[0{,}304 ; 0{,}496]$;
- pour $p = 0{,}71$; $[0{,}621 ; 0{,}799]$;
- pour $p = 0{,}02$; $[-0{,}007 ; 0{,}047]$.

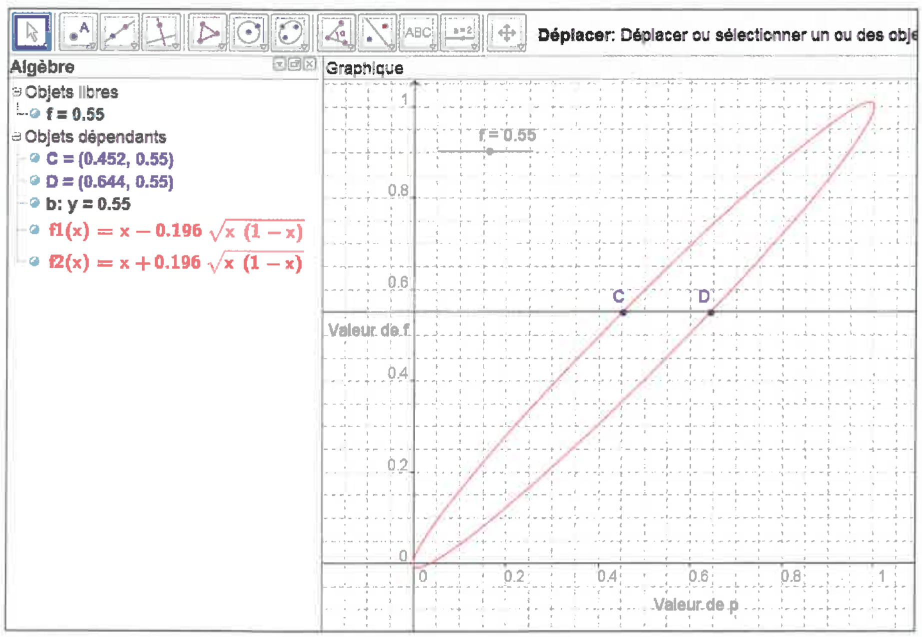
Dans le dernier cas, l'abscisse du point A est négative ($np = 100 \times 0{,}02 = 2$ est inférieur à 5) et l'intervalle de fluctuation asymptotique ne peut pas être utilisé.

2. On peut créer un curseur pour f comme indiqué sur l'image d'écran suivante.



Pour $f = 0{,}6$ on obtient comme « intervalle de confiance » de p à 95 % de confiance, l'intervalle [0,502 ; 0,691].

3. Pour $f = 0{,}55$ on obtient comme « intervalle de confiance » de p à 95 % de confiance, l'intervalle [0,452 ; 0,644].



TP7

1. a) La variable aléatoire F à tout échantillon aléatoire de taille 1 000 associe la fréquence des personnes en faveur du candidat sur cet échantillon.

b) Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{1000}}, f + 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{1000}\right].$$

2. a) Non.

b) Si $p = 0{,}502$ appartient à l'intervalle de confiance, alors la formule affiche la valeur 1, sinon, elle affiche la valeur 0.

c) Environ 95 %.

d) Oui.

Corrigés des exercices

1. 1. $\overline{x} = 5{,}03$ et $s = 1{,}14$; ces résultats sont obtenus à la calculatrice.

2. Une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ du nombre de camions en panne chaque jour pour la population constituée des jours ouvrables de l'année est :

$$\mu = \overline{x} = 5 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s \approx 1{,}16.$$

3. Un intervalle de confiance de la moyenne μ de la population avec le coefficient de confiance 95 % est :

$$\left[\overline{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [4{,}61 ; 5{,}45].$$

4. A. 1. $H_1 : p \neq 0{,}25$

2. • Chaque épreuve élémentaire, le prélèvement au hasard d'un client parmi les clients de l'agence de voyages, peut déboucher sur deux issues et deux seulement :

le client a pris l'option, de probabilité $\frac{1}{4}$, et le client n'a pas pris l'option, de probabilité $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{4}$.

• Chaque prélèvement de 60 clients consiste à répéter 60 fois, de fa!on identique et indépendante (tirage avec remise) l'épreuve élémentaire. C'est un schéma de Bernoulli de paramètre $n=60$ et $p=\frac{1}{4}$.

• Donc la variable aléatoire X, qui associe à ce schéma de Bernoulli le nombre de clients ayant pris l'option, suit la loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=\frac{1}{4}$.

3. a) On lit sur la table $P(X \leq 8) = 0{,}0212$ et $P(X \leq 9) = 0{,}0452$.

Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = 9$.

b) On lit sur la table $P(X \leq 21) = 0{,}9702$ et $P(X \leq 22) = 0{,}9846$.

Donc le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = 22$.

4. La région critique du test bilatéral, au seuil 5 %, se situe en dehors de l'intervalle $\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right]=\left[\frac{9}{60},\frac{22}{60}\right]=[0{,}15\,;0{,}37]$.

5. Si la proportion f de l'échantillon est dans la région critique, alors on rejette H_0 au seuil 5 % : on accepte l'hypothèse H_1.

Sinon l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée au seuil 5 % : on accepte H_0.

6. $f=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.

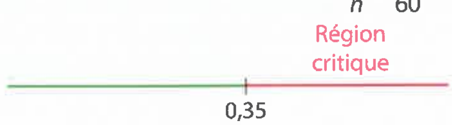
f n'appartient pas à la région critique.

On accepte donc l'affirmation : « un quart des clients prend l'option » au seuil 5 %.

B. 1. a) $P(X \leq 20) = 0{,}9459$ et $P(X \leq 21) = 0{,}9702$.

Donc le plus petit entier c tel que $P(X \leq c) \geq 0{,}95$ est $c = 21$.

b) La région critique se situe à droite de $\frac{c}{n}=\frac{21}{60}=0{,}35$.



2. Identique à **A. 5.** et **6.**

7. 1. On sait que, si la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ,

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95.$$

D'où $a = 2\sigma = \frac{2\times 195}{\sqrt{50}} \approx 55$.

La région d'acceptation est donc $[550-55\,;550+55]=[495, 605]$.

2. Règle de décision : on prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 clients et on calcule la moyenne $\overline{x}$ des achats des clients de cet échantillon.

Si $\overline{x}$ appartient à $[495, 605]$, on accepte H_0 au seuil de 5 %. Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 à ce même seuil.

3. Pour l'échantillon observé $\overline{x} = 597$ est compris entre 495 et 605 : on accepte H_0 au seuil de 5 %, on conclut au seuil de 5 % que la moyenne μ des ventes est égale à 550 euros.

8. 1. Sous l'hypothèse H_0, $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne $m = 30$, la moyenne de la population, et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{64}}=\frac{1}{8}=0{,}125$.

2. $a = 2\sigma = 0{,}25$.

(Voir le corrigé de l'exercice **1**)

La région d'acceptation est donc : $[29{,}75\,; 30{,}25]$.

3. *Règle de décision*

• On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 64 joints et on calcule la moyenne $\overline{x}$ des diamètres des joints de cet échantillon.

• Si $\overline{x}$ appartient à $I = [29{,}75\,; 30{,}25]$ on accepte H_0 au seuil de 0,05.

• Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 au seuil de 0,05.

4. 29,8 appartient à l'intervalle I. Le lot est accepté.

12. 1. Avec une calculatrice, on obtient pour moyenne $\overline{x} \approx 72{,}96$ et pour écart type $s \approx 0{,}19$.

2. a) On cherche a tel que $P(\overline{D} \geq a) = 0{,}95$.

On trouve $a \approx 72{,}95$.

On a donc $P(\overline{D} \geq 72{,}95) \approx 0{,}95$.

b) *Énoncé de la règle de décision du test*

• On prélève dans la production un échantillon de 50 boules au hasard et avec remise. On calcule la moyenne m de leurs diamètres.

• Si $m \geq 72{,}95$, on accepte H_0.

• Si $m < 72{,}95$, on rejette H_0 et on accepte H_1.

c) Avec l'échantillon (E) on a obtenu une moyenne $\overline{x} = 72{,}96$.

$72{,}96 \geq 72{,}95$ donc on accepte H_0. On rejette H_1. Il n'y a pas lieu de penser que le diamètre moyen des boules fabriquées soit significativement inférieur à 73 millimètres.

17. 1. a) L'hypothèse nulle est $H_0 : p = 0{,}05$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : p \neq 0{,}05$.

b) F suit la loi normale de moyenne $p = 0{,}05$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{\frac{0{,}05\times 0{,}95}{100}} \approx 0{,}02$.

On a : $P(p - 2\sigma \leq F \leq p + 25) \approx 0{,}95$, c'est-à-dire $P(0{,}01 \leq F \leq 0{,}09) \approx 0{,}95$.

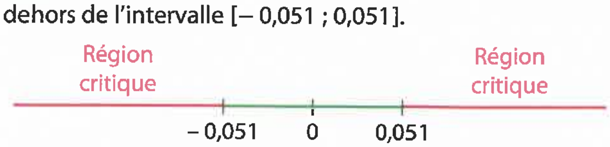
La région d'acceptation est donc $I = [0{,}01\,; 0{,}09]$.

c) *Énoncé de la règle de décision :* on calcule dans un échantillon aléatoire, supposé non exhaustif, de taille 100, le pourcentage f d'individus sportifs contrôlés positivement.

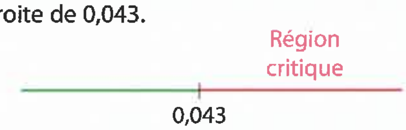
Si $f \in \mathrm{I}$ on accepte H_0 et l'échantillon observé est représentatif de l'ensemble de la population sportive au seuil de risque de 10 %.
Si $f \notin \mathrm{I}$ on rejette H_0 et on accepte H_1. Dans ce cas l'échantillon observé n'est pas représentatif de l'ensemble de la population sportive au seuil de risque de 5 %.
2. *Application du test*
Dans l'échantillon, 4 contrôles antidopage ont été déclarés positifs sur 50 donc $f = \frac{4}{50} = 0{,}08$, $f \in \mathrm{I}$.
Par conséquent H_0 est acceptée et l'échantillon observé est représentatif de l'ensemble de la population sportive au risque de 5 %.

19. 1. *Construction du test*
a) Choix de $H_0 : p = 0{,}5$.
Choix de $H_1 : p > 0{,}5$ (le candidat est élu au premier tour) ; il s'agit d'un test unilatéral.
b) *Détermination de la région critique au seuil 5 %*
Sous l'hypothèse H_0, F suit la loi normale (0,5 ; 0,015 3).
Donc $P(F \leq 0{,}525) = 0{,}95$.
c) *Énoncé de la règle de décision*
On prélève un échantillon aléatoire, en principe non exhaustif, de taille 1 068, dans la population des 85 842 électeurs. On calcule la fréquence f des intentions de vote en faveur du candidat.
Si $f \leq 0{,}525$, on accepte H_0 et on rejette donc H_1.
Si $f > 0{,}525$, on rejette H_0 et on accepte donc H_1.
d) *Utilisation du test*
• Calcul de $f : f = \frac{550}{1\,068} = 0{,}515$.
• Application de la règle de décision
$0{,}515 \leq 0{,}525$; on accepte H_0 et on rejette H_1. Au seuil 5 %, au vu des résultats du sondage, on ne peut accepter l'hypothèse selon laquelle le candidat sera élu au premier tour.
2. Avec le seuil 1 %, on obtient $P(F \leq 0{,}536) = 0{,}99$.
La région critique devient l'intervalle $]0{,}536 ; +\infty[$ qui ne contient pas f. On rejette encore H_1.

21. A. 1. $H_0 : p = p'$ et $H_1 : p \neq p'$.
2. a) $E(D) = E(F - F') = E(F) - E(F') = p - p' = 0$ sous H_0.
b) $\sigma(D) \approx \sqrt{\frac{f(1-f)}{n} + \frac{f'(1-f')}{n'}}$.
Or $f = \frac{64}{400} = 0{,}16$ et $f' = \frac{36}{300} = 0{,}12$.
Donc $\sigma(D) \approx 0{,}026$.
3. D suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 0{,}026)$.
Donc $P(D \in [0 - 1{,}96 \times 0{,}026 ; 0 + 1{,}96 \times 0{,}026]) = 0{,}95$.
$P(D \in [-0{,}051 ; 0{,}051]) \approx 0{,}95$.
La région critique du test bilatéral au seuil 5 % est en dehors de l'intervalle $[-0{,}051 ; 0{,}051]$.



4. Si la différence $d = f - f'$ entre les proportions de livraisons jugées trop tardives dans les deux échantillons de tailles respectives 400 et 300 prélevés avant et après réorganisation appartient à la région critique, alors on rejette H_0 au seuil 5 % : on accepte l'hypothèse H_1.
Sinon l'hypothèse H_0 ne peut être écartée : on accepte H_0.
5. Pour les deux échantillons prélevés,
$d = 0{,}16 - 0{,}12 = 0{,}04$.
d n'appartient pas à la région critique : on accepte donc H_0.
La nouvelle organisation n'a pas apporté de changement significatif au seuil 5 % : on considère que la différence $f - f' = 0{,}04$ est due à la fluctuation d'échantillonnage.
B. 1. $H_0 : p = p'$ et $H_1 : p > p'$ car on veut tester une amélioration des délais de livraison c'est-à-dire $p' < p$.
2. a) Sous H_0, D suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 0{,}026)$.
Avec une calculatrice ou un tableur, on obtient :
$$P(D \leq a) = 0{,}95 \quad \text{pour} \quad a = 0{,}043.$$
b) La région critique du test unilatéral au seuil 5 % se situe à droite de 0,043.



3. Même réponse qu'au **A. 4.**, mais H_1 et la région critique ont changé.
4. $d = 0{,}04$ n'appartient pas à la région critique : on accepte donc H_0.
La nouvelle organisation n'a pas amélioré de façon significative les délais de livraison.

25. 1. $I = \left[\bar{x} - 1{,}96\frac{1}{\sqrt{100}} ; \bar{x} + 1{,}96\frac{1}{\sqrt{100}}\right]$;
$\mathrm{I} \approx [69{,}92 ; 70{,}32]$.
2. Non. Si on prélevait un très grand nombre de tels échantillons, environ 95 % d'entre eux contiendraient la moyenne inconnue μ de la population.

29. *Redressage de tôles*
1. La moyenne $\bar{x}$ et l'écart type s de cette série statistique, donnés par la calculatrice sont :
$\bar{x} = 36$ et $s \approx 12{,}21$.
2. Une estimation ponctuelle de l'écart type σ de la population donnée par un échantillon de taille n et d'écart type s est : $\sigma = s\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, avec $n = 50$ et $s = 12{,}21$ on obtient $\sigma \approx 12{,}33$.
a) L'intervalle de confiance de la moyenne m de la population, avec le coefficient de confiance 95 %, de centre la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon, est :
$$I = \left[\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Avec $\bar{x} = 36$, $n = 50$ et $\sigma = 12{,}33$ un intervalle de confiance à 95 % de la durée moyenne m (exprimée en heures) du redressage d'une tôle est :
$$I = [32{,}58 ; 39{,}42].$$
b) Il s'agit de déterminer un entier naturel n tel que l'amplitude de l'intervalle de confiance de la moyenne m, avec le coefficient de confiance 95 %, soit égale à 3, c'est-à-dire tel que :
$2 \times 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3$
$\sqrt{n} = 2 \times 1{,}96\frac{12{,}33}{3}$, $\quad n = 260$.

30. *Intervalle de confiance d'une moyenne*

1. a) On peut entrer en B64 la formule =B63-1,96*0,084/RACINE(60).

b) Si μ appartient à l'intervalle de confiance, la formule affiche 1, sinon, elle affiche 0.

c) l'affichage en B67 permet de vérifier que sur un grand nombre d'intervalles de confiance, 95 % contiennent la moyenne μ à estimer.

2. a) L'intervalle de confiance de μ à 95 % de confiance est [3,991 ; 4,033].

b) L'affirmation est fausse. Il n'y a pas de certitude.

31. 1. On choisit le pourcentage des poulets dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg dans l'échantillon comme estimation ponctuelle du pourcentage p de poulets du stock de poulets dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.

Donc $p = \frac{4}{100}$, $p = 0{,}04$ (ou $p = 4$ %).

2. a) Un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 % est l'intervalle :

$$\left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,;\, f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right],$$

avec $f = 0{,}04$, $t = 1{,}96$, $n = 100$.

On obtient l'intervalle [0,001 ; 0,079].

b) La réponse est non.

Si on prélevait un très grand nombre de tels échantillons, environ 95 % d'entre eux contiendraient le pourcentage inconnu p de la population.

36. *Monte Carlo et intervalle de confiance*

1. a) X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

b) $\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$.

2. Le test consiste à vérifier si le point est situé sous la courbe représentative de φ.

3. On obtient respectivement 2, 2, 2 et 1 décimales exactes.

4. Il suffit d'avoir $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 10^{-3}$ c'est-à-dire $n \geq 4 \times 10^6$.

Corrigés des exercices de BTS

37. A. $P(14{,}92 \leq M \leq 15{,}08) \approx 0{,}890$.

B. 1. • La variable aléatoire X mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de 36 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}01$.

• Donc la variable aléatoire X qui associe à ces tirages le nombre de billes défectueuses suit la loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}01$.

2. a) $P(X = 0) \approx 0{,}696$.

b) $P(X \leq 2) \approx 0{,}994$.

3. a) $\lambda = 0{,}36$.

b) $P(Y \leq 2) \approx 0{,}994$.

C. 1. On prélève au hasard et avec remise, un échantillon de 36 billes et on calcule la moyenne $\overline{x}$ des masses des billes de cet échantillon.

• Si $\overline{x}$ appartient à l'intervalle [14,984 ; 15,016], on accepte H_0 au seuil de 0,05.

• Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 à ce même seuil.

2. $\overline{x}$ n'est pas dans l'intervalle [14,984 ; 15,016].

On rejette l'hypothèse $m = 15$. La livraison est considérée comme non conforme.

42. 1. $P(9 \leq L \leq 11) \approx 0{,}954$.

2. a) $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}000\,6$.

b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

$P(E_2) = 0{,}049\,4$.

c) $E_3 = \overline{E_2}$, $P(E_3) = 0{,}950\,6$.

3. a) Pour la justification, procéder comme au corrigé de l'exercice 37 page 300.

b) $\lambda = 2$.

c) $P(F) = P(Y \leq 2) \approx 0{,}677$.

4. a) Une estimation ponctuelle de la moyenne μ de la longueur des pièces de l'ensemble de la commande est la moyenne des longueurs des pièces de l'échantillon : 64,715. Une estimation ponctuelle de σ est $\sqrt{\frac{50}{49}}s \approx 0{,}096$.

b) On obtient [64,688 ; 64,742].

c) Non.

45. A.1. $P(9{,}5 \leq X \leq 10{,}5) \approx 0{,}983$.

2. $0{,}983 \times 0{,}985 \approx 0{,}968$.

B.1. • Pour la justification, procéder comme au corrigé de l'exercice 37 page 300.

• Donc la variable aléatoire Y qui associe à ces tirages le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$.

2. $P(Z = 0) \approx 0{,}218$.

$P(Z \leq 2) \approx 0{,}811$.

3. a) $\lambda = 1{,}5$.

b) $P(Z_1 \leq 2) \approx 0{,}809$.

C.1. Estimation ponctuelle de p : 0,96.

2. [0,921 ; 0,999].

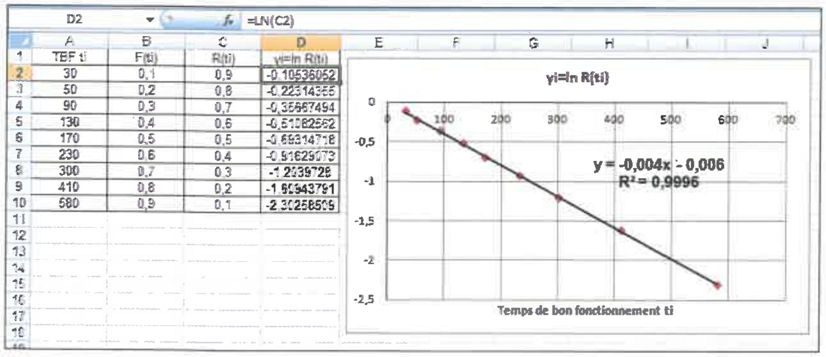
47. 1. Réponse **c)** ou réponse **b)**.

2. Réponse **a)**.

48. 1. Réponse **c)**. **2.** Réponse **a)**. **3.** Réponse **b)**. **4.** Réponse **c)**. **5.** Réponse **c)**. **6.** Réponse **a)**.

Réponses des TP TICE

TP1 A. 1. Le tableur fournit les résultats suivants.



	A	B	C	D
1	TBF ti	F(ti)	R(ti)	yi=ln R(ti)
2	30	0,1	0,9	-0,10536052
3	50	0,2	0,8	-0,22314355
4	90	0,3	0,7	-0,35667494
5	130	0,4	0,6	-0,51082562
6	170	0,5	0,5	-0,69314718
7	230	0,6	0,4	-0,91629073
8	300	0,7	0,3	-1,2039728
9	410	0,8	0,2	-1,60943791
10	580	0,9	0,1	-2,30258509

2. $y = -0{,}004\,x - 0{,}006$.

3. $R(t) = \mathrm{e}^{-0{,}004\,t - 0{,}006}$.

4. $r \approx -0{,}999\,8$. Comme r est très proche, en valeur absolue, de 1, l'ajustement affine est considéré comme de très bonne qualité.

B. 1. $\mathrm{e}^{-0{,}006} \approx 0{,}99$.

2. $R(t) = \mathrm{e}^{-0{,}004\,t}$.

3. Comme r est très proche de 1 en valeur absolue, on peut considérer que T suit une loi exponentielle. Le paramètre de cette loi exponentielle est $\lambda = 0{,}004$.

4. MTBF $= 1/\lambda = 1/0{,}004 \approx 250$ heures de bon fonctionnement.

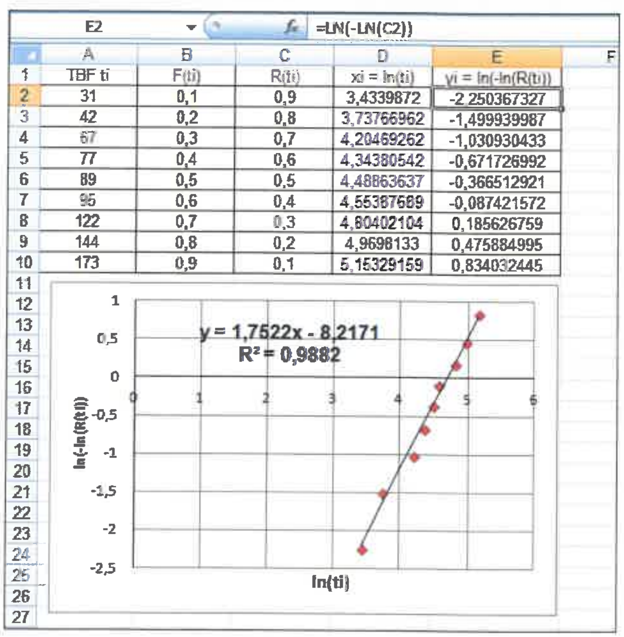
3. a) D'après l'équivalence donnée, le bon alignement (coefficient de corrélation linéaire proche de 0,994) des points de coordonnées (x_i, y_i) implique que l'expression de $R(t)$ correspond à une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$.

b) D'après les valeurs obtenues par le tableur, on a $\beta = 1{,}752\,2$ (coefficient directeur de la droite de régression) et $\beta \ln \eta = 8{,}2171$ donne $\eta = \mathrm{e}^{\frac{8{,}2171}{1{,}7522}}$ d'où $\eta \approx 109$.

4. On résout $R(t) = 0{,}80$ qui équivaut à $\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{109}\right)^{1{,}75}} = 0{,}8$ et à $\dfrac{t}{109} = (-\ln 0{,}8)^{\frac{1}{1{,}75}}$ d'où $t \approx 46{,}3$.

On prévoira donc une intervention préventive tous les 46 jours.

TP2 1. et 2.



	A	B	C	D	E
1	TBF ti	F(ti)	R(ti)	xi = ln(ti)	yi = ln(-ln(R(ti)))
2	31	0,1	0,9	3,4339872	-2,250367327
3	42	0,2	0,8	3,73766962	-1,499939987
4	67	0,3	0,7	4,20469262	-1,030930433
5	77	0,4	0,6	4,34380542	-0,671726992
6	89	0,5	0,5	4,48863637	-0,366512921
7	95	0,6	0,4	4,55387689	-0,087421572
8	122	0,7	0,3	4,80402104	0,185626759
9	144	0,8	0,2	4,9698133	0,475884995
10	173	0,9	0,1	5,15329159	0,834032445

TP3

1. a) La condition « a > r » signifie que la durée avant l'arrivée de la prochaine machine est supérieure à la durée de la réparation en cours.

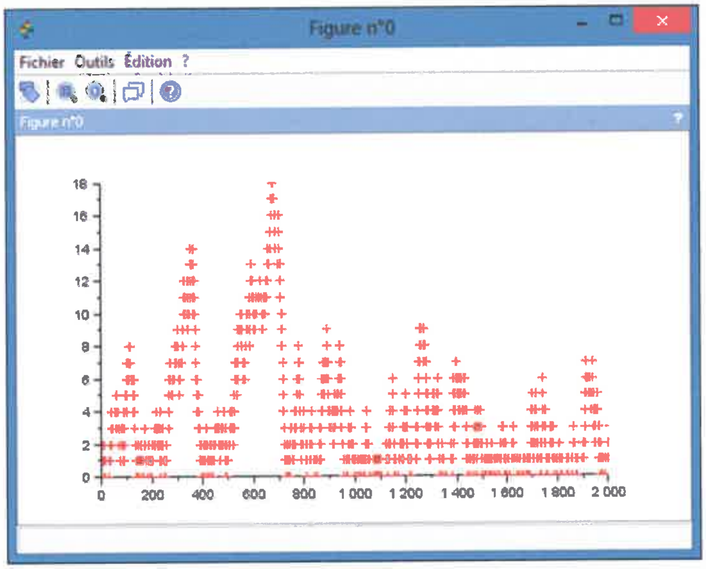
b) L'instruction « $q = q - 1$ » signifie que le nombre de machines dans le système diminue d'une unité.

L'instruction « $q = q + 1$ » signifie que le nombre de machines dans le système augmente d'une unité.

c) Pour $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$, on observe un nombre parfois très important de machines dans le système, comme sur l'image d'écran figurant dans l'énoncé où un pic à 27 machines est observé (dont 26 en file d'attente).

d) Pour $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$, la durée moyenne entre deux arrivées est $\dfrac{1}{\lambda} = 4$ min (espérance d'une loi exponentielle) et la durée moyenne d'une réparation est $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\frac{3}{10}} = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$ min.

e) Pour $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}35$, on observe un nombre beaucoup moins important de machines dans le système, comme le montre l'image d'écran suivante.



Pour $\mu = 0{,}35$ la durée moyenne de réparation est $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}35} \approx 2{,}9$ min.

2. a) Programme modifié en langages Scilab et Python :

```
l=input("lambda = ")
m=input("mu = ")
n=0
t=-ln(rand())/l
q=1
r=-ln(rand())/m
a=-ln(rand())/l
while t < 100000
    if q <> 0 then
        if a > r then
            q=q-1
            a=a-r
            t=t+r
            n=n+q*r
            r=-ln(rand())/m
        else
            q=q+1
            r=r-a
            t=t+a
            n=n+q*a
            a=-ln(rand())/l
        end
    else
        q=1
        t=t+a
        n=n+q*a
        a=-ln(rand())/l
    end
end
disp(n/t)
```

```python
from numpy import*
from random import*

def file(l,m):
    n=0
    t=-log(random())/l
    q=1
    r=-log(random())/m
    a=-log(random())/l
    while t < 100000:
        if q != 0:
            if a > r:
                q=q-1
                a=a-r
                t=t+r
                n=n+q*r
                r=-log(random())/m
            else:
                q=q+1
                r=r-a
                t=t+a
                n=n+q*a
                a=-log(random())/l
        else:
            q=1
            t=t+a
            n=n+q*a
            a=-log(random())/l
    print(n/t)
```

b) et **c)** Exécutions du programme (avec Python) pour $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$ ou $\mu = 0{,}35$:

```
>>> file(0.25,0.3)
5.12667273877
>>> file(0.25,0.3)
5.07279149207
>>> file(0.25,0.3)
4.9128772466
>>> file(0.25,0.3)
4.99152272454
>>> file(0.25,0.3)
4.83653395598
>>> file(0.25,0.3)
4.98207924608
>>> file(0.25,0.3)
5.56499144561
>>> file(0.25,0.3)
4.98786427506
```

```
>>> file(0.25,0.35)
2.76249033892
>>> file(0.25,0.35)
2.52720392389
>>> file(0.25,0.35)
2.58786241818
>>> file(0.25,0.35)
2.64895460792
>>> file(0.25,0.35)
2.72001433837
>>> file(0.25,0.35)
2.72999108179
>>> file(0.25,0.35)
2.5760796107
>>> file(0.25,0.35)
2.56406359794
```

Corrigés des exercices

1. 1. $P(T \leq 70) = F(70)$. T suit une loi exponentielle : $R(t) = e^{-\lambda t}$.

$R(70) = 0,95$ équivaut à $e^{-70\lambda} = 0,95$ et à $-70\lambda = \ln 0,95$.

D'où $\lambda = \dfrac{-\ln 0,95}{70}$, d'où $\lambda \approx 7,32 \times 10^{-4}$.

2. $\text{MTBF} = \dfrac{1}{\lambda}$, MTBF = 1 365 heures. $\sigma = \text{MTBF}$.

3. $P(T > 30) = R(30)$, $R(30) = e^{-0,02196}$, $P(T > 30) \approx 0,978\,2$.

5. 1. a) $\lambda \approx 0,001\,5$. $R(t) = e^{-0,0015t}$.

b) $P(X \leq 500) \approx 0,472$. $P(X > 1\,000) \approx 0,777$.

2. a) $P(A) \approx 0,407$; $P(B) \approx 0,259$; $P(A \cap B) \approx 0,259$.

b) $P_A(B) \approx 0,638$.

6. 1.

t_i	$F(t_i)$ (en %)	$R(t_i)$ (en %)	$\ln R(t_i)$
500	22	78	– 0,248
1 000	40	60	– 0,510
1 500	53	47	– 0,755
2 000	63	37	– 0,994
2 500	72	28	– 1,273
3 000	78	22	– 1,514

2. La calculatrice donne $a \approx -0,0005$, $b \approx 0,003\,47$, $r \approx 0,999\,8$. D'où l'équation $y = 0,000\,5t + 0,003\,47$.

D'où $\ln R(t) = -0,000\,5t + 0,003\,47$,

$R(t) = e^{-0,0005t+0,00347}$, $R(t) = e^{-0,0005t} \cdot e^{0,00347}$.

$e^{0,00347} \approx 1$ d'où $R(t) = e^{-0,0005t}$.

Le paramètre de la loi exponentielle est $\lambda = 0,000\,5$.

3. $\lambda = 0,000\,5$.

a) $P(A) = R(1\,000)$, $P(A) = e^{-0,5}$, $P(A) \approx 0,607$.

$P(B) = R(2\,000)$, $P(B) = e^{-1}$, $P(B) \approx 0,368$.

$P(A \cap B) = P(B)$, donc $P(B) \approx 0,368$.

b) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P_A(B) = \dfrac{e^{-1}}{e^{-0,5}}$,

$P_A(B) = e^{-0,5}$, $P_A(B) \approx 0,607$.

9. Calculs d'analyse et fiabilité de robots de peinture

1. Exemple de calculs menés avec le logiciel Maxima :

a)

```
(%i1) F(t):=(1/200)*integrate(exp(-x/200),x,0,t);
```

(%o1) $F(t) := \dfrac{1}{200}\displaystyle\int_0^t \exp\left(\frac{-x}{200}\right) dx$

```
(%i2) F(t);
```

(%o2) $\dfrac{200 - 200\,\%e^{-\frac{t}{200}}}{200}$

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $1 - \%e^{-\frac{t}{200}}$

```
(%i4) limit(%,t,inf);
(%o4) 1
```

b)

```
(%i5) I(t):=(1/200)*integrate(x*exp(-x/200),x,0,t);
```

$$(\%o5)\quad I(t):=\frac{1}{200}\int_0^t x\exp\left(\frac{-x}{200}\right)dx$$

```
(%i6) I(t);
Is t positive, negative or zero?p;
```

$$(\%o6)\quad \frac{40000-(200\,t+40000)\,\%e^{-\frac{t}{200}}}{200}$$

```
(%i7) expand(%);
```

$$(\%o7)\quad -t\,\%e^{-\frac{t}{200}}-200\,\%e^{-\frac{t}{200}}+200$$

```
(%i8) limit(%,t,inf);
(%o8) 200
```

c)

```
(%i9) J(t):=(1/200)*integrate(x^2*exp(-x/200),x,0,t);
```

$$(\%o9)\quad J(t):=\frac{1}{200}\int_0^t x^2\exp\left(\frac{-x}{200}\right)dx$$

```
(%i10) J(t);
Is t positive, negative or zero?p;
```

$$(\%o10)\quad \frac{16000000-(200\,t^2+80000\,t+16000000)\,\%e^{-\frac{t}{200}}}{200}$$

```
(%i11) expand(%);
```

$$(\%o11)\quad -t^2\,\%e^{-\frac{t}{200}}-400\,t\,\%e^{-\frac{t}{200}}-80000\,\%e^{-\frac{t}{200}}+80000$$

```
(%i12) limit(%,t,inf);
(%o12) 80000

(%i13) 80000-200^2;
(%o13) 40000

(%i14) sqrt(%);
(%o14) 200
```

d)

```
(%i15) solve(F(t)=1/2,t);
(%o15) [t=200 log(2)]

(%i16) float(%);
(%o16) [t=138.6294361119891]
```

Attention, Maxima note « log » le logarithme népérien, habituellement noté « ln ».

2. a) La durée de vie moyenne d'un composant est fournie par $E(T) = 200$ jours.

Sa durée de vie médiane est d'environ 139 jours.

b) On a $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$.

D'après ce qui précède $F(t) = 1 - e^{-t/200}$

donc $P(T > t) = e^{-t/200}$.

En particulier, $P(T > 100) = e^{-100/200} \approx 0{,}607$.

10. 1. $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{50}\right)^{2,4}}$.

2. a) $P(T < 10) = 1 - e^{-(0,2)^{2,4}}$ $P(T < 10) \approx 2$ %.

b) $P(10 < T < 50) = F(50) - F(10)$

$P(10 < T < 50) \approx 61$ %.

3. On cherche t_0 tel que $R(t_0) > 0,9$ qui est équivalent à $F(t_0) < 0,1$;

à $R(t_0) = e^{-\left(\frac{t_0}{50}\right)^{2,4}}$; à $e^{-\left(\frac{t_0}{50}\right)^{2,4}} \geq 0,9$;

à $-\left(\frac{t_0}{50}\right)^{2,4} \geq \ln(0,9)$, à $t_0 \leq 50(-\ln(0,9))^{\frac{1}{2,4}}$.

Le calcul donne $t_0 \leq 19,57$ mois.

4. Soit T_1 et T_2 les variables aléatoires qui mesurent les durées de vie respectives de deux composants de (S) tirés au hasard. Soit $R_1(t)$ et $R_2(t)$ les fiabilités respectives des deux composants et soit $R_S(t)$ la fiabilité du système.

Lorsque le système est constitué par le montage en série de deux composants $R_S(t) = P(T_1 \geq t \text{ et } T_2 \geq t)$.

La durée de vie du premier composant est indépendante de celle du deuxième et les variables T_1 et T_2 suivent la même loi que T donc $R_S(t) = [P(T \geq t)]^2 = [R(t)]^2$ donc $R_S(t_0) > 0,9$ équivaut à $[R(t_0)]^2 > 0,9$ et à $R(t_0) > \sqrt{0,9}$, $R(t_0) \geq 0,95$. Par le calcul (comme au **3.**) on trouve $t_0 \approx 14,66$ mois.

$P(T < t_0) < 0,05$, $F(t_0) < 5$ %.

Graphiquement $t_0 \approx 14,5$ mois.

15. 1. a) $r = 0,9960 \approx 1$.

b) L'ajustement est affine donc $\gamma = 0$.

c) $y \approx 4,1x - 17,12$.

$\beta = 4,1$; $\ln \eta = \frac{17,2}{4,1}$; $\eta = 65$.

2. $\beta = 4,1$; $A = 0,9077$ MTBF = 59.

3. $e^{-\left(\frac{t}{6,5}\right)^{4,1}} = 0,9$ $t < 37,5$.

La périodicité d'un entretien systématique basé sur une fiabilité de 90 % est donc de 37 jours.

17. Simuler une loi de Weibull

1. a) On simule X en faisant NbAléat, rand ou Ran# sur la calculatrice, ou ALEA() sur tableur et en répétant autant de fois que désiré.

b) On a, pour tout $a \in]0, 1]$, $P(X \geq a) = \int_a^1 1\,dx = 1 - a$.

2. Si $x \in]0, 1]$, $\ln x \leq 0$ et $h(-\ln x)^{1/\beta} \geq 0$ donc T est à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. On a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P(T \leq t) = P(h(-\ln X)^{1/\beta} \leq t)$

$P(T \leq t) = P\left(\ln X \geq -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right)$

$P(T \leq t) = P\left(X \geq e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ car $e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \in]0, 1]$.

4. On reconnaît la fonction de défaillance de la loi de Weibull de paramètres β ; $\gamma = 0$ et η. Il s'agit donc de la loi de la variable aléatoire T.

5. D'après ce qui précède, on peut simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi de Weibull de paramètres $\beta = 2,4$; $\gamma = 0$ et $\eta = 40$ par l'instruction :

=40*(–ln(NbAléat))^(1/2.4) ou =40*(–ln(Ran#))^(1/2.4) sur calculatrice ; ou =40*(-LN(ALEA()))^(1/2,4) sur tableur.

6. Exemple de simulation sur tableur d'un échantillon de 10 000 réalisations d'une variable aléatoire de loi de Weibull de paramètres $\beta = 2,4$; $\gamma = 0$ et $\eta = 40$.

A1 =40*(-LN(ALEA()))^(1/2,4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	5,38933376	45,3986929	29,0053264	9,04720828	29,2419835	29,3825712	42,8525432	52,5399844	23,298239	19,870303		Moyenne 10 000 simulations :	35,5249497
2	33,8719846	65,0877382	41,079389	38,5601454	26,7558351	25,1205751	47,401919	45,6983088	33,6633235	49,7432579		Ecart type 10 000 simulations :	15,7591905
3	31,7320181	27,0142836	46,8907605	38,7078215	45,2337271	17,095657	29,0598159	20,1010232	37,0794924	40,4582398			
4	37,5063337	62,056566	34,8228214	34,2054754	42,5777075	39,9790914	33,0986578	61,5610272	10,4382172	44,8130087			
5	32,6198324	25,2564021	36,4812982	35,955505	16,8268006	36,5279525	20,1624058	17,8929512	11,2108143	41,9497438			

On constate que la moyenne et l'écart type observés, ici respectivement environ 35,52 et 15,76 sont (aux fluctuations d'échantillonnage près) proches des valeurs théoriques correspondant à la loi de Weibull simulée.

18. Ajustement à une loi de Weibull où $\gamma \neq 0$

2. La valeur optimale de γ donnée par l'outil « valeur cible » est environ 57,1. La valeur entière optimale (après essais de 57, 58, 59, 60) de γ est $\gamma = 59$. On a alors $r \approx 0,999\,8$.

Comme r est très proche de 1, on peut en déduire qu'il est raisonnable de considérer que T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 59$.

3. Le tableur fournit les résultats suivants.

H7 =H3+H5*EXP(LNGAMMA(1+1/H4))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	TBF ti	F(ti)	R(ti)	ln(ti - γ)	ln(-ln(R(ti)))		Paramètres	
2	71	0,09090909	0,90909091	2,48490665	-2,35061866		r	0,99979821
3	78	0,18181818	0,81818182	2,94443898	-1,60609005		gamma	59
4	84	0,27272727	0,72727273	3,21887582	-1,14427809		béta	1,62296159
5	90	0,36363636	0,63636364	3,4339872	-0,79410601		éta	50,9618247
6	96	0,45454545	0,54545455	3,61091791	-0,50065122			
7	104	0,54545455	0,45454545	3,80666249	-0,23767695		MTBF	104,633095
8	110	0,63636364	0,36363636	3,93182563	0,01153414			
9	120	0,72727273	0,27272727	4,11087386	0,26181256			
10	130	0,81818182	0,18181818	4,26267988	0,53341735			
11	145	0,90909091	0,09090909	4,4543473	0,87459138			
12								

Corrigés des exercices pour le BTS

19. 1. Le temps moyen de bon fonctionnement vaut :

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}000\ 08} = 12\ 500$ heures.

2. $P(X > 10\ 000) = R(10\ 000) = e^{-10\ 000\lambda} = e^{-0{,}8} \approx 0{,}449$.

3. $P(10\ 000 \leq X \leq 15\ 000) = F(15\ 000) - F(10\ 000)$

$= 1 - R(15\ 000) - [1 - R(10\ 000)]$

$P(10\ 000 \leq X \leq 15\ 000) = e^{-10\ 000\lambda} - e^{-15\ 000\lambda} \approx 0{,}148$.

4. Si λ' est le nouveau paramètre, on veut $R(20\ 000) = 0{,}5$ soit : $e^{-20\ 000\lambda'} = 0{,}5$.

donc $-20\ 000\lambda' = \ln(0{,}5)$ ce qui correspond à un temps moyen de bon fonctionnement de

$\frac{1}{\lambda'} \approx \frac{-20\ 000}{\ln(0{,}5)} = 28\ 854$ heures.

20. 1. Le paramètre λ de cette loi est donné par :

$\lambda = \frac{1}{\text{MTBF}} = \frac{1}{145} = 0{,}0069$ valeur approchée arrondie à 10^{-4}.

2. a) La fonction R de fiabilité est donnée par :

$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}007t}$; $t \geq 0$.

La probabilité demandée est égale à :

$1 - R(200) = 1 - e^{-0{,}007\times 200} = 1 - e^{-1{,}4} = 0{,}753$, qui est la valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

b) La probabilité qu'une pièce soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours est égale à :

$R(500) = e^{-0{,}007\times 500} = e^{-3{,}5} = 0{,}030$, qui est la valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

c) On cherche t tel que : $R(t) = 0{,}8$.

$$e^{-0{,}007\times t} = 0{,}8 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0{,}8}{-0{,}007} = \frac{1\ 000}{7}\ln 1{,}25.$$

On trouve : $t = 31{,}9$ en arrondissant à 10^{-1}.

Le temps de bon fonctionnement avec une fiabilité égale à 0,8 est : 32 jours.

3. a) La fonction de fiabilité d'un système composé de plusieurs pièces est le produit des fonctions de fiabilité correspondantes.

La fiabilité du nouveau système, obtenu à partir de deux pièces montées en série est donc la fonction définie par :

$t \mapsto R_2(t) = [R(t)]^2 = e^{-0{,}014t}$.

b) La probabilité que ce montage en série fonctionne encore au bout de 150 jours est égal à :

$R_2(150) = e^{-0{,}014\times 150} = e^{-2{,}1} \approx 0{,}122$, qui est la valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

25. A. 1. Chaque prélèvement de 300 robots peut être assimilé à 300 épreuves aléatoires élémentaires indépendantes, chacune ayant deux issues et deux seulement : le bras métallique du robot choisi a connu une panne mécanique, événement de probabilité 0,05, ou le bras métallique du robot choisi n'a pas connu une panne mécanique, de probabilité 0,95. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $n = 300$ et $p = 0{,}05$.

2. On sait que, lorsqu'une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, les paramètres de cette loi sont donnés par

$$\mu = np \text{ et } \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Donc la loi $\mathscr{B}(300 ; 0{,}05)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 300 \times 0{,}05$, c'est-à-dire $\mu = 15$, et $\sigma = \sqrt{300\times 0{,}05\times 0{,}95}$, c'est-à-dire $\sigma = \sqrt{14{,}25} \approx 3{,}77$.

3. La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(15 ; 3{,}77)$;

$P(Y \leq 20{,}5) \approx 0{,}93$ d'où $P(Y \geq 20{,}5) \approx 0{,}07$,

B. 1. a) Le coefficient de corrélation linéaire valant environ 0,994, il est proche de 1, ce qui justifie l'ajustement affine du nuage (x_i, y_i) par la droite D (on constate par ailleurs graphiquement le bon alignement des points sur la droite de régression).

b) L'alignement des points de coordonnées (x_i, y_i) implique $\gamma = 0$.

c) Sur le graphique figure une équation de la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés :

$y = 1{,}7522x - 8{,}2171$.

β est le coefficient directeur, $\beta = 1{,}7522$ soit $\beta \approx 1{,}75$, arrondi à 10^{-2}.

De $\beta \ln \eta = 8{,}2171$ on déduit $\eta = e^{\frac{8{,}2171}{1{,}7522}}$, $\eta \approx 109$ arrondi à l'unité.

2. La fiabilité à l'instant t_0 est de 80 % si et seulement si

$R(t_0) = 0{,}80$ qui équivaut à $e^{-\left(\frac{t_0}{109}\right)^{1{,}75}} = 0{,}8$ et à

$-\left(\frac{t_0}{109}\right)^{1{,}75} = \ln 0{,}8$ et à $= (-\ln 0{,}8)^{\frac{1}{1{,}75}}$ et à $t_0 \approx 46{,}3$.

On prévoiera donc une intervention préventive tous les 46 jours.

RÉPONSES DES ÉPREUVES D'ENTRAÎNEMENT AU BTS

Épreuve 1

Exercice 1 (12 points)

A. 1. Toutes les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = (C_1 + C_2)e^x$. (1 point)

2. $h(x) = 4x^2e^x$. (1,5 point)

3. Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = g(x) + h(x)$,

$f(x) = (C_1 + C_2)e^x + 4x^2e^x$. (0,5 point)

4. La solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -4e^x + 4x^2e^x = (4x^2 - 4)e^x$. (1,5 point)

B. 1. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 8xe^x + (4x^2 - 4)e^x$.

$f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)e^x$. (0,5 point)

b) Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.

Donc $x_A \approx -2{,}41$ et $x_B \approx 0{,}41$. (1 point)

2. a) $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. (1,5 point)

b) $y = -4 - 4x$. (0,5 point)

c) Au voisinage du point d'abscisse 0, $f(x) - (-4 - 4x) > 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T. (1 point)

C. 1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = -f'(x) + 2f(x) + 8e^x$,

$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)e^x$. (1 point)

2. Pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) \leq 0$. (0,5 point)

$A = -\int_0^1 f(x)\,dx$. (0,5 point)

$A = 4$. (1 point)

Exercice 2 (8 points)

A. 1. $P(X=6) \approx 0{,}16$. (0,5 point)

2. $P(X \leq 6) \approx 0{,}61$. (1 point)

B. 1. $P(245 \leq Y \leq 255) \approx 0{,}91$. (1,5 point)

2. $P(245 \leq Y \leq 255) = 0{,}95$

$245 = 250 - 5$; $255 = 250 + 5$; $5 = 2\sigma$; $\sigma = 2{,}5$. (1,5 point)

C. 1. • La variable aléatoire Z mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de 50 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}03$.

• Donc la variable aléatoire Z qui associe à ces tirages le nombre de tubes non conformes suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$. (1,5 point)

2. $P(Z=0) \approx 0{,}22$. (0,5 point)

3. $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) \approx 0{,}78$. (0,5 point)

D. 1. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tubes dans le lot et on calcule la moyenne $\bar{l}$ des longueurs des tubes de cet échantillon.

La règle de décision est :

• si $\bar{l}$ appartient à l'intervalle [249,35 ; 250,65], on accepte H_0 ;

• sinon, on rejette H_0 (et on accepte H_1). (0,5 point)

2. $\bar{l} = 250{,}49$ appartient à l'intervalle d'acceptation de H_0.
Au seuil de 5 %, on conclut que le lot est conforme.
(0,5 point)

Épreuve 2

Exercice 1 (10 points)

A. 1. L'équation différentielle (E) $y'' + 4y' + 5y = 0$ admet pour équation caractéristique :

$r_2 + 4r + 5 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = -2 + i$ et $r_2 = -2 - i$.

Toutes les solutions f de l'équation différentielle (E) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques. (2 points)

2. $f(0) = 1$; $f(0) = -2$. (1 point)

B. 1. $y = 1 - 2x$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T. (2 points)

2. $I(a) = \left[x - x^2 + \dfrac{x^3}{2}\right]_0^a = \dfrac{a^3 - 2a^2 + 2a}{2}$. (1 point)

3. a) f est solution de (E) donc, pour tout nombre réel x,

$f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 0$

donc $f(x) = \dfrac{1}{5}[-f''(x) - 4f'(x)]$. (1 point)

b) $H(x) = \dfrac{1}{5}[-f'(x) - 4f(x)]$

on obtient $H'(x) = \dfrac{1}{5}[-f''(x) - 4f'(x)]$

d'où $H'(x) = f(x)$

Une primitive de f est donc H telle que

$H(x) = \dfrac{1}{5}[-f'(x) - 4f(x)]$

$H(x) = \dfrac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$. (1 point)

c) $J(a) = [H(x)]_0^a$.

$J(a) = \dfrac{1}{5}e^{-2a}(\sin a - 2\cos a) + \dfrac{2}{5}$. (0,5 point)

4. a) $I(0{,}4) = 0{,}272$ et $J(0{,}4) \approx 0{,}269$. (1 point)

b) $0{,}272 - 0{,}269 = 0{,}003 < 0{,}01$.

$I(0{,}4)$ est une bonne approximation de $J(0{,}4)$. (0,5 point)

Exercice 2 (10 points)

A. 1. $P(A \cap B) = 0{,}02 \times 0{,}01 = 0{,}0002$. (0,5 point)

2. $P(A \cup B) = 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}0002 = 0{,}0298$. (1 point)

3. $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}9702$. (0,5 point)

B. 1. • Procéder comme au corrigé de l'exercice 2 de l'épreuve 1 page 307.

• Donc la variable aléatoire Y qui associe à ces tirages le nombre d'accessoires défectueux suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}03$. (1,5 point)

2. $P(X=0) \approx 0{,}54$. (0,5 point)

3. $P(X \leq 1) \approx 0{,}88$. (1 point)

C. 1. $m = np = 1\,000 \times 0{,}03 = 30$.

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30 \times 0{,}97} \approx 5{,}39$. (0,5 point)

2. $P(Z \leq 25{,}5) \approx 0{,}20$. (1 point)

D. 1. $I = \left[\bar{x} - 1{,}96 \times \dfrac{5}{\sqrt{100}}, \bar{x} - 1{,}96 \times \dfrac{5}{\sqrt{100}}\right]$ avec $\bar{x} = 501$.

$I = [500{,}02 ; 501{,}98]$. (1 point)

2. Non. (0,5 point)

Épreuve 3

Exercice 1 (10 points)

A. 1. a) (1 point)

b) $g(t) = (\lambda \cos 10t + \mu \sin 10t)e^{-2t}$. (0,5 point)

2. (0,5 point)

3. $f(t) = (\lambda \cos 10t + \mu \sin 10t)e^{-2t} - 0{,}1e^{-t}$. (0,5 point)

4. (1 point)

B. 1. On a :

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g_1.

$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de g.

$\mathscr{C}''$ est la courbe représentative de g_2. (0,5 point)

2. $\lim_{x \to +\infty} g_1(t) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g_2(t) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$ en $+\infty$. (1 point)

3. a) $g_1'(t) = -e^{-t} - 2e^{-2t}$. (0,5 point)

b) $g_1'(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. (0,5 point)

4. a) (0,5 point)

b) $t \leq \ln 2$. (0,5 point)

c) $t_0 = \ln 2$. (0,5 point)

5. a) $y = t$. (0,5 point)

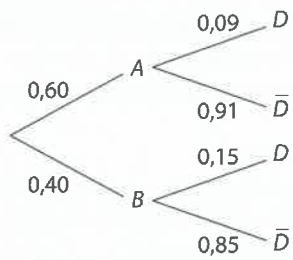
b) $-\dfrac{3t^2}{2}$ est négatif. (0,5 point)

C. 1. (1 point)

2. I est l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$ et la droite d'équation $x = 3$. (0,5 point)

Exercice 2 (10 points)

A. 1.



(0,5 point)

2. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}016$. (0,5 point)

3. $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}004}{0{,}016} \approx 0{,}25$. (0,5 point)

B. 1. • Procéder comme au corrigé de l'exercice 2 de l'épreuve 1, page 307.

• Donc la variable aléatoire X qui associe à ces tirages le nombre de bornes défectueuses suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}016$. (1,5 point)

2. a) $E(X) = n \times p = 4$. Si l'on réalise un très grand nombre de prélèvements de 250 bornes, le nombre moyen de bornes défectueuses dans chaque prélèvement est voisin de 4. (1 point)

b) $P(X = 0) \approx 0{,}018$. (0,5 point)

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}982$. (0,5 point)

d) $\lambda = n \times p = 4$. (0,5 point)

e) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \approx 0{,}982$. (0,5 point)

3. a) $m = n \times p = 16$; $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 3{,}97$. (0,5 point)

b) $P(Z \geq 17{,}5) \approx 0{,}35$. (1 point)

C. 1. $f = 0{,}7$. (0,5 point)

2. $[0{,}61 ; 0{,}79]$. (1 point)

3. Non, la proportion p n'appartient pas nécessairement à l'intervalle de confiance. (1 point)

Épreuve 4

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $h(x) = Ce^{-2x}$. (1 point)

2. On vérifie que $g'(x) + 2g(x) = 2x - e^{-2x}$. (1 point)

3. $f(x) = Ce^{-2x} + x - \dfrac{1}{2} - xe^{-2x}$. (0,5 point)

4. $C = \dfrac{1}{2}$; $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^{-2x}$. (1 point)

B. 1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{2} - x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-2x} - 1) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. (1 point)

b) $y = x - \dfrac{1}{2}$. (1 point)

2. a) $y = -x$. (0,5 point)

b) $\mathscr{C}$ est au-dessus de T. (0,5 point)

C. 1. $I = \left[-\dfrac{1}{2}x^2 + x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$;

$I = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$. (1 point)

2. On peut poser

$u'(x) = e^{-2x}$ d'où $u(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

et $v(x) = \dfrac{1}{2} - x$ d'où $v'(x) = -1$.

$I = \left[\left(\dfrac{1}{2} - x\right)\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}e^{-2x}\,dx$;

$I = \dfrac{1}{2}e^{-1} - \left[-\dfrac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$;

$I = \dfrac{e + e^{-1}}{4}$. (1,5 point)

3. a) $K = \dfrac{e + e^{-1} - 2}{4}$. (0,5 point)

b) $K - I = \dfrac{e + e^{-1} - 3}{4} \approx 0{,}027$. (0,5 point)

Exercice 2 (10 points)

A. $P(13{,}7 \leq X \leq 14{,}2) \approx 0{,}976$. (1 point)

B. 1. On procède comme au corrigé de l'exercice 2 de l'épreuve 1.

Y suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,024. (1,5 point)

2. $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) \approx 0{,}432$. (1 point)

3. a) $\lambda = 100 \times 0{,}024 = 2{,}4$. (0,5 point)

b) $P(Z = 3) \approx 0{,}209$. (1 point)

C. 1. $H_0 : r = 10$. (0,5 point)

2. On cherche a tel que $P(\overline{R} \leq a) = 0{,}99$.

Avec la calculatrice, on trouve $a \approx 10{,}33$. (1 point)

3. • Soit r_e la moyenne des résistances calculées sur un échantillon de 50 jouets prélevés au hasard.

• Si $r_e \leq 10{,}33$, on accepte H_0.

• Sinon on rejette H_0. (1,5 point)

4. a) $r_e \approx 10{,}38$ et $\sigma \approx 1{,}042$. (1 point)

b) $r_e > 10{,}33$; on rejette H_0. (1 point)

Épreuve 5

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $h(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t}$. (1 point)

2. $k = 13$. (0,5 point)

3. $f(t) = 13 + Ce^{-\frac{1}{2}t}$. (1 point)

4. $f(t) = 13\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$. (0,5 point)

B. 1. $f'(t) = \dfrac{13}{2}e^{-\frac{1}{2}t} > 0$. (1 point)

2. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. (0,5 point)

3. a) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 13$. (0,5 point)

b) La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 13$ comme asymptote en $+\infty$. (0,5 point)

4. $y = \dfrac{13}{2}t$. (1 point)

C. 1. $t \approx 2{,}9$. (0,5 point)

2. $f(t) \geq 0$ si et seulement si $t \geq -2\ln\left(\frac{3}{13}\right) \approx 2{,}93$. (1 point)

3. $V = 13 + 13e^{-2} - 13e^{-1}$. (1 point)

4. $V_m = V$; $V_m \approx 9{,}98$. (1 point)

Exercice 2 (10 points)

A. $P(750 \leq X \leq 900) \approx 0{,}979$. (1,5 point)

B. 1. Y suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,02. (1 point)

Justification (procéder comme à l'exercice 1 de l'épreuve 3). (1,5 point)

2. $P(X \leq 1) \approx 0{,}736$. (1 point)

3. a) $\lambda = np = 50 \times 0{,}02 = 1$. (0,5 point)

b) $P(Y_1 \leq 3) \approx 0{,}981$. (1 point)

C. 1. $H_1 : m \neq 825$. (1 point)

2. $a = 2\sigma$; $a = 9{,}2$ (puisque $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$). (1 point)

3. Si la moyenne de la masse des résidus des 50 prélèvements de 100 g est dans l'intervalle $I = [815{,}8 ; 834{,}2]$ alors H_0 est acceptée, sinon elle est refusée. (1 point)

4. La moyenne $\bar{x}$ n'appartient pas à I, H_0 est refusée (0,5 point)

Épreuve 6

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $h(t) = Ce^{-0{,}15t}$. (1 point)

2. $g(t) = 10$. (1 point)

3. $f(t) = Ce^{-0{,}15t} + 10$. (1 point)

4. $f(t) = 10 + 12e^{-0{,}15t}$. (1 point)

B. 1. $f'(t) = -1{,}8e^{-0{,}15t} < 0$.

f est décroissante sur [0, 8]. (2 points)

2. Tracé de la courbe. (1 point)

3. $f(t) \leq 16$ si et seulement si :

$t \geq \frac{\ln 2}{0{,}15}$. Il sera 4 h du matin. (1 point)

C. 1. $E_d = \left[2{,}88 \times \frac{1}{-0{,}15}e^{-0{,}15t}\right]_0^8$;

$E_d = -19{,}2e^{-1{,}2} + 19{,}2$. (1 point)

2. $E_d \approx 13{,}4$. (0,5 point)

Exercice 2 (10 points)

A. $P(59{,}93 \leq X \leq 60{,}07) \approx 0{,}98$. (1 point)

B. 1. 0,0002. (1 point)

2. a) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$;

$P(E_1 \cup E_2) = 0{,}0298$. (1 point)

b) $P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 0{,}9702$. (1 point)

C. 1. Y suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,02. (1 point)

2. $P(Y = 1) \approx 0{,}37$. (1 point)

3. a) $\lambda = np = 50 \times 0{,}02 = 1$. (1 point)

b) $P(Y_1 \leq 3) \approx 0{,}98$. (1 point)

D. $I = [119{,}86 ; 119{,}90]$. (2 points)

Épreuve 7

Exercice 1 (9 points)

A. 1. a) D'après l'affichage du logiciel de calcul formel, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 25$ comme asymptote en $+\infty$. (0,5 + 0,5 point)

b) $f'(t) = -23{,}7 \times (-0{,}03)e^{-0{,}03t} = 0{,}711e^{-0{,}03t}$. (1 point)

c) Pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, $e^{-0{,}03t} > 0$ donc $f'(t) > 0$. (0,5 point)

d)

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	1,3 ↗	25

(1 point)

2. La valeur proche de laquelle se stabiliserait la concentration en matières polluantes est 25 µg/L car $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25$. (1 point)

3. On lit $t_0 \approx 29$ min. En effet, d'après l'image GeoGebra, la courbe $\mathscr{C}$, correspondant à une fonction strictement croissante, passe par le point de coordonnées (28,8 ; 15,0). (1 point)

B. 1. $y(t) = Ce^{-0{,}03t}$. (1 point)

2. $0{,}03a = 0{,}75$; $a = 25$. (1 point)

3. $f(t) = 25 + Ce^{-0{,}03t}$. (1 point)

4. a) $f(0) = 1{,}3$, d'où $C = -23{,}7$.

$f(t) = 25 - 23{,}7e^{-0{,}03t}$. (1 point)

b) On retrouve la fonction f du **A.** (0,5 point)

Exercice 2 (11 points)

A. 1. *Probabilité de survie*

$P(E_1) = \frac{420}{949}$, $P(E_1) \approx 0{,}42$.

$P(E_2) = \frac{281}{960}$, $P(E_2) \approx 0{,}29$. (0,5 point)

2. *Événements indépendants*

a) $P(F_1) = P(A) \times P(B) = 0{,}2967$. (1 point)

b) $P(F_2) = P(A \cup B)$;

$P(F_2) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8233$. (1 point)

c) $P(F_3) = P(\overline{F_2}) = 0{,}1767$. (1 point)

3. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

a) Procéder comme à l'exercice 2 de l'épreuve 1.

Y suit la loi binomiale de paramètres 25 et 0,12. (1 + 0,5 point)

b) $P(G_1) \approx 0{,}042$. (0,5 point)

$P(G_2) \approx 0{,}103$. (0,5 point)

c) $np = 25 \times 0{,}12 = 3$. (0,5 point)

d) $P(Y = 0) \approx 0{,}050$ et $P(Y = 5) \approx 0{,}101$. (1 point)

B. 1. $P(A) \approx 0{,}12$; $P(B) \approx 0{,}70$; $P(C) \approx 0{,}37$. (1 point)

2. $E(T) = \frac{12}{0{,}000\,4} = 2\,500$. (0,5 point)

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois le prélèvement la moyenne des valeurs prises par T devient voisine de 2 500. (0,5 point)

Épreuve 8

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $g(t) = Ce^{-0,2t}$, où C est une constante réelle. (1 point)

2. $a = 0,2$. (0,5 point)

3. $f(t) = ke^{-0,2t} + 0,2te^{-0,2t}$. (0,5 point)

4. $f(t) = 0,2te^{-0,2t}$. (1 point)

B. 1. La limite de f en $+\infty$ est 0.

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}$ $+\infty$.

2. Pour tout t de $\mathbb{R}$,

$f'(t) = 0,2e^{-0,2t} + (0,2t)(-0,2e^{-0,2t})$,

$f'(t) = 0,2(1-0,2t)\,e^{-0,2t} = (0,2-0,04t)\,e^{-0,2t}$

$$f'(t) = \frac{25(0,2-0,04t)e^{-0,2t}}{25} = \frac{(5-t)e^{-\frac{t}{5}}}{25}. \text{ (1 point)}$$

3.

t	0		5		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variation de f	0	↗	e^{-1}	↘	0

(1 point)

4. a)

x	0	2,5	5	10	15	20	25
$f(x)$	0	0,30	0,37	0,27	0,15	0,07	0,03

(0,75 point)

b) Courbe. (0,75 point)

C. 1. Environ 23 minutes. (0,5 point)

2. a) $F(t) = \frac{1}{5}(-5t-25)e^{-\frac{t}{5}}$;

$F'(t) = \frac{1}{5}(-5)e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{5}(-5t-25)\left(-\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}\right)$;

$F'(t) = \frac{1}{5}te^{-0,2t} = f(t)$. (1 point)

b) $V_m = \frac{1}{23}\int_0^{23} f(t)\,dt = [F(t)]_0^{23}$;

$V_m = \frac{1}{23}(5 - 28e^{-4,6}) \approx 0,21$. (1,25 point)

c) La valeur moyenne calculée au **b)** représente la quantité moyenne de médicament (exprimée en ml) présente dans l'organisme du patient au cours des 23 minutes suivant l'injection. (0,25 point)

Exercice 2 (10 points)

1. On procède comme à l'exercice 2 de l'épreuve 1.
X suit la loi binomiale de paramètres 40 et 0,075. (1,5 point)

2. $\lambda = 3$. (0,5 point)

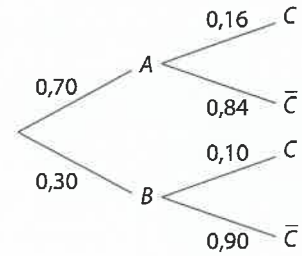
3. a) $P(X_1 \leq 4) = 0,815$. (1 point)

b) La probabilité de l'événement : « dans un prélèvement de 40 bouteilles il y a au plus quatre bouteilles qui contiennent de l'eau calcaire » est proche de 0,815.
(0,5 point)

B. 1. $P(Y \leq 6,5) \approx 0,841$, (1 point)

2. $P(Y > 6,5) \approx 0,159$. (1 point)

C. 1.



(1 point)

2. $P(C \cap A) = 0,70 \times 0,16 = 0,112$.

$P(C \cap B) = 0,3 \times 0,1 = 0,03$. (0,5 point)

3. $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = 0,142$. (1 point)

4. $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0,112}{0,0142} \approx 0,789$. (1 point)

D. I ≈ [5,18 ; 5,56]. (1 point)

Épreuve 9

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $g(t) = Ce^{-0,25t}$. (0,75 point)

2. Vérifier que $h'(t) + 0,25h(t) = 3e^{-t}$. (1 point)

3. $f(t) = g(t) + h(t) = Ce^{-0,25t} - 4e^{-t}$. (0,75 point)

4. $f(t) = 79e^{-0,25t} - 4e^{-t}$. (0,75 point)

B. 1. La limite de f en $+\infty$ est 0.

L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ quand x tend vers $+\infty$. (0,75 point)

2. a) Pour tout t de $\mathbb{R}$:

$f'(t) = 79(-0,25)e^{-0,25t} - 4(-e^{-t})$;

$f'(t) = e^{-0,25t}(-19,75) + 4e^{-t}$;

$f'(t) = e^{-0,25t}\left[-19,75 + 4\frac{e^{-t}}{e^{-0,25t}}\right]$;

$f'(t) = e^{-0,25t}(-19,75 + 4e^{-t+0,25t})$;

$f'(t) = e^{-0,25t}(-19,75 + 4e^{-0,75t})$. (1 point)

b) $f'(t) < 0$, f est décroissante. (0,5 point)

3. a)

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$	75	22,6	6,5	1,9	0,5	0,2

(0,75 point)

b) La courbe.

4. a) $V_m = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)\,dt$

$V_m = \frac{1}{20}\left[\frac{79}{-0,25}e^{-0,25t} + 4e^{-t}\right]_0^{20}$;

$V_m = \frac{1}{20}[-316e^{-0,25t} + 4e^{-t}]_0^{20}$;

$V_m = \dfrac{-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312}{20}$. (1 point)

b) $V_m \approx 15{,}5$. (0,25 point)

C. 1. On résout $f(t) \leq 7{,}5$. Au bout de 10 semaines. (1 point)

2. $\dfrac{1}{3}V_m \approx 5{,}2$. (0,25 point)

Exercice 2 (10 points)

A. 1. $P(E_1) = 0{,}000\,6$. **2.** $P(E_2) = 0{,}049\,4$. (2 points)

3. $P(E_3) = 1 - P(E_2) = 0{,}9506$. (1 point)

4. $P_{E_2}(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{0{,}0494} = \dfrac{P(E_1)}{0{,}0494} = \dfrac{0{,}000\,6}{0{,}049\,4} \approx 0{,}0121$.
(1 point)

B. 1. Procéder comme au corrigé de l'exercice **1** de l'épreuve 3. (2 points)

2. $P(X = 2) \approx 0{,}277\,7$. (1 point)

3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}871\,5$. (1 point)

C. 1. La probabilité que la masse d'un sachet soit supérieure ou égale à 104 grammes est égale à 0,977 2.
(1 point)

2. $1 - P(104 \leq Y \leq 136) \approx 0{,}045\,6$. (1 point)

Épreuve 10

Exercice 1 (10 points)

A. 1. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$ Une équation de $\mathscr{D}$ est : $y = 1$. (1 point)

2.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$	0,17	0,28	0,42	0,57	0,71	0,82	0,9

(1 point)

3. a) $f'(t) = \dfrac{0{,}612\,5e^{-0{,}125t}}{(1 + 4{,}9e^{-0{,}125t})^2}$. (1 point)

b)

t	0	+0
$f'(t)$	+	
f	0,17 ↗	1

(0,5 point)

4. La courbe. (1 point)

5. C'est une valeur approchée de la solution de l'équation $f(t) = 0{,}5$. (1 point)

B. 1. Établir que $F'(t) = f(t)$. (1 point)

2. $V_m = \dfrac{1}{10}[F(20) - F(10)]$. (1 point)

3. $V_m \approx 0{,}569$. (0,5 point)

C. 1. $f(20) = 0{,}71$, soit 71 %.

2. $f(t) = 0{,}5$ a pour solution $t \approx 13$; donc, à partir de 2003.
(1 point)

3. En moyenne, entre 2000 et 2010, 56,9 % des ménages étaient équipés. (1 point)

Exercice 2 (10 points)

A. 1. $P(110 \leq X \leq 130) \approx 0{,}683$. (1,5 point)

2. $P(X \leq 100) \approx 0{,}023$. (1 point)

B. 1. $P(Y = 0) \approx 0{,}007$. (1 point)

2. $P(Y \leq 4) \approx 0{,}441$. (1 point)

C. 1. Procéder comme à l'exercice 2 de l'épreuve 1.
Donc la variable aléatoire Z qui associe à ces tirages le nombre de camions-benne n'ayant eu ni panne ni sinistre suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}9$.
(2 points)

2. $P(Z = 0) \approx 0{,}349$. (1 point)

D. 1. Règle de décision :

• Soit $\overline{x}$ la moyenne des diamètres des fers à béton d'un échantillon de 100 fers à béton prélevé au hasard et avec remise.

• Si $\overline{x}$ appartient à l'intervalle [24,96 ; 25,039], on accepte H_0 au seuil de 0,05.

• Sinon, on rejette H_0 et on accepte H_1. (1,5 point)

2. $\overline{z} = 24{,}978$ appartient à l'intervalle d'acceptation.
On accepte l'hypothèse H_0 : la livraison est considérée comme conforme pour le diamètre. (1 point)