GELIBERT - CHOVIN

BTS

INDUSTRIELS

GROUPEMENTS B-C-D

NOUVEAU PROGRAMME

tome 2

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

Jean Guichard
François Mailloux
Bernard Verlant

FOUCHER

LES GROUPEMENTS DE SPÉCIALITÉS ET LES BTS CONCERNÉS PAR CET OUVRAGE

Groupement B
(22 spécialités)

Aéronautique
Aménagement finition
Après-vente automobile (3 options)
Assistance technique d'ingénieur
Bâtiment
Conception et industrialisation en microtechniques
Conception et réalisation de carrosseries
Conception et réalisation des systèmes automatiques
Construction navale
Constructions métalliques
Domotique
Enveloppe du bâtiment : façades -étanchéité
Environnement nucléaire
Études et économie de la construction
Fluide-énergie-environnement (4 options)
Géologie appliquée
Industrialisation des produits mécaniques
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention
Maintenance industrielle
Moteurs à combustion interne
Traitement des matériaux (2 options)
Travaux publics

Groupement C
(13 spécialités)

Agroéquipement
Charpente-couverture
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle
Communication et industries graphiques (2 options)
Développement et réalisation bois
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux
Fonderie
Industries céramiques
Industries papetières (2 options)
Métiers de la mode (2 options)
Mise en forme des matériaux par forgeage
Productique textile (4 options)
Systèmes constructifs bois et habitat

Groupement D
(8 spécialités)

Analyses de biologie médicale
Bio analyses et contrôles
Biotechnologie
Hygiène-propreté-environnement
Industries plastiques-europlastic-à référentiel commun européen
Métiers de l'eau
Peintures, encres et adhésifs
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries

BTS indépendants

AEA
Opticien-lunetier

Crédits photographiques

p. 28, 31, 33, 38, 39, 48, 62, 88, 107, 151, 157, 162 173, 176, 205, 208, 211, 230, 239, 247, 253, 257, 271
© Marie-Claude Hugues et Bernard Verlant

ISBN 978-2-216-12742-9

Sommaire

Chaque chapitre traite un (ou deux) module(s) du programme.

Présentation du manuel

Cette nouvelle édition est strictement conforme au programme de mathématiques des **BTS des groupements B, C, D** entré en application en première année à partir de la rentrée 2013.

Chacun des cinq chapitres, **qui traite un module du programme**, propose :

- Un ***Cours***

Le cours s'appuie sur des situations issues de la technologie, des sciences physiques et des disciplines industrielles.
Des **exemples** mettent en évidence les **méthodes**.
À la fin de chaque chapitre **« Ce qu'il faut savoir »** rassemble les principaux résultats.

- Des **Travaux pratiques** sur ordinateur

Très progressifs, avec des fiches techniques, ils peuvent être abordés directement par les étudiants en salle d'informatique et/ou utilisés en classe entière. Des réponses partielles de ces TP, pour permettre un travail autonome des étudiants, figurent à la fin de l'ouvrage.

- Des ***Exercices*** corrigés et non corrigés

Ils sont nombreux et variés. Ceux qui sont à support concret ou liés au domaine technologique ne nécessitent aucune connaissance autre que mathématique.

Ils sont classés par thèmes et difficultés croissantes :

+ désigne des exercices d'application directe du cours ;

++ désigne des exercices pour s'entraîner ;

+++ désigne des exercices ou problèmes qui, par leur niveau de difficulté et (ou) leur longueur, correspondent au niveau d'exigences des BTS des groupements B, C, D ;

++++ désigne des exercices pour « aller plus loin » ou des exercices comportant moins d'indications.

- **De nombreuses activités pour consolider les acquis des bacheliers professionnels** (TP, exercices corrigés très progressifs, QCM interactifs) sont signalées.

- À la fin de chaque chapitre, figurent de nombreux ***Exercices pour le BTS*** avec des corrigés détaillés. Ils permettent de préparer efficacement l'**évaluation finale** ou le **contrôle en cours de formation** (**CCF**).

- Des ***Activités corrigées d'algorithmique*** signalées par : ALGO figurent dans les exercices de chaque chapitre.

- À la fin de cet ouvrage figurent des ***épreuves complètes d'entraînement aux BTS*** des groupements B, C, D. Un index et des réponses à la fin de l'ouvrage permettent un travail autonome.

Pour chaque module (ou partie de module) sont indiqués les BTS des groupements B, C, D concernés.

CHAPITRE 1

Statistique descriptive

Ce chapitre concerne tous les BTS des groupements B, C, D sauf le BTS CIM.

Les résultats sur les séries statistiques à une variable sont rappelés dans la rubrique **Ce qu'il faut savoir**.

Pour **les séries statistiques à deux variables,** « *il s'agit de consolider et d'approfondir les connaissances acquises les classes antérieures* ».

Les séries statistiques à deux variables sont un outil pour établir des prévisions dans le domaine de la production industrielle, des biotechnologies, de la démographie, de l'économie...

Séries statistiques à deux variables

- Utiliser un logiciel ou une calculatrice pour représenter une série statistique à deux variables et en déterminer un ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.
- Réaliser un ajustement se ramenant à un ajustement affine.
- Utiliser un ajustement pour interpoler ou extrapoler.
- Utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour comparer la qualité de deux ajustements.

COURS

1 Nuage de points ; point moyen

A. Nuage de points

Une grande surface vendant de la micro-informatique et de l'électroménager s'intéresse au lien entre ses dépenses publicitaires et son chiffre d'affaires : elle recueille les données suivantes, exprimées en millions d'euros, portant sur cinq périodes où les dépenses publicitaires sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_5$ et les chiffres d'affaires $y_1, y_2, \ldots, y_5$.

i est un nombre entier tel que $1 \leq i \leq 5$.

Dépenses publicitaires : x_i	0,5	2,0	2,9	4,5	5,6
Chiffres d'affaires : y_i	35	37	75	92	90

$M_1(0{,}5 ; 35)$

$M_2(2 ; 37)$

…

$M_5(5{,}6 ; 90)$

Représentons ces données par cinq points M_i dans un repère où les dépenses publicitaires sont en abscisse et les chiffres d'affaires en ordonnée.

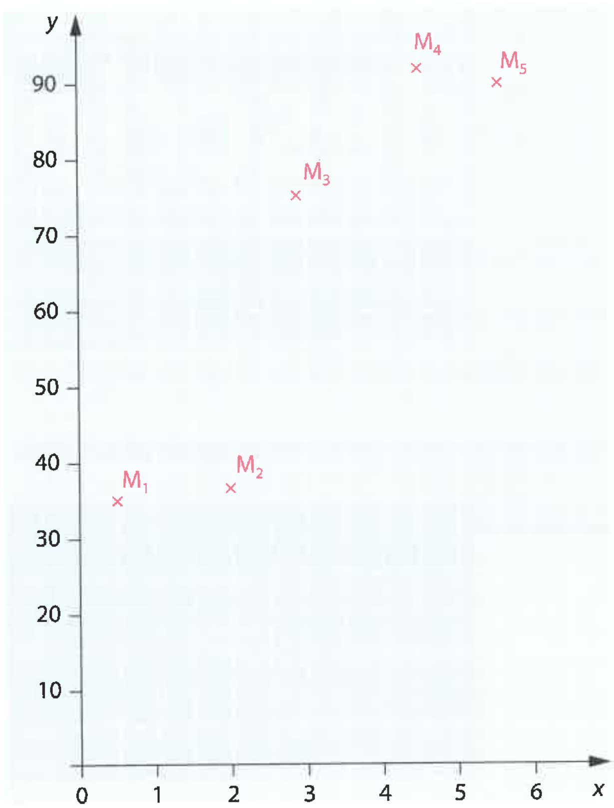


Figure 1

Ce nuage de cinq points semble suffisamment allongé pour justifier un ajustement affine. On cherche à déterminer quelle droite est susceptible de remplacer « au mieux » ce nuage de points.

B. Point moyen

Lorsqu'on pense pouvoir réaliser un ajustement affine d'un nuage, il peut sembler intéressant, avant de tracer la droite, de placer le point dont l'abscisse est la moyenne $\overline{x}$ des abscisses x_i et l'ordonnée, la moyenne $\overline{y}$ des ordonnées y_i.

DÉFINITION

On appelle **point moyen** d'un nuage de n points M_i de coordonnées (x_i, y_i) le point G de coordonnées : $x_G = \overline{x}$ et $y_G = \overline{y}$.

Exemple

Les coordonnées du point moyen G du nuage de cinq points M_i sont $\overline{x} = 3{,}1$ et $\overline{y} = 65{,}8$.

$\overline{x} = \dfrac{0{,}5+2+2{,}9+4{,}5+5{,}6}{5}$, de même pour $\overline{y}$.

2 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

A. Droite de régression de y en x

La figure 2 complète la figure 1 avec le point G et deux droites $\mathcal{D}$ et Δ passant par G : la droite $\mathcal{D}$ semble passer « au plus près » du nuage de points, ce qui n'est pas le cas de la droite Δ.

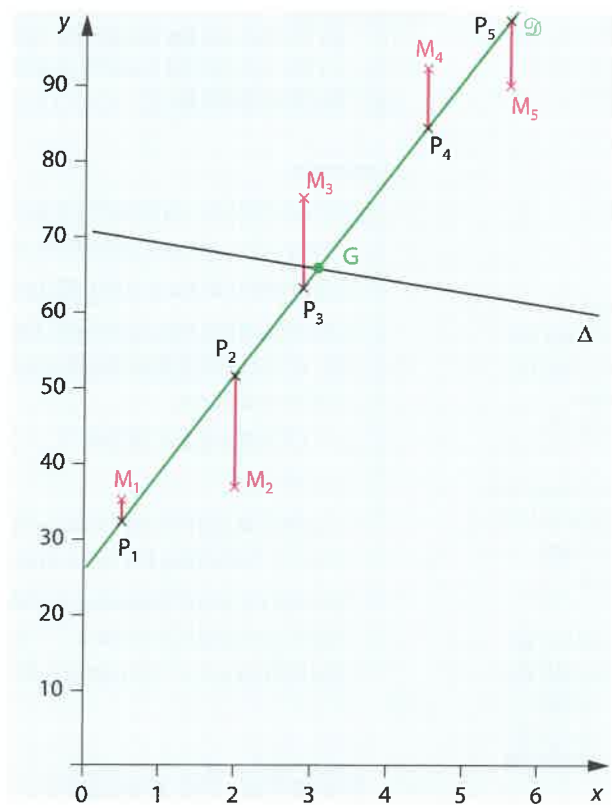


Figure 2

Les cinq segments M_iP_i matérialisant ces écarts (sans leur signe) sont représentés sur la figure 2.

Pour mesurer l'écart entre chaque point M_i du nuage et la droite $\mathcal{D}$, nous avons privilégié l'axe des ordonnées : en notant P_i le point de même abscisse que M_i et situé sur la droite $\mathcal{D}$, cet écart est mesuré par la différence des ordonnées de M_i et P_i, c'est-à-dire $y_{M_i} - y_{P_i}$.

Cet écart est positif pour M_1, M_3 et M_4 qui sont situés au-dessus de la droite $\mathcal{D}$; il est négatif pour M_2 et M_5 situés au-dessous de $\mathcal{D}$.

On constate alors que les écarts positifs et négatifs se compensent, leur somme étant nulle.

Le cas particulier de la droite passant par G et parallèle à l'axe des ordonnées est exclu.

Nous admettons ici qu'il en est de même avec toutes les droites qui, comme $\mathscr{D}$ ou Δ, passent par le point moyen G du nuage de points.

On cherche alors à minimiser la somme $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_5M_5^2$ des carrés des écarts $(y_{M_i} - y_{P_i})^2 = P_iM_i^2$.

On démontre le résultat suivant que nous admettons.

Les points P_i sont définis ci-dessus (figure 2).
Ces écarts sont aussi appelés **résidus**.
La propriété de cette droite explique le nom de la méthode « **des moindres carrés** ».

THÉORÈME

Étant donné un nuage de n points M_i, il existe une droite unique passant par le point moyen G du nuage telle que la somme des carrés des écarts (ou **résidus**) $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_nM_n^2$ soit minimale.

DÉFINITION

Cette droite s'appelle la **droite de régression de y en x.**

Exemple

La droite $\mathscr{D}$ de la figure 2 est la droite de régression de y en x du nuage des cinq points M_i.

Voir le **TP2** pour les calculatrices et la fiche technique tableur à la fin du **TP3**.

MÉTHODE

La droite de régression de y en x d'un nuage de points a une équation $y = ax + b$ où **les valeurs des coefficients a et b sont obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.**

Exemple

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on obtient pour la droite $\mathscr{D}$ de la figure 2 les valeurs suivantes arrondies au millième : $a = 12{,}768$ et $b = 26{,}219$.

La droite $\mathscr{D}$ a donc pour équation : $y = 12{,}768x + 26{,}219$.

Cette relation nous permet d'estimer, par exemple, le montant y du chiffre d'affaires associé à des dépenses publicitaires $x = 3{,}5$ où x et y sont exprimés en millions d'euros.

$y = 12{,}768 \times 3{,}5 + 26{,}219$.

$y \approx 70{,}907$.

Graphiquement nous pouvons observer sur la figure 2 que le point de la droite $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est 3,5 a une ordonnée voisine de 70,9.

De même nous pouvons estimer le montant du chiffre d'affaires associé à des dépenses publicitaires $x = 7$, soit par le calcul, soit graphiquement en prolongeant le segment de droite de la figure 2.

Il s'agit d'une estimation numérique liée à la fonction affine $x \mapsto 12{,}768x + 26{,}219$ dont la représentation graphique est la droite $\mathscr{D}$.

Il s'agit alors d'une estimation graphique liée à la représentation graphique $\mathscr{D}$ de cette même fonction affine.

Dans ce cas l'estimation est obtenue par **extrapolation** en supposant que la tendance observée se poursuit pour des chiffres d'affaires plus élevés.

B. Droite de régression de x en y

Voir le paragraphe **A**.

Nous pouvons reprendre la démarche précédente en privilégiant cette fois l'axe des abscisses, c'est-à-dire en remplaçant les points P_i de la figure 2 par les points Q_i de la figure 3.

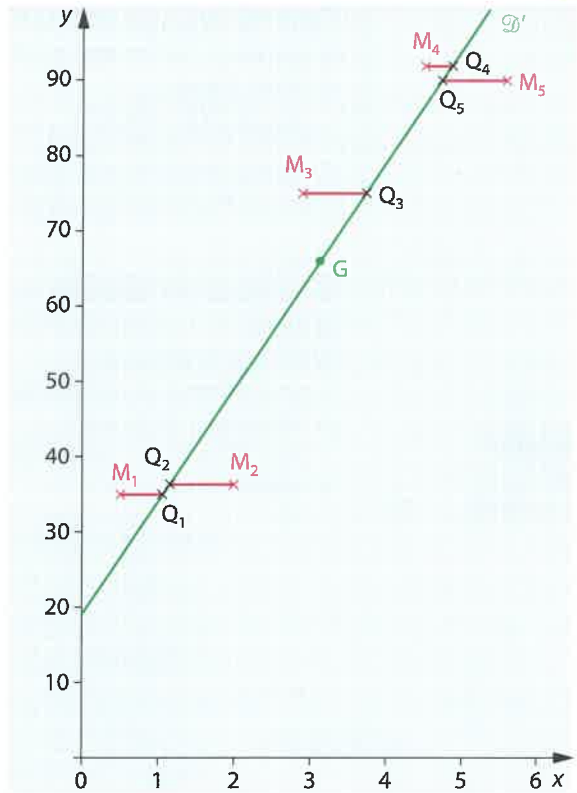


Figure 3

On démontre alors un théorème analogue que nous admettons.

THÉORÈME

Étant donné un nuage de n points M_i, il existe une droite unique passant par le point moyen G du nuage telle que la somme des carrés des écarts (ou **résidus**) $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_nM_n^2$ soit minimale.

DÉFINITION

Cette droite s'appelle la **droite de régression de *x* en *y*.**

Exemple

La droite $\mathcal{D}'$ de la figure 3 est la droite de régression de x en y du nuage des cinq points M_i.

MÉTHODE

La droite de régression de *x* en *y* d'un nuage de points a une équation $\boldsymbol{x = a'y + b'}$ où **les valeurs des coefficients *a'* et *b'* sont obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.**

a' et b' sont obtenus comme a et b en permutant les valeurs x_i et y_i.

Attention : l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ sous la forme $y = Ax + B$ s'obtient en exprimant y en fonction de x à partir de $x = 0{,}066\,y - 1{,}247$.

On obtient $y = 15{,}152\,x + 18{,}894$ en arrondissant les coefficients au millième.

Exemple

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on obtient pour la droite $\mathcal{D}'$ de la figure 3 les valeurs suivantes arrondies au millième : $a' = 0{,}066$ et $b' = -1{,}247$.

La droite $\mathcal{D}'$ a donc pour équation : $x = 0{,}066y - 1{,}247$.

Cette relation nous permet d'estimer, par exemple, le montant x des dépenses publicitaires associées au chiffre d'affaires $y = 50$, où x et y sont exprimés en millions d'euros.

$x = 0{,}066 \times 50 - 1{,}247$; $x = 2{,}053$.

Graphiquement nous pouvons observer sur la figure 3 que le point de la droite $\mathcal{D}$ dont l'ordonnée est 50 a une abscisse voisine de 2.

Remarques

La méthode des moindres carrés crée une dissymétrie entre les deux variables statistiques. Suivant l'utilisation de l'ajustement, on privilégie l'une des deux droites de régression :

– pour obtenir des valeurs de y, on cherche l'équation $y = ax + b$ de la droite $\mathcal{D}$ de régression de y en x ;

– pour obtenir des valeurs de x, on cherche l'équation $x = a'y + b'$ de la droite $\mathcal{D}'$ de régression de x en y.

Ce choix de méthode est à retenir. On cherche à minimiser l'erreur de méthode.

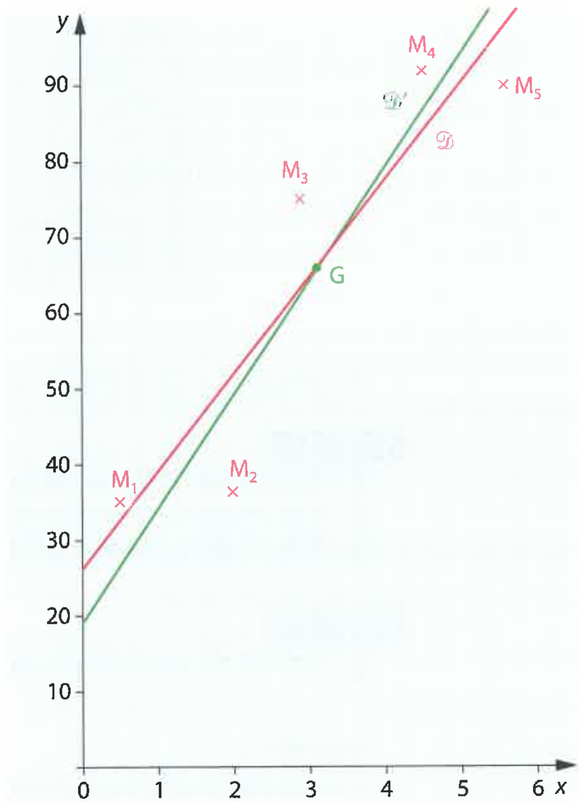


Figure 4

On peut traiter comme des séries statistiques à deux variables les **séries chronologiques** qui concernent un seul caractère dont les valeurs sont relevées à des dates différentes (chiffre d'affaires, nombre de ventes, ...). Dans ce cas x_i peut être le rang d'un trimestre, d'une année... (Voir le **TP3**)

3 Coefficient de corrélation linéaire

Pour les nuages de points « *allongés* » qui incitent à ajuster par une droite, nous allons introduire un nouveau paramètre afin d'apprécier la qualité d'un ajustement affine : le **coefficient de corrélation linéaire, noté *r*.**

Voir le **TP2** pour les calculatrices et la fiche technique tableur à la fin du **TP3**.

MÉTHODE

La valeur du **coefficient de corrélation linaire** *r* est obtenue à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Exemple

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on obtient $r \approx 0{,}918$ pour le nuage des cinq points M_i introduits au début de ce chapitre.

La définition de r qui fait intervenir la covariance de deux variables statistiques n'est pas au programme des BTS des groupements B, C, D.

Propriétés

Nous admettons les propriétés suivantes :
- $\boldsymbol{r^2 = aa'}$
- **r prend des valeurs comprises entre -1 et 1.**

Interprétation graphique

Nous avons introduit deux droites de régression $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passant toutes deux par le point moyen G du nuage de points et d'équations respectives $y = ax + b$ et $x = a'y + b'$ qui se transforme en $y = \frac{1}{a'}x - \frac{b'}{a'}$.

Le coefficient de corrélation linéaire r, lié aux coefficients directeurs a et $\frac{1}{a'}$ de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par la relation $r^2 = aa'$, donne des indications sur l'angle de ces deux droites passant par G.

• Cas où $r = 1$ ou $r = -1$

C'est le cas où $r^2 = 1$, c'est-à-dire $aa' = 1$, donc $a = \frac{1}{a'}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont alors le même coefficient directeur et, comme elles ont le point G commun, elles sont confondues. L'ajustement affine est « parfait » : c'est le cas lorsque les points M_i sont alignés.

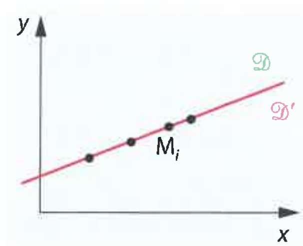


Figure 5

$r = 1$

$a > 0$ et $a' > 0$

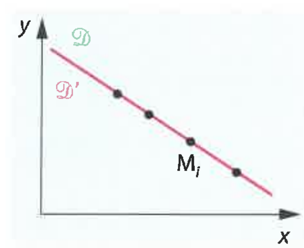


Figure 6

$r = -1$

$a < 0$ et $a' < 0$

• Cas où r est proche de 1 ou de -1

Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont « proches » l'une de l'autre ; on dit qu'il y a une « bonne » corrélation entre les deux variables statistiques.

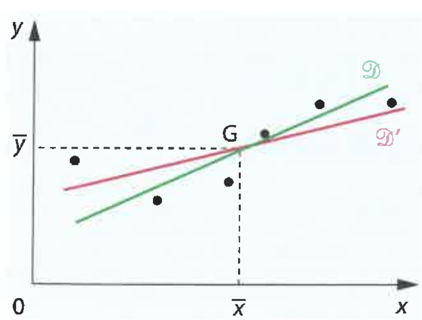


Figure 7

r proche de 1

$a > 0$ et $a' > 0$

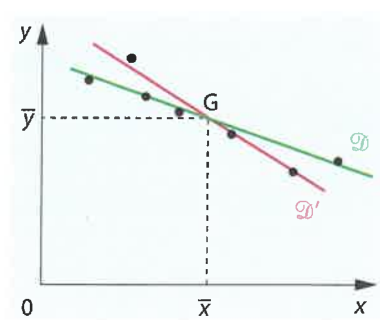


Figure 8

r proche de -1

$a < 0$ et $a' < 0$

Remarques

1. Il existe une « bonne » (ou une « forte ») corrélation entre x et y lorsque r est suffisamment voisin de 1 ou de – 1.
2. Ne pas confondre une forte corrélation et une liaison de cause à effet.
3. Dans chaque secteur technologique ou économique, on choisit pour quelles valeurs de r la corrélation est jugée suffisante pour effectuer un ajustement affine par la méthode des moindres carrés lorsque le nuage de points est « allongé ».
4. Le coefficient de corrélation linéaire est utilisé pour comparer la qualité de deux ajustements affines.

Par exemple, x_i et y_i peuvent mesurer deux effets d'une même cause.

Voir le TP4.

Ce qu'il faut savoir

Statistique à une variable

• Moyenne et écart type

1er cas : la population est donnée par la liste de ses n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

2e cas : la population est donnée par le tableau des effectifs n_i de chacune des p classes x_i.

3e cas : la population est donnée par le tableau des effectifs n_i de chacune des p classes $[a_i, b_i[$ de centre $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$.

	Moyenne $\overline{x}$	Variance V
1er cas	$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ (1)	$V = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \overline{x}^2$ (2)
2e cas	$\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + \ldots + n_px_p}{n}$	$V = \dfrac{n_1x_1^2 + \ldots + n_px_p^2}{n} - \overline{x}^2$
3e cas	$\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + \ldots + n_pc_p}{n}$	$V = \dfrac{n_1c_1^2 + \ldots + n_pc_p^2}{n} - \overline{x}^2$

(1) On peut noter : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. (2) On peut noter : $V = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$.

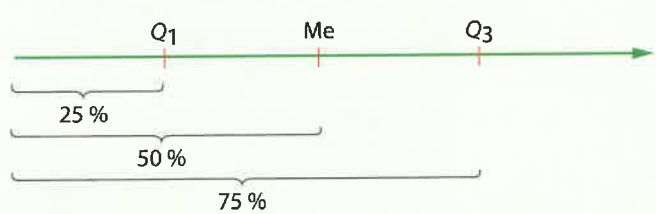
Dans tous les cas l'**écart type** est $\sigma = \sqrt{V}$.

Les valeurs approchées d'une moyenne ou d'un écart type sont à déterminer avec une calculatrice ou un tableur. (On peut se reporter au TP1).

• Médiane et interquartile

Dans une série statistique de n termes classés par ordre croissant, la **médiane** Me est :

- le terme du milieu, si n est impair ;
- la demi-somme des deux termes du milieu, si n est pair.



L'**écart interquartile** est $Q_3 - Q_1$.

• **Décile et interdécile**

Dans une série statistique dont les termes sont classés par ordre croissant :

• Le premier **décile** D_1 est le plus petit terme tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à D_1.

• Les deuxième, troisième, ..., neuvième déciles $D_2, D_3, \dots, D_9$ sont définis de même en remplaçant 10 % par 20 %, 30 %, ..., 90 %.

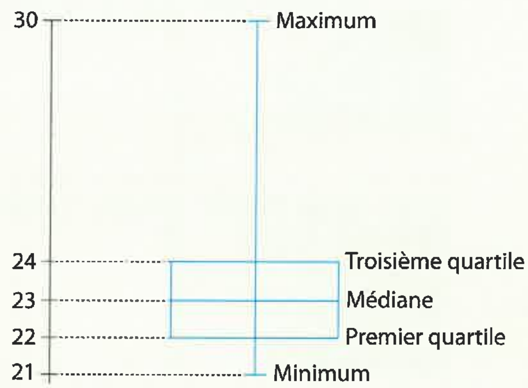
• L'intervalle interdécile est $[D_1, D_9]$.

• L'écart interdécile est $D_9 - D_1$.

• **Diagramme en boîte**

Les **diagrammes en boîtes** résument graphiquement une série statistique en partageant les valeurs de la série suivant des segments correspondant à des quartiles ou à des déciles.

Exemple



Pour la série statistique représentée, *l'étendue* est $30 - 21 = 9$. La *médiane* est égale à 23. Le *premier* et le *troisième quartile* sont respectivement égaux à 22 et à 24.

Statistique descriptive à deux variables

• On appelle **point moyen** d'un nuage de n points M_i de coordonnées (x_i, y_i) le point G de coordonnées : $x_G = \overline{x}$ et $y_G = \overline{y}$.

• **La droite de régression de y en x** d'un nuage de points a une équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ où **les valeurs des coefficients a et b sont obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur** (voir les **TP2** et **TP3**).

• **La droite de régression de x en y** d'un nuage de points a une équation $\boldsymbol{x = a'y + b'}$ où **les valeurs des coefficients a' et b' sont obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.**

• Les deux droites de régression passent « au plus près » du nuage de points.

• Les deux droites de régression passent par le point moyen G du nuage de points.

• La droite de régression de y en x peut servir à estimer y pour une valeur donnée de x.

• La droite de régression de x en y peut servir à estimer x pour une valeur donnée de y.

• Pour apprécier la qualité d'un ajustement affine, on peut déterminer le **coefficient de corrélation linéaire**, noté r. La valeur du coefficient de corrélation linéaire est obtenue à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

TRAVAUX PRATIQUES TICE

RÉPONSES P. 275

TP 1 Déterminer la moyenne et l'écart type avec une calculatrice

Pour consolider les acquis

Pièces usinées

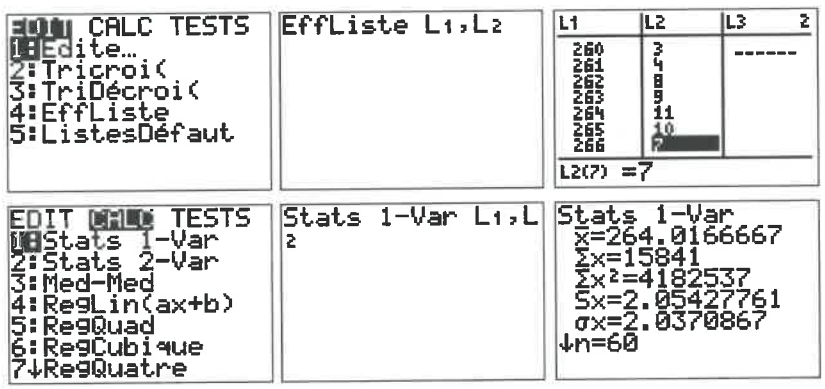
Lors d'un contrôle de fabrication, les masses exprimées en grammes, de 60 exemplaires d'un certain type de pièces usinées sont données dans le tableau suivant.

Masse en grammes	260	261	262	263	264	265	266	267	268
Effectif	3	4	8	9	11	10	7	6	2

Entrer les mesures dans la calculatrice, puis afficher l'écran de calcul des statistiques à une variable.

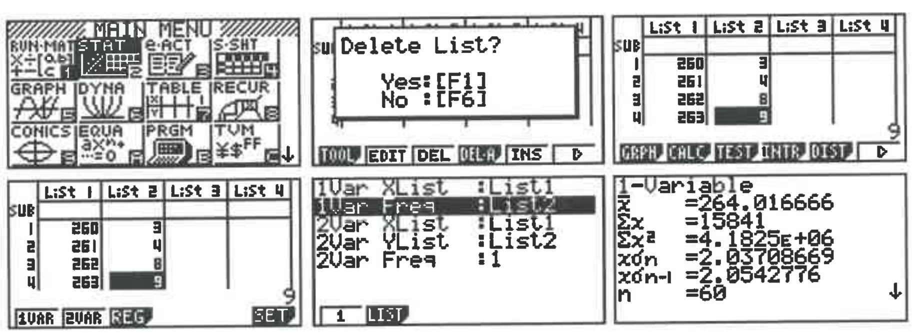
Procédure à suivre sur une calculatrice TI

On accède au menu de statistique par la touche STAT. Les noms des listes L1 et L2 sont au clavier.



Procédure à suivre sur une calculatrice CASIO

Se placer dans le menu STAT. Effacement des listes par DEL-A. Réglage des colonnes pour le calcul par CALC SET. Affichage des résultats par 1-VAR.



1. Quelle est la masse moyenne $\overline{x}$ (arrondir au gramme) ?

2. L'écart type, qui correspond à la lettre grecque σ, est noté, selon les calculatrices, $\boxed{\sigma x}$ ou $\boxed{\sigma xn}$.
Quelle est la valeur de l'écart type σ fournie par votre calculatrice (arrondir au gramme) ?

3. Quel est le pourcentage des mesures appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$?

Fiche technique tableur

Graphiques en secteurs ou en barres

Sélectionner les valeurs à représenter. S'il y a plusieurs séries, garder la touche **Ctrl** enfoncée entre les sélections.

Avec **Excel 2003** : cliquer sur l'icône d'**Assistant Graphique**  puis choisir le type de graphique.

Avec **Excel 2007** : dans le menu **Insertion**, choisir **Secteurs** pour un diagramme en secteurs et **Colonne** pour un diagramme en barres verticales.

Avec **OpenOffice Calc** : Cliquer sur l'icône **Diagramme**, puis choisir **Secteurs** pour un diagramme en secteurs et **Colonne** pour un diagramme en barres verticales.

Calculer moyenne, écart type, médiane et quartiles pour des données non regroupées

La série statistique (non regroupée) figure dans une plage de cellules du type A1:E50.

La syntaxe est la suivante (remplacer plage par les adresses de la première et de la dernière cellule séparées par :) :

Moyenne	=MOYENNE(plage)
Écart type	=ECARTYPEP(plage)
Minimum	=MIN(plage)
Premier décile	=CENTILE(plage;0,1)
Premier quartile	=QUARTILE(plage;1)
Médiane	=MEDIANE(plage)
Troisième quartile	=QUARTILE(plage;3)
Neuvième décile	=CENTILE(plage;0,9)
Maximum	=MAX(plage)

Remarques :
– Attention à utiliser ECARTYPEP et non pas ECARTYPE qui correspond à l'estimation exposée au chapitre **4**.
– Les valeurs des quartiles et déciles, obtenues par interpolation, sont parfois un peu différentes de celles attendues selon d'autres définitions.

Fiche technique tableur

Calculer moyenne, écart type, médiane et quartiles pour des données regroupées (avec effectifs)

Un tableur ne dispose pas nécessairement de fonction permettant le calcul direct de ces quantités dans le cas de données regroupées (x_i, n_i) où n_i correspond à l'effectif de la valeur x_i.

Moyenne et écart type

On dispose alors les données (x_i, n_i) sous forme de tableau :

Valeurs x_i	Effectifs n_i	$n_i \times x_i$	$n_i \times x_i^2$
x_1	n_1		
x_2	n_2		
…	…		
Total	n	S_1	S_2

Calculer moyenne, écart type, médiane et quartiles pour des données regroupées (avec effectifs)

Un tableur ne dispose pas nécessairement de fonction permettant le calcul direct de ces quantités dans le cas de données regroupées (x_i, n_i) où n_i correspond à l'effectif de la valeur x_i.

Moyenne et écart type

On dispose alors les données (x_i, n_i) sous forme de tableau :

Valeurs x_i	Effectifs n_i	$n_i \times x_i$	$n_i \times x_i^2$
x_1	n_1		
x_2	n_2		
…	…		
Total	n	S_1	S_2

Ce tableau est complété par des formules que l'on recopie vers le bas.

On obtient la moyenne $\overline{x}$ en faisant S_1/n.

On obtient l'écart type en faisant =RACINE($S_2/n - \overline{x}^2$).

Remarque : pour le calcul de la moyenne pondérée par des effectifs, on peut utiliser la formule :

=SOMMEPROD(A1:A5;B1:B5)/SOMME(B1:B5)

où les valeurs x_i figurent en cellules A1 à A5 et les effectifs n_i figurent en cellules B1 à B5.

Médiane, quartiles et déciles

On calcule, dans des cellules au format ***Pourcentage***, les fréquences cumulées.

Valeurs x_i	Effectifs n_i	Fréquences cumulées
x_1	n_1	n_1/n %
x_2	n_2	Cellule supérieure + n_2/n %
…	…	…
…	…	100 %
Total	n	

Les différentes caractéristiques, médiane, quartiles, déciles, sont les valeurs x_i pour lesquelles on atteint ou dépasse pour la première fois le pourcentage cumulé correspondant :

1er décile	10 %
1er quartile	25 %
Médiane	50 %
2^{e} quartile	75 %
9^{e} décile	90 %

On lit les réponses dans la colonne contenant les valeurs x_i en face du premier pourcentage cumulé dépassant le pourcentage recherché.

Représenter un diagramme en boîte avec Excel

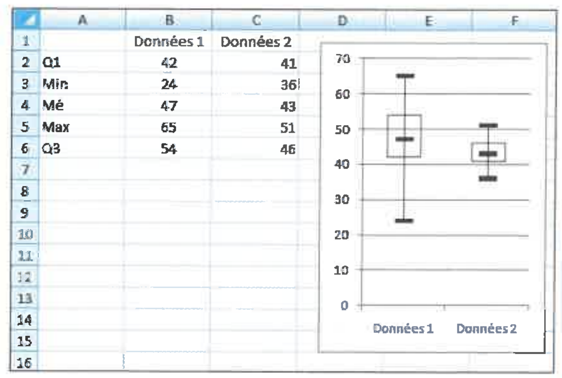
Ce type de graphique n'est pas prévu dans les fonctionnalités de base d'Excel. On peut cependant procéder ainsi.

On entre en colonne et dans cet ordre les 5 données Q1, Min, Mé, Max, Q3 (voir l'image d'écran).

• Après sélection des données, on crée un graphique en lignes :

– avec **Excel 2003**, on clique sur l'**Assistant graphique**, on choisit **Courbes avec marques** puis **Séries en ligne** ;

– avec **Excel 2007**, on fait **Insertion/Ligne/Courbes avec marques** puis sous l'onglet **Création**, on choisit **Intervertir lignes/colonnes.**



• On modifie la forme des marques, puis on ajoute les lignes et barres haut-bas :

– avec **Excel 2003**, on fait un clic droit sur chaque marque, on choisit **Format de la série de données…**

Sous l'onglet **Motifs**, on choisit :

à la rubrique **Traits, Aucun** ;

à la rubrique **Marque**, pour Min, Mé et Max,

Personnalisée avec un style tiret de taille 12, et pour Q1 et Q3, **Aucune.**

Sous l'onglet **Options**, on coche **Lignes haut/bas** et **Barres haut/bas.**

– avec **Excel 2007**, on fait un clic droit sur chaque marque, on choisit **Mettre en forme une série de données…**

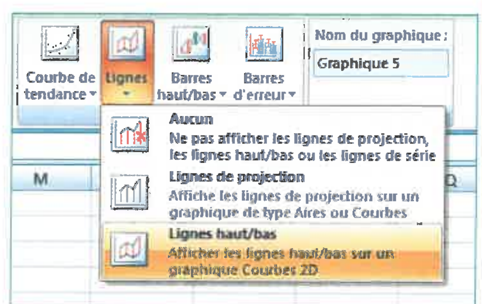
Pour Min, Mé et Max, on choisit :

Option de marqueur/Prédéfini avec un type de trait horizontal de taille 12, **Couleur de trait/Aucun trait.**

Pour Q1 et Q3, on choisit :

Option de marqueur/Aucun, Couleur de trait/Aucun trait.

Sous l'onglet **Disposition**, on sélectionne **Lignes haut/bas** et **Barres haut/bas.**



TP 2 Trouver un ajustement affine à l'aide de la calculatrice

Demande pour un modèle de parka

On se propose d'ajuster le nuage de points (x_i, y_i) suivant.

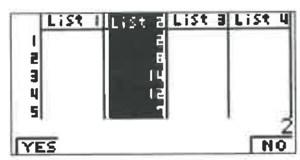
Une enquête du service commercial d'une chaîne de magasins de vêtements a permis de connaître l'évolution de la demande y_i d'un certain modèle de parka, selon le prix x_i auquel elle est proposée :

Prix TTC en euros : x_i	Demande mensuelle : y_i
80	540
100	452
120	335
140	188
160	120
180	68
200	18

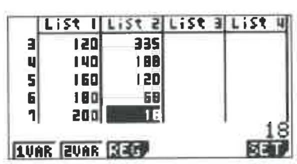
1. Procédure d'ajustement affine sur une calculatrice.

Calculatrice de marque CASIO

On entre dans le menu de statistique en faisant MENU STAT EXE puis on procède à l'**effacement** éventuel des données présentes dans les listes en se plaçant dans une colonne puis en faisant DEL A YES EXE (appuyer sur F6 en cas d'icône caché).



Ensuite, on **entre les valeurs** x_i en colonne **List 1** et les valeurs y_i en colonne **List 2**.



Le **réglage des listes** s'effectue par CALC SET puis :

2Var X List : List 1

2Var Y List : List 2

2 Var Freq : 1 EXE.

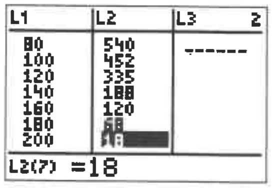
L'affichage des **résultats** de la « régression linéaire » (ajustement affine), se fait par REG X.

Vous devez obtenir un affichage semblable à celui montré ci-dessus.

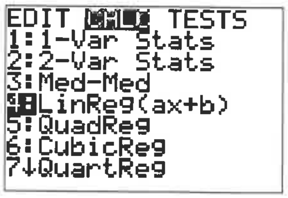
Calculatrice de marque Texas Instruments (**instructions en français en bleu**) :

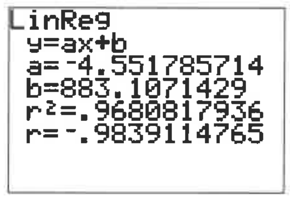
On entre dans le menu de statistique en appuyant sur la touche STAT ou stats puis on procède à l'**effacement** éventuel des données présentes dans les listes en faisant EDIT 4:ClrList ENTER L_1, L_2 ou 4:EffListe entrer L_1, L_2 (on obtient L_1 et L_2 au clavier par la touche 2nd ou 2nde).

Pour **saisir les données**, on fait STAT EDIT 1: Edit ENTER ou 1:Edite entrer puis on entre les valeurs x_i en colonne L_1 et les valeurs y_i en colonne L_2.



L'affichage des **résultats** de la « régression linéaire » (c'est-à-dire l'ajustement affine), se fait par STAT CALC 4:LinReg(ax+b) ENTER L_1, L_2 ou stats CALC 4 :RegLin(ax+b) entrer L_1, L_2.





Vous devez obtenir un affichage semblable à celui montré ci-dessus.

2. Utiliser les résultats affichés par votre calculatrice pour donner une valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, du coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y.

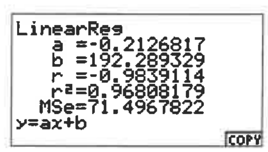
3. Utiliser les résultats affichés par votre calculatrice pour donner une expression du type $y = ax + b$ de la demande mensuelle en fonction du prix. On donnera des valeurs approchées des coefficients a et b arrondies à 10^{-2}.

4. Utiliser le résultat de la question précédente pour évaluer la demande lorsque le prix proposé est 130 €.

5. On souhaite obtenir, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de x en y selon la méthode des moindres carrés. Pour ce faire, inverser le rôle des listes 1 et 2.

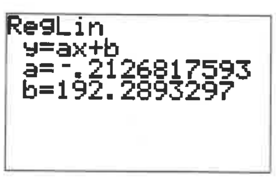
Sur CASIO :

CALC SET puis :
2Var X List : List 2
2Var Y List : List 1
2 Var Freq : 1 EXE.



Sur TI :

STAT CALC 4:LinReg(ax+b) ENTER L_2, L_1 ou stats CALC 4 :RegLin(ax+b) entrer L_2, L_1.



Utiliser les résultats affichés par votre calculatrice pour donner une expression du type $x = a'y + b'$ du prix proposé en fonction de la demande mensuelle. On donnera des valeurs approchées des coefficients a' et b' arrondies à 10^{-2}.

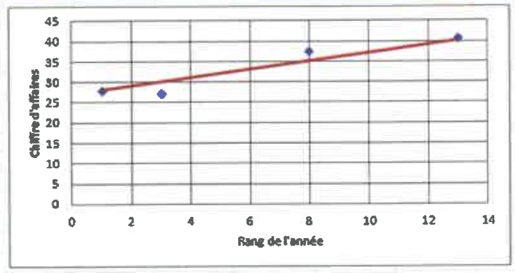
6. Utiliser le résultat de la question précédente pour évaluer le prix à proposer correspondant à une demande mensuelle de 300 parkas. Arrondir à l'euro.

TRAVAUX PRATIQUES TICE

TP 3 Trouver un ajustement affine à l'aide du tableur

Ouvrir le fichier « **1_BCD2_chiffre_affaires.xls** » ou « **1_BCD2_chiffre_affaires.ods** », donnant le chiffre d'affaires, en milliards d'euros, d'une grande entreprise (image d'écran ci-dessous).

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Rang de l'année	Chiffre d'affaires en milliards d'euros	y = ax + b	Ecarts verticaux	Ecarts au carré
2	2000	1	28	28,125	-0,125	0,015625
3	2002	3	27,2	30,125	-2,925	8,555625
4	2007	8	37,6	35,125	2,475	6,125625
5	2012	13	40,7	40,125	0,575	0,330625
6					Somme	15,0275
7	Moyennes	6,25	33,375			
8	a =	1				
9	b =	27,125				
10						
11						
12						



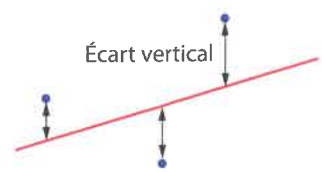
On recherche une droite d'équation $y = ax + b$, passant par le point moyen et ajustant « au mieux » le nuage des quatre années données.

A. Ajustement « manuel » d'une droite passant par le point moyen

1. Dans quelles cellules sont calculées les coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ du point moyen ?

2. Puisque la droite passe par le point moyen, on a $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Expliquer la formule entrée en B9.

3. La colonne E contient les écarts verticaux entre les points du nuage et les points correspondants de la droite. La colonne F contient les carrés de ces écarts.



Pourquoi la somme des écarts contenus en colonne E ne permet-elle pas de savoir si la droite est proche des points du nuage et quel est l'avantage de considérer la somme des écarts au carré ?

4. Modifier en B8 la première décimale du coefficient directeur a de la droite (prendre 1,1 ; 1,2 ; 1,3…) de sorte à obtenir en F6 une somme des écarts au carré minimale (observer en même temps la droite sur le graphique). Quel est, à 10^{-1} près, le coefficient a optimal ?

B. Utilisation des fonctionnalités d'ajustement du tableur

Le tableur peut afficher directement la droite d'ajustement obtenue selon le principe précédent, dit des « moindres carrés ». Sur le graphique, cliquer sur un point du nuage situé à l'écart de la droite à l'aide du bouton droit de la souris et choisir « Courbe de tendance… » Dans la boîte de dialogue, choisir « Linéaire » et cocher « Afficher l'équation ».

1. Quelle est l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur ?

2. Comparer au résultat obtenu à la question **A.4**.

3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire, arrondi à 10^{-2}, entre y et x, en utilisant la fonction suivante du tableur :

=COEFFICIENT.CORRELATION(plage des y donnés ; plage des x donnés).

4. On souhaite exploiter l'équation de la droite précédente pour estimer le chiffre d'affaires en 2014 (année de rang 15). Dans une cellule vide de la feuille de calcul, entrer la formule :

=PREVISION(15;C2:C5;B2:B5).

Quel est le résultat affiché (arrondir au milliard d'euros) ?

Comparer avec le calcul $a \times 15 + b$ où a et b correspondent à l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur à la question **B.1**.

Fiche technique tableur

Calculs statistiques à deux variables

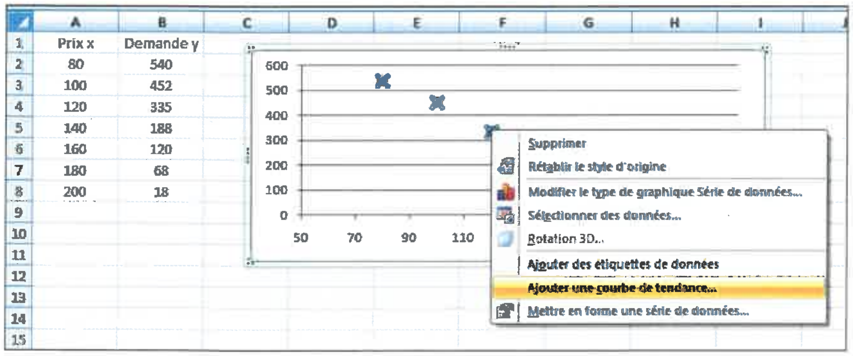
Ajustement graphique

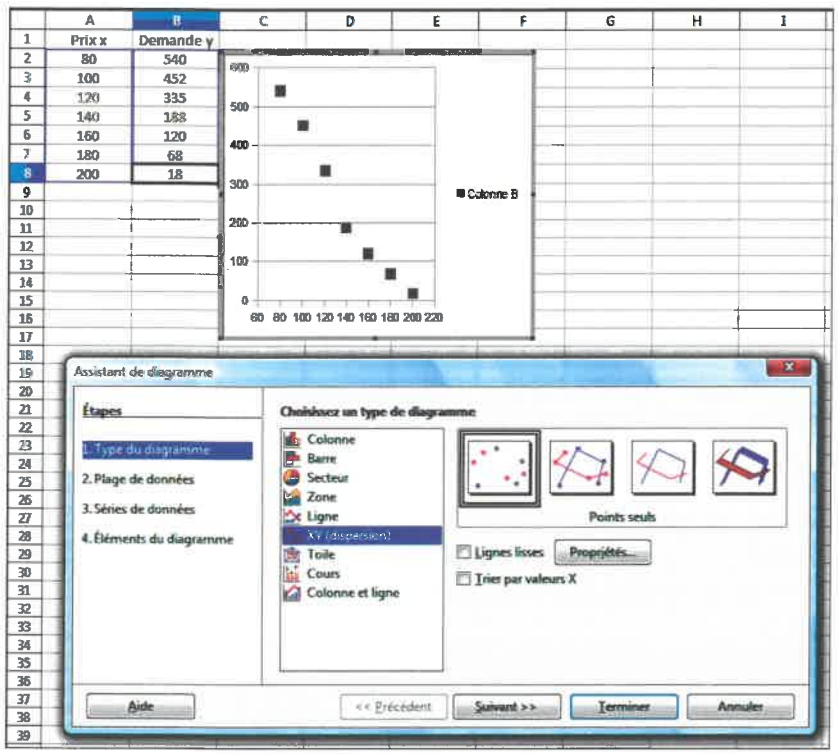
Pour représenter le nuage de points, on **sélectionne** la plage de cellules contenant les données statistiques (x_i, y_i) puis :

– avec Excel 2003, on clique sur l'icône de l'**Assistant graphique** et on choisit **Nuage de points**, premier sous-type ;

– avec Excel 2007, on choisit **Insertion/Nuage de points** ;

– avec OpenOffice Calc, on clique sur l'icône **Diagramme** puis on choisit **XY (dispersion).**





Pour obtenir une droite d'ajustement selon les moindres carrés, on clique avec le bouton droit sur l'un des points du nuage et on choisit (clic gauche) **Ajouter une courbe de tendance...** avec Excel ou **Insérer une courbe de tendance...** avec Calc.

Dans la boîte de dialogue, on sélectionne **Linéaire** et on coche la case **Afficher l'équation sur le graphique.**

Fonctions d'ajustement affine

Le tableur est pourvu de fonctions réalisant un ajustement affine sans nécessiter un graphique.

DROITEREG

Cette fonction calcule les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ selon la méthode des moindres carrés.

Il s'agit d'une « fonction matricielle » dont la validation est particulière et ne s'effectue pas simplement par la touche ENTREE. Il faut d'abord ***sélectionner*** deux cellules vides côte à côte puis écrire la formule et enfin valider en enfonçant les deux touches CTRL et ⇧ (majuscule) puis en faisant ENTREE.

La syntaxe est =DROITEREG(plage des y donnés ; plage des x donnés ; VRAI ; FAUX) .

Des accolades { et } s'ajouteront après validation pour montrer qu'il s'agit d'une fonction matricielle. Les valeurs de a et b s'affichent dans les deux cellules prévues à cet effet.

Si l'on veut éviter l'usage d'une « fonction matricielle », on peut obtenir a et b par les deux fonctions suivantes.

PENTE

Cette fonction fournit le coefficient directeur a de la droite d'ajustement de y en x selon les moindres carrés.

La syntaxe est =PENTE(plage des y donnés ; plage des x donnés).

Dans l'exemple précédent, =PENTE(B2:B8;A2:A8) affiche la valeur – 4,55178571.

ORDONNEE.ORIGINE

Cette fonction fournit l'ordonnée à l'origine b de la droite d'ajustement de y en x selon les moindres carrés.

La syntaxe est =ORDONNEE.ORIGINE(plage des y donnés ; plage des x donnés).

Dans l'exemple précédent, =ORDONNEE.ORIGINE(B2:B8;A2:A8) affiche la valeur 883,107143.

COEFFICIENT.CORRELATION

=COEFFICIENT.CORRELATION(plage des y donnés ; plage des x donnés) affiche le coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y.

Dans l'exemple précédent, =COEFFICIENT.CORRELATION(B2:B8;A2:A8)
ou =COEFFICIENT.CORRELATION(A2:A8;B2:B8) affiche la valeur – 0,98391148.

PREVISION

Cette fonction calcule la valeur de y correspondant à une valeur x donnée selon l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement de y en x selon la méthode des moindres carrés.

La syntaxe est =PREVISION(valeur de x ; plage des y connus ; plage des x connus).

Dans l'exemple précédent, =PREVISION(130;B2:B8;A2:A8) affiche le résultat 291,375.

TENDANCE

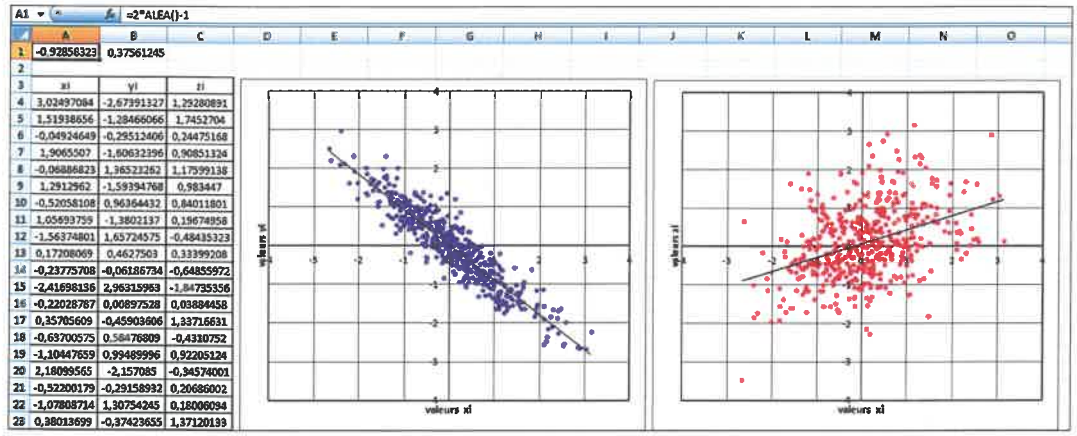
Cette fonction a le même rôle que la précédente lorsque la valeur de x pour laquelle on souhaite évaluer y est contenue dans une cellule.

Par exemple =TENDANCE(B2:B8;A2:A8;A14) affiche 291,375 lorsque la valeur 130 de x est contenue en cellule A14.

TP 4 Utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour comparer la qualité de deux ajustements, avec le tableur

Simulation de nuages de points

Ce TP permet de simuler (à l'aide de la loi normale) de nombreux nuages de points et de comparer la qualité de l'ajustement affine de deux d'entre eux.



A. Ajustement de deux nuages de points simulés

Le fichier « **1_BCD2_simulations_nuages.xls** » ou « **1_BCD2_simulations_nuages.ods** » fournit la simulation de trois séries de 500 valeurs (x_i), (y_i) et (z_i).

À défaut de posséder ce fichier, on peut le reconstituer facilement :

– Entrer en A1 la formule =2*ALEA()-1 puis la recopier en B1 ;

– Entrer en A4 la formule =LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA()) ;

– Entrer en B4 la formule
=A$1*$A4+RACINE(1-A$1*A$1)*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())
puis la recopier en C4 ;

– Sélectionner les cellules A4, B4 et C4 puis les recopier vers le bas jusqu'à la ligne 503.

1. On admet que la formule =ALEA() du tableur fournit un nombre au hasard entre 0 et 1. Justifier que la formule entrée en cellule A1 fournit un nombre au hasard entre – 1 et 1.

2. Représenter à l'aide du tableur, sur deux graphiques différents, les nuages des points de coordonnées (x_i, y_i) et (x_i, z_i) en y représentant les droites d'ajustement de y en x et de z en x, selon la méthode des moindres carrés.

B. Comparaison de la qualité de deux ajustements

On souhaite comparer deux nuages simulés quelconques. Appuyer sur F9 à plusieurs reprises pour modifier les nuages simulés et leurs formes.

1. Quelle forme particulière du nuage permet d'estimer que l'ajustement affine d'un des deux nuages est de meilleure qualité que celui de l'autre nuage ?

2. **a.** Calculer, à l'aide du tableur, le coefficient de corrélation linéaire de chacun des deux nuages.

b. Le signe du coefficient de corrélation est-il lié à la qualité de l'ajustement affine ?

c. Peut-on affirmer que plus le coefficient de corrélation est grand, plus la qualité de l'ajustement affine est grande ?

d. Comment peut-on utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour comparer la qualité de deux ajustements affines ?

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES

	Exercices corrigés
• Série statistique à une variable	
Utiliser un logiciel ou une calculatrice pour résumer et représenter des séries statistiques à une variable.	2, 7, 31
Interpréter les résultats obtenus pour une série statistique ou pour comparer deux séries statistiques.	7
• Série statistique à deux variables	
Utiliser un logiciel ou une calculatrice pour déterminer un ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.	13, 16, 18, 20, 27, 33, 35
Réaliser un ajustement se ramenant, par un changement de variable simple donné, à un ajustement affine.	22, 42, 46
Utiliser un ajustement pour interpoler ou extrapoler.	13, 16, 18, 22, 33, 34, 35, 42

Séries statistiques à une variable

Moyenne, écart type

▶ **Dans ce qui suit, tous les calculs sont à effectuer avec une calculatrice ou un tableur.**

1. + Pourcentage, moyenne, écart type

Dans la chaîne de production d'une entreprise montant un certain modèle de matériel pour la téléphonie mobile, 40 opératrices réalisent le même assemblage.

Une étude statistique sur le temps mis pour effectuer cet assemblage par chacune des opératrices a permis d'obtenir le tableau suivant.

Temps d'assemblage en secondes	Nombre d'opératrices
[105, 110[	2
[110, 115[	6
[115, 120[	12
[120, 125[	14
[125, 130[	6

1. Déterminer le pourcentage d'opératrices qui mettent entre 110 et 120 secondes pour réaliser cet assemblage.

2. Dans cette question, on fait l'approximation suivante : toutes les valeurs d'une même classe sont égales au centre de la classe. On note $\overline{x}$ la moyenne de cette série statistique et σ son écart type. Vérifier avec votre calculatrice, qu'en arrondissant à 10^{-1}, on a $\overline{x} \approx 119{,}5$ et $\sigma \approx 5{,}3$.

2. + Longueurs de tiges d'acier

On a mesuré les longueurs en millimètres d'un échantillon de 100 tiges d'acier à la sortie d'une machine automatique. On a trouvé les résultats suivants :

Longueurs (en mm)	Effectif
[120, 125[	10
[125, 130[	20
[130, 135[	38
[135, 140[	25
[140, 145[	7

1. Construire l'histogramme des effectifs.

2. On suppose que les tiges sont défectueuses si leur longueur est strictement inférieure à 125 mm ou supérieure ou égale à 140 mm.

Quel est le pourcentage de pièces acceptables ?

3. On suppose que, dans chaque classe, tous les éléments sont situés au centre.

Calculer la moyenne et la valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} de l'écart type de la série statistique ainsi définie.

CORRIGÉ P. 275

3. ++ Des notes de devoirs

Dans ce qui suit on donnera éventuellement les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des résultats.

Dans une classe, la liste des notes obtenues à un devoir de mathématiques par les élèves classés par ordre alphabétique est la suivante :

8 – 6 – 9 – 18 – 9 – 11 – 9 – 13 – 7 – 13 – 14 – 7 – 10 – 10 – 10 – 7 – 13 – 14 – 10 – 13 – 15 – 5 – 16 – 13 – 9 – 10 – 7 – 12 – 5 – 12 – 2 – 9 – 9 – 8 – 8.

1. Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ de ces notes.

2. Calculer l'écart type σ de ces notes.

3. Quel est le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma]$?

4. Quel est le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle $[\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma]$?

5. a) Quel est l'effectif de l'intervalle [8, 12], c'est-à-dire le nombre de notes appartenant à cet intervalle ?

b) Déterminer quatre autres intervalles $[a, b]$ dont l'effectif est 17 ou 18, ce qui correspond à environ la moitié de la classe.

c) Est-ce autour de la moyenne arithmétique des notes que la concentration de celles-ci est la plus forte ? (On justifiera la réponse en comparant les amplitudes $b - a$ des cinq intervalles $[a, b]$ précédents.)

4. ++ Exemple de populations correspondant à un même tableau d'effectifs

Dans cet exercice nous allons calculer la moyenne et l'écart type de quatre populations correspondant à un même tableau d'effectifs. Nous observerons ainsi l'influence de la répartition des éléments de la population à l'intérieur de chaque classe sur la moyenne et l'écart type.

On considère le tableau d'effectifs suivant.

Classe	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[
Effectif	4	4	4

1. On suppose que dans chaque classe tous les éléments sont situés au centre de la classe, c'est-à-dire que la population est :

2 – 2 – 2 – 2 – 6 – 6 – 6 – 6 – 10 – 10 – 10 – 10.

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de cette première population.

2. On suppose que les éléments de chaque classe sont répartis uniformément de la façon suivante :

0,5 – 1,5 – 2,5 – 3,5 – 4,5 – 5,5 – 6,5– 7,5 – 8,5 – 9,5 – 10,5 – 11,5.

Calculer la moyenne $\bar{x}'$ et l'écart type σ' de cette deuxième population.

3. On suppose que les éléments de chaque classe sont répartis de la façon suivante :

1 – 1 – 3 – 3 – 5 – 5 – 7 – 7 – 9 – 9 – 11 – 11.

Calculer la moyenne $\bar{x}''$ et l'écart type σ'' de cette troisième population.

Comparer $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ d'une part et $\sigma, \sigma', \sigma''$ d'autre part.

On suppose que dans chaque classe tous les éléments sont situés d'un même côté et le plus loin possible du centre de la classe, c'est-à-dire que la population est :

0 – 0 – 0 – 0 – 4 – 4 – 4 – 4 – 8 – 8 – 8 – 8.

Calculer la moyenne $\bar{x}'''$ et l'écart type σ''' de cette quatrième population. Pouvait-on prévoir les valeurs de $\bar{x}'''$ et σ''' ?

5. ++ Emploi de moyenne et d'écart type pour comparer deux séries statistiques

Les tableaux suivants donnent la répartition des salaires mensuels nets en euros des employés, à temps partiel ou à temps complet, dans deux entreprises A et B.

Entreprise A	
Salaire (en euros)	Effectif
[610, 1 220[	200
[1 220, 1 830[	700
[1 830, 2 440[	1 000
[2 440, 3 050[	100

Entreprise B	
Salaire (en euros)	Effectif
[1 050, 1 370[	50
[1 370, 1 690[	400
[1 690, 2 010[	1 500
[2 010, 2 330[	500

Calculer la moyenne et la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de l'écart type de chacune des deux séries obtenues, en faisant l'approximation que tous les éléments d'une classe sont situés en son centre.

Si les deux entreprises vous proposaient le même emploi, avec le même salaire d'embauche, laquelle des deux aurait votre préférence ?

6. +++ Salaires et effet de structure avec le tableur

TICE

Une entreprise d'un pays de l'Union européenne employait 400 techniciens et 500 cadres en 2011. Le salaire mensuel net moyen des techniciens était alors de 1 000 € et celui des cadres de 1 400 €.

	A	B	C	D	E	F
1		Effectifs Techniciens	Salaire moyen Techniciens	Effectifs cadres	Salaire moyen cadres	Salaire moyen global
2	2011	400	1 000,00 €	500	1 400,00 €	1 222,22 €
3	2012		1 100,00 €		1 500,00 €	
4						

1. Quelle formule peut-on entrer en cellule F2 pour obtenir le salaire moyen dans l'entreprise ?

2. À la suite d'une restructuration, les effectifs ont été modifiés. Les salaires moyens ont augmenté pour tous, passant à 1 100 € pour les techniciens et à 1 500 € pour les cadres. Néanmoins, le salaire moyen global a diminué. À l'aide d'un fichier tableur, recherchez un exemple expliquant ce paradoxe.

Médiane, écart interquartile

7. ++ Les notes d'examen : détermination de la médiane, de la moyenne, de l'étendue, de l'écart interquartile, de l'écart type

On considère les notes suivantes, obtenues à l'épreuve de mathématiques de la dernière session d'un BTS par les 35 candidats d'un centre d'examen.

16,5	13,5	2,5	8,5	17,5
9	16	9,5	10,5	9,5
15	11,5	8,5	6	5,5
6,5	7,5	12	5	7
12,5	7	9,5	5	16
7	16,5	11	11,5	18,5
13,5	15	11,5	15	9

1. Regrouper en classes cette série statistique en complétant, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.

Note	2,5	...
Effectif	1	...

2. Tracer le diagramme en bâtons de cette série statistique.

3. a) Déterminer la médiane de cette série statistique.

b) Déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-1} de la moyenne de cette série statistique.

4. a) Donner la valeur de l'étendue de cette série statistique, c'est-à-dire la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite.

b) Quel est le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle [7,5 ; 13,5] ?

Quel est l'écart interquartile de cette série statistique ?

c) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de l'écart type σ de cette série statistique.

d) Déterminer le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle $\left[\bar{x}-\frac{2}{3}\sigma, \bar{x}+\frac{2}{3}\sigma\right]$.

CORRIGÉ P. 276

8. + Calculer la moyenne, donner la médiane

Pour chacune des séries statistiques suivantes, calculer la moyenne et donner la médiane.

a) 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 ;

b) 1, 2, 2, 4, 4, 5, 8, 8, 8, 8, 8 ; 9 ;

c) 1 000, 1 000, 1 000, 1 100, 2 500, 3 000, 4 000 ; 5 000.

d) *Encore des notes*

Les 31 étudiants d'une section de BTS ont obtenu les notes suivantes à un devoir de mathématiques.

Note	8	9	10	11	12	13	14
Effectif	6	2	7	1	6	7	2

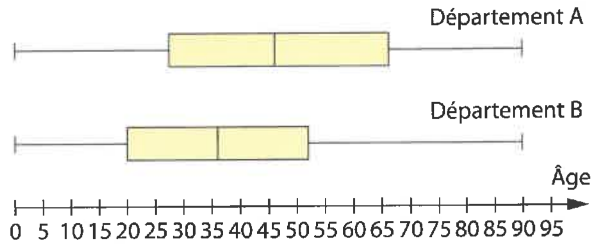
9. ++ Diagrammes en boîte

On donne ci-après les diagrammes en boîtes représentant les âges des habitants, âgés de 90 ans ou moins en 2012, pour deux départements français, nommés ici **A** et **B**.

Par lecture graphique, avec la précision permise par les diagrammes, justifier les affirmations suivantes en précisant les paramètres statistiques utilisés.

1. La proportion de personnes âgées de moins de 25 ans est inférieure dans le département **A** à la proportion analogue dans le département **B**.

2. La dispersion des âges des habitants autour de l'âge médian est plus importante pour le département **A** que pour le département **B**.



CORRIGÉ P. 276

10. +++ Diagramme en boîte, écart interquartile, moyenne, médiane

Dans un lycée on étudie les moyennes trimestrielles du premier trimestre de deux classes appelées respectivement Jaune et Rouge.

A. Les 25 élèves de la classe Jaune ont obtenu les moyennes trimestrielles suivantes au premier trimestre :

3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ;
12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18.

La moyenne trimestrielle de la classe s'obtient à partir des notes moyennes de chaque élève.

1. Déterminer la médiane *Me*, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série statistique de moyennes trimestrielles.

2. Représenter, sur l'*annexe*, le diagramme en boîte correspondant en faisant apparaître les valeurs extrêmes.

3. Calculer la moyenne trimestrielle de la classe Jaune.

B. Les indicateurs de la classe Rouge permettant de résumer la série statistique des moyennes du premier trimestre sont les suivants :

Minimum = 3 ; premier quartile $Q'_1 = 8$; médiane $Me' = 10$; troisième quartile $Q'_3 = 12$; maximum = 17.

1. Représenter, sur l'*annexe*, le diagramme en boîte correspondant.

2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (Indécidable signifie que l'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.)

Justifier votre réponse dans chacun des cas.

a) 50 % des élèves de la classe Rouge ont une note comprise entre 10 et 12.

b) 75 % des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à 12.

c) Au moins 50 % des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe Jaune.

Annexe

Diagramme en boîte « Moyennes trimestrielles de la classe Jaune »

Diagramme en boîte « Moyennes trimestrielles de la classe Rouge »

Trouver un ajustement affine par la méthode des moindres carrés

11. + Retrouver à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur l'équation de la droite d'ajustement qui est donnée

Dans chacun des cas suivants, on donne une série statistique double à l'aide d'un tableau. On demande de retrouver à chaque fois, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, l'équation, qui est donnée, de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

▶ **Conseil :** *Pour l'utilisation de la calculatrice, on peut se reporter au* **TP1** *de ce chapitre et au* **TP2** *pour le tableur.*

a)

x	0	1	2	3	4
y	7,204	6,23	5,429	4,357	3,555

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2} est :
$y = -0{,}92x + 7{,}19$.

b)

x	1	2	3	4	5	6
y	25,33	24,43	18,17	15,06	10,76	5,52

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2} est :
$y = -4{,}09x + 30{,}86$.

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,609	2,015	2,219	2,398	2,907	3,114	3,434	3,761

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-3} est :
$y = 0{,}302x + 1{,}324$.

d)

x	0	1	2	3	4	5
y	3	4,42	5,18	5,71	6,29	6,53

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2} est :
$y = 0{,}68x + 3{,}49$.

12. + Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation linéaire

Dans chacun des cas suivants, on donne une série statistique double à l'aide d'un tableur. On demande de déterminer à chaque fois, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une équation de la droite d'ajustement (ou de régression) de y en x par la méthode des moindres carrées et le coefficient de corrélation linéaire. Arrondir à 10^{-2}.

a)

x	15	16	11	10	14	13	10	5	6
y	12	19	17	15	11	11	8	4	3

b)

x	2	3	4	5	6	7	8
y	275	338	440	545	662	813	1 015

c)

x	4 500	4 800	4 950	5 100	5 250	5 400
y	26	27	29	31	32	35

13. ++ Déterminer un ajustement affine pour extrapoler

Le tableau suivant donne l'évolution des ventes de lait, en hectolitres, dans une région, pendant cinq années consécutives.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Volume des ventes en hectolitres : y_i	114 671	114 772	114 394	115 621	116 321

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-1}.

2. À l'aide de l'équation précédente, estimer le volume des ventes l'année de rang 6. Arrondir à l'unité.

CORRIGÉ P. 276

14. ++ On utilise un ajustement affine pour faire des prévisions

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de clients d'une entreprise de vente par internet pendant cinq années consécutives.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Nombre de clients : y_i	2 463	5 817	11 210	20 620	34 900

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une équation de la droite d'ajustement de y en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$. Arrondir a et b à 10^{-1}.

2. À l'aide de l'équation obtenue à la question **1**, estimer le nombre de clients l'année de rang 7. Arrondir à l'unité.

▶ *L'hypothèse « la tendance observée se poursuit » ne se vérifie pas nécessairement dans la réalité… Ce qui rend souvent les prévisions « approximatives »…*

EXERCICES

15. ++ Pour préserver l'environnement

Dans cette partie, on s'intéresse aux dépenses engendrées par la gestion des déchets dans un pays de l'Union européenne.

Le tableau ci-dessous présente les données pendant six années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Dépense : y_i (en millions d'euros)	9 432	9 926	10 233	10 462	11 411	12 304	12 833

Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) pour i variant de 0 à 6, est donné en *annexe*.

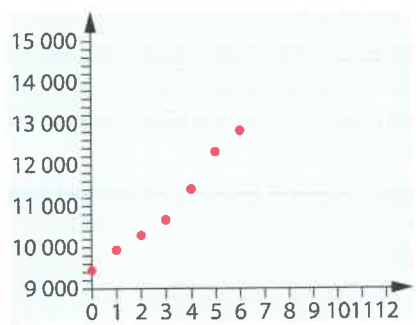
1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de y en x (arrondir les coefficients au millième).

2. On décide d'ajuster le nuage avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 575{,}3x + 9\,214$.

a) Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique figurant sur l'*annexe*.

b) En utilisant cet ajustement affine, estimer la dépense engendrée par la gestion des déchets l'année de rang 10.

Annexe



16. ++ Des essais en laboratoire

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone : x_i	70	60	68	64	66
Charge de rupture (en kg) : y_i	87	71	79	74	79

Teneur en carbone : x_i	64	62	70	74	62
Charge de rupture (en kg) : y_i	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i). On prendra en abscisse 1 cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60.
On prendra en ordonnées 1 cm pour 2 kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.

2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage.

3. Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Interpréter le résultat.

4. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite $\mathscr{D}$ de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera les valeurs approchées des coefficients a et b à 10^{-3} près.
Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique du **1.**.

5. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.

CORRIGÉ P. 276

17. ++ Utiliser la méthode des moindres carrés pour interpoler

Une chaîne de magasins commercialise un certain modèle de perceuses ; elle souhaite étudier l'évolution du nombre de perceuses vendues en fonction du nombre de magasins dans lesquels ce modèle est proposé. Le tableau suivant présente cette évolution.

Nombre de magasins : x_i	15	40	70	90	100	150
Nombre de perceuses vendues : y_i	60	254	362	504	615	810

On décide d'ajuster cette série statistique à deux variables par la méthode des moindres carrés.

1. Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = mx + p$, avec m et p arrondis à 10^{-2}.

2. En déduire une estimation du nombre de perceuses vendues, si la chaîne présente celles-ci dans 120 magasins.

18. +++ Avec le tableur : nombre d'utilisateurs de Facebook

TICE

Le 4 octobre 2012, Mark Zuckerberg, Pdg de Facebook, annonce que le réseau social a franchi la barre du milliard d'utilisateurs actifs.

Sur une feuille de calcul, on dispose des données ci-dessous permettant de suivre l'évolution du nombre d'utilisateurs de Facebook (en millions) depuis le 01/01/2008 (source Facebook). Ces données sont représentées sous forme d'un nuage de points où l'abscisse correspond au nombre d'années écoulées depuis le 01/01/2008.

1. Au vu du graphique, peut-on envisager un ajustement affine du nuage de points ?

2. La formule matricielle DROITEREG, entrée en cellules B15 et C15, fournit en B15 le coefficient directeur et en C15 l'ordonnée à l'origine d'une droite d'ajustement du nuage de points. Donner une équation de cette droite.

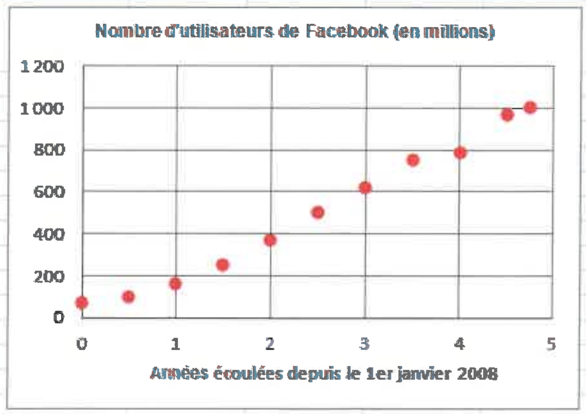
3. Pour estimer le nombre d'utilisateurs en janvier 2013 et en janvier 2014, on a entré en C17, puis recopié vers le bas, la formule =B$15*B17+C$15.

a) Expliquer cette formule.

b) Quelle formule contient la cellule C18 ?

B15 fx {=DROITEREG(C2:C12;B2:B12;VRAI;FAUX)}

	A	B	C	D
1	Date	Années	Nombre d'utilisateurs (millions)	
2	01/01/2008	0	70	
3	01/07/2008	0,5	100	
4	01/01/2009	1	160	
5	01/07/2009	1,5	250	
6	01/01/2010	2	370	
7	01/07/2010	2,5	500	
8	01/01/2011	3	620	
9	01/07/2011	3,5	750	
10	01/01/2012	4	790	
11	01/07/2012	4,5	970	
12	01/10/2012	4,75	1 000	
13				
14		a	b	
15		209,52	-11,77	
16				
17	Estimation janvier 2013	5	1 036	millions d'utilisateurs
18	Estimation janvier 2014	6	1 245	millions d'utilisateurs

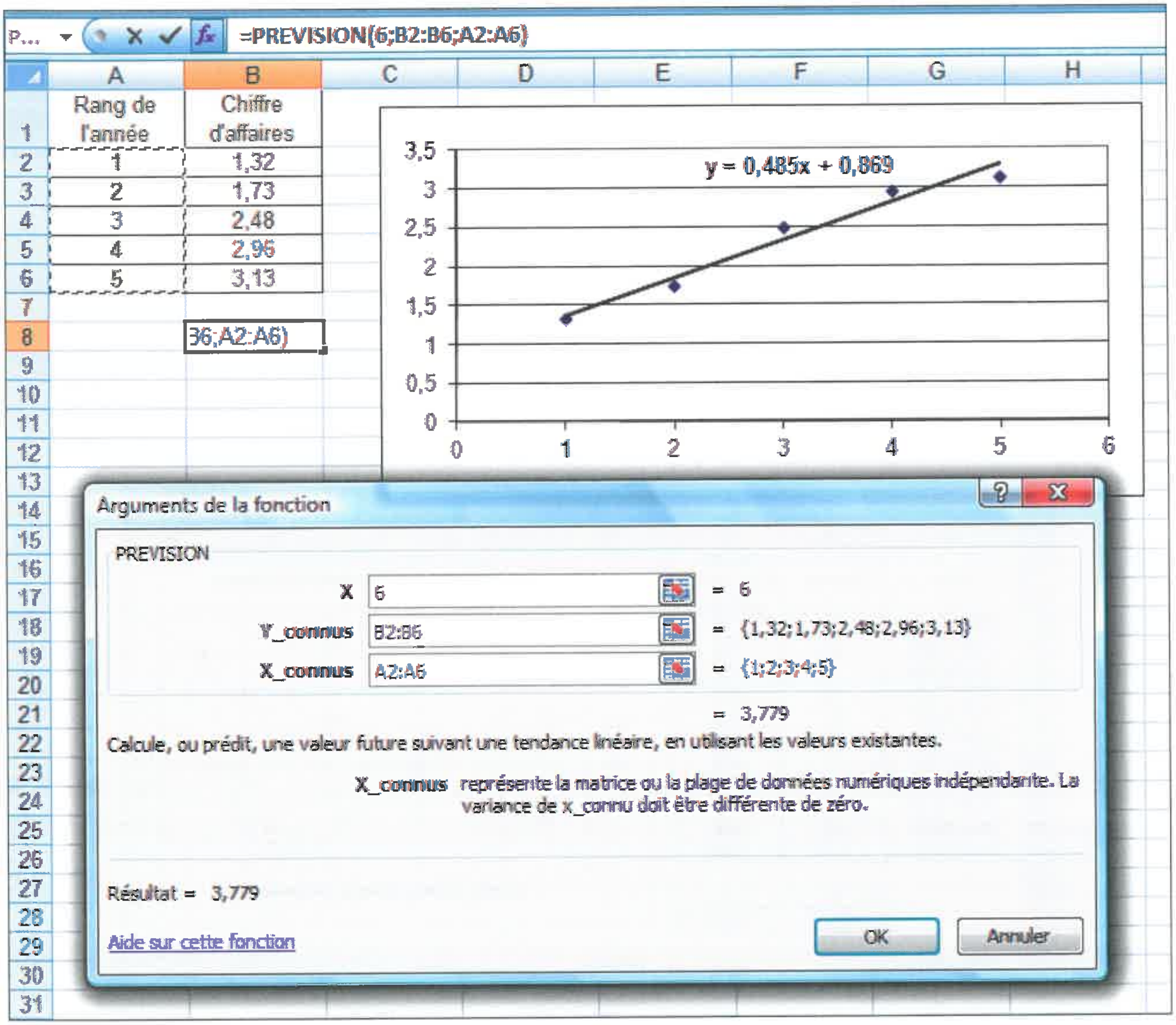


CORRIGÉ P. 276

19. +++ Avec le tableur : Jeux vidéos

TICE

On étudie à l'aide d'un tableur le chiffre d'affaires d'un éditeur mondial de jeux vidéos. Ce chiffre d'affaires, en milliards de dollars, est connu pour les années 2009 à 2013 et a été entré dans les cellules de B2 à B6, puis représenté sous forme d'un nuage de points.



1. À quoi correspond la droite d'équation $y = 0{,}485\,x + 0{,}869$ inscrite sur le graphique ?

2. En cellule B8, on a fait appel à la fonction « Prévision » du tableur dont on a complété ainsi la boîte de dialogue :

X : 6 ; Y_connus : B2:B6 ; X_connus : A2:A6.

a) Que cherche-t-on à faire ?

b) Le résultat affiché est 3,779. Que signifie-t-il ?

c) Quel est le calcul qui a permis d'obtenir cette réponse ?

20. ++ Deux droites de régression

On donne une série statistique double dans le tableau suivant.

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à cette série statistique.

2. a) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

b) À l'aide de l'équation précédente, estimer la valeur de y pour $x = 12$. Arrondir à l'unité.

3. a) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une équation de la droite d'ajustement de x en y, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $x = a'y + b'$. Arrondir a' et b' à 10^{-2}.

b) À l'aide de l'équation obtenue au a), estimer la valeur de x pour $y = 10$. Arrondir à l'unité.

c) Déduire de l'équation obtenue au a) une expression de y en fonction de x sous la forme $y = mx + p$. Arrondir m et p à 10^{-3}.

Obtient-on la même équation qu'au 2.a) ?

CORRIGÉ P. 276

Exemples d'ajustements affines après un changement de variable

21. ++ Population d'une ville moyenne

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une ville moyenne au cours des cinq dernières années.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre d'habitants (en milliers) : z_i	58	59,04	59,88	60,55	61,1
$y_i = z_i - 58$	0	1,04	1,88	2,55	3,1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 2,5 cm pour une unité en abscisse et 2,5 cm pour 1 millier d'habitants en ordonnée.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i).

2. a) Déterminer, avec une calculatrice ou un tableur, une équation de la droite Δ, droite de régression de y en x. On donnera une équation de la forme $y = ax + b$ dans laquelle a et b seront arrondis à 10^{-3}.

b) Construire la droite Δ.

3. Calculer une estimation de la population de cette ville pour l'année de rang 6.

22. ++ Exemple d'ajustement se ramenant à un ajustement affine

Dans cette activité, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale arrondie à 10^{-3}, obtenue avec une calculatrice ou un tableur.

L'étude, durant les cinq dernières années, du nombre de passagers transportés annuellement sur une ligne aérienne a conduit au tableau suivant :

Rang de l'année	Nombre de passagers : p_i
1	7 550
2	9 235
3	10 741
4	12 837
5	15 655

1. On pose $y_i = \ln p_i$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant :

x_i	1	...
y_i	8,929	...

b) Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ?

2. a) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression $\mathcal{D}$ de y en x.

b) Déduire du a) une expression de p en fonction de x.

c) En admettant que l'évolution constatée se poursuive les années suivantes, utiliser la relation obtenue au b) pour estimer le nombre de passagers transportés au cours de l'année de rang 7.

CORRIGÉ P. 276

23. ++ Production automobile

On a relevé le nombre d'automobiles produites par une grande firme européenne, pendant huit années consécutives, dans un pays émergent. Les résultats figurent dans le tableau suivant.

Rang de l'année : x_i	Nombre d'automobiles produites : y_i
1	54 000
2	56 000
3	70 000
4	80 000
5	87 500
6	112 922
7	138 907
8	149 675

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées (0, 50 000) et pour unités deux centimètres pour une année sur l'axe des abscisses et cinq centimètres pour 5 000 automobiles sur l'axe des ordonnées.

2. Un ajustement affine n'étant pas adapté au nuage précédent, on pose $z = \ln y$.

a) Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
z	10,897							

On fera figurer les valeurs approchées de z arrondies à 10^{-3}.

b) Écrire une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = mx + p$. On donnera les valeurs approchées de m et p arrondies à 10^{-3}.

c) On admet que la tendance observée pendant les huit années va se poursuivre. Donner une estimation de la production au cours de l'année de rang 11.

Coefficient de corrélation linéaire

24. ++ Estimation d'un chiffre d'affaires

Une grande entreprise publie chaque année son chiffre d'affaires, en millions d'euros, concernant l'année précédente.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires : y_i	10,2	12,7	15,1	20,3	24,1	31,6	40

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal et placer le point moyen G (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses ; 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

2. Expliquer pourquoi le graphique suggère la possibilité d'un ajustement affine.

3. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x (les coefficients sont à arrondir à 10^{-2}). Tracer la droite dans le repère précédent.

4. Calculer le coefficient de corrélation entre y et x, et donner une interprétation du résultat. Arrondir à 10^{-2}.

5. Si l'évolution se poursuit de la même façon, quel devrait être théoriquement, en millions d'euros, le chiffre d'affaires pour l'année de rang 10 ?

25. +++ Coût de la maintenance d'une installation de chauffage

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

L'étude du coût de maintenance annuel d'une installation de chauffage dans un immeuble de bureaux, en fonction de l'âge de l'installation, a donné les résultats suivants :

Âge en années : x_i	1	2	3	4	5	6
Coût en centaines d'euros : y_i	7,55	9,24	10,74	12,84	15,66	18,45

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée). Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ?

2. a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (x_i, y_i). Le résultat obtenu confirme-t-il l'observation faite au **1** ?

b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x. Tracer $\mathscr{D}$ dans le même repère qu'au **1**.

c) En admettant que l'évolution du coût constatée pendant 6 ans se poursuive les années suivantes, donner une estimation du coût de maintenance de l'installation lorsqu'elle aura 8 ans.

26. +++ Un problème de maintenance

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés par leur valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

On a étudié la durée de vie d'un certain nombre d'équipements mécaniques identiques. Dans le tableau suivant, t_i représente la durée de vie exprimée en heures et $R(t_i)$ est le pourcentage d'équipements encore en service à la date t_i. (Par exemple, pour $t_i = 100$, il reste 80 % d'équipements en service, et $R(t_i) = 0{,}80$.)

t_i	100	200	300	400	500
$R(t_i)$	0,80	0,64	0,52	0,40	0,32

t_i	600	750	1 000	1 500
$R(t_i)$	0,28	0,20	0,12	0,04

1. On pose $y_i = \ln R(t_i)$ où ln désigne le logarithme népérien. Représenter le nuage de points M_i de coordonnées (t_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2. Peut-on envisager un ajustement affine du nuage précédent ? Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables t et y.

3. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en t.

En déduire qu'il existe deux nombres réels positifs k et λ, tels que, pour tout élément t de $[100, 1\,500]$, $R(t) = ke^{-\lambda t}$.

4. Dans cette question, on prend $k = 1$ et $\lambda = 0{,}002$.

Déterminer le pourcentage d'équipements encore en service au bout de 900 heures de fonctionnement.

Utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour comparer la qualité de deux ajustements

27. ++ Utiliser le coefficient de corrélation pour comparer la qualité de deux ajustements

La bibliothèque du comité d'entreprise d'une grande société a établi le bilan de ses activités pour les quatre dernières années.

Le tableau suivant donne en milliers pour chaque année :
– l'augmentation du nombre des prêts de livres x_i ;
– le nombre des nouveaux lecteurs inscrits : y_i ;
– le nombre de nouveautés achetées : z_i.

Rang de l'année	1	2	3	4
x_i	3	7	1	5
y_i	0,3	1,4	0,1	0,4
z_i	0,9	3,2	2,1	2,8

1. Représenter la série statistique des (x_i, y_i), puis, dans un repère distinct, la série des (x_i, z_i).
Pour chacun des deux graphiques, prendre un repère orthonormé, unité 2 cm.

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de chacune des deux séries. Arrondir à 10^{-3}.

3. Que peut-on en conclure ?

CORRIGÉ P. 276

28. +++ Chiffre d'affaires d'une chaîne d'hypermarchés

Une chaîne d'hypermarchés de bricolage implantée dans le secteur S a effectué lors des cinq dernières années des relevés statistiques sur son chiffre d'affaires Y (exprimé en millions d'euros) et sur ses frais de publicité X (exprimés en millions d'euros).

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant dans lequel figure aussi le nombre N d'hypermarchés de cette chaîne en activité dans le secteur S.

Rang de l'année	1	2	3	4	5
Frais de publicité X	1	1,05	1,3	1,45	1,5
Nombres d'hypermarchés N	5	7	8	10	12
Chiffre d'Affaires Y	120	150	175	198	222

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y et entre les variables N et Y. Arrondir à 10^{-3}. En déduire quel facteur, N ou X, semble avoir la plus grande influence sur le chiffre d'affaires.

2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression notée $\mathscr{D}$ de Y en N. On déterminera les valeurs approchées arrondies à 10^{-1} des coefficients.

3. Représenter graphiquement la droite $\mathscr{D}$ dans un repère orthogonal.
Unité sur l'axe des abscisses : 2 cm.
Unité sur l'axe des ordonnées 1 mm.

4. Utiliser ce tracé pour prévoir le chiffre d'affaires que l'on peut espérer si l'on ouvre deux nouveaux hypermarchés dans le secteur.

29. +++ Avec la fonction exponentielle

Une entreprise fabrique et commercialise un produit rare. Sa production mensuelle, qui ne peut excéder 7 tonnes, est notée X (en tonnes) : le coût total de cette production mensuelle est noté Y (en k€).

On rappelle que 1 k€ = 10^3 €. On pose $Z = e^{\frac{100-Y}{25}}$.

1. Compléter le tableau des valeurs suivant après l'avoir reproduit. Les valeurs approchées de Z seront arrondies à 10^{-2}.

X	1	2	3	4	5	6
Y	19,2	20,1	27,5	32,2	40,6	57,3
Z	25,33					

2. Déterminer les coefficients de corrélation entre X et Y d'une part, entre X et Z d'autre part. Arrondir à 10^{-3}. Commenter les résultats obtenus.

3. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.
(On arrondira chacun des coefficients à 10^{-2}).

4. Utiliser le résultat de la question précédente pour obtenir une expression de Y en fonction de X.

5. Déduire du **4** une estimation du coût total pour une production de 7 tonnes. Arrondir à l'euro.

FAITES le POINT

RÉPONSES P. 276

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs

Statistique à une variable

30. + Répondre sans calculatrice

Au premier trimestre, un élève a obtenu les notes suivantes en mathématiques : 8, 9, 9, 11, 12, 14, 16, 17.

		a	b	c
1	L'étendue est :	4	8	9
2	La moyenne est :	11	12	13
3	La médiane est :	10,5	11,5	12,5
4	L'écart interquartile est :	5	7	9

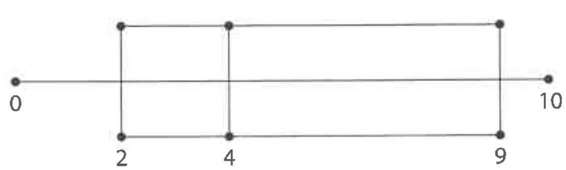
31. + Des notes d'examen

Notes : x_i	2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif : n_i	1	2	1	4	3	6	5	1	2	5	2	1	1	1

		a	b	c
1	Le pourcentage de notes strictement supérieures à 10 est environ :	51 %	37 %	49 %
2	La moyenne de cette série statistique, arrondie à 10^{-2}, est :	10,03	10,43	10
3	L'écart type de cette série statistique, arrondi à 10^{-2}, est :	3,41	3,36	11,34

32. + Diagramme en boîte

On considère le diagramme en boîte ci-dessous :



Indiquer, sans justification, parmi les quatre propositions la bonne réponse.

- **a** La médiane est 4 ;
- **b** Le troisième quartile est 10 ;
- **c** L'intervalle interquartile est [0, 10] ;
- **d** Le premier quartile est 4.

Statistique à deux variables

33. ++ Deux droites de régression

On donne une série statistique à l'aide du tableau suivant.

x	3	5	6	8	9	11
y	2	3	4	6	5	8

1. Une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont arrondis à 10^{-3} est :

a) $y = 0{,}714x - 0{,}333$;
b) $y = 0{,}778x - 0{,}778$;
c) $y = 0{,}333x - 0{,}714$.

2. Une équation de la droite d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrés sous la forme $x = a'y + b'$, où a' et b' sont arrondis à 10^{-3}, est :

a) $x = 1{,}401y + 0{,}466$;
b) $x = 1{,}286y + 1$;
c) $x = y + 1{,}286$.

3. Pour $x = 10$, on peut estimer, qu'arrondi à 10^{-2}, y vaut :

a) 7 ; b) 6,81 ; c) 2,62.

4. Pour $y = 7$, on peut estimer, qu'arrondi à 10^{-2}, x vaut :

a) 8,29 ; b) 10,27 ; c) 10.

34. ++ Avec le coefficient de corrélation

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires d'une grande entreprise industrielle au cours de huit années consécutives.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires : y_i (en millions d'euros)	119	136	160	185	200	240	243	265

1. Le point moyen G du nuage de point associé à cette série statistique a pour coordonnées :

a) (4 ; 173,5) ; b) (4,5 ; 193,5) ; c) (193,5 ; 4,5).

2. La valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation r est :

a) 0,990 ; b) 0,993 ; c) 0,995.

3. Après avoir arrondi les coefficients à 10^{-2}, une équation de la droite de régression de y en x est :

a) $y = 21{,}57x + 96{,}42$;
b) $y = 22x + 96$;
c) $y = 21{,}60x + 96{,}40$.

4. En utilisant l'ajustement affine du **3.**, on peut estimer le chiffre d'affaires pour l'année de rang 10 à :

a) 316 millions ; b) 312,1 millions ; c) 321,1 millions.

EXERCICES pour le BTS

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS **(épreuve finale ou CCF)**.

Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

35. +++ Problème de production

Un fabricant de produits manufacturés utilise un jeu de moules, qui permet de fabriquer 10 000 pièces par jour.

Avec un jeu de moules neuf on obtient des pièces dont la masse est 18 kilogrammes.

Cette masse augmente avec l'usure des moules.

On considère toutefois que la production reste acceptable tant que la masse moyenne des pièces d'une palette choisie au hasard dans la production se situe dans l'intervalle [16,5 ; 20].

Pour évaluer l'usure d'un jeu de moules au cours de la production, on prélève chaque quinzaine, au hasard, une palette de pièces que l'on pèse. (La mesure de la masse est le seul contrôle de qualité que l'on fait subir à la production de ces pièces).

En commençant avec un moule neuf à la date 0, on obtient ainsi la série de mesures suivantes :

Numéro de la quinzaine : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Masse moyenne : y_i	18	18,1	18,2	18,4	18,5	18,7	18,9

1. Représenter le nuage de points (N) associé à cette série statistique double, en adoptant pour unités : 2 cm pour une quinzaine sur l'axe des abscisses et 4 cm pour 1kg sur l'axe des ordonnées.
On pourra prendre l'origine du repère au point de coordonnées (0, 18).

2. Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double.

3. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x de la forme $y = mx + p$ où m et p sont à arrondir à 10^{-2}.

4. Utiliser l'ajustement précédent pour estimer au bout de combien de temps i le remplacement des moules est nécessaire.

CORRIGÉ P. 277

36. +++ La tension en fonction de l'âge

Le tableau suivant donne la moyenne y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge x d'une population donnée.

Âge : x	36	42	48	54	60	66
Tension : y	12	13,5	13,6	14,3	15,4	15

1. Représenter graphiquement le nuage de point $M(x, y)$ dans un repère orthogonal. Prendre pour unités graphiques, 0,5 cm pour 1 an en abscisse et 3 cm en ordonnée pour l'unité de tension artérielle, les axes tracés se coupant au point I de coordonnées (30, 10).

2. a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ et la représenter. (Les coefficients a et b sont à arrondir à 10^{-3}).

b) Une personne de 70 ans a une tension de 16,1. Quelle serait sa tension théorique en utilisant la droite de régression ? Comparer avec la tension réelle.

37. ++ Ajustement affine et modélisation par une fonction du second degré

Selon l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) un indice des prix a suivi, en France, l'évolution suivante entre les années 2008 et 2014.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	101,5	102,8	104,0	107,1	109,4	113,5

L'exercice a pour objet d'étudier l'évolution de cet indice en utilisant deux modèles mathématiques.

Une représentation graphique du nuage de points M_i de coordonnées (x_i, y_i) est donnée ci-après.

1. *Ajustement affine*

a) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés *(arrondir les coefficients au centième).*

b) À partir des calculs effectués ci-dessus, on retient comme ajustement affine du nuage de points la droite d'équation $y = 2{,}2x + 96{,}8$.

Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique donné, à rendre avec la copie.

c) En supposant que ce modèle reste valable pour l'année 2015, donner une prévision de la valeur de l'indice pour 2015. Indiquer la méthode utilisée.

2. *Ajustement à l'aide d'un logiciel*

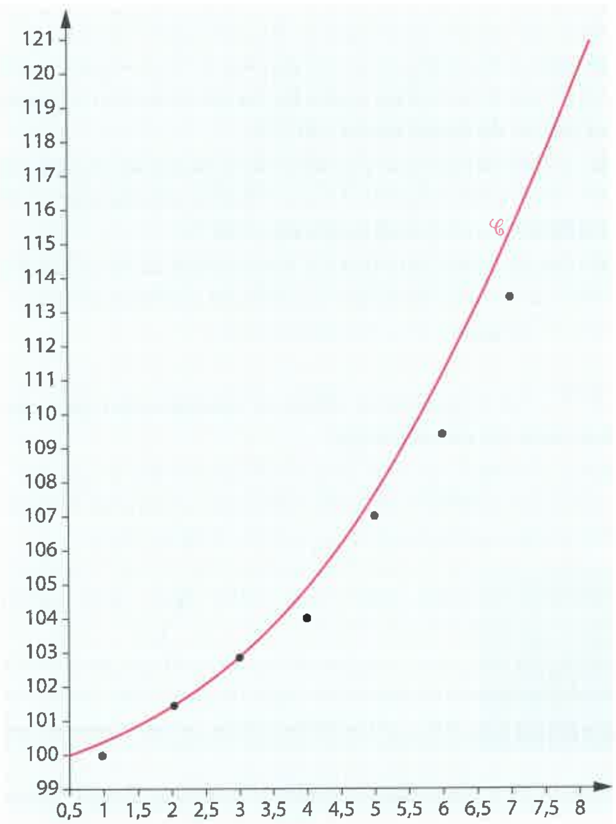
Un logiciel de calcul propose d'ajuster le nuage de points à l'aide d'une partie de la courbe d'équation :
$y = 0{,}3x^2 + 0{,}1x + 99{,}9$.

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie.

a) Déterminer l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 8.

b) On suppose que le modèle défini par la courbe $\mathscr{C}$ reste valable pour l'année 2015. Donner, selon ce modèle, la valeur de l'indice pour 2015.

Annexe



38. +++ Deux droites de régression

Le tableau suivant donne, en millions d'euros, le chiffre d'affaires et les dépenses publicitaires correspondantes pour une grande société pour 10 années successives.

Rang de l'année	Chiffre d'affaires : x_i	Dépenses de publicité : y_i
1	99,6	11,4
2	114,0	13,6
3	131,5	15,8
4	159,7	18,2
5	220,2	22,1
6	223,3	27,3
7	266,2	34,7
8	311,5	42,2
9	344,6	47,9
10	416,9	55,9

1. Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$.

Unités :

– sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 20 millions d'euros, l'origine sur l'axe est le point d'abscisse 80 millions ;

– sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 2 millions d'euros, l'origine sur cet axe est le point d'ordonnée 10 millions.

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire qui lie ces deux variables statistiques (donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2}).

3. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de régression $\mathscr{D}_1$ de y en x et une équation de la forme $x = a'y + b'$, de la droite de régression $\mathscr{D}_2$ de x en y (les coefficients numériques seront arrondis à 10^{-3}).

4. Déterminer les coordonnées de deux points de chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, puis tracer $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sur le graphique de la question **1**.

39. +++ Progression d'une épidémie

Pour étudier la progression d'une épidémie de grippe, une enquête est faite auprès d'un échantillon de 1 000 personnes ; le tableau ci-dessous donne le nombre $N(t)$ d'individus ayant été contaminés, à la date t, exprimée en jours.

t	1	2	5	10	15	20
$N(t)$	88	172	306	420	485	500

On considère qu'après 20 jours l'épidémie est terminée, c'est-à-dire que le nombre total de personnes ayant été contaminées ne varie plus.

1. a) Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points de coordonnées $(t, N(t))$ (unités graphiques : 0,5 cm pour 1 jour en abscisse, 1 cm pour 50 individus en ordonnée).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de N en t et la tracer. Les coefficients sont à arrondir à l'unité.

c) Déduire de l'ajustement précédent une estimation du nombre d'individus contaminés au bout d'une semaine.

2. On considère la fonction définie sur $[0, 40]$ par :

$f(t) = 500(1 - e^{-0,2t})$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant (les résultats sont à arrondir à l'unité).

t	1	2	5	10	15	20	30	40
$f(t)$								

b) Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ précédent.

c) Déterminer graphiquement quelle est, de la droite de la première question ou de la courbe précédente, celle qui ajuste le mieux le nuage et l'utiliser pour indiquer la date à laquelle le quart de la population étudiée a déjà été atteint.

40. +++ Un ajustement affine et un ajustement logistique

Le tableau suivant donne le nombre de clients de téléphone mobile achetant leur forfait dans une chaîne d'hypermarchés.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de clients en milliers y_i	11,2	20,6	29,7	37,0	39,6	41,7	44,5	48,0

Une représentation du nuage de points (x_i, y_i) est donnée dans l'annexe à rendre avec la copie. Le point G est le point moyen du nuage.

Partie A

On souhaite réaliser un ajustement affine.

1. Déterminer une équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés. (Arrondir les coefficients au centième).

À partir des calculs ci-dessus, on décide de réaliser un ajustement affine à l'aide de la droite $\mathscr{D}$ d'équation :
$y = 4{,}9x + 16{,}7$.

2. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.

3. En supposant que ce modèle reste valable pour 2014 et 2015, prévoir le nombre de clients pour la fin de l'année 2015. Indiquer la méthode utilisée.

Partie B

On admet qu'un autre ajustement du nuage de points est obtenu à l'aide d'une partie de la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle [0, 10] par :

$$f(x) = \frac{52}{1 + 3e^{-0{,}6x}}.$$

1. Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir au dixième).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$		19,6	27,3							

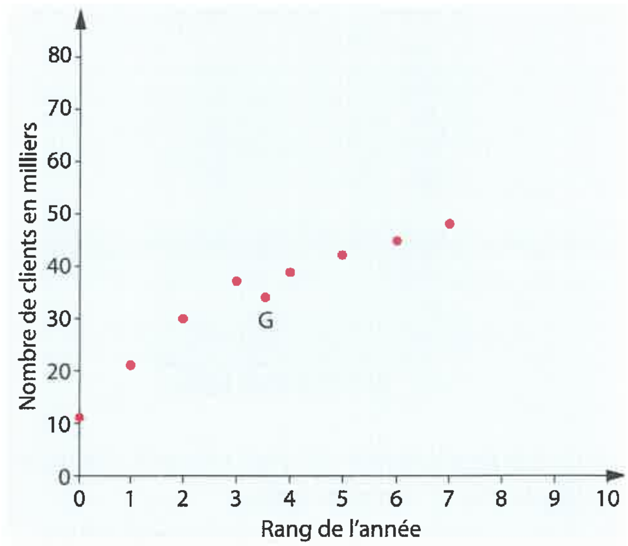
2. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique de l'*annexe à rendre avec la copie.*

Dans la suite, on suppose que ce modèle reste valable jusqu'à la fin de l'année 2016.

3. Donner, selon ce modèle, le nombre de clients pour la fin de l'année 2015.

4. Indiquer si selon ce modèle on peut envisager de dépasser au cours de l'année 2016 le nombre de 52 000 clients. Expliquer la démarche conduisant à cette réponse.

Feuille annexe (à rendre avec la copie)



▶ **Fonctions logistiques :** *voir l'information précédant l'exercice 254 du chapitre 1 du tome 1.*

41. +++ Ajustement affine, ajustement exponentiel, calcul d'une valeur moyenne

Le tableau suivant donne la population d'une ville sur 30 années consécutives.

Rang de l'année : x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants : y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-dessous ; le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.

A. *Ajustement affine*

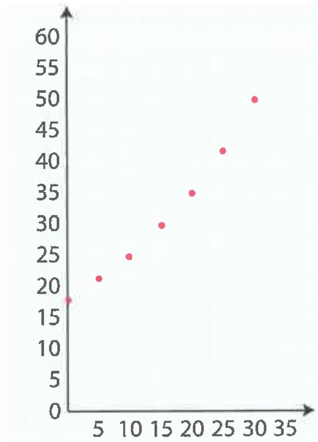
1. a) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).

b) Tracer cette droite sur le graphique ci-après après l'avoir reproduit.

2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population l'année de rang 33 à un millier près.

B. *Ajustement exponentiel*

1. L'allure du nuage incite à ajuster le nuage de points précédent par la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 18e^{0{,}034x}$.



Déduire de cet ajustement une estimation de la population l'année de rang 33 à un millier près.

2. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique.

3. La population l'année de rang 33 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

C. *Détermination d'une valeur moyenne*

1. f est la fonction définie en **B. 1.**

a) Démontrer que la valeur moyenne de f sur [0,30] est :

$$V_m = \frac{18}{1,02}(e^{1,02} - 1) .$$

b) Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-1}.

2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer le rang de l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

Ajustements se ramenant à un ajustement affine

42. ++ Gestion de parc automobile

Pour un parc de véhicules d'un grand groupe industriel, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant les six premiers mois de mise en service.

Pour les véhicules ayant eu, au plus, quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Effectif : n_i	1 345	508	228	78	35

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
$y_i = \ln n_i$					

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

3. À l'aide de l'équation précédente, estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant les six premiers mois de mise en service.

CORRIGÉ P. 277

43. +++ Incident nucléaire

Suite à un incident nucléaire, on a consigné dans le tableau suivant, heure par heure, les résultats fournis par un appareil de mesure de la radioactivité. Les N_i sont des nombres entiers représentant le nombre de particules recueillies par l'appareil pendant une seconde.

t_i en heure	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i - 2)$ pour tout i variant de 0 à 6 (où ln désigne le logarithme népérien).

Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.

Représenter le nuage (t_i, z_i) dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm pour une heure en abscisse, 4 cm pour une unité en ordonnée).

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (t_i, z_i) et donner une équation de la droite de régression de z en t (les coefficients sont à arrondir à 10^{-3}).

3. Donner l'expression de N en fonction de t déduite de cet ajustement.

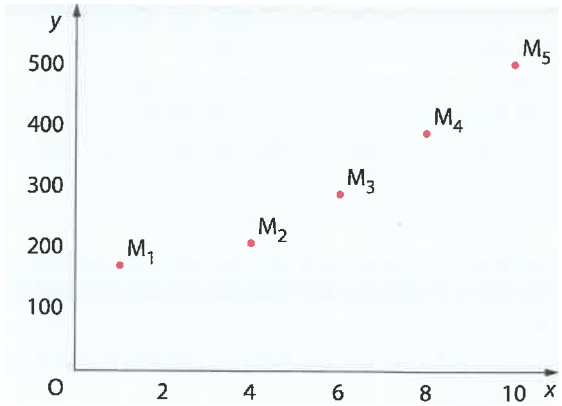
4. En supposant que l'expression obtenue en **3.** reste valable, déterminer à partir de quel relevé on obtiendra une valeur de N inférieure ou égale à 3.

44. +++ Chiffre d'affaires

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA) d'une entreprise industrielle, en millions d'euros, sur la période 2004-2013.

Année	2004	2007	2009	2011	2013
Rang : x_i	1	4	6	8	10
CA : y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ est représenté ci-après dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?



2. On pose $z_i = \ln y_i$.

a) Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.

b) Construire le nuage de points $N_i(x_i, z_i)$ dans le repère orthogonal suivant :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année ;
- sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3. a) Déterminer avec la calculatrice ou un tableur une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-3}) et tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.

b) En déduire une relation entre y et x.

4. a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).

b) Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2015.

c) À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

45. +++ Recul d'un glacier (sujet de bac TES 2011)

Pour étudier le recul d'un grand glacier alpin au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900.

Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.

On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900)	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km)	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25{,}6 - 0{,}6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3}.

A. *Ajustement affine*

1. Tracer le nuage de points dans le repère donné en annexe (durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

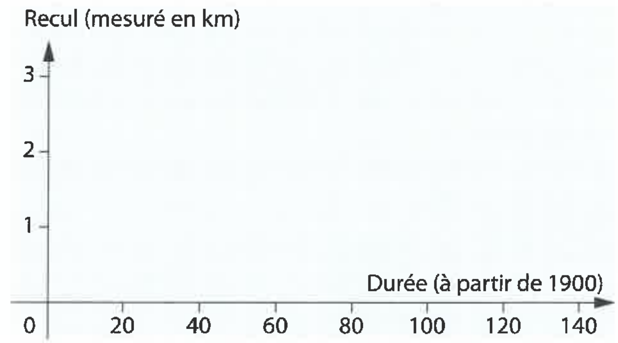
2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine de r en t par la méthode des moindres carrés, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3. À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul, puis la longueur du glacier en 2015.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Annexe



B. *Ajustement exponentiel*

Le résultat du **3.b)** de la partie **A.** étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln r$. On rappelle que $\ln r$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1. Recopier, puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau).

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln r$					

2. a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés.

b) Déduire que $r(t) = e^{0{,}025t - 1{,}599}$.

3. En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul, puis la longueur du glacier en 2015.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

46. +++ Ajustement se ramenant à un ajustement affine, fonction exponentielle

Avant la commercialisation d'un nouveau système d'alarme, son fabriquant cherche à déterminer son prix de vente de façon à réaliser un bénéfice maximal.

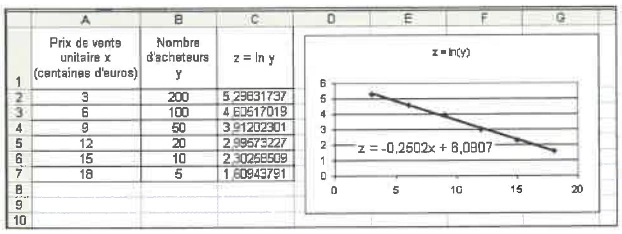
1. *Recherche du nombre d'acheteurs potentiels*

Le fabriquant réalise une enquête pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels y selon le prix de vente x, en centaines d'euros, du système d'alarme. Les résultats figurent en colonnes A et B de la feuille de calcul suivante.

a) On a réalisé un ajustement affine du nuage des points de coordonnées $(x, \ln y)$.

Quelle formule est entrée en C2 puis recopiée vers le bas ?

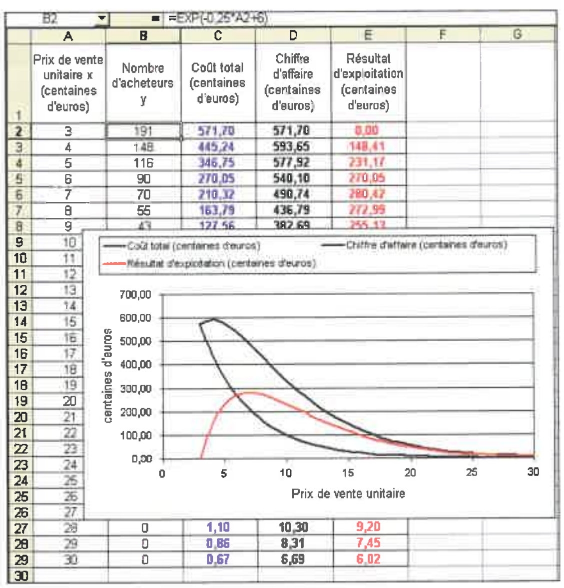
b) En posant $z = \ln y$, l'ajustement fournit la droite d'équation : $z = -0{,}250\,2x + 6{,}080\,7$. En déduire une expression de y en fonction de x.



	A	B	C
1	Prix de vente unitaire x (centaines d'euros)	Nombre d'acheteurs y	z = ln y
2	3	200	5,29831737
3	6	100	4,60517019
4	9	50	3,91202301
5	12	20	2,99573227
6	15	10	2,30258509
7	18	5	1,60943791
8			
9			
10			

2. *Étude du résultat d'exploitation*

Le coût unitaire d'un système d'alarme est 300 €. Sur une autre feuille de calcul, le fabriquant étudie le résultat d'exploitation prévisible.



	A	B	C	D	E
1	Prix de vente unitaire x (centaines d'euros)	Nombre d'acheteurs y	Coût total (centaines d'euros)	Chiffre d'affaire (centaines d'euros)	Résultat d'exploitation (centaines d'euros)
2	3	191	571,70	571,70	0,00
3	4	148	445,24	593,65	148,41
4	5	116	346,75	577,92	231,17
5	6	90	270,05	540,10	270,05
6	7	70	210,32	490,74	280,42
7	8	55	163,79	436,79	272,99
8	9	43	127,56	382,69	255,13
9	10				
10	11				
11	12				
12	13				
13	14				
14	15				
15	16				
16	17				
17	18				
18	19				
19	20				
20	21				
21	22				
22	23				
23	24				
24	25				
25	26				
26	27				
27	28	0	1,10	10,30	9,20
28	29	0	0,86	8,31	7,45
29	30	0	0,67	6,69	6,02
30					

La colonne B est au format d'affichage « Nombre avec 0 décimale ». Les calculs utilisant les résultats de cette colonne seront cependant effectués avec les décimales.

Conformément à l'étude précédente le nombre d'acheteurs potentiels est calculé en entrant en B2 la formule =EXP(-0,25*A2+6) .

a) Quelle formule entrée en C2 sur cette seconde feuille de calcul, puis recopiée vers le bas, permet de calculer le coût total ?

b) Quelle formule entrée en D2 puis recopiée vers le bas, permet de calculer le chiffre d'affaires ?

c) Quelle formule entrée en E2 puis recopiée vers le bas, permet de calculer le résultat d'exploitation ?

d) Montrer que le résultat d'exploitation, en centaines d'euros, est donné en fonction du prix unitaire x par

$$f(x) = (x - 3)e^{-0{,}25x+6}.$$

e) À quel prix, d'après la feuille de calcul, la société doit-elle proposer le système d'alarme pour réaliser un bénéfice maximal ?

f) Un logiciel de calcul formel donne comme expression de la dérivée de f :

$f'(x) = \left(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{4}\right)e^{-\frac{x}{4}+6}$. Calculer $f'(7)$.

CORRIGÉ P. 277

Ajustement affine et équation différentielle

47. +++ Perfusion lente

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Pour un examen cardiovasculaire, on effectue une perfusion lente à débit constant d'une solution marquée par un indicateur radioactif.

A. *Étude expérimentale*

On relève l'évolution de la concentration au niveau du ventricule droit et on obtient les résultats suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i : temps en minutes	0	2	4	6	8	10	12
c_i : concentration en microgrammes par cm^3	0	54	84	100	109	114	117

Dans cette partie, les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

1. On pose $z_i = \ln(120 - c_i)$, ln désigne le logarithme népérien. Donner les valeurs de z_i pour i variant de 1 à 7.

2. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de z en t.

3. Donner une expression de la concentration c en fonction de t déduite de cet ajustement.

4. Utiliser l'ajustement précédent pour déterminer au bout de combien de temps $c = 118$.

B. *Résolution d'une équation différentielle*

On admet que la fonction c est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}3y = 36$.

1. a) Résoudre l'équation (E_0) : $y' + 0{,}3\,y = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. Déterminer la fonction solution c qui vérifie $c(0) = 0$.