CHAPITRE 5

Fiabilité

Ce chapitre propose une initiation à l'étude de la fiabilité d'un dispositif ; il s'agit, d'une part, de dégager quelques modèles théoriques à l'aide du calcul des probabilités et, d'autre part, d'estimer les paramètres les plus usuels.

COURS

Ce chapitre concerne les deux BTS Environnement nucléaire et Maintenance industrielle

Supposons que vous ayez à choisir un téléphone mobile, un micro-ordinateur ou une voiture ; dans chaque cas, parmi les critères qui vont guider votre choix, l'un d'entre eux peut être la fiabilité.

Dans le langage courant, dire qu'un modèle est plus fiable qu'un autre signifie que, *en général*, un appareil de ce modèle fonctionne correctement plus longtemps qu'un appareil de l'autre modèle ; il s'agit évidemment d'une tendance, non d'une certitude.

Il tombe moins souvent en panne.

Aussi, pour définir la fiabilité, on est conduit à parler de probabilité.

Ainsi, pour l'AFNOR, la **fiabilité** est « *la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une période donnée* ».

AFNOR : Association Française pour la NORmalisation.

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où cette « période donnée » est située soit avant la première panne ou défaillance, soit après une réparation qui a permis de remettre le dispositif à neuf.

Cette remise à neuf n'est pas obtenue, par exemple, lorsqu'on change une seule pièce d'une voiture usagée.

Dans chacune de ces deux situations nous allons étudier comment une telle probabilité peut être obtenue et quelles informations elle peut apporter.

Une telle étude est maintenant devenue très importante, notamment dans les secteurs où se posent des problèmes de sécurité ou lorsque les réparations sont impossibles.

Pensez au freinage des voitures et, plus généralement, aux industries aéronautique, spatiale, nucléaire,...

La fiabilité se situe aujourd'hui dans le cadre plus général de la **disponibilité** : pour un dispositif donné, on prend en compte en faisant intervenir le calcul des probabilités, non seulement les temps de bon fonctionnement (c'est l'objet de la fiabilité), mais aussi la durée des réparations (c'est l'objet de la **maintenabilité**).

Au-delà de la fiabilité industrielle, apparaissent de nouvelles applications, notamment dans le domaine biomédical (survie des malades) ou économique (durée de vie des entreprises ou durée de chômage).

1 Vocabulaire de la fiabilité

A. Principe général

On s'intéresse au temps de bon fonctionnement ou à la durée de vie avant défaillance d'un certain dispositif. Dans le domaine industriel, ce dispositif peut être, par exemple, une machine, une partie de machine, un réseau de machines, un objet fabriqué...

Conformément au programme de certaines spécialités de BTS, une première approche du vocabulaire de la fiabilité figure à la fin du cours sur la loi exponentielle : voir la partie **1** du chapitre **3**.

On dispose généralement, pour ce dispositif, d'un historique de pannes que l'on peut étudier grâce à l'outil statistique.

Afin de pouvoir faire des prévisions sur les pannes futures de dispositifs du même type, à partir de ces observations statistiques du passé, on doit recourir à la théorie mathématique des probabilités. Pour ce faire, il s'agit de rechercher un modèle probabiliste s'adaptant aux observations statistiques.

Passé → **STATISTIQUE** Historique de pannes → Recherche d'un modèle (estimation, ajustement) → **PROBABILITÉS** Variable aléatoire Loi de probabilité → Prévisions pour le **futur**

Exemple

On a mesuré, pour 20 éléments du même type, la durée de vie, en heures, avant la première défaillance.

Une défaillance peut être une panne, une avarie, un fonctionnement incorrect,…

Intervalle de temps (en heures)	Nombre d'éléments défaillants dans cet intervalle de temps
[0, 500]	7
]500, 1 000]	4
]1 000, 1 500]	3
]1 500, 2 000]	2
]2 000, 2 500]	2
]2 500, 3 000]	1
]3 000, 4 000]	1

B. Défaillance et fiabilité

Aspect statistique

Reprenons l'historique de défaillance des $n = 20$ éléments précédents et observons, d'un point de vue statistique, la défaillance et la fiabilité de ces éléments.

Nous constatons qu'à l'instant $t_1 = 500$, il y a $n_1 = 7$ éléments défaillants.

La fréquence des éléments défaillants à l'instant t_1 est donc $\frac{7}{20} = 0{,}35$ et celle des éléments fiables $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

À l'instant t_1 il y a 35 % d'éléments défaillants et 65 % d'éléments fiables parmi les 20 éléments observés.

De même, pour $t_2 = 1\,000$, il y a $n_2 = 7 + 4 = 11$ éléments défaillants.

La fréquence des éléments défaillants à l'instant t_2 est donc $\frac{11}{20} = 0{,}55 = 55\ \%$ et celle des éléments fiables $0{,}45 = 45\ \%$.

Nous pouvons ainsi compléter le tableau suivant (**méthode des rangs bruts**).

Par la méthode des rangs bruts, la fréquence f_i des éléments défaillants à l'instant t_i est :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Intervalle de temps (en heures)	Nombre d'éléments défaillants dans cet intervalle	Instant t_i (en heures)	Nombre n_i d'éléments défaillants à l'instant t_i	Fréquence des éléments défaillants à l'instant t_i	Fréquence des éléments fiables à l'instant t_i
[0, 500]	7	500	7	0,35	0,65
]500, 1 000]	4	1 000	11	0,55	0,45
]1 000, 1 500]	3	1 500	14	0,7	0,3
]1 500, 2 000]	2	2 000	16	0,8	0,2
]2 000, 2 500]	2	2 500	18	0,9	0,1
]2 500, 3 000]	1	3 000	19	0,95	0,05
]3 000, 4 000]	1	4 000	20	1	0

Pour un effectif total n petit, cette méthode présente un inconvénient. Pour les $n = 20$ éléments observés ici, aucun n'a survécu plus de 4 000 heures, mais si l'on avait étudié davantage d'éléments, nous aurions certainement observé des éléments de durée de vie supérieure à 4 000 heures. La **méthode des rangs moyens** consiste, pour calculer la fréquence des éléments défaillants, à diviser par $n + 1$ au lieu de diviser par n.

Par exemple pour $n < 50$.

Nous obtenons ainsi :

t_i (heures)	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	4 000
Fréquence des éléments défaillants à l'instant t_i	0,33	0,52	0,67	0,76	0,86	0,90	0,95
Fréquence des éléments fiables à l'instant t_i	0,67	0,48	0,33	0,24	0,14	0,10	0,05

Par la méthode des rangs moyens, la fréquence f_i des éléments défaillants à l'instant t_i est :

$$f_i = \frac{n_i}{n+1}$$

Remarque

Dans la cas où l'effectif total n est très petit, on peut être amené à utiliser la **méthode des rangs médians** : la fréquence f_i des éléments défaillants à l'instant t_i est alors : $f_i = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}$.

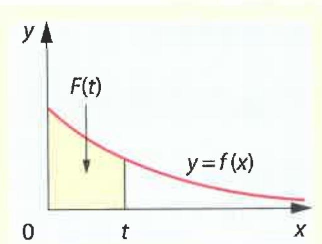
Variable aléatoire associée à la durée de vie

Considérons l'expérience aléatoire consistant à prendre au hasard un dispositif dans une population constituée de dispositifs de même type.

Désignons par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif ainsi tiré au hasard, associe son **temps de bon fonctionnement** ou sa durée de vie avant défaillance.

On note TBF le Temps de Bon Fonctionnement ; TBF a pour origine *Time Between Failures* : temps entre (deux) défaillances

Pour simplifier, nous choisissons comme origine des temps l'instant $t = 0$ où le dispositif choisi est mis en marche, soit pour la première fois, soit après une réparation qui l'a remis à neuf. Alors T mesure ainsi l'instant où apparaît la première défaillance d'un dispositif prélevé au hasard dans la population considérée, à partir de l'instant $t = 0$.



$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$; $F'(t) = f(t)$

Fonction de défaillance et fonction de fiabilité

Nous nous plaçons dans le cas où T est une variable aléatoire continue, prenant ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et possédant une densité de probabilité f.

DÉFINITION

La **fonction de défaillance** est la fonction F définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\boldsymbol{F(t) = P(T \leq t)}.$$

$\boldsymbol{F(t)}$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population considérée ait une défaillance avant l'instant t.

$F(t)$ étant une probabilité, $0 \leq F(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

$T > t$ est l'événement contraire de $T \leq t$.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Donc $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$,

$P(T > t) = 1 - F(t)$.

En fiabilité, ce nombre est noté $R(t)$.

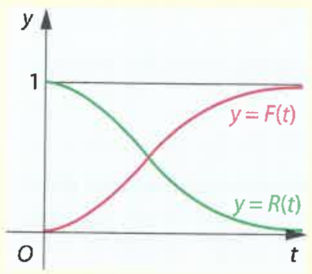
DÉFINITION

La **fonction de fiabilité** est la fonction R définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\boldsymbol{R(t) = 1 - F(t)}.$$

$\boldsymbol{R(t)}$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population considérée n'ait pas de défaillance avant l'instant t.

$0 \leq R(t) \leq 1$ pour tout t.



La question maintenant est celle du choix d'une loi de probabilité pour la variable T, conforme aux observations statistiques et pouvant modéliser la fiabilité du dispositif considéré.

Ce choix dépend de l'aspect du « taux d'avarie ».

C. Taux d'avarie

On dit aussi *taux de défaillance*.

Aspect statistique

Reprenons l'exemple du paragraphe **B**.

D'un point de vue statistique, **le taux d'avarie sur une période de temps** est la fréquence des défaillances durant cette période, obtenue par le quotient :

$$\frac{\text{nombre de défaillants au cours de la période}}{\text{nombre de survivants au début de la période}}.$$

Ainsi, durant l'intervalle de temps $]2\,000,\ 2\,500]$, nous observons deux défaillances alors que quatre dispositifs étaient en état de marche au début de l'intervalle de temps. Le taux d'avarie sur cet intervalle est donc $\frac{2}{4} = 0{,}5$ ou 50 %. C'est-à-dire que, durant cet intervalle de temps, 50 % des dispositifs en état de marche au début sont tombés en panne.

Au début de l'intervalle de temps $]3\,000,\ 4\,000]$, il ne restait qu'un dispositif en état de marche, qui est tombé en panne. Le taux d'avarie sur cet intervalle est donc $\frac{1}{1} = 1$ c'est-à-dire 100 %. Cependant, la durée de cette période, 1 000 heures, est deux fois plus longue que celle de la période précédente.

Pour pouvoir comparer les taux d'avarie de périodes de durées différentes, on calcule le **taux d'avarie moyen par unité de temps**, en divisant le taux d'avarie par la durée de la période.

On peut faire le rapprochement avec la notion de vitesse moyenne sur un intervalle de temps.

Pour l'intervalle $]2\,000,\ 2\,500]$, le taux d'avarie moyen par heure est $\frac{0{,}5}{500} = 0{,}001$ c'est-à-dire 0,1 %.

Pour l'intervalle $]3\,000,\ 4\,000]$, le taux d'avarie moyen par heure est $\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$ c'est-à-dire 0,1 %.

Le tableau suivant présente l'ensemble des résultats pour l'historique considéré.

Intervalle de temps (en heures)	Nombre d'éléments défaillants dans cet intervalle	Nombre de survivants au début de l'intervalle	Taux d'avarie durant l'intervalle %	Taux d'avarie par heure durant l'intervalle %
[0, 500]	7	20	35,00 %	0,07 %
]500, 1 000]	4	13	30,77 %	0,06 %
]1 000, 1 500]	3	9	33,33 %	0,07 %
]1 500, 2 000]	2	6	33,33 %	0,07 %
]2 000, 2 500]	2	4	50,00 %	0,10 %
]2 500, 3 000]	1	2	50,00 %	0,10 %
]3 000, 4 000]	1	1	100,00 %	0,10 %

Nous constatons sur cet exemple que le taux d'avarie par heure évolue peu et est proche de 0,1 %.

Modèle probabiliste

Soit t et h deux nombres réels strictement positifs. On s'intéresse au taux d'avarie sur l'intervalle $]t, t+h]$.

Nous avons vu que d'un point de vue statistique le taux d'avarie est le quotient du nombre de défaillants au cours de la période, par le nombre de survivants au début de la période. En divisant numérateur et dénominateur par l'effectif total, on peut aussi dire que le taux d'avarie est le quotient de la fréquence des défaillances au cours de la période, par la fréquence des survivants au début de la période.

Pensez à l'approche fréquentiste des probabilités.

L'analogue en probabilités est donc le quotient de la probabilité qu'un dispositif connaisse sa première défaillance dans l'intervalle $]t, t+h]$, par la probabilité qu'un dispositif soit encore en état de marche à l'instant t.

C'est-à-dire, par définition de la variable aléatoire T, le quotient :

$$\frac{P(t<T\leq t+h)}{P(t<T)}.$$

Par définition de la fonction de défaillance F, nous avons :

$P(t<T\leq t+h)=P(T\leq t+h)-P(T\leq t)=F(t+h)-F(t)$ et

$P(t<T)=1-P(T\leq t)=1-F(t)$.

Au taux d'avarie statistique correspond donc, dans le modèle probabiliste, le quotient $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}$.

Pour prolonger cette analogie avec le taux d'avarie moyen par unité de temps, on divise le quotient précédent par la longueur de l'intervalle $]t, t+h]$, c'est-à-dire $t+h-t=h$.

Nous obtenons $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}\times\dfrac{1}{h}$.

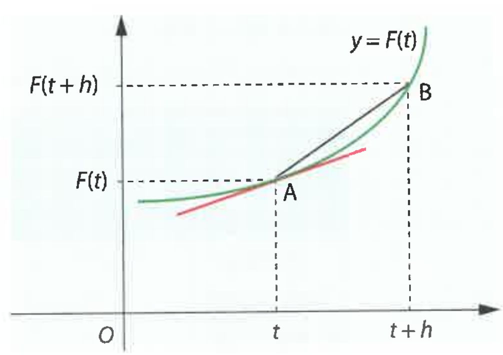
On peut alors définir le **taux d'avarie instantané** en faisant tendre h vers 0 dans l'expression précédente.

Nous avons supposé F dérivable sur $[0,+\infty[$; donc en tout $t\geq 0$:

Ici t est fixé.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'(t)$, par définition de $F'(t)$.

Notez l'analogie avec la **vitesse instantanée** à l'instant t qui est la **limite de la vitesse moyenne** entre les instants t et $t+h$ lorsque h tend vers 0 ou à la **tangente** en A qui est la position **limite** de la corde (AB) passant par A.



Nous en déduisons que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}\times\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\times\frac{1}{1-F(t)}=\frac{F'(t)}{1-F(t)}.$$

Comme $R(t) = 1 - F(t)$, on a aussi $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$.

DÉFINITION

Le **taux d'avarie** (ou de défaillance) instantané à l'instant t est

$$\boldsymbol{\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}}.$$

D. MTBF

On étend la définition de l'espérance et son interprétation données au paragraphe 1C du chapitre **3** pour la loi exponentielle.

L'espérance de la variable aléatoire T continue définie sur $[0, +\infty[$ et de densité de probabilité f est :

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

$E(T)$ est une *tendance centrale* des valeurs prises par la variable aléatoire T en tenant compte de leur probabilité.

Ainsi, dans l'exemple du paragraphe B, $E(T)$ représente la durée de vie **moyenne** d'un élément du type considéré avant sa première défaillance, cette moyenne étant calculée à partir d'un **très grand nombre** d'observations portant sur des éléments prélevés au hasard.

De même, dans le cas où on étudie le temps de bon fonctionnement d'une machine remise à neuf après chaque réparation, $E(T)$ représente le temps **moyen** de bon fonctionnement de la machine entre deux défaillances, calculé à partir d'un **très grand nombre** d'observations de ces temps de bon fonctionnement.

Le nombre $E(T)$ est noté habituellement **MTBF : Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement**.

DÉFINITION

$$\mathbf{MTBF} = \boldsymbol{E(T)} = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \boldsymbol{tf(t)}\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

De même, en maintenabilité, on introduit la Moyenne des Temps Techniques de Réparation, notée MTTR, dont l'origine est *Mean Time To Repair* : temps moyen pour réparer.

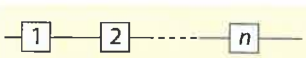
À l'origine, MTBF est le sigle de *Mean Time Between Failures*, qui se traduit par « temps moyen entre (deux) défaillances ».

E. Fiabilité d'un système

Nous étudions ici la fiabilité d'un système constitué de n composants. Nous notons T la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

Nous supposons que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ mesurant le temps de bon fonctionnement respectif de chacun des n composants sont **indépendantes**.

Montage en série



La défaillance d'**un seul** composant entraîne la défaillance du système.

À RETENIR

Un système est du type **série** pour la fiabilité lorsqu'il ne fonctionne correctement que si tous ses composants fonctionnent eux-mêmes correctement.

Pour un système constitué de n composants montés en série,

$$P(T > t) = P(T_1 > t \text{ et } T_2 > t \ldots \text{ et } T_n > t).$$

Si A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Comme les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont **indépendantes**,

$$P(T > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t) \ldots P(T_n > t).$$

Donc, par définition d'une fonction de fiabilité :

R_i est la fonction de fiabilité du composant i.

PROPRIÉTÉ

Dans un montage **en série**, la **fonction de fiabilité R** du système vérifie :

$$R(t) = R_1(t)R_2(t)\dots R_n(t).$$

Nous en déduisons pour les fonctions de défaillance :

$F(t) = 1 - R(t)$.

$F(t) = 1 - R_1(t)R_2(t)\dots R_n(t)$, soit :

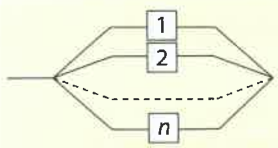
F_i est la fonction de défaillance du composant i.

PROPRIÉTÉ

Dans un montage **en série**, la **fonction de défaillance F** du système vérifie :

$$F(t) = 1-(1-F_1(t))(1-F_2(t))\dots(1-F_n(t)).$$

Montage en parallèle



Un montage en parallèle améliore la fiabilité.

À RETENIR

Un système est du type **parallèle** pour la fiabilité lorsqu'il n'est défaillant que si tous ses composants sont eux-mêmes défaillants.

Dès qu'**un seul** composant fonctionne correctement, le système fonctionne correctement.

Pour un système constitué de n composants montés en parallèle,

$$P(T \le t) = P(T_1 \le t \text{ et } T_2 \le \dots \text{ et } T_n \le t).$$

Les variables aléatoires T_1, T_2, …, T_n sont indépendantes.

Par un raisonnement analogue au précédent, nous obtenons :

PROPRIÉTÉ

Dans un montage **en parallèle**, la **fonction de fiabilité R** et la **fonction de défaillance F** du système vérifient :

$$F(t) = F(t_1)F(t_2)\dots F(t_n)$$
$$R(t) = 1-(1-R_1(t))(1-R_2(t))\dots(1-R_n(t)).$$

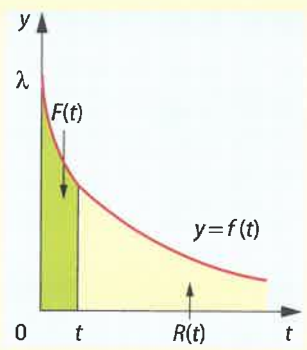
Remarque

Pour étudier la fiabilité d'un système comportant à la fois des montages de composants en série et en parallèle, on décompose ce système en sous-systèmes correspondant à un des deux montages étudiés ci-dessus.

2 | Loi exponentielle

A. Rappels

La loi exponentielle a été étudiée dans la partie **1** du chapitre **3**.



L'interprétation de la MTBF est donnée au paragraphe 1B.

À RETENIR

Soit T une variable aléatoire suivant le loi exponentielle de paramètre λ.

- La **densité de probabilité** de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geq 0$ par
$$\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}.$$
- La **fonction de défaillance** est définie pour tout $t \geq 0$ par
$$\boldsymbol{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}.$$
- La **fonction de fiabilité** est définie pour tout $t \geq 0$ par
$$\boldsymbol{R(t) = e^{-\lambda t}}$$
- $\boldsymbol{E(T) = \frac{1}{\lambda} = \text{MTBF}}$.
- $\sigma(\boldsymbol{T}) = \frac{\mathbf{1}}{\lambda}$.

Nous avons montré que la loi exponentielle correspond à un taux d'avarie constant.

PROPRIÉTÉ

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque **le taux d'avarie instantané est constant** :

pour tout $t \geq 0$, $\lambda(t) = \lambda$ constante strictement positive.

Voir le schéma au début de la partie 3.

Cette loi concerne tous les matériels pendant une partie de leur vie (en dehors des périodes de jeunesse et d'usure) et les matériels électroniques pendant presque toute leur vie.

B. Modèle à taux d'avarie constant

Nature du problème

En fiabilité se pose le problème de la mise en évidence d'une loi exponentielle à partir de données expérimentales et de l'estimation du paramètre λ.

Lorsque la variable aléatoire T, correspondant au temps de bon fonctionnement, suit la loi exponentielle de paramètre λ, la fonction de fiabilité est donnée par $R(t) = e^{-\lambda t}$.

En prenant le logarithme népérien, nous obtenons alors $\ln R(t) = -\lambda t$. Dans ce cas, $\ln R$ est une fonction linéaire du temps t.

Pour les valeurs t_i du temps dont on dispose dans un historique de pannes, notons $y_i = \ln R(t_i)$.

La forme « relativement rectiligne » du nuage de points obtenu à partir de l'**historique statistique,** permet de choisir un **modèle probabiliste** qui fournira des **prévisions.**

Lorsque le nuage des points de coordonnées (t_i, y_i) est correctement ajusté par une droite d'équation $y = at$, nous pouvons considérer que le modèle exponentiel convient à la situation et que la variable aléatoire T qui, à tout élément du type considéré tiré au hasard, associe sa durée de vie avant la première défaillance, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = -a$.

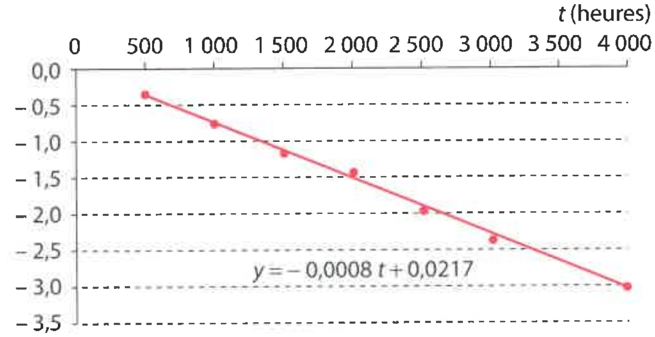
Résolution par la méthode des moindres carrés

Cette méthode est à pratiquer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur (voir TP1).

Conformément au programme des BTS, « **l'usage du papier semi-logarithmique n'est pas un attendu du programme** ».

Reprenons l'exemple donné en début de chapitre, pour lequel nous disposons des valeurs $R(t_i)$, obtenues selon la méthode des rangs moyens, dont nous calculons le logarithme népérien.

t_i (heures)	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	4 000
$R(t_i)$	0,667	0,476	0,333	0,238	0,14	0,10	0,048
$y_i = \ln[R(t_i)]$	− 0,405	− 0,742	− 1,100	− 1,435	− 1,945	− 2,354	− 3,037



Voir les parties **2** et **3** du chapitre **1**. Le coefficient de corrélation est $r \approx -0{,}998$, très proche de 1 en valeur absolue, ce qui conforte l'utilisation de la loi exponentielle.

En effectuant un ajustement affine des points de coordonnées (t_i, y_i), où $y_i = \ln[R(t_i)]$, nous obtenons par la méthode des moindres carrés la droite d'équation :
$y = -0{,}000\,8\,t + 0{,}021\,7$.

Donc $\ln[R(t)] = -0{,}000\,8\,t + 0{,}021\,7$,
et $R(t) = e^{-0{,}000\,8t} \times e^{0{,}021\,7}$.

Comme $e^{0{,}021\,7} \approx 1{,}02$, valeur voisine de 1, nous prendrons $R(t) = e^{-0{,}000\,8t}$.

Nous pouvons donc considérer que la variable aléatoire T, mesurant le temps de bon fonctionnement, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,8$.

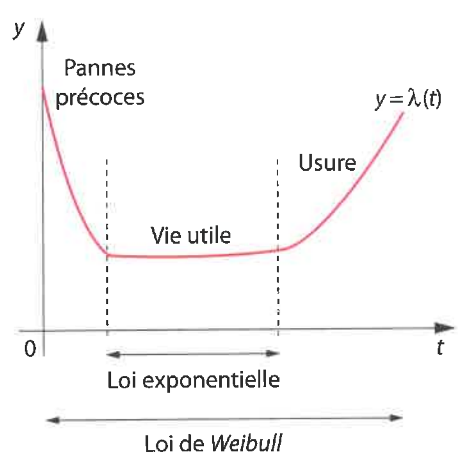
3 Loi de Weibull

A. Définition – propriétés

Taux d'avarie

La loi exponentielle permet de modéliser la fiabilité d'un dispositif dans le cas où le taux d'avarie λ est, pratiquement, constant.

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme d'une « **courbe en baignoire** » comportant trois parties distinctes.



À gauche, la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

Au centre, la période de maturité ou de « vie utile », où le taux d'avarie instantané reste à peu près constant ; pendant cette période, les pannes paraissent dues au hasard.

À droite, la période d'usure, où le taux d'avarie instantané augmente avec le temps, car les pannes sont dues à l'usure croissante du matériel.

Pour une centrale nucléaire, l'ensemble des trois périodes s'étale sur environ 60 ans. Pour un être humain… sur environ 80 ans…

Pour étendre l'étude de la fiabilité aux cas où le taux d'avarie $\lambda(t)$ varie avec le temps, le mathématicien suédois Weibull a choisi comme modèle de ce taux une fonction puissance qui facilite le calcul des intégrales intervenant en fiabilité. De plus, pour pouvoir choisir, d'une part, l'instant à partir duquel on étudie la fiabilité et, d'autre part, la valeur du taux d'avarie lorsque celui-ci est constant, Weibull a introduit trois paramètres, notés β, γ et η, dans l'expression de $\lambda(t)$.

Wallodi Weibull (1887-1979) travailla comme inventeur et ingénieur conseil dans des sociétés suédoises et allemandes, par exemple chez SAAB.

β (bêta), γ (gamma) et η (êta) sont des lettres de l'alphabet grec.

DÉFINITION

Soit T la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement d'un dispositif.

La **loi de Weibull** est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le **taux d'avarie** est :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \text{ pour tout } t > \gamma,$$

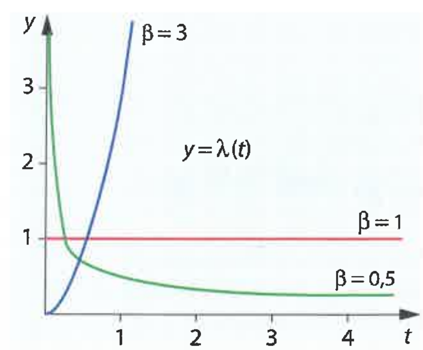
où β, γ, η sont des constantes telles que $\beta > 0$ et $\eta > 0$.

On peut poser $\lambda(t) = 0$ pour $t \leq \gamma$, en considérant qu'il n'y a pas de panne avant l'instant $t = \gamma$.

γ est le *paramètre de repérage* qui fixe l'instant à partir duquel on étudie la fiabilité.

Exemples

D'autres exemples sont proposés en exercices TICE de ce chapitre.



- $\beta = 3, \gamma = 0, \eta = 1$.

$\lambda(t) = 3t^2$ pour tout $t > 0$.

Donc λ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$; ce résultat est général lorsque $\beta > 1$.

- $\beta = 1, \gamma = 0, \eta = 1$.

$\lambda(t) = 1$ pour tout $t > 0$.

Nous retrouvons dans ce cas un taux d'avarie constant et donc une loi exponentielle ; son paramètre est $\lambda = 1$.

De façon plus générale, nous obtenons une loi exponentielle lorsque $\beta = 1$ et $\gamma = 0$; son paramètre est alors $\lambda = \frac{1}{\eta}$.

η est le *paramètre d'échelle.*

- $\beta = 0{,}5, \gamma = 0, \eta = 1$.

$\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ pour tout $t > 0$.

Dans ce cas, λ est une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$; ce résultat est général lorsque $0 < \beta < 1$.

Remarque

Les formes variées obtenues pour la représentation graphique de λ permettent d'utiliser la loi de Weibull, sur des intervalles appropriés, dans un très grand nombre de situations.

Dans ces trois exemples, seul β change de valeur. β est le *paramètre de forme.*

COURS

Fonction de fiabilité, fonction de défaillance, fonction de densité

En étendant à l'intervalle $]\gamma, +\infty[$ les définitions données aux paragraphes 1B et C, on obtient, pour tout $t > \gamma$:

$\lambda(t) = \dfrac{F'(t)}{1-F(t)}$ d'où, en intégrant,

$$\int_\gamma^t \lambda(x)\mathrm{d}x = \int_\gamma^t \frac{F'(x)}{1-F(x)}\mathrm{d}x = [-\ln(1-F(x))]_\gamma^t$$
$$= -\ln(1-F(t) = -\ln R(t)).$$

Nous en déduisons que $R(t) = \mathrm{e}^{-\int_\gamma^t \lambda(x)\mathrm{d}x}$.

Dans le cas d'une loi de Weibull.

$$\int_\gamma^t \lambda(x)\mathrm{d}x = \int_\gamma^t \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]_\gamma^t = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}.$$

$\lambda(t)$ est de la forme $-\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ où $u(t) = 1 - F(t) > 0$.

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ où $u > 0$ est $\ln u$.

Observez l'intérêt d'avoir choisi pour λ une fonction puissance.

PROPRIÉTÉ

Pour une loi de Weibull de paramètres β, γ et η, la fonction de fiabilité R, la fonction de défaillance F et la densité de probabilité f sont définies pour tout $t > \gamma$ par :

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

$$\text{et} \quad f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right].$$

$\beta > 0$ et $\eta > 0$.

$R(t) = \exp\left[-\int_\gamma^t \lambda(x)\mathrm{d}x\right]$,

$F(t) = 1 - R(t)$,

$f(t) = F'(t)$.

Exemples

- $\beta = 3, \gamma = 0, \eta = 1$.

$R(t) = \mathrm{e}^{-t^3}, F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t^3}, f(t) = 3t^2\mathrm{e}^{-t^3}$.

- $\beta = 1, \gamma = 0, \eta = 1$.

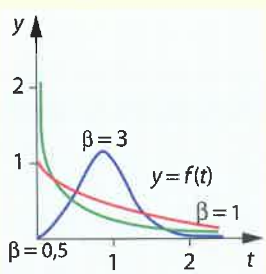
$R(t) = \mathrm{e}^{-t}, F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}, f(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Nous avons vu que, dans ce cas, nous retrouvons la loi exponentielle de paramètre 1.

- $\beta = 0{,}5, \gamma = 0, \eta = 1$.

$R(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}, F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}, f(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$.

On peut étendre les définitions de R, F et f à $\mathbb{R}$ en posant $R(t) = 1$, donc $F(t) = 0$ et $f(t) = 0$, pour tout $t \leq \gamma$.



Pour $\beta \geq 3$, la courbe représentative de f est proche de la courbe en cloche d'une loi normale.

On considère qu'il n'y a pas de panne avant l'instant γ.

MTBF

Nous admettons la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ

La MTBF d'une variable aléatoire suivant une loi de Weibull est :

$$\mathrm{MTBF} = \eta A + \gamma$$

où A est une intégrale dont la valeur est obtenue par des méthodes numériques.

Conformément au programme de BTS, « **les coefficients permettant le calcul de la MTBF dans le cas de la loi de Weibull sont fournis** ».

B. Modèle à taux d'avarie variable

Lorsque la variable aléatoire T, correspondant au temps de bon fonctionnement, suit la loi exponentielle de paramètres γ, β et η, la fonction de fiabilité est donnée par $R(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$.

L'idée, comme dans la situation de la loi exponentielle, est de se ramener à un ajustement affine. Pour cela, nous devrons prendre deux fois le logarithme.

$R(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$ équivaut à $-\ln(R(t)) = \left(\dfrac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$ puis à :

$$\ln[-\ln(R(t))] = \beta \ln\frac{t-\gamma}{\eta} = \beta\ln(t-\gamma) - \beta\ln(\eta).$$

$-\ln(R(t)) > 0$ car $R(t) < 1$ pour $t > \gamma$.

C'est-à-dire que, dans ce cas, $\ln[-\ln(R(t))]$ est fonction affine de $\ln(t-\gamma)$.

Pour les valeurs t_i du temps dont on dispose dans un historique de pannes, notons $x_i = \ln(t_i - \gamma)$ et $y_i = \ln[-\ln(R(t_i))]$.

Lorsque, pour une certaine valeur du paramètre γ, le nuage des points de coordonnées (x_i, y_i) est correctement ajusté par une droite d'équation $y = ax + b$, nous pouvons considérer que le modèle de Weibull convient à la situation et que la variable aléatoire T qui, à tout élément du type considéré tiré au hasard, associe sa durée de vie avant la première défaillance, suit une loi de Weibull.

Résolution par la méthode des moindres carrés

Conformément au programme de BTS, « **l'usage du papier de Weilbull n'est pas un attendu du programme** ».

Cette méthode est à pratiquer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur (voir le **TP2**).

Exemple

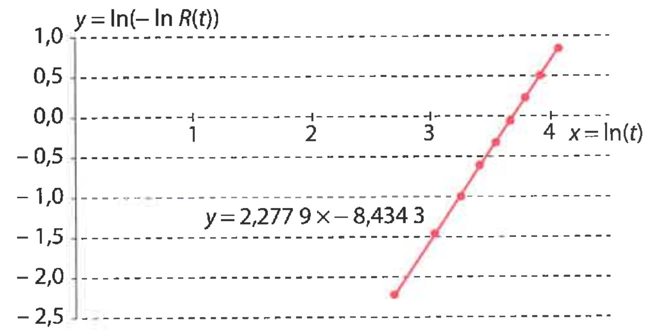
Une machine tombe fréquemment en panne. On a relevé pendant une année les temps de bon fonctionnement, en jours, entre deux défaillances consécutives :

44 – 21 – 39 – 50 – 15 – 26 – 58 – 30 – 35.

On suppose que chaque réparation effectuée cette année a remis la machine à l'état neuf, de sorte que l'on peut assimiler cette situation à celle où neuf machines du même type tombent en panne une fois.

Après classement des $n = 9$ temps de bon fonctionnement par ordre croissant, nous obtenons, selon la méthode de rangs moyens, le tableau suivant :

t_i (jours)	15	21	26	30	35	39	44	50	58
Nombre total de défaillances : n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(t_i) = n_i / 10$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$R(t_i) = 1 - F(t_i)$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$x_i = \ln t_i$	2,71	3,04	3,26	3,40	3,56	3,66	3,78	3,91	4,06
$y_i = \ln(-\ln R(t_i))$	– 2,25	– 1,50	– 1,03	– 0,67	– 0,37	– 0,09	0,19	0,48	0,83



Le nuage des points de coordonnées (x_i, y_i), où $x_i = \ln(t_i)$ et $y_i = \ln[-\ln(R(t_i))]$, étant pratiquement aligné, ceci justifie l'emploi d'une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$.

En effectuant un ajustement affine des points de coordonnées (x_i, y_i), nous obtenons par la méthode des moindres carrés la droite d'équation :

$y = 2{,}28x - 8{,}43$ (en arrondissant les coefficients à 10^{-2}).

Donc $\ln[-\ln(R(t))] = 2{,}28\ln(t) - 8{,}43 = \beta\ln(t) - \beta\ln(\eta)$.

Ainsi $\beta = 2{,}28$ et $\beta\ln(\eta) = 8{,}43$ d'où $\eta = e^{\frac{8{,}43}{2{,}28}} \approx 40$.

Nous pouvons donc considérer que la variable aléatoire T, correspondant au temps de bon fonctionnement, suit la loi de Weibull de paramètres $\gamma = 0$, $\beta = 2{,}28$ et $\eta = 40$.

Ce qu'il faut savoir

Fonction de défaillance et de fiabilité

- La ***fonction de défaillance*** est la fonction F définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\boldsymbol{F(t) = P(T \leq t).}$$

$F(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population considérée ait une défaillance avant l'instant t.

- La ***fonction de fiabilité*** est la fonction R définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\boldsymbol{R(t) = 1 - F(t).}$$

$R(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population considérée n'ait pas de défaillance avant l'instant t.

Taux d'avarie

- Le ***taux d'avarie*** (ou de défaillance) instantané à l'instant t est

$$\boldsymbol{\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.}$$

Moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF)

- $\mathbf{MTBF} = \boldsymbol{E(T)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \boldsymbol{tf(t)}$

Loi exponentielle

Soit T une variable aléatoire suivant le loi exponentielle de paramètre λ.

- La ***densité de probabilité*** de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

- La ***fonction de défaillance*** est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- La ***fonction de fiabilité*** est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

- $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \text{MTBF}.$
- $\sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}.$
- La ***loi exponentielle de paramètre λ*** est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque ***le taux d'avarie instantané est constant*** :

$$\text{pour tout } t \geq 0,\ \lambda(t) = \lambda \text{ constante strictement positive.}$$

Loi de Weibull

- Soit T la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement d'un dispositif.

La ***loi de Weibull*** est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le ***taux d'avarie*** est :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \text{ pour tout } t > \gamma,$$

où β, γ, η sont des constantes telles que $\beta > 0$ et $\eta > 0$.

- La **MTBF** d'une variable aléatoire suivant une loi de Weibull est :

$$\text{MTBF} = \eta A + \gamma$$

où A est une intégrale dont la valeur est obtenue par des méthodes numériques.

- Conformément au programme des BTS, « **les coefficients permettant le calcul de la MTBF dans le cas de la loi de Weibull sont fournis** ».

TRAVAUX PRATIQUES TICE

RÉPONSES P. 301

TP 1 Utiliser la régression linéaire pour ajuster une distribution observée à un modèle exponentiel avec le tableur

Fiabilité d'une machine de conditionnement

Une équipe a relevé durant une année les temps de fonctionnement, en heures, entre deux réglages consécutifs d'une machine de conditionnement et a obtenu les temps de bon fonctionnement, rangés en ordre croissant, suivants :

30 ; 50 ; 90 ; 130 ; 170 ; 230 ; 300 ; 410 ; 580.

On souhaite, à partir de cet historique, modéliser les durées de bon fonctionnement par une loi exponentielle.

A. Régression linéaire

Lorsque la variable aléatoire T correspondant au temps de bon fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a $R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

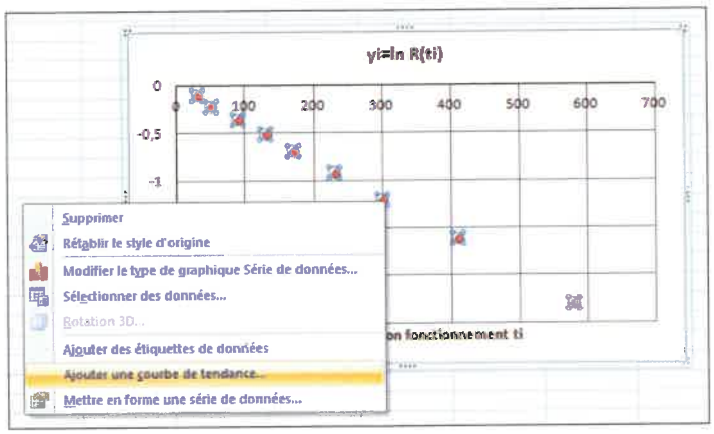
En prenant le logarithme, on a l'équivalence :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln R(t) = -\lambda t.$$

	A	B	C	D
1	TBF ti	F(ti)	R(ti)	yi=ln R(ti)
2	30	0,1	0,9	-0,10536052
3	50	0,2	0,8	-0,22314355
4	90	0,3	0,7	-0,35667494
5	130	0,4	0,6	-0,51082562
6	170	0,5	0,5	-0,69314718
7	230	0,6	0,4	-0,91629073
8	300	0,7	0,3	-1,2039728
9	410	0,8	0,2	-1,60943791
10	580	0,9	0,1	-2,30258509

Si le modèle exponentiel est adapté, on devrait donc avoir les points de coordonnées (t_i, y_i), avec $y_i = \ln R(t_i)$, correspondant aux valeurs observées, pratiquement alignés sur la droite d'équation :

$$y = -\lambda t.$$



1. Sur une feuille de calcul, entrer les temps de bon fonctionnement t_i observés ainsi que les fréquences de défaillances $F(t_i)$ obtenues selon la méthode des rangs moyens. Représenter le nuage de points (t_i, y_i), correspondant aux valeurs observées, puis y ajuster une « droite de tendance » (obtenue par régression selon les moindres carrés). Afficher une équation de la droite d'ajustement ainsi que le « coefficient de détermination ».

2. Quelle est l'équation de la droite d'ajustement $y = at + b$ affichée par le tableur ?

3. Déduire, à l'aide cette équation, une expression de $R(t)$ sous la forme $R(t) = e^{at+b}$.

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (c'est ici l'opposé de la racine du coefficient de détermination R^2). Comment peut-on interpréter la valeur de r ?

B. Estimation du paramètre de la loi exponentielle

L'ajustement linéaire précédent incite à choisir le modèle exponentiel.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de e^{-b}.

2. En prenant comme valeur approchée $e^{-b} = 1$, donner une expression de $R(t)$.

3. En déduire que l'on peut considérer que T suit une loi exponentielle et en donner le paramètre λ.

4. Calculer la M.T.B.F. selon la loi exponentielle précédente.

TP 2 Utiliser la régression linéaire pour ajuster une distribution observée à un modèle de Weibull avec le tableur

Ce TP peut permettre d'évaluer les capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

Fiabilité des armoires de contrôle d'un robot industriel

Le service de maintenance d'une entreprise préconise, pour les armoires de contrôle d'un robot industriel, des interventions préventives (par changement de certains éléments électroniques). La période de ces interventions sera déterminée à partir d'un historique de pannes d'une armoire de contrôle choisie au hasard.

Les neuf premiers temps de bon fonctionnement (en jours) de cette armoire de contrôle sont les suivants (rangés en ordre croissant) : 31 ; 42 ; 67 ; 77 ; 89 ; 95 ; 122 ; 144 ; 173.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute armoire de contrôle, associe son temps de bon fonctionnement. On cherche à ajuster la loi de T à une loi de Weibull.

1. Reproduire et compléter sur une feuille de calcul le tableau ci-dessous, où $F(t_i)$ et $R(t_i)$ correspondent respectivement à la défaillance et à la fiabilité observées au temps t_i (selon la méthode des rangs moyens).

t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$x_i = \ln(t_i)$	$y_i = \ln[-\ln R(t_i)]$
31	0,1			
42	0,2			
67	0,3			
77	0,4			
89	0,5			
95	0,6			
122	0,7			
144	0,8			
173	0,9			

2. Représenter sur le tableur le nuage des points de coordonnées (x_i, y_i) où $x_i = \ln(t_i)$ et $y_i = \ln[-\ln(R(t_i))]$. Ajuster à ce nuage une droite de régression en faisant figurer une équation de la droite ainsi que le « coefficient de détermination », carré du coefficient de corrélation linéaire.

3. On admet que $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ équivaut à $y = \beta x - \beta \ln\eta$, où l'on a posé :

$$x = \ln t \text{ et } y = \ln[-\ln R(t)].$$

Déduire des informations précédentes :

a. que l'on peut considérer que T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$;

b. que l'on peut prendre, pour les deux autres paramètres, $\beta = 1{,}75$ (arrondi au centième) et $\eta = 109$ (arrondi à l'unité).

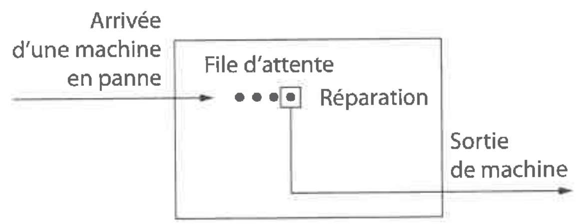
Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

4. Déterminer, par le calcul, la périodicité d'interventions préventives basée sur une fiabilité de 80 %.

TP 3 Simuler une situation dans un contexte de fiabilité avec Scilab ou Python

File d'attente

On considère un atelier de maintenance d'une grande entreprise où les machines d'un certain type en panne arrivent aléatoirement à un poste unique de réparation. La durée de réparation est également aléatoire, de sorte qu'une file d'attente de machines en panne peut aléatoirement se former.



On modélise la durée, en minutes, séparant l'arrivée successive de deux machines en panne par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Le temps de réparation d'une machine est modélisé par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.

1. L'évolution de la file d'attente sur l'intervalle de temps [0, 2 000] est simulée par le programme suivant, donné en langage Scilab et en langage Python, où la réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ est simulée par $-\ln(\text{rand}())/\lambda$.

```
l=input("lambda = ")
m=input("mu = ")
t=-ln(rand())/l
q=1
clf
plot([t],[q],"+r")
r=-ln(rand())/m
a=-ln(rand())/l
while t < 2000
    if q <> 0 then
        if a > r then
            q=q-1
            a=a-r
            t=t+r
            r=-ln(rand())/m
        else
            q=q+1
            r=r-a
            t=t+a
            a=-ln(rand())/l
        end
        plot([t],[q],"+r")
    else
        q=1
        t=t+a
        a=-ln(rand())/l
        plot([t],[q],"+r")
    end
end
```

```python
from numpy import*
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt

def file(l,m):
    t=-log(random())/l
    q=1
    plt.clf()
    plt.plot([t],[q],'r+')
    r=-log(random())/m
    a=-log(random())/l
    while t < 2000:
        if q != 0:
            if a > r:
                q=q-1
                a=a-r
                t=t+r
                r=-log(random())/m
            else:
                q=q+1
                r=r-a
                t=t+a
                a=-log(random())/l
            plt.plot([t],[q],'r+')
        else:
            q=1
            t=t+a
            a=-log(random())/l
            plt.plot([t],[q],'r+')
    plt.show()
```

Dans ce programme, le rôle des variables est le suivant :

t : cumul des durées entre les arrivées des machines ;

q : nombre de machines présentes dans le système ;

a : durée avant l'arrivée de la prochaine machine en panne ;

r : durée de réparation de la machine en cours de réparation.

a. Traduire dans le contexte la condition « a > r » apparaissant dans le programme.

b. Traduire dans le contexte les instructions « $q = q - 1$ » et « $q = q + 1$ » apparaissant dans le programme.

c. Implanter le programme et l'exécuter pour les valeurs $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$.

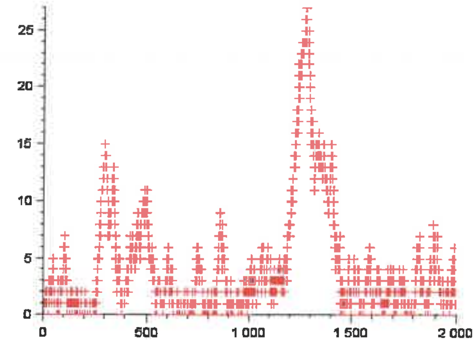
Qu'observe-t-on ?

d. Lorsque $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$, quelle est, théoriquement, la durée moyenne entre deux arrivées et la durée moyenne d'une réparation ?

e. Exécuter le programme pour les valeurs $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}35$.

Qu'observe-t-on ?

Quelle est, dans ce cas, la durée moyenne théorique d'une réparation ?



2. Le coût moyen d'immobilisation d'une machine en panne pour l'entreprise est de 100 € par jour. La fiabilité de ces machines fait qu'on ne peut modifier le paramètre $\lambda = 0{,}25$. En revanche, l'adjonction d'un employé supplémentaire au poste de réparation permettrait d'obtenir $\mu = 0{,}35$ pour un coût de 100 € par jour. De façon à voir si la stratégie consistant à adjoindre un employé supplémentaire est rentable pour l'entreprise, on souhaite étudier le nombre moyen de machines présentes dans le système selon les valeurs de μ.

a. Modifier le programme précédent, en supprimant les instructions graphiques et en introduisant une variable n correspondant au cumul des produits des nombres de machines présentes par la durée de présence de ces nombres.

Initialiser n à 0. Ajouter les instructions « $n = n + q*r$ » après « t = t + r » et « $n = n + q*a$ » après « t = t + a ».

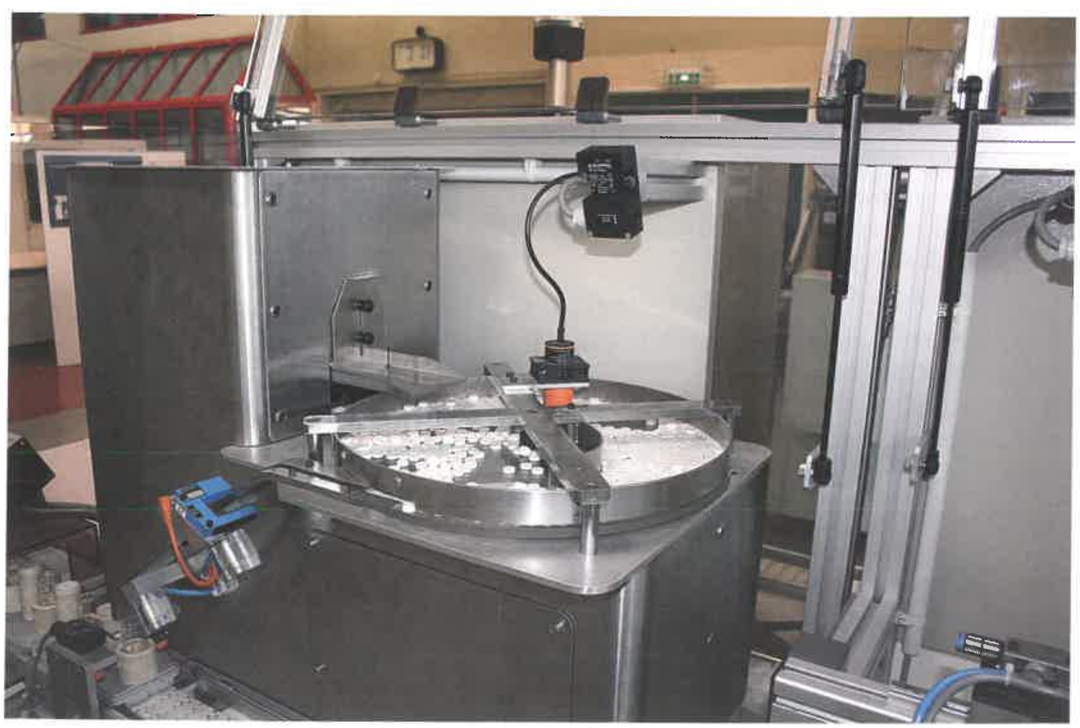
Faire afficher en fin de programme la valeur de n/t.

Modifier l'intervalle de temps étudié en [0, 100 000].

b. Exécuter le programme modifié avec $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}3$.
Qu'obtient-on ?

c. Exécuter le programme modifié avec $\lambda = 0{,}25$ et $\mu = 0{,}35$.
Qu'obtient-on ?

d. Conclure sur la stratégie la plus rentable.



EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES	Exercices corrigés
• Vocabulaire de la fiabilité	
Connaître le vocabulaire de la fiabilité et en effectuer une traduction mathématique.	1, 6, 9, 19, 20
• Loi exponentielle, loi de Weibull	
À l'aide d'un logiciel, utiliser la régression linéaire pour ajuster une distribution observée à un modèle exponentiel ou de Weibull et estimer les paramètres de la loi correspondante.	6, 9, 10, 15, 18
Calculer et interpréter des probabilités de panne et la MTBF dans le cas d'une loi exponentielle ou de Weibull.	1, 5, 15, 19, 20, 25
Calculer la périodicité d'une intervention fondée sur une fiabilité déterminée.	15
Simuler une situation dans un contexte de fiabilité.	17

Loi exponentielle

1. ++ Trouver le paramètre

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

1. Calculer le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leq 70) = 0{,}05$. Arrondir à 10^{-6}.

2. Les valeurs prises par T étant des heures, déterminer, à une unité près, la MTBF et l'écart type de T.

3. Calculer $P(T > 30)$. Arrondir à 10^{-4}.

CORRIGÉ P. 303

2. ++ Fiabilité d'un certain type de composants

On considère des composants d'un certain type.

On admet que la variable aléatoire T qui associe à tout composant tiré au hasard sa durée de vie exprimée en jours suit la loi exponentielle définie par $R(t) = e^{-0{,}000\,2t}$.

1. Déterminer la probabilité que l'un de ces composants ait une durée de vie supérieure à 2 000 jours. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

2. Déterminer la MTBF et l'écart type de T.

3. Déterminer la valeur de t_0, arrondie à 1 jour, pour laquelle $P(T \leq t_0) = 0{,}5$.

3. ++ On perce la tôle

Une machine automatique perce des tôles.

On admet que la variable aléatoire qui associe à toute machine de ce type tirée au hasard dans l'ensemble de la production sa durée de vie (fiabilité) suit une loi exponentielle. La MTBF (moyenne des temps de bon fonctionnement) annoncée par le constructeur est de 5 000 heures.

On donnera les valeurs exactes, des probabilités, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-2}.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance au cours des 2 000 premières heures d'utilisation d'une telle machine.

2. Sachant qu'une machine de ce type n'a connu aucune défaillance au cours des 2 000 premières heures d'utilisation, quelle est la probabilité que cette machine ne connaisse aucune défaillance pendant les 6 000 premières heures d'utilisation ?

4. ++ Trouver le paramètre

1. Déterminer l'expression de $R(t)$ qui caractérise une loi exponentielle sachant que $P(T > 400) = 0{,}4$.

2. En déduire $P(T \leq 1\,000)$.

3. Calculer, à une unité près, la MTBF et la probabilité de survie jusqu'à la MTBF (arrondir à 10^{-2}).

5. +++ Loi exponentielle et probabilités conditionnelles

Les résultats, lorsqu'il s'agit de probabilités, seront arrondis à 10^{-3}.

On a étudié sur un banc d'essai la durée de vie d'un très grand nombre de tubes fluorescents d'un certain type. La moyenne des temps de bon fonctionnement de ces tubes (MTBF) est 670 heures.

On admet que la variable aléatoire X, qui, à tout tube fluorescent de ce type associe sa durée de vie exprimée en heures, suit une loi exponentielle. On désigne par R la fonction de fiabilité correspondante.

1. a) Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-4} du paramètre de la loi suivie par X. En déduire l'expression de $R(t)$ en fonction de t.

b) Calculer $P(X \leq 500)$ puis $P(X > 1\,000)$. Traduire ces résultats par une phrase.

2. On prélève au hasard un tube fluorescent du type considéré,

– soit A l'événement « le tube n'a pas eu de défaillance au cours des 600 premières heures d'utilisation,

– soit B l'événement « le tube n'a pas eu de défaillance au cours des 900 premières heures d'utilisation.

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : « le tube n'a pas eu de défaillance pendant les 900 premières heures sachant qu'il n'en a pas eu au cours des 600 premières heures ».

CORRIGÉ P. 303

6. +++ Fiabilité, ajustement par la méthode des moindres carrés, probabilités conditionnelles TICE

On a relevé durant une période de 3 000 heures la durée de vie de 100 éléments identiques mis en service à la même heure, 22 éléments étant encore en fonctionnement au bout de ces 3 000 heures. On a obtenu les résultats suivants :

Durée de vie (en heures)	Nombre d'él. défaillants
[0, 500]	22
]500, 1 000]	18
]1 000, 1 500]	13
]1 500, 2 000]	10
]2 000, 2 500]	9
]2 500, 3 000]	6

1. En utilisant la méthode des rangs bruts, compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-3}.

TBF = t_i	$F(t_i)$ en %	$R(t_i)$ en %	$y_i = \ln R(t_i)$
…	…	…	…

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la forme $y = at + b$ de la droite d'ajustement de y en t, ainsi que le coefficient de corrélation r entre t et y. r sera arrondi à 10^{-4}, a, à 10^{-4} et b à 10^{-5}.

En déduire l'expression de $R(t)$ et le paramètre de la loi exponentielle $R(t)$.

3. *Dans cette question, les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.*

On prend $\lambda = 0{,}000\,5$ comme valeur approchée du paramètre de cette loi exponentielle

On prélève au hasard un élément.

– Soit A l'événement : « l'élément est encore en fonctionnement au bout de 1 000 heures ».

– Soit B l'événement : « l'élément est encore en fonctionnement au bout de 2 000 heures ».

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

b) Calculer la probabilité qu'un élément soit encore en fonctionnement au bout de 2 000 heures sachant qu'il était en fonctionnement au bout de 1 000 heures.

CORRIGÉ P. 303

7. +++ Panne d'ordinateurs TICE

Dans le service après-vente d'un grand magasin un technicien est chargé de la réparation d'un certain type d'ordinateur.

L'observation de 100 réparations a permis d'établir le tableau suivant (rangs bruts) :

Temps classes	Temps t_i centres	Nombre de réparations	$T(t_i)$	$R(t_i)$	$y_i = \ln R(t_i)$ à 10^{-5} près
]0, 1]	0,5	24	0,24		
]1, 2]	1,5	19	0,43		
]2, 3]	2,5	15	0,58		
]3, 4]	3,5	11	0,69		
]4, 5]	4,5	9	0,78		
]5, 6]	5,5	5	0,83		
]6, 7]	6,5	4	0,87		
]7, 8]	7,5	5	0,92		
]8, 9]	8,5	2	0,94		
]9, 10]	9,5	2	0,96		
]10, 11]	10,5	1	0,97		
> 11		3	1	0	

1. Compléter le tableau ci-dessus après l'avoir reproduit.

2. En ne prenant pas en compte la dernière valeur (> 11), déterminer à l'aide de la calculatrice, une équation $y = at + b$ de la droite d'ajustement de y à t, selon la méthode des moindres carrés, ainsi que le coefficient de corrélation r entre y et t. r est à arrondir à 10^{-4}, a, à 10^{-3}, b, à 10^{-5}.

3. En prenant pour valeurs approchées $a = -0{,}3$ et $b = 0$, donner l'expression de $R(t)$. En déduire la loi suivie par la variable aléatoire X qui à chaque ordinateur à réparer associe son temps de réparation en heures.

4. Déterminer la MTBF et l'écart type de la variable aléatoire X. Arrondir à 10^{-2}.

5. Calculer les probabilités : $P(X > 5{,}5)$ et $P(X \leq 2{,}5)$. Arrondir à 10^{-3}.

8. +++ Déterminer graphiquement le paramètre d'une loi exponentielle

La commande d'un portail automatique est composée de trois éléments : une commande manuelle à infrarouges, un récepteur et un vérin électrique.

Pour étudier la fiabilité du système on a relevé le nombre de jours de bon fonctionnement avant panne et on a obtenu le tableau suivant :

t_i	100	250	450	600	750	900	1 100	1 400
$R(t_i)$	0,86	0,69	0,51	0,41	0,32	0,26	0,19	0,12

où t_i désigne le nombre de jours et $R(t_i)$ la valeur prise par la fonction de fiabilité à la date t_i.

1. Déterminer les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de $\ln R(t_i)$ pour les 8 valeurs du tableau ci-dessus.

2. Tracer dans un repère orthogonal le nuage de points M_i de coordonnées $(t_i, \ln R(t_i))$. Déterminer la valeur de t_i telle que $y_i = -1$.

Que représente cette valeur ?

3. On admet que la fiabilité du système suit la loi exponentielle de paramètre 0,001 5. En déduire la MTBF et l'expression de $R(t)$.

4. Calculer la probabilité de voir le système tomber en panne pendant l'année de garantie.

9. ++++ Calculs d'analyse et fiabilité de robots de peinture avec Maxima

TICE

1. *Calculs d'analyse avec un logiciel de calcul formel*

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < 0, \\ f(x) = \dfrac{1}{200}e^{-\frac{x}{200}} & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

Effectuer les calculs suivants à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

a) Calculer, en fonction du nombre réel t positif,

$F(t) = \dfrac{1}{200}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{x}{200}}\,dx$, puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$.

On admet que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire T.

b) Calculer, en fonction du nombre réel t positif,

$I(t) = \dfrac{1}{200}\displaystyle\int_0^t x\,e^{-\frac{x}{200}}\,dx$, puis l'espérance $E(T) = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t)$ de la variable aléatoire T.

c) Calculer, en fonction du nombre réel t positif,

$J(t) = \dfrac{1}{200}\displaystyle\int_0^t x^2\,e^{-\frac{x}{200}}\,dx$, puis l'espérance $E(T^2) = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} J(t)$ de la variable T^2.

En déduire la variance $V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2$ et l'écart type de la variable aléatoire T.

d) Calculer la solution t_0 positive de l'équation $F(t) = 0{,}5$.

Le nombre t_0 est la médiane de la variable aléatoire T.

2. *Application à la fiabilité de robots de peinture*

On s'intéresse à un type de constituant intervenant dans des robots de peinture, utilisés dans l'industrie automobile. On note T la variable aléatoire qui, à tout constituant de ce type, associe sa durée de vie en jours. Une étude statistique à montré qu'on peut considérer que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{200}$ dont la densité est la fonction f précédente.

a) Quelle est la durée de vie « moyenne » d'un tel composant ?

Quelle est sa durée de vie « médiane » ?

b) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P(T > t) = e^{-\frac{t}{200}}$.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, près, qu'un composant fonctionne correctement plus de 100 jours ?

CORRIGÉ P. 303

Loi de Weibull

10. +++ Composants électriques et loi de Weibull

On étudie la durée de vie d'un certain type de composants électriques fabriqués par une usine.

On désigne par T la variable aléatoire qui à chaque composant, prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie exprimée en mois.

Après une étude statistique, on admet que T suit la loi de Weibull de paramètres :

$$\gamma = 0\,; \quad \beta = 2{,}4\,; \quad \eta = 50.$$

1. En déduire l'expression de $R(t)$.

2. Déterminer par le calcul les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

a) « la durée de vie d'un composant est inférieure à 10 mois » ;

b) « la durée de vie d'un composant est comprise entre 10 mois et 50 mois ».

3. Déterminer par le calcul, le temps au bout duquel un composant doit être changé, sachant que sa probabilité de survie doit rester supérieure à 90 %.

Comparer les deux résultats.

4. Un système (S) est constitué de deux composants du type précédent, montés en série et fonctionnant de manière indépendante (le système (S) est donc défaillant dès qu'un de ses composants l'est).

Déterminer le temps au bout duquel (S) doit être changé, sachant que la probabilité de survie de (S) doit rester supérieure à 90 %.

CORRIGÉ P. 305

11. ++ Application directe du cours

Soit T la variable aléatoire qui associe à toute machine d'un modèle donné, tiré au hasard, son temps de bon fonctionnement avant défaillance, exprimé en mois. T suit la loi de Weibull caractérisée par :

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-10}{200}\right)^{2,3}\right].$$

1. Calculer $P(T \leq 30)$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

2. Calculer $P(T > 25)$. Arrondir à 10^{-4}.

3. Calculer la MTBF en prenant 0,886 comme valeur approchée du coefficient A.

12. ++ Les paramètres sont connus

Un atelier est équipé de 30 machines du même type, pour lesquelles on a constaté un coût de maintenance important. La direction de l'usine décide d'étudier la politique de maintenance à appliquer.

On relève le nombre de jours de bon fonctionnement des 30 machines au cours d'une année. On constate alors que la variable aléatoire T qui, à toute machine de ce type tirée au hasard, associe sa durée de bon fonctionnement, suit une loi qui peut être approchée par la loi de Weibull, de paramètres $\gamma = 100$, $\eta = 100$, $\beta = 2$.

1. *Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.*

a) Déterminer la MTBF en prenant 0,886 comme valeur approchée du coefficient A.

b) Déterminer la probabilité de bon fonctionnement jusqu'à la MTBF.

2. Déterminer par le calcul la périodicité d'un entretien systématique fondé sur une fiabilité de 0,9. Arrondir à l'unité.

3. Déterminer par le calcul le nombre de jours au bout desquels 30 % des machines ont eu leur première panne. Arrondir à 10^{-2}.

4. Déterminer la probabilité de l'événement :
$200 \leq T \leq 300$. Arrondir à 10^{-2}.

5. Après avoir donné l'expression du taux de défaillance $\lambda(t)$, le représenter graphiquement sur l'intervalle [100, 500]. Que peut-on en conclure du point de vue de la fiabilité ?

13. +++ Utiliser la loi de Weibull et la méthode des moindres carrés

Un tour à commande numérique fabrique en grande série des cylindres.

L'équipe de maintenance a relevé pendant plusieurs mois les temps de fonctionnement, en heures, entre deux réglages consécutifs du tour et a établi le tableau suivant :

t_i (en heures)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F(t_i)$ (en %)	10	15	23	30	40	50	63	74	84	92	95

où t_i représente le temps de fonctionnement entre deux réglages consécutifs et $F(t_i)$ le pourcentage cumulé de réglages effectués avant le temps t_i.

1. On pose $u_i = \ln t_i$ et $v_i = \ln(-\ln R(t_i))$.
Montrer par la méthode des moindres carrés, à l'aide de la calculatrice, que les points $M_i(u_i, v_i)$ peuvent être ajustés par une droite d'équation $v = au + b$.
a est à arrondir à 10^{-2}, et b à 10^{-3}.
Donner, arrondi à 10^{-4}, le coefficient de corrélation entre u et v.
Justifier l'expression de $R(t)$: $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{16}\right)^5}$.

2. Expliquer pourquoi cette distribution peut être ajustée par une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres.

3. Calculer, arrondi à 10^{-1}, la MTBF et, arrondie à 10^{-2}, la probabilité de ne pas avoir de réglage à faire avant cette MTBF.

4. Déterminer par *le calcul*, arrondie à l'unité, la périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 %.

14. +++ Avec la loi de Weibull

Une machine fabrique des pièces cylindriques en grande série.

Le parc de l'atelier comporte 10 machines fonctionnant dans les mêmes conditions.

Afin d'étudier la fiabilité de ces machines, on relève le nombre de jours de bon fonctionnement avant la première défaillance. Les résultats sont : 50 ; 44 ; 18 ; 85 ; 70 ; 30 ; 60 ; 36 ; 11 ; 24.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine de ce type tirée au hasard, associe sa durée de vie.

1. On pose $u_i = \ln t_i$ et $v_i = \ln(-\ln R(t_i))$.
Montrer par la méthode des moindres carrés, à l'aide de la calculatrice, que les points $M_i(u_i, v_i)$ peuvent être ajustés par une droite d'équation $v = au + b$.
a et b sont à arrondir à 10^{-4}.
Donner, arrondi à 10^{-4}, le coefficient de corrélation entre u et v.

2. En prenant les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des coefficients, montrer que l'équation peut s'écrire :

$$v = 1{,}6u - 6{,}13.$$

En déduire une expression de $R(t)$ sous la forme :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$$

a) vérifier que la variable aléatoire T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$;

b) déterminer les deux autres paramètres de cette loi ;

c) déterminer à quel instant t_0 la fiabilité d'une telle machine est de 70 % ;

d) déterminer, arrondi à 10^{-4}, $P(T \leq 6)$.

15. +++ Étude de fiabilité à l'aide d'un tableur et loi de Weibull

TICE

Un distributeur automatique élabore du jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange.

Une étude de fiabilité de ce type de distributeur a permis à l'aide d'un tableur, d'établir le tableau ci-dessous, où $F(t_i)$ et $R(t_i)$ correspondent respectivement à la probabilité de défaillance et à la fiabilité au temps t_i (selon la méthode des rangs moyens) :

t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$x_i = \ln(t_i)$	$y_i = \ln(-\ln R(t_i))$
40	0,125	0,875	3,688 879 45	– 2,013 418 678
48	0,25	0,75	3,871 201 01	– 1,245 899 324
55	0,375	0,625	4,007 333 19	– 0,755 014 863
60	0,5	0,5	4,094 344 56	– 0,366 512 921
64	0,625	0,375	4,158 883 08	– 0,019 356 889
68	0,75	0,25	4,219 507 71	0,326 634 26
80	0,875	0,125	4,382 026 63	0,732 099 368

Le tableur a donné, arrondis à 10^{-4}, les coefficients d'une équation de la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation linéaire r :

$$y = 4{,}099\,9x - 17{,}124\,2 \text{ et } r = 0{,}996\,0.$$

Soit T la variable aléatoire qui, à tout distributeur de ce type, associe son temps de bon fonctionnement exprimé en jours. On cherche à ajuster la loi de T à une loi de Weibull.

1. On admet le résultat suivant *qui n'a donc pas été démontré ici* :

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \text{ équivaut à } y = \beta x - \beta \ln \eta,$$

où l'on a posé $x = \ln t$ et $y = \ln[-\ln R(t)]$.

Déduire des informations précédentes les résultats ci-dessous :

a) Le nuage de points (x_i, y_i) est correctement ajusté par cette droite $\mathcal{D}$;

b) On peut considérer que T suit la loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$;

c) On peut prendre, pour les deux autres paramètres, $\beta = 4{,}1$ (arrondi au centième) et $\eta = 65$ (arrondi à l'unité).

(On pourra utiliser l'équivalence ci-dessus).

2. Calculer la MTBF. Arrondir à l'unité.

3. Déterminer, par le calcul, la périodicité d'interventions préventives basée sur une fiabilité de 90 %.

CORRIGÉ P. 305

16. +++ Paramètres d'une loi de Weibull avec GeoGebra

TICE

La densité d'une loi de Weibull de paramètres β, γ et η (avec $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ et $\eta > 0$) est définie, pour $x \geq \gamma$ par :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier le rôle de chaque paramètre dans cette densité de probabilité.

Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur β allant de $-0{,}5$ à 5 avec un pas de 0,1 puis un curseur γ allant de 0 à 10 avec un pas de 1 et enfin un curseur η allant de 0,1 à 5 avec un pas de 0,1.

Entrer dans la barre de saisie :

$f(x) =$

Fonction[(β/η)*((x − γ)/η)^(β − 1)*exp(−((x − γ)/η)^β)

1. *Paramètre de forme* β

Régler le curseur γ à la valeur 0 et le curseur η à la valeur 2.

Le paramètre β se nomme paramètre « de forme » car sa valeur détermine la forme de la courbe de densité. Sur la figure du bas, la trace a été activée et le curseur β balayé (pour plus de lisibilité, on peut ne pas activer la trace).

a) Examiner, selon la valeur de β par rapport à 1, le comportement de f en 0. (On pourra faire calculer $f(0)$ à GeoGebra).

b) Pour $\beta = 4$, la densité de Weibull obtenue est proche de celle d'une loi normale. En examinant la courbe, citer une propriété géométrique montrant qu'il ne s'agit cependant pas d'une densité normale.

2. *Paramètre de position* γ

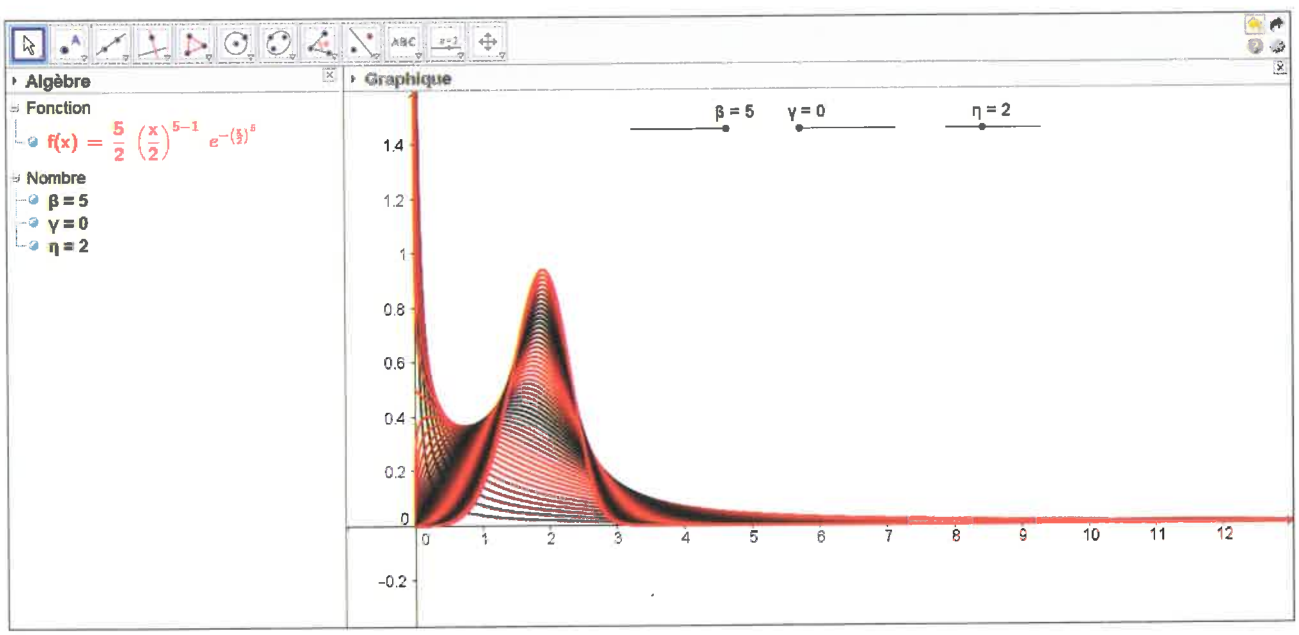
Fixer le curseur η à la valeur 2. Fixer le curseur β et balayer le curseur γ. Recommencer pour une autre valeur de β. Quel est l'effet géométrique du paramètre γ sur la courbe de densité ?

3. *Paramètre d'échelle* η

a) Fixer le curseur β à la valeur 2 et le curseur γ à la valeur 0. Balayer le curseur η.

Quel est l'effet du paramètre η sur la courbe de densité ?

b) Fixer le curseur β à la valeur 1 et le curseur γ à la valeur 0. Les courbes de densité sont celles de lois exponentielles. Pour quelle valeur de η obtient-on la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$ pour laquelle $f(0) = \frac{1}{2}$?



17. +++ Simuler une loi de Weibull avec la calculatrice ou le tableur

TICE

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.

a) Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations de la variable aléatoire X ?

b) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1]$, calculer $P(X \geq a)$.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \eta\,(-\ln X)^{1/\beta}$ où β et η sont deux réels strictement positifs. Montrer que les valeurs prises par la variable aléatoire T appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Soit t un réel de l'intervalle $[0, +\infty[$, montrer que

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

4. En déduire que T suit la loi de Weibull de paramètres β, $\gamma = 0$ et η.

5. Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations d'une variable aléatoire de loi de Weibull de paramètres $\beta = 2{,}4$ et $\eta = 40$?

6. Effectuer une simulation d'une série de réalisations d'une loi de Weibull de paramètres $\beta = 2{,}4$ et $\eta = 40$. Comparer la moyenne et l'écart type de l'échantillon de valeurs simulées à la MTBF et à l'écart type de la loi de Weibull de paramètres $\beta = 2{,}4$ et $\eta = 40$ qui valent respectivement environ 35,5 et 15,7.

CORRIGÉ P. 305

18. +++ Ajustement à une loi de Weibull où $\gamma \neq 0$ avec le tableur

TICE

Une machine fabrique des pièces cylindriques en grande série.

Le parc de l'atelier comporte 10 machines fonctionnant dans les mêmes conditions.

Afin d'étudier la fiabilité de ces machines, on relève le nombre de jours de bon fonctionnement avant la première défaillance. Les résultats sont :

110 ; 104 ; 78 ; 145 ; 130 ; 90 ; 120 ; 96 ; 71 ; 84.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine de ce type, associe sa durée de vie et on cherche à ajuster pour T une loi de Weibull selon les valeurs observées.

1. Préparer une feuille de calcul comme sur l'image d'écran suivante.

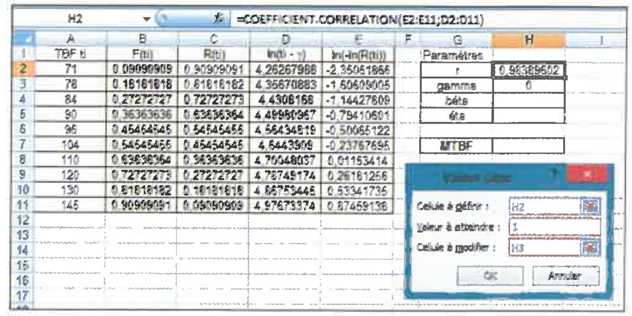
En H3, on affecte au coefficient γ de la loi de Weibull la valeur (provisoire) 0.

En B2, on entre la formule =1/11 (méthode des rangs moyens).

En D2, on entre la formule = LN(A2 – H$3) qui dépend de la valeur affectée au coefficient γ.

En H2, on entre la formule :

= COEFFICIENT.CORRELATION(E2:E11;D2:D11).



2. Lorsque T suit une loi de Weibull de paramètres γ, β, η, on a $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$.

En prenant deux fois le logarithme, on a les équivalences :

$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \Leftrightarrow \ln(-\ln(R(t))) = \beta\ln(t-\gamma) - \beta\ln(\eta)$

$\Leftrightarrow y = \beta\,x - \beta\ln(\eta)$

en posant $y = \ln(-\ln(R(t)))$, calculés en colonne E, et $x = \ln(t-\gamma)$, calculés en colonne D.

On est donc amené à rechercher γ de sorte que le coefficient de corrélation linéaire situé en cellule H2 soit le plus proche possible de 1.

Utiliser l'outil « valeur cible » du tableur pour obtenir une valeur de γ proche de la solution.

Quelle est la valeur entière de γ pour laquelle le coefficient de corrélation linéaire r est le plus proche de 1 ?

Quelle est alors la valeur de r ?

En déduire qu'on peut considérer que T suit une loi de Weibull.

3. a) Le paramètre de forme β correspond au coefficient directeur a de la droite de régression de y en x d'équation $y = ax + b$.

Entrer en H4 la formule =PENTE(E2:E11;D2:D11).

Quelle valeur de β le tableur fournit-il ?

b) Le paramètre η est tel que : $b = -\beta\ln\eta \Leftrightarrow \eta = e^{-\frac{b}{\beta}}$.

Entrer en H5 la formule

=EXP(– ORDONNEE.ORIGINE(E2:E11;D2:D11)/H4).

Quelle valeur de η le tableur fournit-il ?

c) La MTBF est alors donnée par MTBF = $\gamma + \eta \cdot A$ où le nombre A est donné par l'instruction EXP(LNGAMMA(1+1/β)) du tableur.

Entrer en H7 la formule

= H3 + H5*EXP(LNGAMMA(1+1/H4)).

Quelle valeur de la MTBF le tableur fournit-il ?

CORRIGÉ P. 305

EXERCICES pour le BTS

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS **(épreuve finale ou CCF)**.

▶ *Dans le groupement B, la fiabilité ne concerne que deux BTS. Aussi la fiabilité ne peut-elle être, à l'examen, que le thème d'une partie d'exercice, réservée à ces BTS.*

19. ++ La durée de vie d'une diode

Dans tout cet exercice, les résultats des calculs de probabilités sont à arrondir à 10^{-3}.

La durée de vie d'une diode (en heures) définit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,08$.

1. Quel est le temps moyen de bon fonctionnement de cette diode ?

2. Quelle est la probabilité que la diode fonctionne encore au bout de 10 000 heures ?

3. Quelle est la probabilité que la première panne intervienne entre la 10 000e et la 15 000e heure ?

4. Quel devrait être, arrondi à l'heure, le temps moyen de bon fonctionnement de la diode pour qu'elle ait une chance sur deux de fonctionner encore au bout de 20 000 heures ?

CORRIGÉ P. 306

20. +++ Montage en série

Un technicien a été chargé d'étudier le fonctionnement d'un certain type A de pièces. Après mesure de la durée de vie d'un certain nombre de ces pièces, il en est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type A, associe sa durée de vie en jours suit une loi exponentielle dont la MTBF est égale à 145.

1. Calculer le paramètre de cette loi, arrondi à 10^{-4}.

2. On admet dans cette question que le paramètre de cette loi vaut $\lambda = 0{,}007$.

On écrira pour les calculs demandés dans les questions **2** a), **2** b) *et* **3** b) *les valeurs approchées sous leur forme décimale arrondie à* 10^{-3}.

a) Calculer la probabilité qu'une pièce de type A soit en panne au bout de 200 jours.

b) Calculer la probabilité qu'une pièce de ce type soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours.

c) Déterminer, arrondi à 1 jour près, le temps de bon fonctionnement avec une fiabilité égale à 0,8.

3. On considère deux pièces de type A fonctionnant de façon indépendante.

a) Déterminer la fiabilité du système obtenu en montant ces deux pièces en série.

b) Calculer la probabilité que ce système fonctionne au moins 150 jours.

CORRIGÉ P. 306

21. +++ Fiabilité d'un système de composants

Soit T_1 et T_2 les variables aléatoires qui associent à des composants respectivement du type A et du type B tirés au hasard dans la production leur durée de vie exprimée en heures.

On admet que T_1 et T_2 suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs :

$$\lambda_1 = 0{,}001\,2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0{,}000\,7.$$

1. Quelle est la probabilité qu'un composant du type A soit encore en état de marche au bout de 1 000 heures ? Même question pour un composant de type B. Les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-4}.

2. Déterminer le nombre de jours au bout desquels 70 % des composants du type A ont eu leur première défaillance. Arrondir à l'unité.

3. Un appareil d'un certain type contient un composant de type A et un composant de type B. Un tel appareil fonctionne si A et B sont tous les deux en état de marche.

Déterminer la fiabilité d'un tel appareil au bout de 1 000 heures. Arrondir à 10^{-2}. (Les défaillances des composants de types A et B sont indépendantes les unes des autres.)

22. +++ Panne d'ordinateurs

Dans le service après vente d'un grand magasin un technicien est chargé de la réparation d'un certain type d'ordinateur.

Les ordinateurs sont en nombre important et tombent en panne de façon aléatoire, indépendamment les uns des autres. Il s'établit alors une « file » d'ordinateurs « en panne » en attente de réparation.

Il s'agit d'étudier le phénomène afin d'évaluer s'il est nécessaire d'embaucher un nouveau technicien. On a relevé les temps entre chaque arrivée, en heures, et on a obtenu à l'aide d'un logiciel spécialisé qui exécute automatiquement les calculs une MTBF égale à 4 heures soit en moyenne une arrivée d'ordinateur en panne toutes les 4 heures.

On note T la variable aléatoire qui à chaque panne associe le temps d'attente en heures avant l'arrivée de la prochaine panne. On admet que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer le paramètre λ et l'expression en fonction de t de $P(T > t)$.

2. Calculer $P(T > 6)$ et $P(T \leq 3)$. Arrondir à 10^{-4}.

Faire une phrase pour exprimer ce résultat.

3. Déterminer la valeur de t, arrondie à la minute, qui correspond à une probabilité $P(T < t) = 0{,}05$.

Faire une phrase pour exprimer ce résultat.

23. +++ Montage en parallèle

Toutes les probabilités demandées seront données sous leur forme exacte, puis sous leur forme approchée décimale arrondie à 10^{-2}.

On considère deux variables aléatoires T_1 et T_2 prenant pour valeurs les durées de vie en heures de deux composants de types A et B.

T_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}001\,1$

T_2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0{,}000\,8$.

On suppose que les pannes des différents composants sont indépendantes des unes des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant de type A soit encore en état de marche après 1 000 heures de fonctionnement ? Même question pour un composant de type B.

2. Déterminer à partir de combien d'heures 70 % des composants de type A auront eu leur première défaillance.

3. Pour essayer d'améliorer la fiabilité, on associe deux composants de type A en parallèle : quelle est la probabilité qu'un tel système connaisse sa première panne avant 1 000 heures de fonctionnement ?

4. On constitue un système associant en série un composant de type A et un composant de type B. Quelle est la probabilité que ce système fonctionne au-delà de 1 000 heures ?

24. +++ Équation différentielle et fiabilité

On considère l'équation différentielle : (E) $10^4 y' + 3y = 0$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a)** Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2. On désigne par T la variable aléatoire qui mesure en heures, la durée de fonctionnement sans panne d'un appareil ménager.

On admet que pour tout réel t positif ou nul, la probabilité que T soit supérieur à t est donnée par $f(t)$, c'est-à-dire : $P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-0{,}000\,3t}$.

a) Donner la moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF). (On donnera le résultat sous la forme arrondie à l'unité.)

b) Calculer la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant 200 heures d'utilisation.

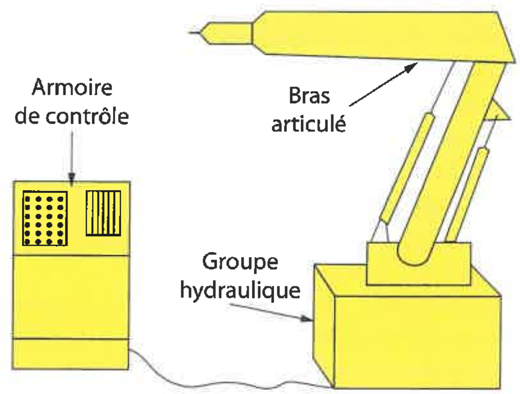
Arrondir à 10^{-3}.

c) Calculer l'instant t où la fiabilité est égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire l'instant t où $P(T \geq t) = 0{,}5$.

On donnera la résultat sous sa forme arrondie à l'heure.

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

25. +++ Loi binomiale, approximation d'une loi binomiale par une loi normale, loi de Weibull



Les ateliers d'un grand constructeur d'automobiles comportent des robots permettant de positionner les pistolets de peinture autour de la carrosserie.

Ces robots sont constitués de trois parties : un bras articulé actionné par des vérins hydrauliques, un groupe hydraulique et une armoire de contrôle (système électronique qui gère les mouvements du robot par des programmes).

L'objectif de l'exercice est d'étudier la nature et la répartition des pannes.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. *Pannes mécaniques sur le bras articulé*

Au moment de s'équiper de 300 robots équipés de bras articulés d'un certain type, le constructeur d'automobiles s'intéresse aux essais réalisés par son fournisseur lors de la mise au point des robots : la probabilité qu'un robot ait une panne mécanique sur son bras articulé pendant une période déterminée est alors 0,05 et les pannes mécaniques des bras des différents robots sont supposées indépendantes.

On prélève au hasard 300 robots dans le stock très important du fournisseur et on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de robots dont le bras a connu une panne mécanique pendant la période considérée.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

2. On approche X par la variable aléatoire Y suivant la loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart type $\sigma = 3{,}77$. Justifier le choix des paramètres μ et σ.

3. Soit E l'événement « lors de leur mise au point, strictement plus de 20 robots ont eu une panne mécanique sur leur bras articulé pendant la période considérée ».

Calculer $P(Y \geq 20{,}5)$ (c'est, en utilisant l'approximation de X par Y, la valeur de $P(E)$). Arrondir à 10^{-2}.

B. *Maintenance du système électronique des armoires de contrôle*

Le service de maintenance préconise, pour les armoires de contrôle, des interventions préventives (par changement de certains éléments électroniques). La période de ces interventions sera déterminée à partir d'un historique de pannes d'une armoire de contrôle choisie au hasard.

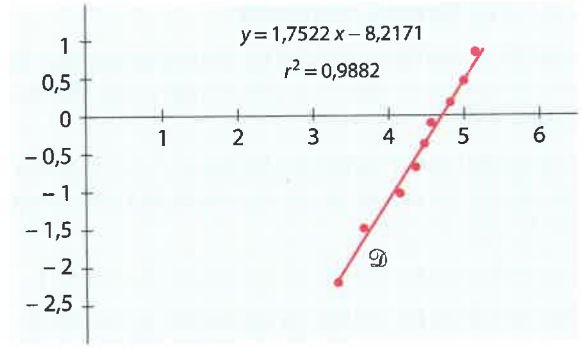
Les neuf premiers temps de bon fonctionnement (en jours) de cette armoire de contrôle sont les suivants (rangés en ordre croissant) :

31 ; 42 ; 67 ; 77 ; 89 ; 95 ; 122 ; 144 ; 173.

Soit T la variable aléatoire qui, à toute armoire de contrôle, associe son temps de bon fonctionnement. On cherche à ajuster la loi de T à une loi de Weibull.

À l'aide d'un tableur, on a obtenu le tableau et le graphique ci-dessous, où $F(t_i)$ et $R(t_i)$ correspondent respectivement à la défaillance et à la fiabilité au temps t_i (selon la méthode des rangs moyens).

t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$x_i = \ln(t_i)$	$y_i = \ln[-\ln R(t_i)]$
31	0,1	0,9	3,43398720	– 2,25036733
42	0,2	0,8	3,73766962	– 1,49993999
67	0,3	0,7	4,20469262	– 1,03093043
77	0,4	0,6	4,34380542	– 0,67172699
89	0,5	0,5	4,48863637	– 0,36651292
95	0,6	0,4	4,55387689	– 0,08742157
122	0,7	0,3	4,80402104	– 0,18562676
144	0,8	0,2	4,96981330	– 0,47588500
173	0,9	0,1	5,15329159	– 0,83403245



Sur le graphique ci-dessus, figure la droite de régression $\mathcal{D}$ de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, avec son équation dans un repère orthogonal, ainsi que le carré r^2 du coefficient de corrélation linéaire.

On admet le résultat suivant *qui n'a donc pas à être démontré ici* :

▶ *$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ équivaut à $y = \beta x - \beta \ln \eta$,*

où l'on a posé $x - \ln t$ et $y = \ln[-\ln R(t)]$.

1. Déduire des informations précédentes les résultats ci-dessous :

a) Le nuage des points de coordonnées (x_i, y_i) est correctement ajusté par cette droite $\mathcal{D}$;

b) On peut considérer que T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$;

c) On peut prendre, pour les deux autres paramètres, $\beta = 1{,}75$ (arrondi au centième) et $\eta = 109$ (arrondi à l'unité).

(On pourra utiliser l'équivalence encadrée ci-dessus).

2. Déterminer, par le calcul, la périodicité d'interventions préventives basée sur une fiabilité de 80 %.

CORRIGÉ P. 300

Épreuves d'entraînement aux BTS des groupements B, C, D

- Il s'agit de 10 épreuves pour s'entraîner à **l'épreuve finale de mathématiques en deux heures des BTS des groupements B, C, D.**
- Des réponses figurent à la fin de l'ouvrage.
- **L'index thématique** suivant permet d'utiliser ces épreuves pendant les deux années.

Épreuves de BTS

- Il s'agit de 10 épreuves pour s'entraîner à **l'épreuve finale de mathématiques en deux heures des BTS des groupements B, C, D.**
- Des réponses figurent à la fin de l'ouvrage.
- **L'index thématique** suivant permet d'utiliser ces épreuves pendant les deux années.

INDEX THÉMATIQUE

		Numéro de l'épreuve									
Modules	**Contenus**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Fonctions d'une variable réelle		E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1
Calcul intégral	Calcul d'une intégrale		E_1		E_1		E_1				
	Calcul d'aire	E_1		E_1							
	Valeur moyenne					E_1			E_1		E_1
Équations différentielles	Du premier ordre				E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	
	Du second ordre	E_1	E_1	E_1							
Probabilités 1	Probabilités conditionnelles			E_2					E_2	E_2	
	Événements indépendants		E_2				E_2	E_2		E_2	
	Loi binomiale	E_2	E_2	E_2		E_2	E_2	E_2	E_2	E_2	E_2
	Loi normale	E_2			E_2	E_2	E_2		E_2	E_2	E_2
	Approximation d'une loi binomiale par une loi normale		E_2	E_2							
Probabilités 2	Loi de Poisson	E_2		E_2	E_2	E_2	E_2	E_2			E_2
	Loi exponentielle							E_2			
Statistique inférentielle	Test bilatéral pour une moyenne	E_2				E_2					E_2
	Test unilatéral pour une moyenne				E_2						
	Intervalle de confiance pour une moyenne		E_2				E_2		E_2		
	Intervalle de confiance pour une proportion			E_2							
Utiliser un logiciel		E_1	E_1	E_2	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1
Avec un QCM		E_1	E_2	E_2	E_1		E_2	E_2			

E_1 signifie : Exercice 1…

De nombreux exercices pour le BTS figurent à la fin de chacun des 11 chapitres des deux tomes.

RÉPONSES P. 306

Épreuve 1

• **Exercice 1** (12 points)

Uniquement pour le groupement B.

Programme abordé :

- *Fonctions d'une variable réelle avec approximation locale d'une fonction*
- *Calcul intégral*
- *Équation différentielle du second ordre*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8\,e^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solution définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Une solution particulière de l'équation différentielle (E) est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

Dans chaque cas, on donne la fonction dérivée h' de h et la fonction dérivée seconde h'' de h.

Réponse A	Réponse B
$h(x) = 8e^x$ $h'(x) = 8e^x$ $h''(x) = 8e^x$	$h(x) = 8xe^x$ $h'(x) = (8x+8)e^x$ $h''(x) = (8x+16)e^x$

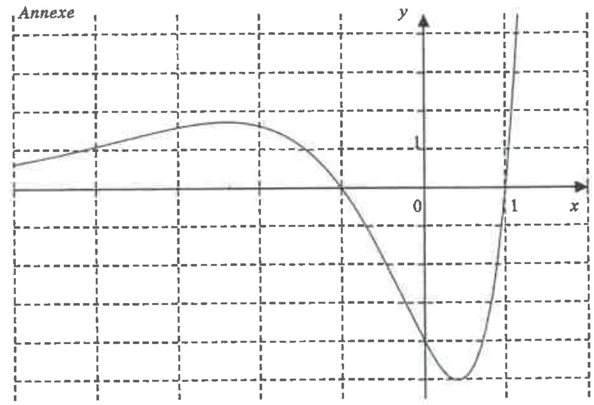
Réponse C
$h(x) = 4x^2e^x$ $h'(x) = (4x^2+8x)e^x$ $h''(x) = (4x^2+16x+8)e^x$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. *Étude locale d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal, obtenue avec un logiciel, est donnée ci-dessous, en annexe à rendre avec la copie.



1. a) On désigne par f' la fonction dérivée de f.

Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de $f'(x)$. Ce logiciel note %e^x le nombre e^x.

```
(%i1) f(x):=(4*x^2-4)*%e^x;
(%o1) f(x):=(4 x^2 -4) %e^x

(%i2) factor(diff(f(x),x));
(%o2) 4(x^2 +2 x-1) %e^x
```

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée (%o2).

b) Utiliser l'affichage suivant pour donner la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

```
(%i3) solve(x^2+2*x-1=0,x);
(%o3) [x=-√2-1, x=√2-1]

(%i4) float(%), numer;
(%o4) [x=-2.414213562373095, x=0.4142135623731]
```

2. a) À l'aide de l'affichage suivant, écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,2);
(%o5)/T/ -4 -4 x+2 x^2+...
```

b) Déduire du **a)** une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abcisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

d) Construire la tangente T sur l'annexe à rendre avec la copie.

C. *Calcul intégral*

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)\,e^x$. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déduire de ce qui précède l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

RÉPONSES P. 307

- **Exercice 2** (8 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1 : loi normale, loi binomiale.*
- *Probabilités 2 : loi de Poisson.*
- *Statistique inférentielle : test bilatéral pour une moyenne.*

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi de Poisson*

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes choisi au hasard entre 14 heures et 15 heures, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 6)$.

2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14 heures et 15 heures, il se présente au plus 6 skieurs.

B. *Loi normale*

Une entreprise découpe une grande quantité de tubes pour le montage des remontées mécaniques. La longueur des tubes est exprimée en centimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [245, 255].

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

1. Après un réglage de la machine, on admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 3. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production de cette journée soit conforme pour la longueur.

2. Le résultat obtenu au **1.** n'est pas jugé satisfaisant. On décide de modifier l'écart type à l'aide d'un nouveau réglage de la machine. Dans cette question, la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ.

Déterminer l'écart type σ pour que $P(245 \leq Y \leq 255) = 0{,}95$.

C. *Loi binomiale*

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.

3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

D. *Test bilatéral pour une moyenne*

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des longueurs, exprimées en millimètres, d'un lot important de tubes destinés au montage des remontées mécaniques.

On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 tubes prélevés au hasard dans ce lot, associe la moyenne des longueurs de ces tubes (le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$. Dans ce cas, on considère que le lot est conforme.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 250$.

Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 0,33.

On admet également que $P\left(249{,}35 \leq \overline{L} \leq 250{,}65\right)$. *Ce résultat n'a pas à être démontré.*

Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 50 tubes dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des longueurs des tubes est $\overline{I} = 250{,}49$.

Peut-on, au seuil de 5~~0~~ %, conclure que le lot est conforme ?

Épreuve 2

- **Exercice 1** (12 points)

Uniquement pour le groupement B.

Programme abordé :

- *Équations différentielle du second ordre*
- *Développement limité*
- *Calcul intégral*

Les parties A et B sont indépendantes.

RÉPONSES P. 307

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ y'' + 4y' + 5y = 0$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable x, où y' est la fonction dérivée de y et où y'' est la fonction dérivée seconde de y.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) E:'diff(y,x,2)+4*'diff(y,x)+5*y=0;
(%o1) d²/dx² y + 4 (d/dx y) + 5 y = 0
(%i2) ode2(E,y,x);
(%o2) y=%e^(-2 x) (%k1 sin(x)+ %k2 cos(x))
(%i3) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=-2);
(%o3) y=%e^(-2 x) cos(x)
```

1. Justifier l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E), fournie par la sortie logicielle notée (%o2).

2. Quelles sont les conditions initiales entrées à la ligne notée (%i3) correspondant à la solution particulière f de l'équation différentielle (E) dont une expression est fournie à la sortie notée (%o3) ?

B. *Développement limité et calcul d'aire*

Soit f la fonction de la variable réelle x *définie sur* $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-2x}\cos x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i4) taylor(%e^(-2*x)*cos(x),x,0,2);
(%o4)/T/ 1 - 2 x + 3 x²/2 + . . .
(%i5) P(x):=1-2*x+(3*x^2)/2;
(%o5) P(x):=1 - 2 x + 3 x²/2
(%i6) integrate(P(x),x,0,a);
(%o6) (a³ - 2 a² + 2 a)/2
```

1. La sortie logicielle notée (%o4) fournit la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et préciser la position de courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T, au voisinage de ce point.

2. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 1 - 2x + \dfrac{3}{2}x^2$.

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $I(a) = \int_0^a P(x)\,dx$.

Justifier l'expression de l'intégrale $I(a)$ fournie par la sortie logicielle notée (%o6).

3. a) En vous aidant de l'équation différentielle (E), montrer que la fonction f vérifie pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{5}[-f''(x) - 4f'(x)].$$

b) Soit H la fonction définie par :

$$H(x) = \frac{1}{5}[-f'(x) - 4f(x)].$$

On désigne par H' la fonction dérivée de H.

Calculer $H'(x)$, en déduire une primitive de f.

c) Soit a un nombre réel strictement positif, calculer en fonction de a l'intégrale :

$$J(a) = \int_0^a f(x)\,dx.$$

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}4$.

a) Calculer $I(0{,}4)$ et la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de $J(0{,}4)$.

b) Vérifier que la différence entre les deux nombres obtenus au a) est inférieur à 0,01.

• Exercice 2 (8 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Événements indépendants, loi binomiale, approximation d'une loi binomiale par une loi normale
- *Statistique inférentielle*
  Intervalle de confiance d'une moyenne

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise produit en grande série un certain type d'accessoire pour l'industrie automobile.

A. Événements indépendants

Chaque accessoire fabriqué peut présenter deux défauts, que l'on désigne par défaut a et défaut b.

On prélève au hasard un accessoire dans la production d'une journée. On note A l'événement : « l'accessoire présente le défaut a » et B l'événement : « l'accessoire présente le défaut b ».

On suppose que $P(A) = 0{,}02$ et que $P(B) = 0{,}01$.

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Les questions **1**, **2** *et* **3** *suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

RÉPONSES P. 307

1. La probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente le défaut a et le défaut b est :

0,03	0,002	0,0002

2. La probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente au moins un des défauts est :

0,0002	0,03	0,0298

3. La probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts a et b est :

0,97	0,9702	0,998

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. *Loi binomiale*

On considère un stock important d'accessoires.

On note E l'événement : « un accessoire prélevé au hasard dans le stock d'accessoires est défectueux. »

On suppose que $P(E) = 0{,}03$.

On prélève au hasard 20 accessoires dans le stock d'accessoires pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 accessoires.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'accessoires de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun accessoire ne soit défectueux.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un accessoire soit défectueux.

C. *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

Les accessoires sont livrés par lots de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans le dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 accessoires.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 accessoires, associe le nombre d'accessoires défectueux parmi ces 1 000 accessoires.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}03$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

1. Justifier les valeurs des deux paramètres de cette loi normale.

2. Calculer, à l'aide de la variable aléatoire Z, la probabilité qu'il y ait a plus 25 accessoires défectueux dans le lot de 1 000 accessoires, c'est-à-dire calculer $P(Z \leq 25{,}5)$.

D. *Intervalle de confiance*

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse des accessoires d'un lot important.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 accessoires dans le lot.

Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 accessoires prélevés au hasard et avec remise dans le lot, associe la moyenne des masses, en grammes, des accessoires de cet échantillon.

On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 5$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\overline{x} = 501$.

1. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne inconnue μ des masses des accessoires du lot considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.

2. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **1** ».

Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

Épreuve 3

- **Exercice 1** (10 points)

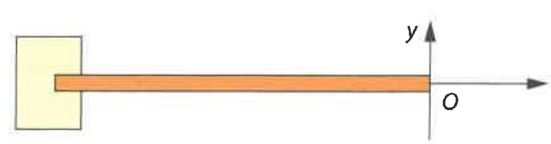
Uniquement pour le groupement B.

Programme abordé :

- *Équation différentielle du second ordre*
- *Étude des variations d'une fonction*
- *Développement limité*

Une entreprise étudie en laboratoire les propriétés vibratoires d'un nouveau matériau. Une barre de ce matériau est tenue horizontalement à une extrémité ; à l'autre extrémité elle est soumise à une force dirigée vers le bas et d'intensité variable.

On considère, dans le repère indiqué sur la figure ci-dessous, l'ordonnée $y(t)$ de l'extrémité libre, en fonction du temps t.



RÉPONSES P. 307

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 104y = -10{,}1e^{-t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a) Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont : $r_1 = -2 + 10i$ et $r_2 = -2 - 10i$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' + 4y' + 104y = 0.$$

2. Montrer que la fonction h, définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = -0{,}1e^{-t}$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Montrer que la solution f de l'équation différentielle (E) définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = -0{,}1[e^{-t} - \cos(10t)e^{-2t}]$$

vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0{,}1$.

B. *Étude de fonctions*

Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$g_1(t) = e^{-t} + e^{-2t} \quad \text{et} \quad g_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

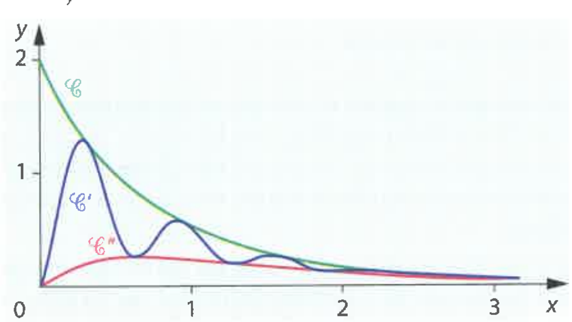
Les courbes représentatives des fonctions g_1 et g_2, dans un repère orthonormé, ainsi que celle de la fonction $g = -10f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = e^{-t} - \cos(10t)e^{-2t}$, sont données sur la figure ci-dessous.

1. On admet que, pour tout t dans $[0, +\infty[$, on a $g_2(t) \leq g(t) \leq g_1(t)$.

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

Attribuer à chaque courbe $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ de la figure, la fonction qui lui correspond.

Aucune justification n'est demandée.



2. Déterminer les limites en $+\infty$ de fonctions g_1 et g_2 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. a) On désigne par g_1' la fonction dérivée de g_1. Pour tout t de $[0, +\infty[$, calculer $g_1'(t)$.

b) Justifier que g_1 est décroissante sur $[0, +\infty[$.

4. a) Démontrer que, pour tout t de $[0, +\infty[$, $g_2'(t) = e^{-t}(2e^{-t} - 1)$.

b) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $2e^{-t} - 1 \geq 0$.

c) Déduire de ce qui précède la valeur exacte de t pour laquelle la fonction g_2 admet un maximum.

5. *Les questions* **5 a)** *et* **5 b)** *sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On admet que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction g_2 est :

$$g_2(t) = t - \frac{3t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Ce résultat a été obtenu avec un logiciel.

a) On déduit de ce développement limité qu'une équation de la tangente T à la courbe représentative de g_2 au point d'abscisse 0 est :

$y = 0$	$y = t$	$y = t - \frac{3t^2}{2}$

b) On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe représentative de g_2 est en dessous de la tangente T.

Recopier sur votre copie la justification exacte.

$t^2\varepsilon(t)$ est négatif lorsque t est positif.	$t - \frac{3t^2}{2}$ est négatif.	$-\frac{3t^2}{2}$ est négatif.

C. *Calcul d'intégrale*

1. Démontrer que la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^3 [g_1(t) - g_2(t)]\mathrm{d}t$ où g_1 et g_2 sont les fonctions définies au début de la partie B, est $I = 1 - e^{-6}$.

2. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Probabilités conditionnelles, loi binomiale, approximation d'une loi binomiale pour une loi normale
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
- *Statistique inférentielle*
  Intervalle de confiance d'une proportion

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise installe des bornes pour la location de voitures électriques.

RÉPONSES P. 307

A. *Probabilités conditionnelles*

Cette entreprise possède un stock de bornes provenant de deux fournisseurs différents, désignés par « fournisseur 1 » et « fournisseur 2 ».

On admet que 60 % des bornes proviennent du fournisseur 1 et 40 % des bornes proviennent du fournisseur 2.

On admet que 2 % des bornes du fournisseur 1 sont défectueuses et que 1 % des bornes du fournisseur 2 sont défectueuses.

On prélève au hasard une borne dans ce stock.

On considère les événements suivants :

A : « la borne prélevée provient du fournisseur 1 » ;

B : « la borne prélevée provient du fournisseur 2 » ;

D : « la borne prélevée est défectueuse ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation décrite dans l'énoncé.

2. Calculer la probabilité $P(B \cap D)$.

3. Montrer que la probabilité que la borne prélevée soit défectueuse est égale à 0,016.

4. Calculer la probabilité conditionnelle $P_D(B)$.

(On rappelle que $P_D(B)$ est la probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.)

B. *Loi binomiale, loi de Poisson et loi normale*

Sauf mention contraire, dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

On prélève au hasard n bornes dans un stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une borne prélevée au hasard dans ce stock soit défectueuse est égale à 0,016.

Le stock est suffisamment important pour assimiler un prélèvement de n bornes à un tirage avec remise de n bornes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de n bornes dans ce stock, associe le nombre de bornes défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

2. Dans cette question $n = 250$.

a) Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat.

b) Calculer la probabilité qu'aucune borne ne soit défectueuse.

c) En déduire la probabilité qu'au moins une borne soit défectueuse.

d) On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.

e) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre obtenu au **d**). Calculer, $P(Y \geq 1)$.

3. Dans cette question $n = 1\,000$.

On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 3,97.

a) Justifier ces paramètres par le calcul.

b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*

Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 3,97.

Pour déterminer, à l'aide de cette variable aléatoire, la probabilité que, dans un prélèvement de 1 000 bornes, il y ait au moins 18 bornes défectueuses, on calcule $P(Z \geq 17{,}5)$.

La valeur approchée obtenue, arrondie à 10^{-2}, est :

0,35	0,38	0,65

C. *Intervalle de confiance*

Cet installateur effectue un sondage auprès de ses clients décideurs dans de grandes métropoles. Il souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients intéressés par un nouveau type de borne. Pour cela, il interroge au hasard un échantillon de 100 décideurs parmi sa clientèle. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.

Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la proportion, dans cet échantillon, des décideurs intéressés par ce nouveau type de borne. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.

Pour l'échantillon prélevé, on constate que 70 décideurs sont intéressés par le nouveau type de borne.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.

3. Peut-on affirmer que p est compris dans cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?

RÉPONSES P. 308

Épreuve 4

• Exercice 1 (10 points)

Uniquement pour le groupement B.

Programme abordé :

- *Équation différentielle du premier ordre*
- *Développement limité*
- *Calcul intégral*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + 2y = 2x - e^{-2x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y' + 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - \dfrac{1}{2} - xe^{-2x}$.

Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

B. *Étude locale d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Vérifier que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(e^{-2x} - 1),$$

en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Un logiciel de calcul formel donne :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x} = 0.$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 2x - 1$	$y = x - \dfrac{1}{2}$	$y = \dfrac{1}{2} - x$

2. Le calcul suivant a été obtenu avec un logiciel de calcul formel.

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,2);
(%o3) /T/ - x+3x^2+...
```

La sortie notée (%o3) fournit la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

Les questions **a)** *et* **b)** *sont des questions à choix multiples. Une seule réponse exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte.*

On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

a) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = -x + 3x^2$	$y = 3x^2$	$y = -x$

b) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

au-dessus de la tangente T	au-dessous de la tangente T	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. *Calcul intégral*

1. On note $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-x + 3x^2)\,dx$. Démonter que $I = \dfrac{1}{4}$.

2. On note $J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^{-2x}\,dx$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $J = \dfrac{e + e^{-1}}{4}$.

3. a) On note $K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, où f est la fonction définie dans la partie B.

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b) Donner la valeur approchée de $K - I$ arrondie à 10^{-3}.

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi normale, loi binomiale
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
- *Statistique inférentielle*
  Test unilatéral pour une moyenne

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

On donnera la valeur arrondie au millième de chacun des résultats de cet exercice.

Un entreprise fabrique des jouets en bois en grande série. On s'intéresse à l'une des pièces de ce jouet comportant une partie cylindrique permettant l'assemblage des différents éléments du jouet.

RÉPONSES P. 308

A. *Loi normale*

Pour que l'assemblage soit réalisable, c'est-à-dire que la pièce étudiée soit conforme, le diamètre de la partie cylindrique doit être compris entre 13,7 mm et 14,2 mm.

Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe le diamètre de la partie cylindrique. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}(14\,;0{,}1)$.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise soit conforme.

B. *Loi binomiale et approximation par une loi de Poisson*

Dans cette partie, on considère que 2,4 % des pièces de la production ne sont pas conformes.

Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 unités prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes. On admet que la production de l'entreprise est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse. En donner le (ou les) paramètre(s).

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités ?

3. **a)** On approche la variable aléatoire Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.

b) À l'aide de la variable Z, calculer une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités.

C. *Test unilatéral pour une moyenne*

L'assemblage des pièces du jouet doit être définitif. Ainsi, la partie cylindrique de la pièce étudiée dans les parties **A** et **B** est enduite de colle avant l'assemblage.

Le jouet est destiné à des enfants de moins de 36 mois. Ces enfants ne doivent en aucun cas pouvoir arracher la pièce du jouet, celle-ci présentant un risque d'ingestion.

Pour cette raison, l'entreprise réalise un test d'arrachement sur des échantillons de 50 jouets prélevés au hasard. Ces prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, compte tenu du grand nombre de jouets produits.

Soit $\overline{R}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 jouets, associe la résistance mécanique moyenne de l'assemblage. Cette résistance mécanique est exprimée en décanewtons, notés daN.

Soit r la résistance mécanique moyenne de l'ensemble des jouets produits par l'entreprise. On admet que $\overline{R}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(r, \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right)$.

On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1 %, destiné à savoir si la résistance mécanique moyenne des assemblages est strictement supérieure à 10 daN (pour des raisons de sécurité).

On donne l'hypothèse alternative $H_1 : r > 10$.

1. Donner l'hypothèse H_0.

2. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$.

Sous l'hypothèse H_0, calculer le nombre réel a tel que :

$$P(\overline{R} \leq a) = 0{,}99.$$

3. Quelle est la règle de décision du test ?

4. **a)** Sur un échantillon de 50 jouets, on a relevé les résistances exprimées dans le tableau ci-dessous. Calculer la moyenne r_e et l'écart type σ_e de cet échantillon. Aucune justification de ces résultats n'est demandée.

Résistance (daN)	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Effectifs	1	0	1	3	9	9

Résistance (daN)	10,5	11	11,5	12	12,5	13
Effectifs	10	9	3	2	2	1

b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*

Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On accepte l'hypothèse H_0.	On rejette l'hypothèse H_0.	On ne peut pas conclure.

Épreuve 5

• **Exercice 1** (10 points)

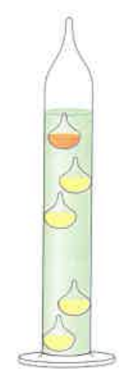
Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Équation différentielle du premier ordre*
- *Étude des variations*
- *Calcul intégral*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Le thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre en verre clos rempli d'un liquide dans lequel on a placé des petites boules de même volume et de masses différentes. Lorsque la température du liquide varie, les boules vont monter ou descendre, indiquant ainsi la température ambiante.



A. Résolution d'une équation différentielle

Lors de la construction d'un tel thermomètre, l'étude de la chute d'une boule dans un fluide conduit à l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{13}{2}$

RÉPONSES P. 308

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

2. Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g, définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = k$, soit une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

B. *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur

$$[0,+\infty[\text{ par } f(t) = 13\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right).$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est représentée sur le graphique joint *en annexe à rendre avec la copie.*

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0, +\infty[$. Calculer $f'(t)$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Les calcul suivants ont été effectués avec un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) f(t):=13*(1-%e^(-1/2*t));
                        -1
                        -- t
(%o1) f(t):=13 (1 - %e   2   )

(%i2) limit(f(t),t,+inf);
(%o2) 13
```

a) Donner $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

b) Que peut-on déduire du résultat du **a)** pour la courbe $\mathscr{C}$?

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T sur le graphique joint en annexe à rendre avec la copie.

C. *Application et calcul intégral*

On admet que la vitesse de chute de la boule à l'instant t est égale à $f(t)$. La vitesse est exprimée en mm.s^{-1} et le temps est donné en secondes.

1. Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm.s^{-1}.

2. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

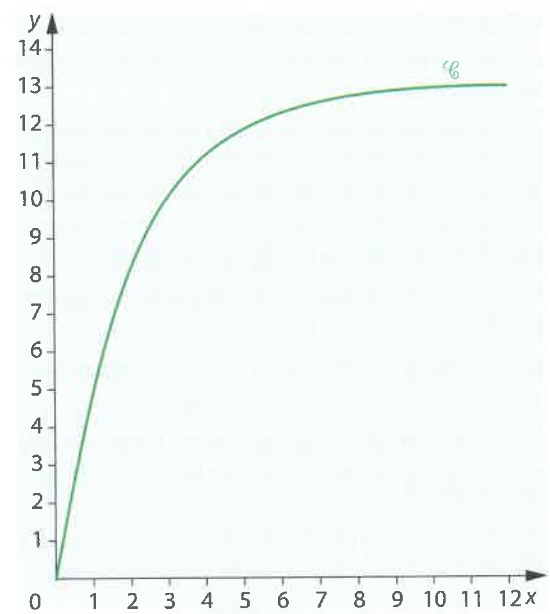
3. On désigne par V le nombre $V = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,dt$. Justifier l'expression de V fournie par la sortie logicielle notée (%o4).

```
(%i4) expand(1/2*integrate(f(t),t,2,4));
(%o4) -13 %e^-1 +13 %e^-2 +13

(%i5) float(%), numer;
(%o5) 9.976925946847215
```

4. Déterminer la valeur moyenne de la vitesse de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Annexe à rendre avec la copie



- **Exercice 2** (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi normale, loi binomiale.
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
- *Statistique inférentielle*
  Test bilatéral pour une moyenne

La farine est classée selon des « types » définis en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présent dans la farine. Cette teneur en matière minérale est obtenue par une analyse qui consiste à brûler la farine et à peser le résidu : « les cendres ». Plus la farine est blanche, plus le taux de cendres est faible. Quelques exemples de types de farine courants sont répertoriés dans le tableau ci-après :

RÉPONSES P. 309

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T 55	entre 0,5 et 0,6	Farine blanche
T 65	entre 0,62 et 0,75	Farine bise
T 80	entre 0,75 et 0,9	Farine semi-complète
T 110	entre 1 et 1,2	Farine complète

Le problème porte sur l'étude de la production de la farine semi-complète d'une minoterie.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. *Loi normale*

Dans un souci de contrôle de la qualité de la production de sa farine semi-complète, une minoterie décide de procéder à un contrôle du taux de cendres.

Le contrôle consiste à prélever 100 g de farine dans un paquet prélevé au hasard dans la production de farine semi-complète d'une journée et à analyser ces 100 g.

Un paquet de farine semi-complète est conforme si la masse du résidu, pour les 100 g de farine prélevés, est comprise entre 750 mg et 900 mg.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 g de farine d'un paquet prélevé au hasard dans la production, associe la masse du résidu obtenu en mg. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 825 et d'écart type 32,6.

Déterminer la probabilité qu'un paquet de farine, pris au hasard dans la production de farine semi-complète, soit conforme.

B. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Dans cette partie, on admet que 2 % des paquets de la production de farine semi-complète ne sont pas conformes. On choisit au hasard un lot de 50 paquets de farine semi-complète dans la production. On admet que la production est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 50 paquets.

On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 paquets, associe le nombre de paquets de ce lot non conformes au type T 80, c'est-à-dire de farine semi-complète.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus un paquet non conforme dans le lot.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) À l'aide de cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait moins de quatre paquets non conformes dans le lot.

C. *Test bilatéral pour une moyenne*

Une nouvelle qualité de blé est utilisée dans la minoterie pour fabriquer de la farine semi-complète. Afin de procéder à d'éventuels réglages des machines, on veut tester si la moyenne m de la masse des résidus des prélèvements de 100 g de farine est toujours de 825 mg.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral. On suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ qui, à tout prélèvement de 50 paquets choisis au hasard dans la production utilisant la nouvelle qualité de blé, associe la moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet, suit une loi normale d'espérance m et d'écart type 4,6.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 825$ ».

1. Préciser l'hypothèse alternative H_1.

2. Calculer le nombre réel a tel que :

$$P(825 - a \leq \overline{Z} \leq 825 + a) = 0{,}95.$$

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4. On prélève au hasard 50 paquets dans la production réalisée avec la nouvelle qualité de blé. La moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet est 860 mg.

Que peut-on conclure au risque de 5 % ?

Épreuve 6

• **Exercice 1** (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Équation différentielle du premier ordre*
- *Étude d'une fonction*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une pièce, la température est de 22 °C à 23 h quand on éteint le chauffage. On se propose d'étudier l'évolution de la température dans cette pièce au cours de la nuit.

On suppose que la température extérieure est constante, toujours égale à $T_{ext} = 10$ °C.

Soit t le temps écoulé depuis 23 h, exprimé en heures.

On désigne par $f(t)$ la température dans la pièce. f est une fonction de la variable t définie sur $[0, 8]$.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

La fonction f définie ci-dessus est solution de l'équation différentielle :

$$Cy' + \lambda y = \lambda T_{ext},$$

où C est la capacité thermique globale de la pièce et λ la conductivité thermique globale du mur donnant sur l'extérieur. On admet que l'équation s'écrit alors :

$$(E) \quad y' + 0{,}15y = 1{,}5.$$

RÉPONSES P. 309

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y' + 0{,}15y = 0.$$

2. Déterminer une fonction constante g, définie par $g(t) = b$ où b est un nombre réel, qui soit solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f solution de l'équation (E), qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 22$.

B. *Étude de la fonction f*

On admet dans la suite que f est la fonction définie sur $[0, 8]$ par :

$$f(t) = 10 + 12e^{-0{,}15t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0, 8]$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 1 °C en ordonnée.

3. Au bout de combien de temps la température devient-elle inférieure à 16 °C ? En déterminer la valeur à l'aide d'une inéquation. Quelle heure sera-t-il (arrondir à l'heure près) ?

C. *Calcul intégral*

À chaque instant t, le flux de chaleur vers l'extérieur est donné, en MJh^{-1} (mégajoule par heure), par la fonction j définie sur $[0, 8]$ par :

$$j(t) = \lambda(f(t) - T_{ext}) = 2{,}88e^{-0{,}15t}.$$

L'énergie dissipée à l'extérieur entre 23 h et 7 h, exprimée en MJ, s'obtient en calculant :

$$E_d = \int_0^8 j(t)\,dt.$$

1. Un logiciel de calcul formel donne : $E_d = 19{,}2(1 - e^{-1{,}2})$. Justifier ce résultat par un calcul.

2. Donner la valeur approchée de E_d arrondie à 10^{-1}.

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi normale, événements indépendants, loi binomiale
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
- *Statistique inférentielle*
  Intervalle de confiance pour une moyenne

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité des récipients cylindriques pour le laboratoire.

A. *Loi normale*

Le couvercle d'un récipient est conçu pour avoir un diamètre de 60 millimètres.

Il est non défectueux lorsque son diamètre, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle [59,93 ; 60,07].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe la diamètre, en millimètres, de son couvercle.

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type 0,03.

Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production ait un couvercle non défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

B. *Événements indépendants*

Les récipients fabriqués sont susceptibles de présenter deux défauts : un défaut au niveau de leur couvercle ou un défaut de contenance.

On prélève un récipient au hasard dans la production d'une journée.

On considère les événements suivants :

E_1 : « le couvercle du récipient prélevé est défectueux » ;

E_2 : « le récipient prélevé présente un défaut de contenance ».

On suppose que les événements E_1 et E_2 sont indépendants.

On admet que : $P(E_1) = 0{,}02$ et $P(E_2) = 0{,}01$.

Les questions **1**, **2 a)** *et* **2 b)** *suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente les deux défauts est :

0,02	0,002	0,0002

2. a) La probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente au moins un des deux défauts est :

0,03	0,0298	0,9702

b) La probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée ne présente aucun des deux défauts est :

0,0298	0,9998	0,9702

C. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

On prélève au hasard 50 récipients dans un stock pour vérification de leur couvercle. Le stock est assez important

RÉPONSES P. 309

pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 récipients.

On admet que la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard ait un couvercle défectueux est égale à 0,02.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 récipients, associe le nombre de récipients de ce prélèvement ayant un couvercle défectueux.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, un seul récipient ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Y_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a)**.

En utilisant la loi suivie par Y_1, calculer la probabilité qu'au plus trois récipients d'un prélèvement aient un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

D. *Intervalle de confiance*

Dans cette partie on s'intéresse à la contenance de chaque récipient, exprimée en centimètres cubes.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 récipients dans un lot important.

Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 récipients prélevés au hasard et avec remise dans le lot, associe la moyenne des contenances des récipients de cet échantillon.

On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0{,}06$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est : $\overline{x} = 119{,}88$.

Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot, avec un taux de confiance supérieur ou égal à 95 %.

On arrondira à 10^{-2} les bornes de cet intervalle.

Épreuve 7

• **Exercice 1** (9 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Étude d'une fonction*
- *Résolution d'une équation différentielle du premier ordre*

A. *Étude d'une fonction*

Les bordures d'autoroute possèdent des bassins de décantation dont le rôle est de recueillir les eaux pluviales ruisselant sur l'asphalte et les éléments polluants qu'elles peuvent drainer.

À la suite d'un accident de la circulation, un camion-citerne déverse une partie de son contenu sur la chaussée d'une autoroute. La réglementation en vigueur impose l'isolation, par fermeture des vannes, du bassin de décantation proche de l'accident de façon à ce que la concentration en matières polluantes dans le bassin ne dépasse pas 15 µg/L. Cette concentration est de 1,3 µg/L au moment où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin.

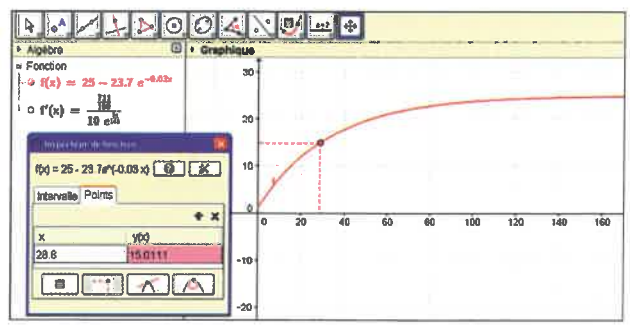
Dans cet exercice, on cherche notamment à prévoir au bout de combien de temps la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindra 15 µg/L.

On mesure en minute le temps t écoulé à partir de l'instant où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin de décantation.

On admet que, tant que le bassin n'est pas isolé par fermeture des vannes, la concentration à l'instant t en matières polluantes dans le bassin, exprimée en µg/L, peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(t) = 25 - 23{,}7\,e^{-0{,}03\,t}$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Le logiciel GeoGebra a permis d'obtenir les résultats suivants.



Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants :

```
(%i1)  f(t):=25-23.7*exp(-0.03*t);
(%o1)  f(t):=25 -23.7 exp((-0.03)t)

(%i2)  limit(f(t),t,inf);
`rat' replaced -0.03 by -3/100 = -0.03
`rat' replaced -23.7 by -237/10 = -23.7
(%o2)  25

(%i3)  diff(f(t),t);
(%o3)  0.711 %e^(-0.03 t)
```

1. a) Donner, à l'aide de l'affichage du logiciel de calcul formel, la valeur de $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

RÉPONSES P. 309

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

b) Démontrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f'(t) = 0{,}711\ e^{-0{,}03\,t}$.

c) En déduire le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Si le bassin n'était pas équipé d'un dispositif d'isolation par fermeture des vannes, quelle serait la valeur proche de laquelle se stabiliserait la concentration en matières polluantes ? Justifier.

3. À l'aide des affichages logiciels, déterminer la valeur approchée t_0, arrondie à la minute, du temps au bout duquel la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindrait 15 µg/L si le bassin n'était pas isolé par fermeture des vannes. Expliquer votre démarche.

B. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\quad y' + 0{,}03y = 0{,}75$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définis sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}03y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $g(t) = a$, où a est une constante réelle.

Déterminer a pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. a) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1{,}3$.

b) Que remarque-t-on ?

• Exercice 2 (11 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi binomiale, événements indépendants
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, loi exponentielle

Une entreprise assure l'installation et la maintenance de systèmes de climatisation. L'étude suivante concerne la durée de vie de trois types de pièces présentes dans la plupart des installations.

A. *Étude des pièces de type I et II*

On a relevé la durée de vie, en mois, de deux types de pièces présentes dans la plupart des installations.

Au bout d'un peu plus de huit ans on a pu établir les deux tableaux suivants.

Pour les pièces de type I :

Âge, en mois	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nombre de pièces fonctionnant	1 000	990	985	970	949	909	829	674	420	112	7

Pour les pièces de type II :

Âge, en mois	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nombre de pièces fonctionnant	1 000	992	990	985	977	960	925	853	676	281	29

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans ce qui suit, toutes les pièces prélevées au hasard le sont parmi les installations entretenues par l'entreprise.

1. *Probabilité de survie*

La probabilité de l'événement : « Une pièce, prélevée au hasard parmi les pièces en service d'âge x, fonctionne encore à l'âge y », est le nombre :

$$p = \frac{\text{Nombre de survivants d'âge } y}{\text{Nombre de survivants d'âge } x}.$$

Par exemple la probabilité de l'événement : « Une pièce de type I, prélevée au hasard parmi les pièces de type I en service au bout de 50 mois, fonctionne encore au bout de 80 mois », est $p = \frac{420}{909}$ $(p \approx 0{,}46)$.

À l'aide des tableaux figurant au début de l'énoncé, déterminer la probabilité de chacun des événements suivants. Arrondir à 10^{-2}.

a) E_1 : « Une pièce de type *I*, prélevée au hasard parmi les pièces de type *I* en service au bout de 40 mois, fonctionne encore au bout de 80 mois » ;

b) E_2 : « Une pièce de type *II*, prélevée au hasard parmi les pièces de type *II* en service au bout de 50 mois, fonctionne encore au bout de 90 mois ».

2. *Événements indépendants*

On note A l'événement :

« Une pièce prélevée au hasard parmi les pièces de type *I* en service au bout de 30 mois, fonctionne encore au bout de 80 mois ».

On note de même B l'événement :

« Une pièce prélevée au hasard parmi les pièces de type *II* en service au bout e 30 mois, fonctionne encore au bout de 80 mois ».

On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}43$ et $P(B) = 0{,}69$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

On prélève au hasard un module constitué d'une pièce de type *I* et d'une pièce de type *II* toutes deux en service au bout de 30 mois.

RÉPONSES P. 310

Les questions **a)**, **b)** *et* **c)** *suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

a) La probabilité de l'événement F_1 :

« les deux pièces du module fonctionnent encore au bout de 80 mois » est :

0,26	0,7033	0,2967

b) La probabilité de l'événement F_2 :

« au moins une pièce du module fonctionne encore au bout de 80 mois » est :

0,1767	0,8233	0,7267

c) La probabilité de l'événement F_3 :

« aucune des deux pièces du module ne fonctionne encore au bout de 80 mois » est :

0,8233	0,2967	0,1767

3. *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

On décide de prendre comme probabilité de survie jusqu'à 90 mois d'une pièce de type I encore en service au bout de 40 mois, $p = 0{,}12$.

On prélève au hasard 25 pièces de type I parmi celles en service au bout de 40 mois dans les installations bénéficiant d'un contrat d'entretien de l'entreprise. Le nombre de ces pièces est assez grand pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 pièces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à tout lot de 25 pièces de type I en service au bout de 40 mois le nombre des pièces de ce lot qui fonctionnent encore au bout de 90 mois.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Déterminer, la probabilité de chacun des événements suivants :

G_1 : « aucune pièce, parmi les 25 survivantes de 40 mois, ne fonctionne encore au bout de 90 mois » ;

G_2 : « cinq pièces exactement, parmi les 25 survivantes de 40 mois, fonctionnent encore au bout de 90 mois ».

c) Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

d) On décide d'approcher la loi binomiale du **a)** par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre de cette loi. On note Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

Déterminer la probabilité, de chacun des événements définis au **3 b)**, c'est-à-dire $P(Y=0)$ et $P(Y=5)$.

B. *Étude des pièces de type III*

Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

T est la variable aléatoire qui, à toute pièce de type III utilisée dans les installations prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures).

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 4.

1. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la pièce prélevée est comprise entre 2 000 h et 2 800 h »

c'est-à-dire : $P(A) = \int_{2\,000}^{3\,000} 0{,}000\,4\, e^{-0{,}000\,4t} dt$;

B : « la durée de bon fonctionnement de la pièce prélevée est inférieure à 3 000 h » ;

C : « la durée de bon fonctionnement de la pièce prélevée est supérieure à 2 500 h ».

2. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

Épreuve 8

• Exercice 1 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Équation différentielle du premier ordre*
- *Étude d'une fonction*
- *Calcul intégral*

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E) : 5y' + y = e^{-0{,}2t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de la fonction y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $h(t) = ate^{-0{,}2t}$, où a est une constante réelle.

Déterminer a pour que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 0.$$

RÉPONSES P. 310

B. *Étude d'une fonction*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(t) = 0{,}2te^{-0{,}2t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Un logiciel de calcul formel fournit la limite de f en $+\infty$.

```
(%i1) f(t):=2/10*t*%e^(-2/10*t);
(%o1) f(t):= 2/10 t %e^(-2/10 t)
(%i2) limit(f(t),t,+inf);
(%o2) 0
```

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

Le logiciel de calcul formel déjà utilisé à la question **1.** fournit une expression de $f'(t)$.

Le logiciel note $\%e^{-\frac{t}{5}}$ le nombre $e^{-\frac{t}{5}}$.

```
(%i3) factor(diff(f(t),t));
(%o3) - (t-5) %e^(-t/5) / 25
```

Justifier par un calcul l'expression de $f'(t)$ affichée à la ligne (%o3).

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et donner son tableau de variation. On précisera les valeurs remarquables de t et $f(t)$.

4. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira les résultats à 10^{-2}.

x	0	2,5	5	10	15	20	25
$f(x)$							

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.

Sur l'axe des x, 2 cm représentent 5 unités. Sur l'axe des y, 2 cm représentent 0,05 unités.

C. *Application*

À l'aide d'une perfusion, on injecte pendant cinq minutes un médicament antalgique à un patient. Après l'injection, l'organisme élimine peu à peu le médicament.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'injection.

On fait l'hypothèse qu'à l'instant t, exprimé en minute (min), la quantité de médicament, exprimée en millilitres (ml), est égale à $f(t) = 0{,}2te^{-0{,}2t}$, où f est la fonction étudiée dans la partie **B.**

1. Déterminer graphiquement, à une minute près, l'instant à partir duquel la quantité de médicament **redevient** inférieure à 0,05 ml.

On fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.

2. a) Le logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression d'une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ce logiciel note $\%e^{-\frac{t}{5}}$ le nombre $e^{-\frac{t}{5}}$.

```
(%i1) f(t):=2/10*t*%e^(-2/10*t);
(%o1) f(t):= 2/10 t %e^(-2/10 t)
(%i2) integrate(f(t),t);
(%o2) (-5 t-25) %e^(-t/5) / 5
```

Justifier, à l'aide d'un calcul, l'expression de $F(t)$ fournie par le logiciel.

b) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, 23]$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

c) Que représente la valeur moyenne calculée au **b)** dans le contexte de l'exercice ?

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi binomiale, loi normale, probabilités conditionnelles
- *Probabilités 2*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
- *Statistique inférentielle*
  Intervalle de confiance pour une moyenne

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf indication contraire, à arrondir à 10^{-3}.

A. *Loi binomiale et loi de Poisson*

Dans un stock important de bouteilles, 7,5 % des bouteilles contiennent de l'eau calcaire.

On prélève au hasard 40 bouteilles dans le stock pour vérification du taux de calcium. Le stock est assez important

RÉPONSES P. 310

pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 bouteilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent de l'eau calcaire.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

3. On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **2**.

a) Calculer $P(X_1 \leq 4)$.

b) Traduire le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

B. *Loi normale*

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source 1 » et « source 2 ». On rappelle que lorsque le taux de calcium dépasse 6,5 mg par litre dans une bouteille, l'eau de cette bouteille est dite calcaire.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.

1. Calculer $P(Y \leq 6{,}5)$.

2. En déduire la probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1 soit calcaire.

C. *Probabilités conditionnelles*

On suppose que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source 1 contienne de l'eau calcaire est $p_1 = 0{,}16$ et que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production de cette journée de la source 2 contienne de l'eau calcaire est $p_2 = 0{,}10$.
La source 1 fournit 70 % de la production totale des bouteilles d'eau et la source 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une bouteille d'eau parmi la production totale de la journée.
Toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirées.
On définit les événements suivants :
A : « la bouteille d'eau provient de la source 1 » ;
B : « la bouteille d'eau provient de la source 2 » ;
C : « l'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.

3. Déduire de ce qui précède $P(C)$.

4. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

D. *Intervalle de confiance*

Dans cette question on s'intéresse au taux de calcium de l'eau d'une grande quantité de bouteilles devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans cette livraison.
Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans la livraison, associe la moyenne des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de cet échantillon.
On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{10}$ avec $\sigma = 0{,}99$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 5{,}37$.
Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison, avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

Épreuve 9

• Exercice 1 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :
- *Équation différentielle du premier ordre*
- *Étude d'une fonction*
- *Calcul intégral*

Cet exercice propose l'étude de la contamination accidentelle d'un cours d'eau par un polluant.
La partie B est consacrée à l'étude d'une fonction qui permet d'exprimer, dans la partie C, la concentration de polluant dans l'eau en fonction du temps.
Les deux premières parties de l'exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 0{,}25y = 3e^{-t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de la fonction y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' + 0{,}25y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $h(t) = -4e^{-t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

RÉPONSES P. 310

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 75.$$

B. *Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = 79e^{-0,25t} - 4e^{-t}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Sur l'axe des x l'unité est : 0,5 cm. *Sur l'axe des y l'unité est :* 0,25 cm.

1. Un logiciel de calcul formel fournit la limite de f en $+\infty$.

```
(%i1)  f(t):=79*%e^(-1/4*t)-4*%e^(-t);
                     -1
                     -- t
                      4         -t
(%o1)  f(t):=79 %e        -4 %e

(%i2)  limit(f(t),t,+inf);
(%o2)  0
```

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a) Démontrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$:

$$f'(t) = e^{-0,25t}(-19,75 + 4e^{-0,75t}).$$

b) On admet que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$, $-19,75 + 4e^{-0,75t} < 0$.

En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. a) Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs de $f(t)$ seront arrondies au dixième.

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$		22,6		1,9	0,5	

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

4. a) Le résultat affiché à la ligne (%o5) donne la valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle [0, 20].

```
(%i5)  1/20*expand(integrate(f(t),t,0,20));
              -5        -20
       -316 %e   +4 %e     +312
(%o5)  --------------------------
                  20
```

Justifier par un calcul l'expression de V_m affichée.

b) Donner la valeur approchée de V_m arrondie au dixième.

C. *Exploitation des résultats de la partie B*

On admet que, t semaines après la contamination, la concentration de polluant dans l'eau, exprimée en milligrammes par litre, est $\frac{1}{3}f(t)$, où f est la fonction étudiée dans la partie B.

1. La baignade est sans danger lorsque la concentration de polluant dans l'eau est inférieure ou égale à 2,5 milligrammes par litre. En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ construite au **3 b)** de la partie **B**, déterminer au bout de combien de semaines la baignade peut être autorisée.

Laisser apparents les traits utiles sur le graphique.

2. Quelle est la valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau ?

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Événements indépendants, probabilités conditionnelles, loi binomiale, loi normale

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

A. *Événements indépendants, probabilités conditionnelles*

Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité.

Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement a et b.

Le défaut a consiste en la présence de désherbants chimiques.

Le défaut b consiste en la présence de pesticides.

On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.

L'événement : « le sachet présente le défaut a » est noté A et l'événement : « le sachet présente le défaut b » est noté B.

Des études statistiques ont permis d'admettre que

$P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,03$.

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. On note E_1 l'événement : « le sachet présente les deux défauts a et b ». Calculer $P(E_1)$.

2. On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.

On note E_2 l'événement : « le sachet est défectueux ».

Calculer $P(E_2)$.

3. On note E_3 l'événement : « le sachet ne présente aucun défaut ». Calculer $P(E_3)$.

4. Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.

Le résultat est a arrondir à 10^{-4}.

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}.

RÉPONSES P. 311

B. *Loi binomiale*

On note D l'événement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ». On suppose que $P(D) = 0{,}05$.
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

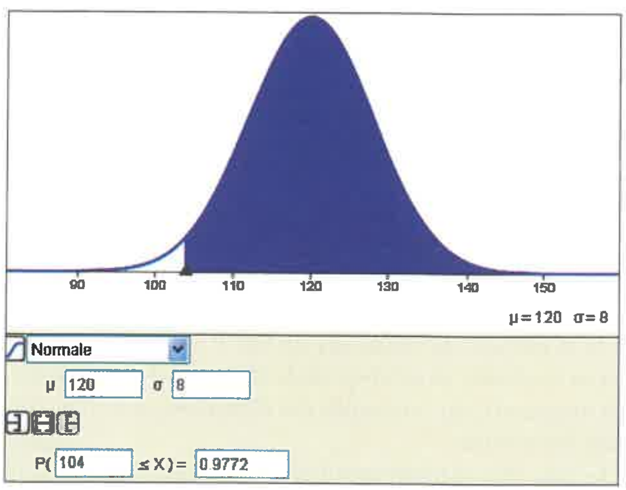
2. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.

3. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

C. *Loi normale*

On s'intéresse dorénavant à la masse d'un sachet.
La variable aléatoire qui à chaque sachet prélevé au hasard dans une importante livraison associe sa masse en grammes est notée Y.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 8.

1. Un logiciel permet de visualiser ci-dessous le résultat $P(Y \geq 104) \approx 0{,}977\,2$.



Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice à l'aide d'une phrase.

2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle [104, 136] est rejeté. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

Épreuve 10

• **Exercice 1** (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :
- *Étude d'une fonction logistique*
- *Calcul d'une valeur moyenne*

A. *Étude d'une fonction*

La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+4{,}9\mathrm{e}^{-0{,}125t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}125t} = 0$. Calculer la limite de f en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.

2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants.

```
(%i1) define(f(t),1/(1+4.9*exp(-0.125*t)));
                     1
(%o1) f(t):=──────────────────
                  - 0.125 t
            4.9 %e          + 1

(%i2) diff(f(t),t);
                       - 0.125 t
           0.6125 %e
(%o2)  ───────────────────────
        (        - 0.125 t    )2
        (4.9 %e           + 1)

(%i3) find_root(f(t)=0.5,t,0,30);
(%o3) 12.71388164093265
```

a) En calculant la dérivée de f, justifier l'expression de $f'(t)$ donnée par le logiciel en sortie notée (%o2).
b) Établir le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

5. En quoi consiste la requête correspondant à l'entrée notée (%i3) dans le logiciel ? Donner une interprétation graphique en faisant apparaître les traits utiles sur le graphique.

B. *Valeur moyenne*

1. On admet que $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}125t}}{4{,}9+\mathrm{e}^{0{,}125t}}$.

Vérifier que la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(t) = 8\ln(4{,}9 + \mathrm{e}^{0{,}125t})$ est une primitive de f.

RÉPONSES P. 311

2. Démontrer que la valeur moyenne de f sur [10, 20] est :

$$V_m = 0{,}8\ln\left(\frac{4{,}9+e^{2{,}5}}{4{,}9+e^{1{,}25}}\right).$$

3. Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-3}.

C. Applications des parties A. et B.

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un département, est donné approximativement par la formule : $f(t)=\dfrac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}}$ où t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0)\approx 0{,}17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages qui possédaient cet équipement en 2010. Arrondir à 10^{-2}.

2. Déduire de la partie *A.* l'année à partir de laquelle 50 % des ménages étaient équipés d'un four à micro-ondes.

3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au **3.** de la partie *B.*

• Exercice 2 (10 points)

Cet exercice convient pour les trois groupements B, C, D.

Programme abordé :

- *Probabilités 1*
  Loi normale, loi binomiale
- *Probabilités 2*
  Loi de Poisson
- *Statistique inférentielle*
  Test bilatéral pour une moyenne

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse au chantier de construction d'un tronçon de TGV.

Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.

La réalisation de l'ouvrage nécessite de grandes quantités de fers à béton.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. *Loi normale*

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de m^3 de matériaux extraits pendant la première heure du chantier. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 10.

1. Calculer $P(110 \le X \le 130)$.

2. Calculer la probabilité que la pelle prélevée extrait moins de 100 m^3 pendant la première heure du chantier.

B. *Loi de Poisson*

On note Y la variable aléatoire qui, à toute heure travaillée prise au hasard pendant la première semaine du chantier, associe le nombre de camions-benne entrant dans la zone 1 du chantier pour charger des matériaux. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1. Calculer la probabilité de l'événement

A : « pendant une heure prise au hasard il n'entre aucun camion-benne sur la zone 1 du chantier ».

2. Calculer la probabilité de l'événement

B : « pendant une heure prise au hasard il entre au plus quatre camions-benne sur la zone 1 du chantier ».

C. *Loi binomiale*

On note E l'événement : « un camion-benne pris au hasard dans la flotte n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier. »

On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,9.

On prélève au hasard 10 camions-benne dans la flotte pour les affecter à une zone du chantier.

Le nombre de camions-benne de la flotte est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 camions-benne.

On désigne par Z la variable aléatoire qui à tout prélèvement de ce type associe le nombre de camions-benne n'ayant pas eu de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier.

1. Justifier que la variable Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des 10 camions-benne n'ait de panne ni de sinistre pendant le premier mois de chantier.

D. *Test d'hypothèse*

De grandes quantités d'un certain type de fers cylindriques pour le béton armé, de diamètre 25 millimètres, doivent être réceptionnées sur le chantier.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la réception d'une livraison, la moyenne μ de l'ensemble des diamètres en millimètres des fers à béton.

On note M la variable aléatoire qui, à chaque fer prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètres. La variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,2.

On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 fers prélevés dans la livraison, associe la moyenne des diamètres des fers de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

RÉPONSES P. 311

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 25$. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 25$.

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,02.

On admet également que : $P(24{,}961 \leq \overline{M} \leq 25{,}039) = 0{,}95$.

Ce résultat n'a pas à être démontré.

Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 100 fers à béton et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{x} = 24{,}978$.

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?