CHAPITRE 2

Calcul intégral

Ce chapitre est conçu pour permettre aux étudiants, suivant leurs études antérieures, de consolider leurs acquis en calcul intégral ou de se familiariser avec deux nouveautés : les primitives et l'intégrale.

Ce chapitre est essentiel, vu l'importance de ses prolongements en mathématiques et de ses applications dans les autres disciplines.

1 Primitives

- Déterminer les primitives d'une fonction à la main ou à l'aide d'un logiciel.
- Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$.

2 Intégration

- Déterminer une intégrale à la main ou à l'aide d'un logiciel.
- Déterminer une aire.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.
- Calculer une intégrale par intégration par parties.

COURS

1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

Nouveauté pour les bacheliers professionnels

Cette partie concerne les trois groupements B, C et D.

A. Définition

Exemple

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 6x^2 - 3$ et $F : x \mapsto 2x^3 - 3x + 4$.

Vérifiez que, pour tout nombre réel x, $F'(x) = f(x)$.

f est la fonction dérivée de F ; on dit que F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une **primitive** de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que $F' = f$.

Nous admettons ici le théorème suivant.

THÉORÈME

Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Certaines fonctions non dérivables sur I peuvent aussi avoir des primitives sur I.

B. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit $f : x \mapsto 2x$, définie sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

De même $F_1 : x \mapsto x^2 + 1$, $F_2 : x \mapsto x^2 - 4$, …, sont des primitives de f.

f admet-elle d'autres primitives sur $\mathbb{R}$ que les fonctions $x \mapsto x^2 + C$ où C est une constante réelle ?

La réponse est donnée par le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME

Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Nous pouvons retenir en abrégé : sur un **intervalle** deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Exemple

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3$ sont les fonctions $x \mapsto x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.

Remarque

Parmi les primitives de la fonction f définie dans l'exemple ci-dessus, cherchons s'il existe une fonction F telle que $F(2) = 6$.
F convient si et seulement si $F(x) = x^3 - 3x + C$ avec $2^3 - (3 \times 2) + C = 6$, c'est-à-dire $C = 4$.
Il existe donc une primitive unique de f prenant la valeur 6 pour $x = 2$; c'est $F : x \mapsto x^3 - 3x + 4$.

Observez que C est la solution unique d'une équation du premier degré.

Plus généralement nous pouvons démontrer de la même façon le théorème suivant :

THÉORÈME

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe une et une seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable.

Dans le cas particulier ci-dessus $y_0 = 6$ et $x_0 = 2$.

C. Primitives des fonctions de référence

Voir la rubrique **Ce qu'il faut savoir** du chapitre 1.

La lecture du tableau des dérivées des fonctions de référence dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives de ces fonctions.

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	sur	Les primitives F de f sont définies par
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	• $\mathbb{R}$ si $n > 0$ • $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < 0$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + C$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$

En notant $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ on observe que cette formule est un cas particulier de la précédente.

Attention au signe –.

Attention au signe –.

D. Opérations algébriques

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit le théorème suivant :

THÉORÈME

• Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G une primitive de g sur I, alors **$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.**

• Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et si a est un nombre réel, alors **aF est une primitive de af sur I.**

Attention : $F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$.
De même pour l'inverse $\frac{1}{G}$ et le quotient $\frac{F}{G}$.

Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$.

Du tableau donnant les primitives des fonctions de référence et des résultats concernant la primitive d'une somme et la primitive du produit d'une fonction par un nombre réel, on déduit que les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 2\times\left(\frac{1}{4}x^4\right) - 3\times\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 4\times\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 7x + C \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + C \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Remarque :
Lorsqu'on demande **une** primitive sans condition particulière, on prend habituellement $C = 0$.

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - \dfrac{2}{x^2}$.

En procédant comme dans l'exemple précédent, on déduit qu'une primitive de f est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = 3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + x + 2\left(\frac{1}{x}\right),\ F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{2}{x}.$$

E. Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Nous avons vu au chapitre 1 qu'une fonction de la forme u^n dérivable sur un intervalle I a pour dérivée $nu'u^{n-1}$.

n est un entier relatif différent de -1.

Donc une primitive d'une fonction de la forme $nu'u^{n-1}$ est u^n.

$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n < 0$.

Nous en déduisons, par multiplication par la constante $\dfrac{1}{n}$, que, d'après la remarque du paragraphe D : une primitive d'une fonction de la forme $u'u^{n-1}$ est $\dfrac{1}{n}u^n$.

$n \neq 0$.

En remplaçant n par $n + 1$ nous obtenons le résultat figurant dans le tableau suivant.

f est définie sur un intervalle I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + C$

$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n < -1$.

Ce résultat est un cas particulier du précédent avec $n = -2$.

Remarque
La mise en œuvre des résultats figurant dans ce tableau conduit aux deux observations suivantes.
1. Pour déterminer des fonctions dérivées et des fonctions primitives il faut, dans un cas comme dans l'autre, trouver « la bonne formule ». Mais le problème est plus difficile dans le cas des primitives que dans celui de dérivées car il faut identifier une fonction u et sa dérivée u' et, le plus souvent, choisir une constante multiplicative.
2. **Lorsqu'on a trouvé une primitive d'une fonction, il est prudent de procéder à une vérification en dérivant la primitive obtenue.**

Ce qui veut dire que pour déterminer des primitives, il faut savoir dériver les fonctions usuelles.

Exemple

Déterminons une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{x}{(3x^2+1)^2}$.

$f(x)$ ressemble à $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ (mais ce n'est pas…).

On pose $u(x) = 3x^2 + 1$, alors $u'(x) = 6x$.

D'où : $f(x) = \dfrac{1}{6} \times \left[\dfrac{6x}{(3x^2+1)^2}\right]$.

Cette écriture de $f(x)$ permet d'avoir « exactement » dans le crochet une expression de la forme $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$. Une primitive de la fonction correspondante est définie par $-\dfrac{1}{u(x)}$, d'après le tableau précédent.

Une primitive de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \dfrac{1}{6} \times \left[-\dfrac{1}{3x^2+1}\right]$, $F(x) = -\dfrac{1}{6(3x^2+1)}$.

F. Primitives de $\dfrac{u'}{u}$ où $u > 0$

Voir le paragraphe E.

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble au résultat admis pour les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ où n est un entier relatif différent de -1.

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$ sont définies sur I par $\boldsymbol{F(x) = \ln[u(x)] + C}$, où C est une constante réelle.

Exemple

Déterminons les primitives de la fonction g définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$g(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{2x+1}$.

Les primitives de la fonction g sont les fonctions G définies sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$G(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x + C + F(x)$, où F est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$.

$\dfrac{1}{2x+1}$ n'est pas exactement de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ car pour $u(x) = 2x + 1$, on a $u'(x) = 2$.

Cependant $\dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{2x+1}$ avec $2x + 1 > 0$ pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{2x+1}$ est $x \mapsto \ln(2x+1)$.

Donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{2x+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

En conclusion, $G(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}\ln(2x+1) + C$.

G. Primitives de $u'e^u$

> n est un entier relatif différent de -1.

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble aux résultats admis pour les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ ou $\frac{u'}{u}$.

THÉORÈME

Si sur un intervalle I une fonction f est telle que $\boldsymbol{f(x) = u'(x)e^{u(x)}}$, alors les primitives F de f sur I sont définies par $\boldsymbol{F(x) = e^{u(x)} + C}$ où C est une constante réelle quelconque.

Exemple

Déterminons les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.

e^{2x} n'est pas exactement de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ car pour $u(x) = 2x$, on a $u'(x) = 2$.

Pour obtenir la forme cherchée, on écrit : $f(x) = \frac{1}{2}(2e^{2x})$.

Les primitives de f sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ où C est une constante réelle quelconque.

2 Intégration

> Nouveauté pour les bacheliers professionnels

Cette partie, à l'exception du paragraphe F, concerne les trois groupements B, C et D.

> Une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ou sur $]0, +\infty[$ est en particulier dérivable sur un intervalle tel que $[2, 5]$ ou $[0,1 ; 40]$.

Dans toute cette partie nous nous limitons, sauf exception, à des **fonctions dérivables sur un intervalle [a, b]**.

A. Intégrale d'une fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a et b des nombres de I.

> Voir le paragraphe 1A.

La fonction f étant dérivable sur l'intervalle I, possède des primitives sur cet intervalle.

> Voir le paragraphe 1B.

F et G étant deux primitives de f sur l'intervalle I, nous savons qu'elles diffèrent d'une constante :
pour tout x de I, $F(x) = G(x) + C$ où C est une constante indépendante de x.

En particulier pour $x = b$ et pour $x = a$, nous obtenons :

$F(b) = G(b) + C \quad$ et $\quad F(a) = G(a) + C$.

Donc, par différence : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Ainsi **le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f sur I ;** il ne dépend que de la fonction f et des nombres réels a et b.

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

L'**intégrale de a à b de f**, notée $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$, est le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

> $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme de a et b de f de xdx ».
>
> a et b sont les **bornes** d'intégration.

Remarques

- Pour calculer $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, nous commençons par déterminer une primitive F de f avant de calculer $F(b) - F(a)$.

Nous notons ce calcul de la façon suivante :

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$,

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

La **même** lettre doit figurer **deux fois** dans cette écriture : dans $f(\ldots)$ et dans d...

- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la variable x est « muette », ce qui signifie que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \ldots$
- Dans le cas particulier où $b = a$, $\int_a^a \boldsymbol{f(x)\mathrm{d}x = 0}$ car $F(a) - F(a) = 0$.
- En permutant a et b dans la définition, nous obtenons : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$. Donc $\int_b^a \boldsymbol{f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

Exemples

- $\int_{-1}^{2} 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_{-1}^{2} = 2^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$.
- $\int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$ car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.
- Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^2 e^{-3t+1}\,\mathrm{d}t$.

$f(t) = e^{-3t+1}$ est de la forme $e^{u(t)}$ dont la dérivée est $u'(t)\,e^{u(t)}$ avec $u'(t) = -3$.

Faisons apparaître une forme $u'(t)\,e^{u(t)}$ dans $f(t)$:

$f(t) = -\frac{1}{3}(-3e^{-3t+1})$.

Une primitive F de f est donc définie par $F(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t+1}$.

$\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{3}e^{-3t+1}\right]_0^2$; $\mathrm{I} = -\frac{1}{3}e^{-5} - \left(-\frac{1}{3}e\right)$; $\mathrm{I} = \frac{1}{3}(e - e^{-5})$; $\mathrm{I} \approx 0{,}904$.

B. Interprétation graphique de l'intégrale pour une fonction de signe constant

Fonction positive sur $[a, b]$

• *Fonction constante*

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = 4$; la figure 1 donne sa représentation graphique.

L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle OABC est $\mathrm{OA} \times \mathrm{OC} = 3 \times 4$, donc $\mathscr{A} = 12$.

Or $\int_0^3 4\,dt = [4t]_0^3$, donc $\int_0^3 4\,dt = 12$.

Nous remarquons que, pour cette fonction constante, $\mathscr{A} = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

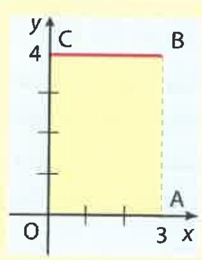


Figure 1

• *Fonction affine*

Soit f la fonction définie sur $[1, 4]$ par $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$; la figure 2 donne sa représentation graphique.

L'aire $\mathscr{A}$ du trapèze ABCD est $\frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BC}}{2} \times \mathrm{AB} = \frac{1+2}{2} \times 3$, donc $\mathscr{A} = \frac{9}{2}$.

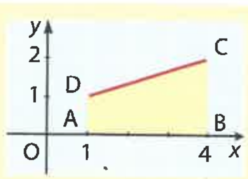


Figure 2

COURS

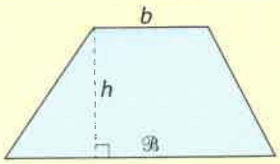


Figure 3

L'aire d'un trapèze de bases b et $\mathscr{B}$ et de hauteur h est :

$\mathscr{A} = \frac{1}{2}(b+\mathscr{B})h$.

Or $\int_1^4 \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)dx = \left[\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}x\right]_1^4$,

donc $\int_1^4 \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)dx = \left(\frac{16}{6}+\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$, $\int_1^4 \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)dx = \frac{9}{2}$.

Nous remarquons que, pour cette fonction affine, $\mathscr{A} = \int_1^4 f(x)\,dx$.

• ***Cas général***

Pour deux exemples de fonction f positive sur un intervalle $[a, b]$, nous venons d'observer que l'aire de la partie de plan comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous admettons que cette propriété est vraie pour toute fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$:

Cette partie de plan, appelée aussi **domaine**, est colorée en jaune sur la figure 4 : c'est le quadrilatère ABB'A' qualifié de curviligne car le côté AB est un arc de courbe.

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable et **positive** sur un intervalle $[a, b]$.

L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan constituée de l'ensemble des points M de coordonnées x et y telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

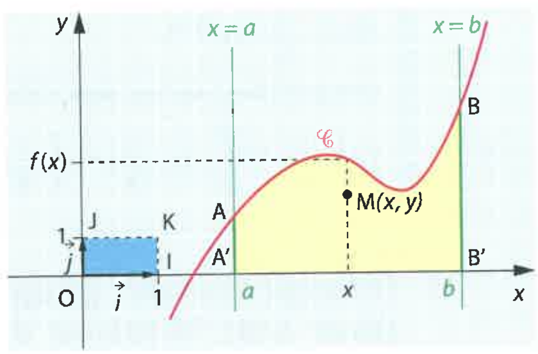


Figure 4

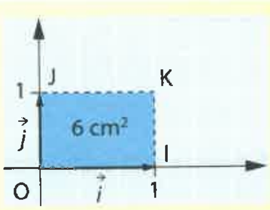


Figure 5

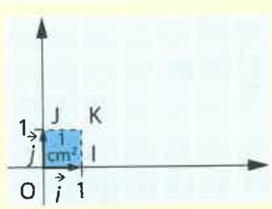


Figure 6

Sur la figure 4, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires des deux axes de coordonnées, on a OI = 1 et OJ = 1, donc OI × OJ = 1.

Si l'unité de longueur est 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées, l'aire du rectangle OIKJ est $3 \times 2 = 6$ cm², donc l'unité d'aire est 6 cm² (figure 5).

Dans le cas particulier où le repère est orthonormé et où l'unité de longueur sur chaque axe est le centimètre, OIKJ est un carré de côté 1 cm, donc d'aire 1 cm² : l'unité d'aire est alors le centimètre carré (figure 6).

Dans toute la suite du cours, toutes les aires sont exprimées en unités d'aire.

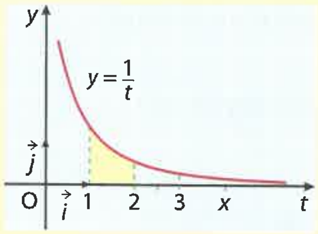


Figure 7

Exemple

- $\int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln t]_1^2$, donc $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$ car $\ln 1 = 0$.

ln 2 est donc l'aire de la partie coloriée sur la figure 7.

- De même, $\ln 3 = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est l'aire de la partie de plan limitée par l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{t}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $t = 1$ et $t = 3$.
- Plus généralement, soit x un nombre réel tel que $x \geq 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable et positive sur $[1, x]$.

$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^x$, donc $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$ car $\ln 1 = 0$.

D'après le théorème ci-dessus, $\ln x$, où $x \geq 1$, est l'aire de la partie du plan limitée par l'hyperbole $y = \frac{1}{t}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $t = 1$ et $t = x$.

Nous obtenons ainsi une interprétation graphique de ln *x*.

Remarque

Pour vérifier l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul d'aire, il suffit de compter les carreaux hachurés sur une figure faite sur papier quadrillé.
On peut aussi vérifier le résultat du calcul d'une intégrale avec la valeur, exacte ou approchée, obtenue avec une calculatrice.

Voir les pages calculatrices à la fin de l'ouvrage.

Fonction négative sur un intervalle $[a, b]$

Nous nous ramenons au cas d'une fonction positive en considérant la fonction $-f$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_{-f}$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses (figure 8).

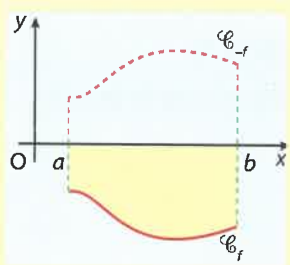


Figure 8

Une symétrie orthogonale conservant les aires, nous avons :

$\mathscr{A} = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, F étant une primitive de f sur $[a, b]$, $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a, b]$.

Donc $\mathscr{A} = [-F(x)]_a^b$, $\quad \mathscr{A} = -F(b) - (-F(a)) = -(F(b) - F(a))$.

Donc $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable et **négative** sur un intervalle $[a, b]$.

L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan constituée de l'ensemble des points M de coordonnées x et y telles que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$, est :

$$\mathscr{A} = -\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Attention au signe –.

Exemple

L'aire du domaine défini comme l'ensemble des points M(x, y) tels que $0 \leq x \leq 2$ et $x^2 - 2x \leq y \leq 0$ est

$$-\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\left(\frac{8}{3} - \frac{12}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

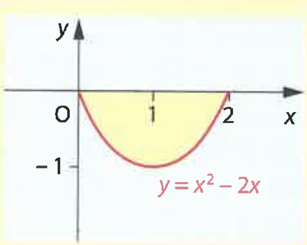


Figure 9

Cas particuliers

Voici deux cas particuliers pour lesquels nous lisons le résultat sur une figure :

Intégrale d'une fonction paire sur $[-a, a]$

Si f est une fonction dérivable et *paire* sur $[-a, a]$ ($a > 0$) alors (figure 10) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

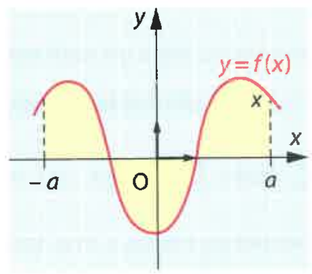


Figure 10

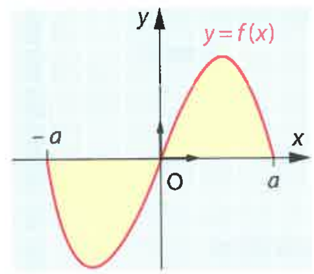


Figure 11

Intégrale d'une fonction impaire sur $[-a, a]$

Si f est une fonction dérivable et *impaire* sur $[-a, a]$ ($a > 0$) alors (figure 11) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

C. Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français spécialisé notamment en géométrie.

La relation qui porte son nom présente une analogie avec la relation vectorielle $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ et soit c un élément de $[a, b]$.

F désignant une primitive de f sur $[a, b]$, nous avons, par définition de l'intégrale :

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a),$$

$$\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(c).$$

Donc $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c),$

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ et soit c un élément de $[a, b]$.

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Nous exploiterons ce résultat dans la suite du cours sur les calculs d'aires.

Linéarité

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Nous savons que si F et G sont des primitives de f et g, alors :
$F + G$ est une primitive de $f + g$,
kF est une primitive de kf, où k est une constante réelle.

$(F + G)' = F' + G' = f + g.$

$(kF)' = kF' = kf.$

En utilisant ces résultats et la définition de l'intégrale d'une fonction dérivable sur $[a, b]$, on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et k une constante réelle.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

Dans cet exemple nous exploitons la linéarité de l'intégrale pour isoler des dérivées de fonctions de référence dans des intégrales.

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \left(6x + \frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{I} = \int_1^2 6x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{I} = 3\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x + 4\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{I} = 3[x^2]_1^2 + 4[\ln x]_1^2,$$

$$\mathrm{I} = 3(4-1) + 4(\ln 2 - \ln 1),$$

$$\mathrm{I} = 9 + 4\ln 2.$$

$$\mathrm{I} \approx 11{,}77.$$

Positivité

Voir le paragraphe **B**.

Nous avons vu que l'intégrale d'une fonction dérivable et **positive** sur $[a, b]$ est l'aire sous la courbe ; c'est donc un nombre **positif**.

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

Si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

D. Aire d'un domaine plan limité par deux courbes

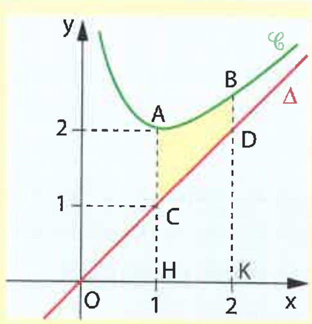


Figure 12

La droite Δ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ car, pour tout x de $]0, +\infty[$, $x < x + \frac{1}{x}$.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$ unité : 1 cm sur chaque axe.

Sur la figure, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

Calculons l'aire en cm² de la partie limitée par $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

L'aire cherchée est celle de la partie du plan coloriée en jaune : c'est la différence entre l'aire du quadrilatère curviligne ABKH et l'aire du trapèze CDKH.

L'aire du quadrilatère curviligne ABKH est $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ car $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, 2]$.

De même l'aire du quadrilatère CDKH est $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = x \geq 0$ pour tout x de $[1, 2]$.

L'aire cherchée $\mathscr{A}$ est donc $\int_1^2 g(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx$ d'après la propriété de linéarité de l'intégrale.

Donc $\mathscr{A} = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - x\right)dx$,

$\mathscr{A} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$ car $\ln 1 = 0$.

L'unité d'aire étant le centimètre carré, $\mathscr{A} = \ln 2\ \text{cm}^2 \approx 0{,}7\ \text{cm}^2$.

Cas général

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Nous allons déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

C'est l'aire du domaine défini comme ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$.

- Dans le cas où les fonctions f et g ont un signe fixe sur $[a, b]$, nous avons trois situations possibles.

Situation 1

f et g positives sur $[a, b]$

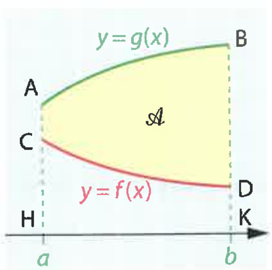


Figure 13

$\mathscr{A}$ est la différence des aires des quadrilatères curvilignes ABKH et CDKH :

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$.

Situation 2

f et g négatives sur $[a, b]$

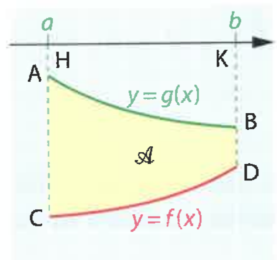


Figure 14

$\mathscr{A}$ est la différence des aires des quadrilatères curvilignes CDKH et ABKH :

$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,dx - \left(-\int_a^b g(x)\,dx\right)$,

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$.

Situation 3

f négative et g positive sur $[a, b]$

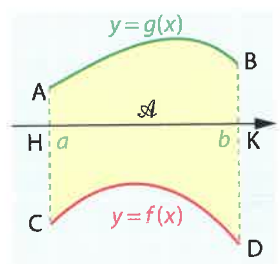


Figure 15

$\mathscr{A}$ est la somme des aires des quadrilatères curvilignes ABKH et CDKH :

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx + \left(-\int_a^b f(x)\,dx\right)$,

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$.

Nous constatons que dans les trois situations,

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$.

- Dans le cas où les fonctions dérivables f et g ont un signe variable sur $[a, b]$, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en une succession d'intervalles où elles ont, toutes les deux, un signe fixe et on applique dans chaque intervalle le résultat précédent.

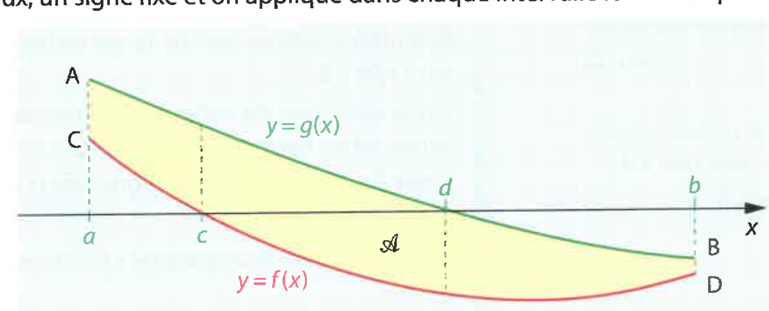


Figure 16

$\mathscr{A} = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^d (g(x) - f(x))\,dx + \int_d^b (g(x) - f(x))\,dx,$

Voir le paragraphe **C**.

$\mathscr{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$ d'après la relation de Chasles.

THÉORÈME

L'aire du domaine plan défini comme ensemble des points M(x, y) tels que $a \le x \le b$ et $f(x) \le y \le g(x)$, f et g étant deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b (\boldsymbol{g(x) - f(x)})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}.$$

E. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

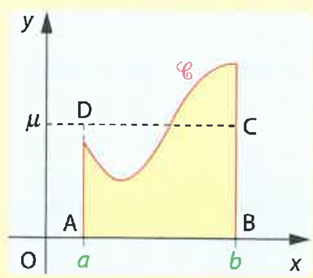


Figure 17

Soit f une fonction dérivable et positive sur $[a, b]$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Déterminons la distance AD $= \mu$ pour que le rectangle ABCD ait même aire que la partie du plan limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Nous avons $\text{AD} \times (b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$, donc $\text{AD} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

On définit de même la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque sur $[a, b]$.

Mais on ne peut interpréter la valeur moyenne par une aire que lorsque f est de signe fixe sur $[a, b]$.

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a, b]$ le nombre réel $\boldsymbol{V_m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$.

Exemples

- La valeur moyenne sur $[0, 1]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est : $\int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$.

Interprétez graphiquement ce résultat.

- Calculons l'intensité moyenne d'un courant alternatif pendant une demi-période sachant que l'intensité est définie en fonction du temps par : $i = I_m \sin \omega t$.

I_m est l'intensité maximale.

La période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. L'intensité moyenne sur une demi-période est donc :

L'intensité moyenne de ce courant sur une période est nulle (voir les cas particuliers à la fin du paragraphe **3A**).

$I_{\text{moy}} = \dfrac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t\,dt$; $I_{\text{moy}} = \dfrac{2I_m}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t\,dt$;

$I_{\text{moy}} = \dfrac{2I_m}{T}\left[-\dfrac{1}{\omega}\cos \omega t\right]_0^{\frac{T}{2}}$; $I_{\text{moy}} = \dfrac{2I_m}{T}\left[-\dfrac{1}{\omega}\left(\cos \dfrac{\omega T}{2} - \cos 0\right)\right]$;

$I_{\text{moy}} = -\dfrac{2I_m}{\omega T}(\cos \pi - \cos 0)$, puisque $\dfrac{\omega T}{2} = \dfrac{\omega}{2} \times \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$;

$I_{\text{moy}} = \dfrac{4I_m}{\omega T}$; $I_{\text{moy}} = \dfrac{2I_m}{\pi}$.

Interprétez graphiquement ce résultat.

COURS

F. Intégration par parties

Uniquement pour le groupement B, trois BTS du groupement C* et trois BTS du groupement D.**

* **Dans le groupement C :** Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle ; Fonderie ; Systèmes constructifs bois et habitat.
** **Dans le groupement D :** Métiers de l'eau ; Peintures ; Encres et adhésifs ; Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est :
$(uv)' = u'v + uv'$, d'où $u'v = (uv)' - uv'$.

Les fonctions u et v sont dérivables ; si, de plus, les fonctions u' et v' sont dérivables sur I, alors $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont dérivables donc intégrables.

Soit a et b deux éléments de I, alors :
$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$,
$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$.

Ce théorème est utile notamment lorsque u et v sont deux fonctions de types différents : polynômes, logarithme, exponentielle, sinus, cosinus,...

THÉORÈME

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont dérivables sur I, alors, quels que soient les éléments a et b de I, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Cette méthode n'a d'intérêt que si $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ est plus simple à calculer que $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Après application du théorème, on obtient une intégrale que l'on sait calculer.

Voir le dernier exemple du paragraphe **B. Fonction positive sur [a, b]**.

Exemples

- *Calcul de l'intégrale :* $I = \int_0^1 x e^x\,dx$

On pose, pour tout nombre t de [0, 1], $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

d'où $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = 1$.

- *Recherche de la primitive de la fonction logarithme népérien, s'annulant pour $x = 1$.*

Nous avons démontré que, pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.

La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, définie ici sur $I = [1, +\infty[$, est donc la fonction logarithme népérien ln ; c'est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur I.

Or pour $x = 1$, $\ln x = \ln 1 = 0$.

La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, définie sur $I = [1, +\infty[$, est donc la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur I qui s'annule en 1.

Nous pouvons observer que nous venons de démontrer, dans le cas particulier de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur $[1, +\infty[$, le résultat général suivant.

Ce théorème est admis.

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a un point donné de I.

La fonction $x \mapsto F(x) = \int_1^x$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a.

On aurait pu écrire $u(t)=t-4$ ou $u(t)=t+5$; on choisit $u(t)=t$ pour simplifier les calculs qui suivent.

Soit F la primitive de la fonction logarithme népérien, s'annulant pour $x=1$.

Pour tout réel x de $]0,+\infty[$ 0, on a :

$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$.

On pose, pour tout nombre t de $[1,+\infty[$, $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln t \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\dfrac{1}{t} \end{cases}$

d'où $F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt = x\ln x-[t]_1^x = x\ln x - x + 1$.

Ce qu'il faut savoir

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives des fonctions usuelles

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	Les primitives de f sont définies par	Intervalle de validité
$f(x)=a$	$F(x)=ax+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=x^n$ $(n\neq -1)$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	• si $n>0$: $\mathbb{R}$ • si $n<0$: $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x+C$	$]0,+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$f(t)=\cos(\omega t+\varphi)$	$F(t)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$	$\mathbb{R}$
$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$	$F(t)=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$	$\mathbb{R}$

Primitives des fonctions composées

Dans les formules suivantes, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et C une constante réelle quelconque.

f est définie sur un intervalle I par	Les primitives F de f sont définies sur I par
$f(x)=u'(x)[u(x)]^n$ $n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$ où $u(x)\neq 0$ si $n<0$.	$F(x)=\frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C$
Conséquence : $f(x)=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x)=-\frac{1}{u(x)}+C$
$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)$ est strictement positif sur I.	$F(x)=\ln[u(x)]+C$
$f(x)=u'(x)e^{u(x)}$	$F(x)=e^{u(x)}+C$
Conséquence : $f(x)=e^{kx}$ où k est constante réelle quelconque non nulle	$F(x)=\frac{1}{k}e^{kx}+C$

COURS

Intégrale d'une fonction dérivable

Intégrale d'une fonction dérivable sur [*a*, *b*]

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.

On appelle **intégrale de *a* à *b* de *f*** le nombre réel : $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$.

On note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

- On lit : « somme de a à b de $f(x)dx$ ».
- On écrit aussi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

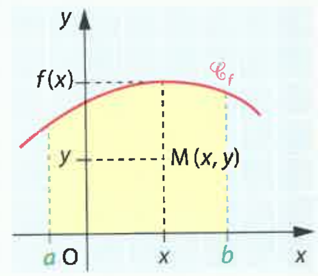
Calculs d'aire

• *f* positive sur [*a*, *b*]

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$,

est : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

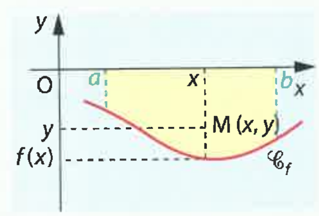


• *f* négative sur [*a*, *b*]

Soit f une fonction dérivable et négative sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$,

est : $\mathscr{A} = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. (attention au signe moins)

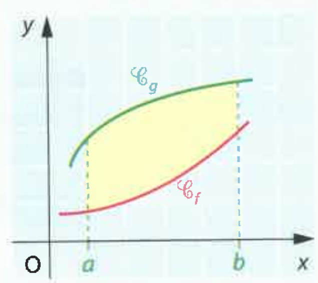


• Aire limitée par deux courbes

Soient f et g deux fonctions dérivables et positives sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.



Valeur moyenne

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont dérivables sur I, alors, quels que soient les éléments a et b de I, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

TP 1 Utiliser une calculatrice pour calculer une valeur approchée d'une intégrale

On considère les deux intégrales :

$I_A = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x$ et $I_B = \int_0^1 (x - xe^{x-1})\mathrm{d}x$.

A. Calculs approchés d'intégrales avec la calculatrice

Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de I_A et de I_B arrondie à 10^{-2}, en suivant, selon le modèle de votre calculatrice, la procédure suivante.

- Calculatrice de marque CASIO :

Une valeur approchée de $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x$ s'obtient par MENU RUN OPTN CALC.

$\int \mathrm{d}x(x - x^2, 0, 1)$

- Calculatrice de marque Texas Instruments (instructions en français en bleu) :

Une valeur approchée de $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x$ s'obtient par MATH **9:fnInt(X − X², X, 0, 1)** ou intégrFonct(X − X², X, 0, 1).

B. Calculs de valeurs exactes d'intégrales à l'aide de primitives

1. a. Déterminer une primitive sur l'intervalle [0, 1] de la fonction définie par $x \mapsto x - x^2$.

b. En déduire la valeur exacte de I_A et comparer avec la valeur approchée fournie par la calculatrice.

2. a. Montrer que la fonction F définie sur [0, 1] par $F(x) = (x - 1)e^{x-1}$ est une primitive sur l'intervalle [0, 1] de la fonction f définie par $x \mapsto xe^{x-1}$.

b. En déduire la valeur exacte de I_B et comparer avec la valeur approchée fournie par la calculatrice.

TP 2 Calculer une intégrale à l'aide du logiciel de calcul formel Maxima

La quantité d'énergie absorbée par un verre photochromique

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité.

Pour un verre minéral photochromique, le coefficient de transmission, exprimé en pourcentage, en fonction de la longueur d'onde x, en nm, est donné par :

$$f(x) = 90 - \frac{89}{1+\mathrm{e}^{\frac{x-416}{5}}}.$$

On admet que la quantité d'énergie I absorbée par le verre durant la transition sombre/clair est donnée par l'intégrale :

$$I = \int_{380}^{550} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On se propose de déterminer la valeur exacte de I, puis la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.
La recherche d'une primitive de f n'est pas « simple »…

On se propose donc de déterminer la valeur exacte et une valeur approchée de I à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

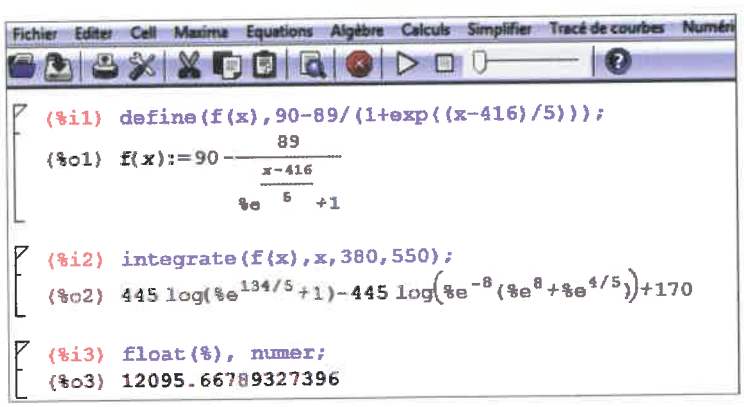
Avec le logiciel Maxima, on peut utiliser les instructions suivantes, où les arguments en *italique* sont à remplacer selon le calcul désiré :

- define(f(x),*expression*) permet de définir la fonction f de la variable x ;
- integrate(f(x),x,*borne inférieure,borne supérieure*) calcule une intégrale de la fonction f de la variable x.
- Pour obtenir une valeur approchée, faire Numérique/To Float.

Pour l'intégrale I définie ci-dessus, on obtient l'affichage suivant.

Remarques

- Le logiciel Maxima désigne le logarithme népérien par log au lieu de ln.
- Ce logiciel note %e^a le nombre e^a.



À partir de la sortie n° 2, écrire une expression simplifiée de la valeur exacte de I. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.

TP 3 Calculer une intégrale à l'aide du logiciel GeoGebra

Longueur d'une chaînette

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (pensez aux lignes à haute tension de RTE, Réseau de transport d'électricité).

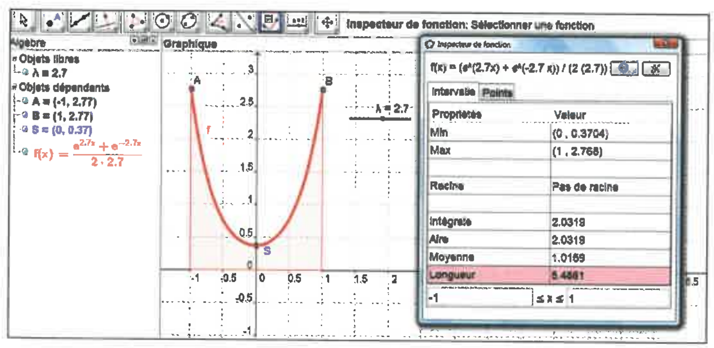
On admet que, rapportée à un repère orthonormé convenablement choisi, la chaînette a une équation de la forme :

$y = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Créer, avec GeoGebra, un curseur λ allant de 0 à 5 avec un incrément 0,1.

Tracer avec GeoGebra, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Placer les points A et B aux extrémités de la courbe ainsi que le point S d'abscisse 0 situé sur la courbe.



A. Détermination de la hauteur du point le plus bas

Déterminer la valeur de λ pour laquelle la longueur OS, où O est l'origine du repère, vaut 0,5 :
- en modifiant la position du curseur ;
- en effectuant un calcul.

B. Calcul de la longueur du fil

On admet que la longueur L de l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ compris entre les points d'abscisses -1 et 1 est égale à l'intégrale $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, où f' est la fonction dérivée de f.

Dans cette partie, on suppose que $\lambda = 2$.

1. Vérifier, à l'aide de GeoGebra, que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$.

(Saisir f'(x) et effacer la courbe en cliquant sur la puce devant l'expression de la dérivée figurant dans la fenêtre algèbre.)

2. Vérifier graphiquement que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$,

$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2 \times f(x)$.

(On pourra saisir g(x)=sqrt(1+(f'(x))²) puis h(x)=λ*f(x). On ne demande pas de démontrer le résultat.)

3. **a.** Déterminer une valeur approchée de l'intégrale L à l'aide de la fonction Intégrale de GeoGebra.

b. Calculer la valeur exacte de $L = \int_{-1}^{1} \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\, dx$.

4. Saisir dans GeoGebra Longueur[f,A,B] et vérifier que cette instruction fournit directement une valeur approchée de L.

▶ *Voir également l'exercice* **70** *de ce chapitre.*

TP 4 Déterminer une valeur approchée d'une intégrale avec la méthode des rectangles (avec le logiciel GeoGebra)

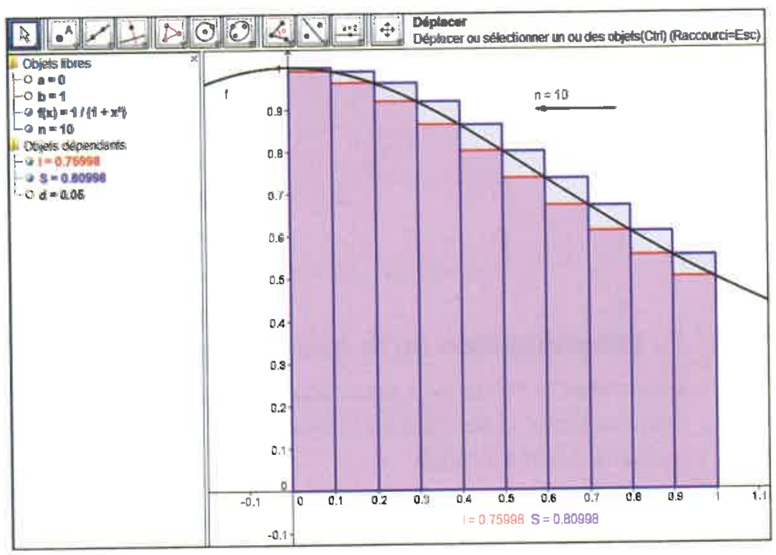
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

On utilise GeoGebra pour évaluer, selon la méthode des rectangles, l'aire $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ de la surface située sous la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en unités d'aires.

Entrer, dans la barre de saisie, a=0 puis b=1 et f(x)=1/(1+x²).

Créer un curseur n allant de 1 à 100 avec un incrément 1.

Entrer, dans la barre de saisie, les instructions I=SommeInférieure[f,a,b,n] puis S=SommeSupérieure[f,a,b,n] et d=S-I. Mettre I en rouge et S en bleu.



1. Quel encadrement de l'intégrale A les rectangles obtenus pour $n=8$ permettent-ils d'obtenir ? (Arrondir I à 10^{-2} par défaut et S à 10^{-2} par excès.)

2. Donner une interprétation graphique de la quantité d.

3. Quelle est la plus petite valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de A obtenu par cette méthode est d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

4. **a.** Que vaut, en fonction de n, la largeur de chaque rectangle ?

b. Déterminer, en fonction de n, l'aire du plus grand rectangle (bleu) et l'aire du plus petit rectangle (rouge).

c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $S-I=d=\dfrac{1}{2n}$.

(Remarquer qu'en décalant vers la droite les rectangles rouges, ceux-ci recouvrent les bleus, sauf le plus grand et le plus petit.)

d. Retrouver le résultat de la question 3. par un calcul.

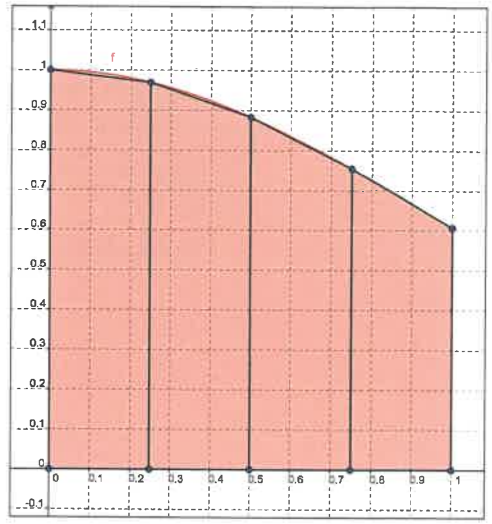
e. Quelle est la plus petite valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de A obtenu par cette méthode est d'amplitude inférieure ou égale à 0,001 ?

TP 5 Comparer deux algorithmes liés à des méthodes d'approximation d'une intégrale : trapèzes et Monte-Carlo (avec le logiciel Scilab)

ALGO

Pour approfondir.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et représentée sur la figure ci-contre.



Le logiciel Scilab donne ci-dessous une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (ce calcul est utile en probabilités).

```
-->integrate('exp(-x^2/2)','x',0,1)
 ans  =

    0.8556243918921
```

On ne possède pas d'expression algébrique d'une primitive de f sur $[0, 1]$. Ce TP compare deux algorithmes de calcul approché de I.

A. Méthode des trapèzes

Cette méthode est la suivante :

– on partage l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$ (sur la figure, $n=4$) ;

– sur chacun de ces n intervalles, on remplace la courbe représentative de f par un segment de droite coïncidant avec les valeurs de f aux extrémités de l'intervalle ;

– la somme des aires des n trapèzes obtenus est une valeur approchée de I.

1. a. Montrer que pour $n=4$, la somme S des aires des quatre trapèzes vaut :

$$S=\frac{f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)}{2}\times\frac{1}{4}.$$

(On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\frac{\text{petite base}+\text{grande base}}{2}\times\text{hauteur}$.)

b. Montrer que $S=\frac{1}{4}\times\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

2. On a traduit ci-après l'algorithme des trapèzes en langage Scilab.

```
s=0
n=input("entrer le nombre de trapèzes n = ")
for i=1:n-1
»    s=s+exp(-(i/n)^2/2)
end
s=(1+exp(-0.5))/2+s
disp(s/n)
```

a. Donner une expression de la valeur de la variable s en sortie de boucle en fonction de n et en utilisant le symbole Σ.

b. En déduire une expression de $\frac{s}{n}$ à la fin de l'algorithme.

3. Programmer cet algorithme sur un ordinateur (nommer le programme « trapezes » et l'enregistrer). Combien de décimales exactes de I obtient-on pour $n = 10$ et pour $n = 100$?

▶ *On peut se reporter à l'exercice* **73**.

B. Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode est la suivante :

– on prend au hasard n points de coordonnées (x, y) comprises entre 0 et 1 ;

– un compteur s détermine le nombre de points situés sous la courbe représentative de f ;

– la fréquence $\frac{s}{n}$ est une valeur approchée de I (car I est la probabilité de tirer un point sous la courbe de f).

1. On a traduit ci-après l'algorithme de Monte-Carlo en langage Scilab.

```
1 s=0
2 n=input("entrer le nombre de points n = ")
3 for i=1:n
4     x=rand()
5     y=rand()
6     if y<=exp(-x^2/2) then s=s+1
7     end
8 end
9 disp(s/n)
```

À quoi correspond le test de la ligne 6 ?

2. Programmer cet algorithme sur un ordinateur (nommer le programme « Monte-Carlo » et l'enregistrer). Combien de décimales exactes de I obtenez-vous pour $n = 100$ et pour $n = 1\,000$?

C. Comparaison des performances

1. a. On montre que la précision obtenue avec n trapèzes dans le premier algorithme est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. Quelle précision obtient-on pour $n = 32$?

b. Pour mesurer le temps de calcul du premier programme, insérer l'instruction tic() avant la boucle for et l'instruction temps=toc() avant l'affichage. Faire afficher la variable temps en fin de programme.

Quel est le temps de calcul affiché pour $n = 32$? pour $n = 1\,000$?

2. a. On montre que la précision obtenue avec n points pris au hasard dans le second algorithme est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ avec une confiance de 95 %.

Combien de points prendre au hasard pour obtenir une précision de 10^{-3} avec une confiance de 95 % ?

b. Pour mesurer le temps de calcul du second programme, insérer l'instruction tic() avant la boucle for et l'instruction temps=toc() avant l'affichage. Faire afficher la variable temps en fin de programme.

Quel est le temps de calcul affiché pour $n = 10^6$?

Un peu d'histoire

La méthode d'intégration approchée des trapèzes a été introduite par Isaac Newton (1642-1727) et Roger Cotes (1682-1716).

Les méthodes de Monte-Carlo consistent à calculer des quantités en utilisant des procédures aléatoires. Elles sont désignées ainsi en référence aux jeux de hasard du casino de Monte-Carlo. Très utilisées lorsque des moyens de calcul plus directs ne sont pas envisageables, les méthodes de Monte-Carlo ont notamment été développées par John Von Neumann (1903-1957) durant la Seconde Guerre mondiale dans le cadre des recherches sur la bombe atomique.

TP 6 Déterminer des primitives dans une situation technologique (avec GeoGebra)

Ce TP permet d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

Distance de freinage d'un TGV

Dans ce TP, pour faciliter l'usage de GeoGebra, la variable temps, exprimée en seconde, est notée x.

Un TGV roulant à 360 km/h freine brusquement.

Peut être utilisé pour un CCF

1. Exprimer sa vitesse en m/s juste avant le freinage.

2. On désigne par a la fonction décélération (en $m \cdot s^{-2}$) en fonction du temps x (en s) définie par $a(x) = -0{,}5x$.

On admet que la fonction v, correspondant à la vitesse (en $m \cdot s^{-1}$) en fonction du temps, est une primitive de a.

a. Utiliser GeoGebra pour tracer une primitive de a (il suffit de saisir Intégrale[-0.5x]).

b. À l'aide du résultat de la question **1.**, représenter la fonction vitesse v en fonction du temps.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et votre réponse.

3. On désigne par d la fonction distance de freinage du TGV (en m) en fonction du temps ($d(x)$ est la distance parcourue par le TGV à l'instant x depuis le début du freinage). On admet que d est la primitive de v qui vérifie $d(0) = 0$.

Représenter la fonction d.

4. Exploiter le graphique et la fenêtre algèbre de GeoGebra, pour répondre aux questions suivantes.

a. Quelle est la distance de freinage pour $x = 6{,}3$ s ? Quelle est alors la vitesse du TGV ?

b. Quelle est la distance de freinage nécessaire à l'arrêt du TGV ?

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES

	Exercices corrigés
• Primitives	
Déterminer les primitives d'une fonction : à la main dans les cas simples ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	1, 6, 90
Déterminer les primitives d'une fonction de la forme : $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$ et $u'e^u$.	10, 12, 15, 17, 18, 24, 90
• Intégration	
Déterminer une intégrale : à la main dans les cas simples ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans tous les cas.	28, 31, 33, 36, 39, 41, 43, 69, 72, 75, 91
Déterminer l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M(x, y) tels que : $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$.	51, 53, 54, 88, 92, 101
Déterminer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$.	61, 63, 93, 98
• Intégration par parties	
Uniquement pour les BTS du groupement B et certains BTS des groupements C et D (Voir la liste au 2F du cours) Calculer une intégrale par intégration par parties	78, 79, 81, 86, 87, 94, 101, 102

Déterminer les primitives d'une fonction simple

Primitives de fonctions polynômes et rationnelles

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices 1 à 7).

▶ *Pour chacun des exercices suivants, vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.* TICE

1. + Fonctions polynômes et rationnelles

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{3}$;

d) f définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^2}$.

CORRIGÉ P. 327

2. + Fonctions polynômes

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x + 2$;

▶ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exemple 1 du paragraphe* 1D.

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -5t^3 + 3t^2 + 8$.

3. + Fonctions rationnelles

a) f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - \frac{4}{x^2}$;

▶ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exemple 2 du paragraphe* 1D.

b) f définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

4. ++ Primitives de $x \mapsto x^n$ avec $n < 0$

f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

▶ **Conseil :** *pour déterminer une primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ *remarquer que* $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

CORRIGÉ P. 328

5. ++ Avec des exposants négatifs

a) f définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$.

▶ **Conseil :** *au* b) *utiliser des exposants négatifs.*

6. + Avec des fonctions trigonométriques

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin 3t$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

CORRIGÉ P. 328

7. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -3\sin\left(3t + \frac{\pi}{12}\right)$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$.

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{8}\right)$.

8. + **Primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée**

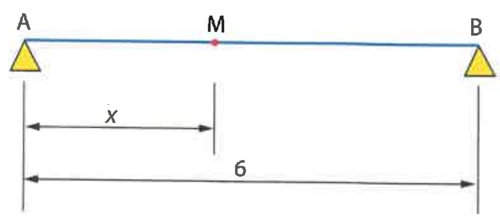
Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition donnée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ et $F(0) = 0$.

2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $F(0) = 0$.

9. +++ **Un peu de résistance des matériaux**

On se propose de déterminer le *moment fléchissant* en un point M de la poutre AB de longueur 6 m (voir la figure), x est exprimé en mètres.



Toutes les fonctions figurant dans cet exercice sont définies sur l'intervalle $I = [0,6]$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = -600x$.

1. Déterminer la primitive F de f pour laquelle $F(0) = 3\,600$.

2. Déterminer la primitive G de F pour laquelle $G(0) = 0$.

Le nombre $G(x)$ représente le *moment fléchissant* au point M.

▶ **Un peu de résistance des matériaux :** *les poutres sollicitées en flexion sont parmi les éléments les plus importants de la résistance des matériaux. Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant et à un moment fléchissant.*

Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$ (n entier relatif différent de -1)

Mettre $f(x)$ sous la forme $k \times u'(x)[u(x)]^n$, où k est une constante réelle, et déterminer, à l'aide d'un résultat du cours, les primitives de f sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **10** à **14**).

▶ *Pour chacun des exercices suivants, vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.* TICE

10. + $u'u^n$ **(ou presque...)**

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x-1)^3$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x+3)$.

CORRIGÉ P. 328

11. + $u'u^n$ **(ou presque...)**

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x-3)^3$;

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x^2+1)^2$.

▶ **Conseil :** *pour les exercices* **12** *et* **13**, *on peut se reporter à l'exemple du paragraphe* **1E** *du cours.*

12. + $\dfrac{u'}{u^2}$ **ou** $u'u^{-2}$

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$.

CORRIGÉ P. 328

13. + a) f définie sur $]-\infty, 3[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$;

b) f définie sur $I = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(3x-2)^2}$.

14. ++ **Avec la fonction logarithme népérien**

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$.

15. ++ **Trouver la primitive F de la fonction f vérifiant la condition donnée**

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ telle que $F(2) = 2$.

CORRIGÉ P. 328

16. +++ **À la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel** TICE

1. *À la main*

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-8x}{(x-2)^2}$.

a) Vérifier que, pour tout réel x de $]2, +\infty[$,

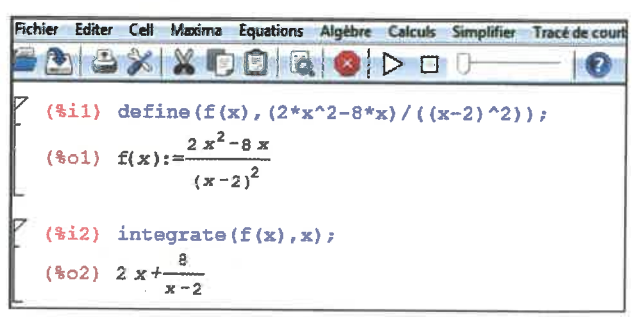
$f(x) = 2 - \dfrac{8}{(x-2)^2}$.

b) En déduire les primitives de f sur $]2, +\infty[$.

2. *Avec le logiciel Maxima*

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-8x}{(x-2)^2}$.

On utilise un logiciel de calcul formel pour rechercher une primitive de f sur $]2, +\infty[$.



EXERCICES

Vérifier que l'expression du dernier affichage fournit une primitive de f.

3. En déduire la primitive F de f sur $]2, +\infty[$ telle que $F(3) = 1$.

Primitives de fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) > 0$ sur I

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **17** à **19**).

▶ *Pour chacun des exercices suivants, vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.* TICE

17. ++

a) f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$;

b) f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+3}$;

c) f définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x) = 3x + 4 + \frac{1}{2x+1}$.

CORRIGÉ P. 328

18. ++

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

CORRIGÉ P. 328

19. ++

a) f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-1}{x-1}$;

b) f définie sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-4}{2x-1}$.

Méthode : *Faire apparaître une expression de la forme* $\frac{u'}{u}$.

Primitives de fonctions définies à l'aide de la fonction $x \mapsto \ln x$

20. +++ **Les primitives de la fonction ln**

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

2. En déduire les primitives de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

▶ **Conseil :** *remarquer que :* $\ln x = (\ln x + 1) - 1$.

21. ++ **Une primitive de f est donnée**

Dans chacun des cas suivants f et F sont deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$.

Vérifier que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

a) $f(x) = x + 14 - 12 \ln 2x$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 26x - 12x \ln 2x$.

b) $f(x) = x^2 - 18 \ln x + 75$; $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 18x \ln x + 93x$.

L'expression de $F(x)$, qui est donnée, peut par exemple avoir été déterminée à l'aide d'un logiciel de calcul formel, ici Maxima, avec lequel ln est noté log.

```
(%i1) define(f(x),x+14-12*log(2*x));
(%o1) f(x):=-12 log(2 x)+x+14
(%i2) integrate(f(x),x);
                                 2
                                x
(%o2) -6(2 x log(2 x)-2 x)+ ---- +14 x
                                2
```

22. ++ **Une primitive est donnée**

Soit f, g et G les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - 2\ln x$, $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.

1. Démontrer que G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer une primitive F de f sur $]0, +\infty[$.

Primitives de fonctions définies à l'aide de la fonction $x \mapsto e^x$

23. +

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}e^x$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t + 1 + e^t$.

Primitives de fonctions de la forme $u'e^u$

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **24** à **26**).

▶ *Pour chacun des exercices* **24** *à* **27**, *vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.* TICE

24. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+3}$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$;

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 5e^{0,05t}$.

CORRIGÉ P. 328

25. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x + 2e^{-x}$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$;

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{3t+2}$..

26. ++

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2+1}$.

27. ++ **Une primitive est donnée**

Dans chacun des cas suivants f et F sont définies sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(t) = (2t+1)e^t$; $F(t) = (2t-1)e^t$.

2. $f(t) = (-t+2)e^{-t}$; $F(t) = (t-1)e^{-t}$.

3. $f(t) = (t+1)^2e^{-t}$; $F(t) = (-t^2-4t-5)e^{-t}$.

4. $f(t) = \dfrac{e^{0,125t}}{4,9+e^{0,125t}}$; $F(t) = 8\ln(4,9+e^{0,125t})$.

▶ *Appliquer la définition de F primitive de f.*

Calculer une intégrale

En utilisant le tableau des primitives, calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes (exercices **28** à **42**).

▶ *Pour chacun des exercices **28** à **42**, vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.* TICE

28. + **Avec une fonction polynôme**

a) $I = \int_2^3 (x-2)\,dx$; b) $I = \int_0^3 (2x^2-x+3)\,dx$;

c) $I = \int_0^1 (x^3+x^2+x)\,dx$.

CORRIGÉ P. 329

29. + **Avec une fonction polynôme**

a) $I = \int_3^4 dx$; b) $I = \int_{-1}^0 3\,dx$;

c) $I = \int_3^4 (x-3)\,dx$; d) $I = \int_0^4 (2t+1)\,dt$.

30. + **Avec une fonction polynôme**

a) $I = \int_2^3 (x^2+x+1)\,dx$; b) $I = \int_0^1 2t^3\,dt$.

31. ++ **Avec une primitive d'une fonction de la forme $u'u^n$**

a) $I = \int_0^1 (2x+1)^3\,dx$; b) $I = \int_1^2 \dfrac{1}{(2x+1)^2}\,dx$.

CORRIGÉ P. 329

32. +

a) $I = \int_2^3 \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$; b) $I = \int_1^2 \left(x+1+\dfrac{1}{(x+2)^2}\right)dx$.

33. ++ **Avec une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$**

a) $I = \int_1^3 \left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx$; b) $I = \int_{\frac{3}{2}}^5 \dfrac{1}{2t-1}\,dt$.

CORRIGÉ P. 329

34. ++ **Avec une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$**

a) $I = \int_1^2 \left(x+1+\dfrac{2}{x}\right)dx$; b) $I = \int_0^2 \left(2x+1+\dfrac{3}{x+2}\right)dx$;

c) $I = \int_0^2 \left(2x+1+\dfrac{3}{2x+3}\right)dx$; d) $I = \int_1^2 \dfrac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx$.

35. ++ **Avec une primitive d'une fonction de la forme $u'u^n$**

a) $I = \int_1^e \dfrac{1}{x}\ln x\,dx$; b) $I = \int_1^e \dfrac{1}{x}(\ln x)^2\,dx$.

36. +

$I = \int_{-1}^1 (2e^x+1)\,dx$.

CORRIGÉ P. 329

37. ++

$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x\,dx$.

38. ++

a) $I = \int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$; b) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{e^t}{e^t+1}\,dt$.

39. ++ **Avec une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$**

a) $I = \int_0^1 e^{2t}\,dt$; b) $J = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}t+1}\,dt$.

CORRIGÉ P. 329

40. +

a) $I = \int_0^1 \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx$; b) $I = \int_{-\frac{1}{3}}^0 (1-e^{3t})\,dt$.

41. +

$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + 2\cos 2x)\,dx$.

CORRIGÉ P. 329

42. +

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$.

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + \sin 3x)\,dx$.

Une primitive est donnée

Cette situation se rencontre lorsqu'on ne peut pas déterminer directement une primitive F de f avec les résultats du cours de BTS, par exemple lorsque $f(x)$ s'exprime à l'aide de $\ln x$.

L'expression de $F(x)$, obtenue avec un logiciel de calcul formel, est, dans les épreuves d'évaluation, souvent à lire sur une copie d'écran.

EXERCICES

43. ++ **Une primitive de $x \mapsto \ln x$**

1. Déterminer la dérivée F' de la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - 1$.

2. En déduire le calcul de l'intégrale

$I = \int_1^e \ln x \, dx$.

CORRIGÉ P. 329

44. ++

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x) = \frac{x}{12}(x^2 + 6 - 6\ln x)$.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

$I = \int_1^e f(x)\, dx$.

45. ++ **Avec la fonction ln**

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+3)$.
Une primitive de f sur $[-1, +\infty[$ est donnée par un logiciel de calcul formel, ln est noté log.

```
(%i1) define(f(x),log(2*x+3));
(%o1) f(x):=log(2 x+3)

(%i2) integrate(f(x),x);
(%o2) (2 x+3) log(2 x+3)-2 x-3
      ------------------------
                 2
```

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^2 f(x)dx$.

46. ++

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x$.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$\int_1^{e^2}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx$.

47. ++ **Avec la fonction exponentielle**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = (-2t-3)e^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.

48. ++

Soit f et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 + xe^x$ et $G(x) = xe^x - e^x$.

1. Déterminer la fonction dérivée G' de G.

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Justifier un résultat d'intégrale obtenu avec un logiciel de calcul formel

49. ++

Justifier par un calcul détaillé la valeur exacte de l'intégrale I qui a été obtenue avec un logiciel de calcul formel.

a) $\int_2^3 (x-2)\,dx = 0{,}5$; b) $\int_0^3 (2t^2 - t + 3)\,dt = 22{,}5$;

c) $\int_0^1 (x^3 + x^2 + x)\,dx = \frac{13}{12}$; d) $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = 2 + \ln 3$;

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}\,dt = \ln 3$; f) $\int_{-1}^1 (2e^x + 1)\,dx = 2(e - e^{-1} + 1)$;

g) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^x dx = 1$; h) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t+1}dt = \frac{1}{2}(e^2 - e)$.

Exemple d'affichage pour le **d)** avec une valeur approchée.

```
(%i1) define(f(x), 1+1/x);
               1
(%o1) f(x):=---+1
               x

(%i2) integrate(f(x),x,1,3);
(%o2) log(3)+2

(%i3) float(%);
(%o3) 3.09861228866811
```

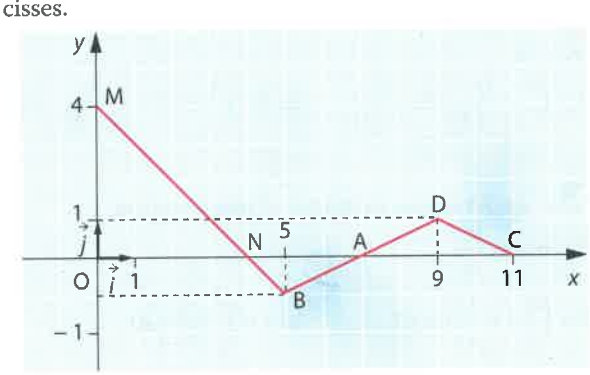
50. +++ **Cela ressemble à de la physique...**

Soit f la fonction affine par intervalles, définie sur l'ensemble des réels x tels que $0 \leq x \leq 11$ et dont la représentation graphique dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par la figure.

L'unité graphique sur chaque axe est le centimètre. Les points M, B, D, C sont définis par leurs coordonnées :
M(0, 4) B(5, – 1) D(9, 1) C(11, 0).

1. Donner une expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 5]$, $[5, 9]$ et $[9, 11]$.

Calculer les abscisses des points N et A, mentionnés sur la figure, où la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses.



2. Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

a) $I = \int_7^{11} f(x)\mathrm{d}x$; b) $J = \int_0^7 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$; c) $K = \int_9^{10} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

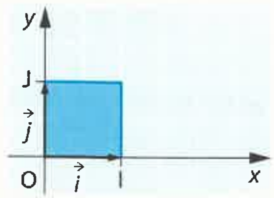
Calculer une aire

Exemples d'unités d'aire

Chaque aire $\mathcal{A}$ considérée dans les résultats du cours est exprimée en unités d'aire.

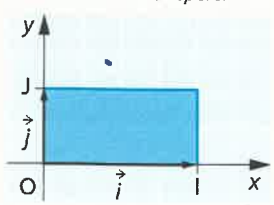
• *Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité d'aire est l'aire du carré défini par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ du repère.*

Si sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées l'unité choisie est 1 cm, alors l'unité d'aire est 1 cm²; si l'unité choisie sur chaque axe de coordonnée est 2 cm, alors l'unité d'aire est 4 cm².



• *Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ du repère.*

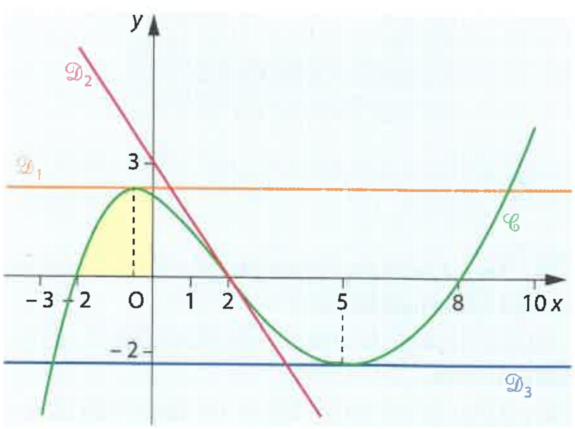
Si l'unité choisie sur l'axe des abscisses est 2 cm et si l'unité sur l'axe des ordonnées est 1 cm, alors l'unité d'aire est 2 cm².



51. +++ Lectures graphiques

On a dessiné ci-après, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3, 10]$. Cette courbe passe par les points de coordonnées $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(8, 0)$.

Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}$, 2 et 5, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ étant parallèles à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{D}_2$ passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.



1. Dans la suite, f' désigne la fonction dérivée de f.

Par lecture graphique et sans justification du résultat, donner :

a) la valeur de chacun des nombres suivants :

$f(2)$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f'(2)$; $f'(5)$;

b) l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes : $f(x) \leq 0$; $f'(x) \leq 0$.

2. On considère l'intégrale :

$A = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

a) Donner une interprétation en termes d'aire de A.

b) Par lecture graphique, indiquer, parmi les propositions suivantes, celle qui est vraie. Expliquer la réponse :

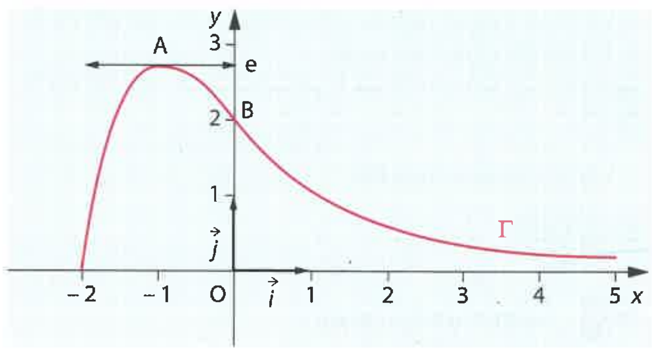
$-2 \leq A \leq 0$; $0 \leq A \leq 2$; $2 \leq A \leq 5$.

CORRIGÉ P. 329

52. ++ On justifie l'encadrement d'une intégrale à l'aide d'un graphique

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 1 cm), Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-2,5]$.

La courbe Γ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(-1, \mathrm{e})$ et $(0, 2)$. Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



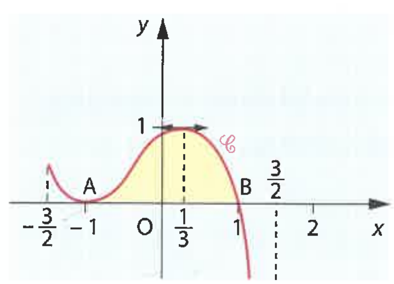
1. Indiquer le sens de variation de f sur $[-2,5]$.

2. Justifier l'encadrement $2 \leq \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \leq 3$.

53. +++ Avec une fonction polynôme

Sur la figure ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

On précise que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse 1 et a pour tangente l'axe des abscisses au point A d'abscisse − 1.



EXERCICES

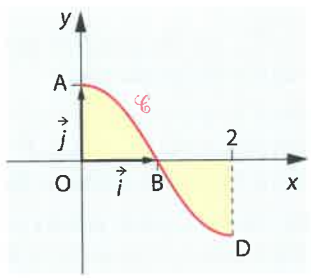
1. À l'aide de la figure, indiquer le signe de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² de la partie de plan coloriée. Vérifier l'ordre de grandeur du résultat sur la figure.

CORRIGÉ P. 329

54. +++ Exemple de calcul d'aire sur un intervalle où la fonction change de signe

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm, de la fonction f définie sur $[0, 2]$ par



$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

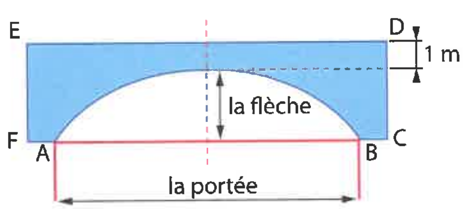
On précise que les coordonnées respectives des points A, B, D sont $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$.
Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan coloriée sur la figure.

▶ *Utiliser la relation de Chasles.*

CORRIGÉ P. 329

55. ++++ On fait le pont !

On considère une arche de pont parabolique de 24 mètres de portée et de 6 mètres de flèche.



Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

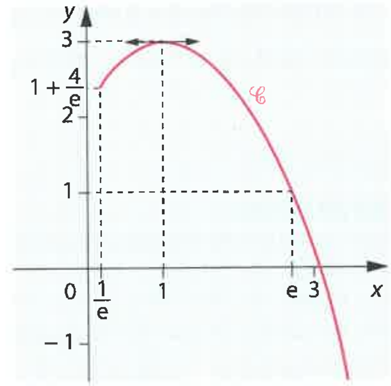
Calculer la valeur approchée, en m², arrondie à 10^{-2}, de l'aire de la surface ABCDEF (en bleu) de l'arche sachant que BC = AF = 1 m.

56. +++ Avec une fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par :

$f(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-après dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 2 cm.



1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + x$.

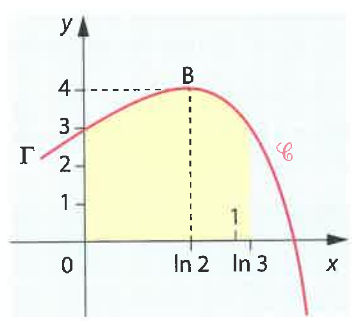
Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

2. a) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b) Exprimer cette aire en cm² puis en donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

57. +++ Avec une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 4e^x - e^{2x} = e^x(4 - e^x)$.
On donne sa courbe représentative Γ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées).



Montrer que l'aire de la partie du plan coloriée sur la figure est égale à 16 cm².

58. +++ Aire d'une partie du plan limitée par deux représentations graphiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, e]$ par
$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}.$$

1. La courbe $\mathscr{C}$ ci-après représente, dans le plan, la fonction f. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$.

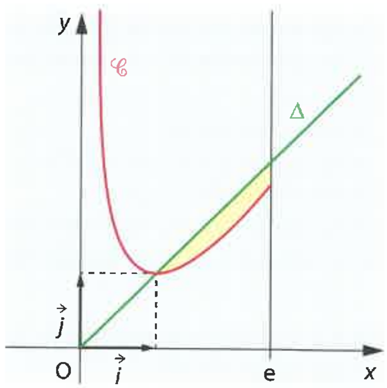
a) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de $x - f(x)$ sur l'intervalle $]0, e]$.

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

2. a) Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, e]$ par $g(x) = (\ln x)^2$.

En déduire, sur cet intervalle, une primitive de la fonction qui, à x, associe $\frac{\ln x}{x}$.

b) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



▶ *On peut se reporter à l'exemple* **2D** *du cours.*

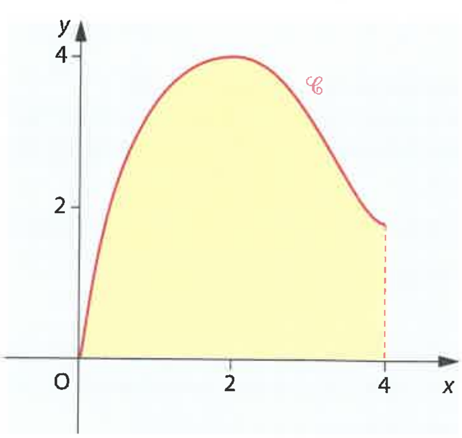
Calculer la valeur moyenne d'une fonction

59. ++ Lecture graphique

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f, définie dans l'intervalle $[0, 4]$, dans le plan muni d'un repère orthonormé. La mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan coloriée sous cette courbe est égale à $\frac{34}{3}$.

1. Exprimer cette mesure à l'aide d'une intégrale.

2. Déterminer, après avoir rappelé la formule utilisée, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, 4]$.



60. ++ Avec la fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur $[2, 13]$ par $f(x) = \frac{1}{5}x + 1 + \frac{5}{x}$.

Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[2, 13]$ est $V_m = \frac{1}{11}(27{,}5 + 5\ln 13 - 5\ln 2)$.

61. ++ Avec une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par

$f(x) = x - 7 + \frac{4}{x-3}$.

1. Calculer la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de f sur l'intervalle $[5, 105]$.

2. Donner la valeur approchée de V_m arrondie à l'unité.

CORRIGÉ P. 329

62. ++ Avec la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $[0, 12]$ par

$f(t) = 900\, t\, e^{-0{,}1(t-2)}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel on obtient la fonction F définie par :

$F(t) = -9\,000\,(t + 10)e^{-0{,}1(t-2)}$ comme primitive de la fonction f sur $[0, 12]$.

1. Calculer la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de f sur l'intervalle $[0, 12]$.

2. Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2}.

63. +++ Valeurs moyennes de fonctions trigonométriques

1. Calculer m_1, valeur moyenne sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \sin x$.

2. On admet que, pour tout nombre réel a,

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.

Calculer m_2, valeur moyenne sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = \cos^2 x$.

CORRIGÉ P. 330

64. +++ Valeur efficace

Soit la fonction i de la variable t définie sur $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ par $i(t) = \sin(10\pi t)$.

1. Calculer la valeur moyenne m de la fonction i sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{10}\right]$.

2. La valeur efficace I_e de la fonction i est définie par :

$I_e^2 = \frac{1}{\frac{1}{5}}\int_0^{\frac{1}{5}}[i(t)]^2 dt$ avec $I_e > 0$. Justifier par un calcul le résultat donné ci-après par un logiciel de calcul formel.

▶ *On admet que, pour tout nombre réel a,* $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.

EXERCICES

Avec le logiciel de calcul formel Maxima :

```
(%i1) define(f(t),(sin(10*%pi*t))^2);
(%o1) f(t):=sin(10 π t)^2
(%i2) integrate(f(t),t,0,1/5);
(%o2) 1/10
```

Exemples de calcul d'autres grandeurs à l'aide du calcul intégral

65. ++ Flux d'énergie

Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur par une pièce chauffée d'une habitation entre 22 heures et 7 heures, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0, 9]$, $g(t) = 0{,}7e^{-0{,}12t}$.

L'énergie E ainsi dissipée entre 22 h et 7 h, exprimée en kilowattheures (kWh), s'obtient en calculant l'intégrale :

$$E = \int_0^9 g(t)\,dt.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.

2. En déduire la valeur arrondie de E à 0,1 kWh.

66. ++ Flux solaire

On considère une construction dans une zone de moyenne montagne équipée de 20 m² de vitrage sur une façade au sud. Dans ce cas, les vitrages laissent passer 60 % du flux solaire. On admet que le flux solaire obtenu à l'intérieur après 8 heures consécutives d'exposition au soleil, au mois de novembre, est, en joules × (jour^{-1}) :

$$E = 0{,}60 \times 20 \times \int_0^{28\,800} 600 \sin\left(\frac{\pi}{28\,800}t\right)dt.$$

Calculer E.

67. ++ Stockage d'énergie

On considère une retenue d'eau qui peut être assimilée à un parallélépipède rectangle dont les dimensions en mètres sont : 1 000 × 1 000 × 100. On admet que l'énergie totale, en joules, stockée dans la retenue d'eau est :

$$E = \int_0^{100} 1\,000 \times 1\,000 \times 9{,}81\, h\,dh.$$

Calculer E.

68. ++++ Détermination d'un moment statique et d'un centre d'inertie

▶ *Aucune connaissance sur la notion de centre d'inertie n'est exigible en mathématiques. Cette activité est à traiter éventuellement en liaison avec d'autres disciplines.*

A. *Moment statique*

Sur la figure 1 on a représenté en bleu une plaque homogène d'épaisseur négligeable. On désigne par S l'aire de cette plaque.

On a laissé en blanc une partie, limitée par deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, passant par les points d'abscisses x et $x + \Delta x$.

On note ΔS l'aire de cette partie.

On appelle *moment statique* de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées le nombre : $x\Delta S$.

On admet que la partie en blanc peut être assimilée à un rectangle ; on a : $x\Delta S = xl(x)\Delta x$ (ce qui suppose Δx « très petit… »).

Alors, on admet que le moment statique de la plaque par rapport à l'axe des ordonnées est :

$M = \int_a^b xl(x)\,dx$ où $l(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.

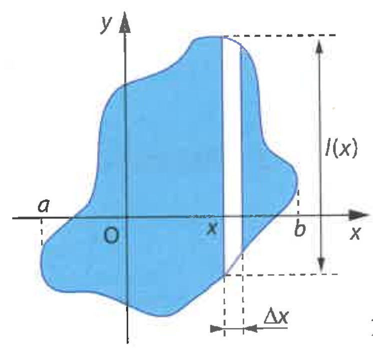


Figure 1

Application

Déterminer le moment statique de la plaque triangulaire OBC (fig. 2) par rapport à l'axe des ordonnées.

Réponse : $M = \dfrac{a^2b}{6}$.

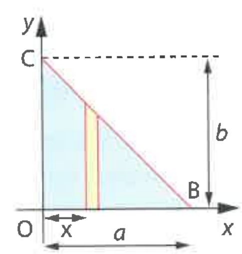


Figure 2

B. *Centre d'inertie (ou centre de gravité)*

Avec les mêmes notations que celles de la figure 1, on admet que l'abscisse du centre d'inertie de la plaque de la figure 1 est :

$x_G = \dfrac{1}{S}\int_a^b xl(x)\,dx$, où $l(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, S désignant l'aire totale de la plaque.

Application

On considère la plaque P limitée par le contour ABCD dans le plan muni d'un repère orthonormé. DC est un arc de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^2}$ (fig. 3).

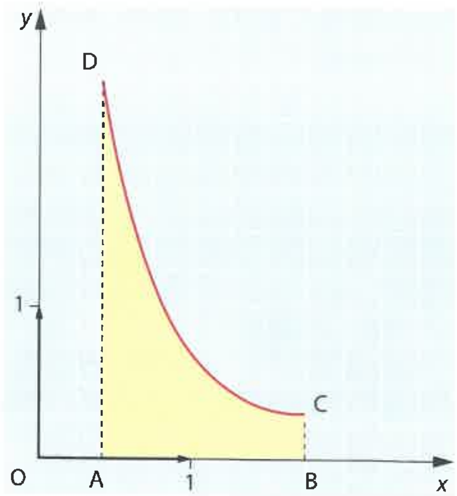


Figure 3

A et D ont pour abscisse $\frac{1}{2}$, B et C ont pour abscisse 2.

1. Quelle est l'aire S de la plaque P ?

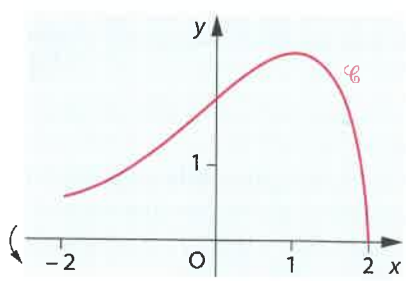
2. Calculer le moment statique de la plaque P par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire calculer $M = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

3. Déterminer l'abscisse x_G du centre d'inertie G de la plaque, c'est-à-dire calculer $x_G = \frac{1}{S}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

69. +++ Calcul de volume

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. La courbe est donnée ci-dessous.



1. Démontrer que la fonction F définie sur $[-2, 2]$ par

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$$

est une primitive sur $[-2, 2]$ de la fonction $x \mapsto [f(x)]^2$.

2. *Application*

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

Le solide obtenu est utilisé pour réaliser un flotteur en plastique allégé.

On admet que le volume V, en unités de volume, du solide S est :

$$V = \pi\int_{-2}^{2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Établir que $V = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^4 - 41\mathrm{e}^{-4})$.

3. Donner la valeur approchée de V, en cm^3, arrondie à 10^{-3}.

CORRIGÉ P. 330

70. +++ La longueur d'une chaînette

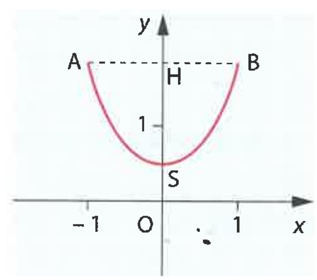
La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On montre et on admet que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\lambda} \text{ avec } \lambda > 0.$$

▶ *Pensez aux lignes à haute tension de RTE (Réseau de transport d'électricité).*

On laisse pendre un tel fil entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 mètres, comme le montre la figure.



On admet que, dans le plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, l'arc AB est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4}$.

▶ *La courbe est la chaînette obtenue pour $\lambda = 2$.*

1. *Détermination de la flèche*

La flèche prise par le fil est la distance SH de la figure.

Calculer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la flèche SH.

2. *Calcul de la longueur du fil*

On admet que la longueur L de l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ compris entre les points d'abscisses -1 et 1 est égale à l'intégrale $L = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, où f' est la fonction dérivée de f.

a) Vérifier que, pour tout x de $[-1, 1]$,

$$1+[f'(x)]^2 = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}\right]^2.$$

b) En déduire que $L = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}$.

c) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la longueur L en mètres de ce fil.

EXERCICES

▶ *Voir également l'exercice 157 du chapitre 1 et le TP3 de ce chapitre.*

71. ++++ **Vitesses probables du vent avec GeoGebra et Maxima** TICE

On étudie dans cet exercice une fonction définie par une intégrale modélisant les probabilités de vitesse du vent dans le cadre d'implantation d'éoliennes.

Suite à une étude statistique, on suppose que, sur le site considéré, la probabilité qu'une journée donnée choisie au hasard la vitesse du vent soit inférieure à a mètres par seconde est :

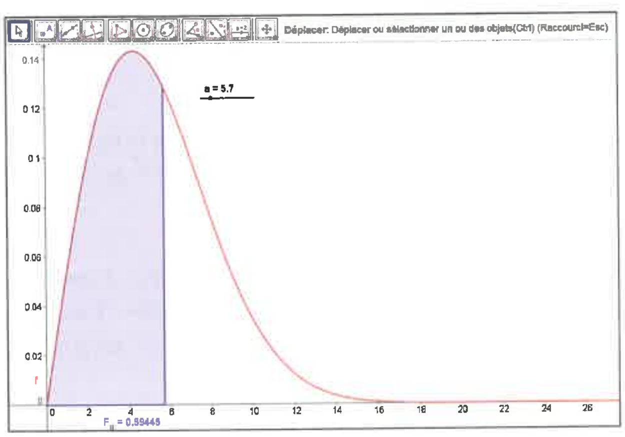
$F(a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,

où f est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{18} x \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{36}}$$

1. *Utilisation de GeoGebra*

a) Représenter la fonction f à l'aide de GeoGebra. Créer un curseur a allant de 0 à 30 avec un incrément 0,1 puis représenter l'intégrale $F(a)$ (on pourra pour cela entrer F_a=Intégrale[f,0,a] dans la barre de saisie).



b) Utiliser le fichier GeoGebra, pour répondre aux trois questions suivantes :

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 4 m/s ? Arrondir à 10^{-3}.

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 14 m/s ? Arrondir à 10^{-3}.

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit comprise entre 4 m/s et 14 m/s ? Arrondir à 10^{-2}.

2. *Utilisation de Maxima*

Utiliser un logiciel de calcul formel pour répondre aux trois questions suivantes.

a) Déterminer une expression « simple » de $F(a)$ en fonction du nombre réel positif a.

b) Calculer la valeur exacte de $F(14) - F(4)$ et retrouver le résultat de la question **1.b)**.

c) Calculer $\lim_{a \to +\infty} F(a)$. Le résultat est-il surprenant, en termes de probabilité ?

CORRIGÉ P. 330

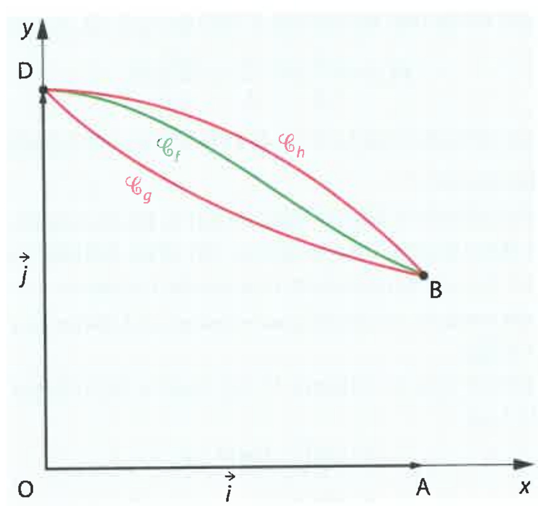
Exemples d'approximation d'une intégrale

72. +++ **Encadrement d'une intégrale**

f, g et h sont trois fonctions définies sur le même intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \ ; \ g(x) = \frac{1}{1+x} \ ; \ h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives respectives des fonctions f, g et h. Ces courbes sont données ci-dessous dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 5 cm.



1. Par lecture graphique, comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ pour x élément de $[0, 1]$.

2. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale J :

$$J = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale K :

$$K = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet que si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, si pour tout x de $[a, b]$, $g(x) \leq f(x)$ alors : $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. À l'aide du résultat ci-dessus, déduire du **1.** un encadrement de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. a) Calculer l'approximation arrondie à 10^{-3} par défaut de la moyenne arithmétique I_1 des deux nombres J et K.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze OABD.

c) Sachant que la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4}$, quelle est, de I_1 et de $\mathcal{A}$, la meilleure approximation de I ?

CORRIGÉ P. 331

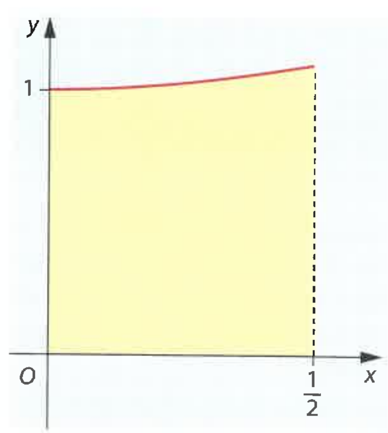
73. +++ Méthode des trapèzes

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

On ne sait pas déterminer une primitive de f.

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$



La figure donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

Le plan est muni du repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

Unités : 10 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Interpréter graphiquement l'intégrale I.

2. *Recherche d'une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.*

On note M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0 ; 0,125 ; 0,250 ; 0,375 ; 0,500. Soit H_1, H_2, H_3, H_4 les projections orthogonales respectives sur l'axe des abscisses des points M_1, M_2, M_3, M_4.

Donner la valeur approchée A, arrondie à 10^{-3}, en unités d'aire, de la somme des aires des quatre trapèzes $H_1M_1M_0O$, $H_2M_2M_1H_1$, $H_3M_3M_2H_2$, $H_4M_4M_3H_3$.

(On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.)

On peut se reporter au ***TP3*** *de ce chapitre.*

Un logiciel de calcul formel ne donne pas de primitive de f par exemple, avec Maxima, on obtient :

```
(%i1) define(f(x),e^x/(1+x));
(%o1) f(x):= e^x / (x+1)
(%i2) integrate(f(x),x);
(%o2) ∫ e^x/(x+1) dx
```

La notation de la ligne %o2 est une notation qui désigne la forme générale des primitives de f.

74. ++ Utiliser un développement limité pour obtenir une valeur approchée d'une intégrale

Uniquement pour le groupement B.

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

À l'exercice **73**, on a obtenu une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode des trapèzes.

Un logiciel de calcul formel a permis d'établir que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est :

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On admet que l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}x$ est une « bonne » approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer alors que $I \approx 0{,}516$.

Comparer ce résultat avec celui obtenu par la méthode des trapèzes à l'exercice ***73***.

75. +++ Valeur approchée (bis)

TICE

Uniquement pour le groupement B.

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1]$ par :

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$.

1. Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f en 0.

2. On désigne par $g(x)$ la partie régulière du développement limité de f.

a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

Le résultat obtenu est une « bonne » approximation de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$, dont les logiciels de calcul formel ne donnent pas de valeur exacte.

Voici ce que l'on obtient avec Maxima...

```
(%i1) define(f(x),(e^x)/sqrt(x+1));
(%o1) f(x):= e^x / sqrt(x+1)
(%i2) integrate(f(x),x,0,1/2);
(%o2) ∫_0^(1/2) e^x / sqrt(x+1) dx
```

CORRIGÉ P. 331

3. On considère l'algorithme suivant :

Entrées
Saisir t et n
Initialisation
s prend la valeur 0
Traitement
h prend la valeur $\dfrac{t}{n}$
  Pour i **de** 0 **à** $n-1$
  s prend la valeur $s + f(i \times h)$
  FinPour
  s prend la valeur $h \times s/\sqrt{2\pi}$
Sortie
Afficher s

a) Donner une expression de la valeur de la variable s en sortie de boucle « Pour », en fonction i, n et h et en utilisant le symbole Σ.

b) En déduire une expression de s à la fin de l'algorithme.

CORRIGÉ P. 331

76. ++++ Algorithme de calcul intégral par la méthode des rectangles

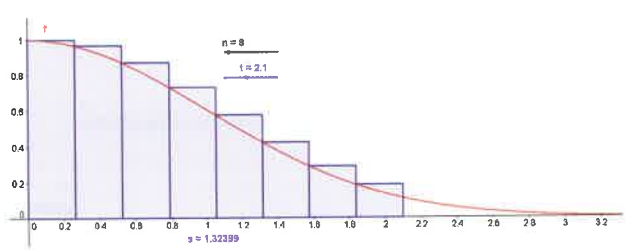
ALGO

Soit t un nombre réel positif. Pour certains calculs de probabilité, on souhaite calculer $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. On construit ici un algorithme de calcul approché en considérant la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et en appliquant la *méthode des rectangles* :

– on partage l'intervalle $[0, t]$ en n intervalles de même longueur (sur la figure, $n = 8$) ;

– sur la base de chacun de ces n intervalles, on construit le rectangle dont le sommet en haut à gauche est situé sur la courbe représentative de f (voir la figure) ;

– la somme des aires des n rectangles est une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

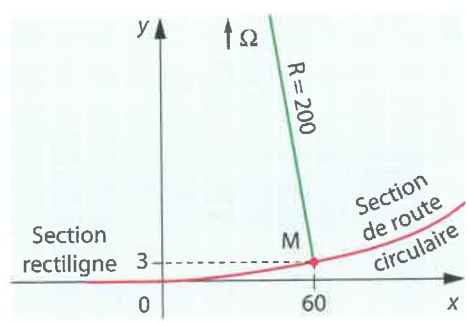


1. Exprimer la largeur de chaque rectangle, en fonction de l'entier naturel non nul n et du réel positif t.

2. Pour i entier entre 0 et $n-1$, on considère le rectangle ayant pour base [MN] où les points M et N ont pour coordonnées, dans le repère de la figure, $\mathrm{M}(ih, 0)$ et $\mathrm{N}((i+1)h, 0)$. Montrer que l'aire de ce rectangle est $h \times f(i \times h)$.

77. +++ Courbe de raccordement

Pour le confort de l'automobiliste, on raccorde une section rectiligne d'une route à une section circulaire de la même route par une « *courbe à courbure progressive* ». (On procède de même pour les voies ferrées.)



Le croquis ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle, représente la vue de dessus d'un tel raccordement, pour une route départementale. Sur cette vue les cotes sont en mètres.

On s'intéresse à l'arc de courbe de raccordement OM du croquis ci-dessus.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j})$. L'unité est le mètre.

On suppose que l'arc OM est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 60]$ par $f(x) = \dfrac{1}{6C}x^3$ où C est une constante réelle non nulle.

1. Les coordonnées du point M sont $(60, 3)$. En déduire la valeur de la constante C.

2. On admet dans la suite que f est définie sur $[0, 60]$ par $f(x) = \dfrac{1}{72000}x^3$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0, 60]$.

b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe représentative de f au point M.

T est aussi la tangente en M à l'arc de cercle de centre Ω de la figure.

3. On admet que la longueur, en mètres, de l'arc de raccordement OM est :

$$L=\int_0^{60}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

a) Dans l'expression de L, remplacer $f'(x)$ par la valeur obtenue à la question **2.** a).

b) Soit g la fonction définie sur [0, 60] par :

$$g(x)=\sqrt{1+\frac{x^4}{(24\,000)^2}}.$$

Avec un logiciel de calcul formel on obtient le développement limité :

$$g(x)=1+\frac{x^4}{2(24\,000)^2}+x^4\varepsilon(x),\text{ avec }\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

On peut donc prendre comme valeur approchée de la longueur L :

$$I=\int_0^{60}\left(1+\frac{x^4}{2(24\,000)^2}\right)dx.$$

Démontrer que $I=60{,}135$.

On obtient alors la valeur approchée arrondie à 10^{-3}, de la longueur L, en mètres, de l'arc de raccordement OM.

Intégration par parties

Uniquement pour les BTS du groupement B et certains BTS des groupements C et D. (Voir la liste au **2F** du cours.)

Le but de l'intégration par parties est de remplacer une intégrale que l'on ne sait pas calculer à l'aide de primitives par une intégrale que l'on sait calculer (à l'aide de primitives).

78. + Fonctions polynôme et logarithme

Calculer en utilisant une intégration par parties, l'intégrale :

$$I=\int_1^{e}(x-e)\ln x\,dx.$$

▶ *Indication : poser $v(x)=\ln x$.*

CORRIGÉ P. 331

79. ++ Fonctions puissance et logarithme

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$$I=\int_1^{e}x^2\ln x\,dx.$$

2. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.

CORRIGÉ P. 331

80. ++ Produit avec un logarithme

À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

a) $I=\int_1^{e}\ln x\,dx$; b) $I=\int_1^{e}x\ln x\,dx$;

c) $I=\int_1^{2}(1+x)\ln x\,dx$; d) $I=\int_1^{e}(x^2+1)\ln x\,dx$.

81. + Fonctions polynôme et exponentielle

Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :

$$I=\int_0^{3}(2+x)e^{-x}\,dx.$$

On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au centième.

▶ *Indication : pour $v(x)=2+x$.*

CORRIGÉ P. 331

82. ++ Produit avec une exponentielle

À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

a) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}xe^{x}\,dx$; b) $I=\int_0^{2}(1+t)e^{-t}\,dt$;

c) $I=\int_{-1}^{1}(3-2t)e^{-t+1}\,dt$.

83. +++ Justifier un résultat obtenu avec un logiciel de calcul formel

Justifier, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale I qui a été obtenue directement avec un logiciel de calcul formel.

a) $\int_1^{e}(x-1)\ln x\,dx=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$;

b) $\int_1^{2}\frac{1}{x^2}\ln x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$;

c) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}te^{2t}\,dt=\frac{1}{4}(18\ln 3-8\ln 2-5)$;

d) $\int_0^{2}(1-x)e^{-x}\,dx=2e^{-2}$.

84. +++ Produit d'une exponentielle et d'un logarithme

1. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}.$$

a) En déduire le calcul de l'intégrale :

$$I=\int_0^{1}\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx.$$

2. a) Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
On désigne par f' la fonction dérivée de f.
Donner, pour tout nombre réel x, l'expression de $f'(x)$.
b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x)\,dx.$$

85. +++ Le marteau de la presse

Une presse est constituée d'une enclume fixe et d'un marteau qui se déplace le long d'une tige verticale. La vitesse V du marteau est une fonction du temps t.
Le temps t est exprimé en secondes et la vitesse V en mètres par seconde.
La distance parcourue par le marteau entre l'instant de départ ($t = 0$) et l'instant $t = T$ est

$$d(T) = \int_0^T V(t)\,dt \quad \text{où} \quad V(t) = 1 + (t-1)e^{-t}.$$

1. En intégrant par parties prouver que :

$$\int_0^T (t-1)e^{-t}\,dt = -Te^{-T}.$$

2. En déduire $d(T)$ en fonction de T.

86. ++++ Deux intégrations par parties successives

À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que :

$$I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4}.$$

CORRIGÉ P. 331

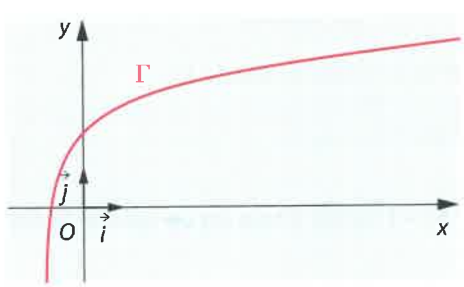
87. ++++ bis...

Même question qu'à l'exercice 86 avec :

$$I = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}(e^2 - 5).$$

88. +++ Calcul d'aire avec la fonction ln

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$, par :
$f(x) = \ln(1+x) + 2$.
On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
La courbe Γ est donnée ci-dessous.



1. a) Vérifier que, pour tout x de $[0, 3]$,

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$J = \int_0^3 \ln(1+x)\,dx = 8\ln 2 - 3.$$

2. Déduire du **1.** la valeur exacte de l'intégrale :

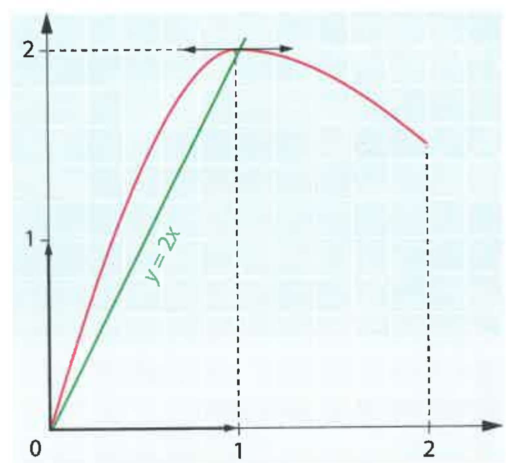
$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

3. a) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du nombre $A = 4I$.
b) Donner une interprétation graphique du nombre A.
c) Expliquer comment vérifier sur la figure le résultat obtenu au **3.a**).

CORRIGÉ P. 332

89. +++ Calcul d'aire avec la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par : $f(x) = 2xe^{1-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 5 cm. La courbe est donnée ci-dessous. Sur la même figure a été tracée la droite d'équation $y = 2x$.



1. Établir le tableau de variation de f.

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$\int_0^1 f(x)\,dx = 2e - 4.$

3. a) Calculer, en cm², l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \le x \le 1$ et $2x \le y \le f(x)$.
b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

FAITES le POINT

RÉPONSES P. 332

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs

90. ++ Primitives

Dans chaque question, f est une fonction définie sur I et F une primitive de f sur I.

1 $f(x)=-2x+1\,;\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
- a $F(x)=-2$
- b $F(x)=-x^2+x$
- c $F(x)=-x^2+x+1$

2 $f(x)=-x^2-2x+1\,;\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
- a $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2$
- b $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$
- c $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$

3 $f(x)=x-\frac{1}{x^2}\,;\quad \mathrm{I}=]0,+\infty[$
- a $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$
- b $F(x)=1+\frac{2}{x^3}$
- c $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$

4 $f(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2}\,;\, \mathrm{I}=]\frac{1}{2},+\infty[$
- a $F(x)=\frac{1}{2x-1}$
- b $F(x)=-\frac{1}{2(2x-1)}$
- c $F(x)=\frac{1}{2(2x-1)}$

5 $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}\,;\, \mathrm{I}=]0,+\infty[$
- a $F(x)=2-\frac{1}{x^2}$
- b $F(x)=x^2+x+\ln x$
- c $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x^2}$

6 $f(x)=\frac{2}{2x+1}\,;\, \mathrm{I}=]-\frac{1}{2},+\infty[$
- a $F(x)=2\ln(2x+1)$
- b $F(x)=\ln(2x+1)$
- c $F(x)=-\frac{4}{(2x+1)^2}$

7 $f(x)=x-3+e^x\,;\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
- a $F(x)=1+e^x$
- b $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+e^x$
- c $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3+e^x$

8 $f(x)=e^{2x+1}\,;\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
- a $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$
- b $F(x)=e^{2x+1}$
- c $F(x)=2e^{2x+1}$

91. ++ Intégrales

Dans chaque question, la fonction f dont on calcule la valeur exacte de l'intégrale sur un intervalle donné est dérivable sur cet intervalle.

1 $f(x)=x-3$
- a $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=8$
- b $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$
- c $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{2}$

2 $f(x)=x^2+3x+2$
- a $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=25$
- b $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{67}{3}$
- c $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{74}{3}$

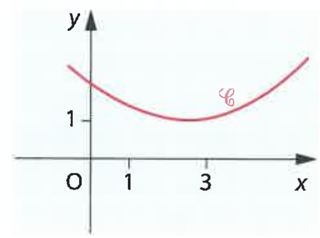
3 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
- a $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}$
- b $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=-1$
- c $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

4 $f(x)=2x+1+\frac{3}{x+2}$
- a $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{21}{4}$
- b $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6+3\ln 2$
- c $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6+\ln 4$

5 $f(x)=e^x+e^{-x}$
- a $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=5$
- b $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$
- c $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{29}{6}$

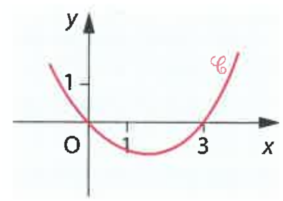
92. +++ Calculs d'aire

1. Dans cette question $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.



	a	b	c
Le nombre I appartient à	[0, 3]	[6, 7]	[3, 5]

2. Dans chaque question $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.



	a	b	c
Le nombre I appartient à	[0 ; 0,5]	[– 3, 0]	[1, 3]

93. ++ Valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [– 3, 0] par $f(x)=x^2$. Sa valeur moyenne sur l'intervalle [– 3, 0] est :

a) $V_m=-3$; **b)** $V_m=3$; **c)** $V_m=9$.

94. +++ Intégration par parties

Quand on intègre par parties $I=\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

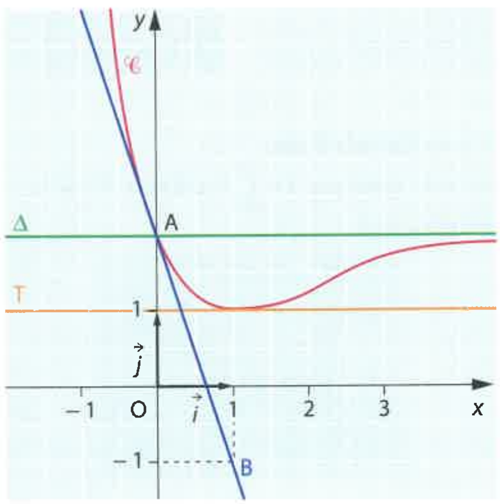
	a	b	c
On pose $v(x)=$	x^2	$2x$	$\ln x$

EXERCICES pour le BTS

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS **(épreuve finale ou CCF).**

Les exercices 95 à 100 concernent les trois groupements B, C et D.

95. +++ Lectures graphiques et valeur approchée d'une intégrale



Le graphique ci-dessus est réalisé dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On a tracé :

– la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$;
– la droite (AB) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ;
– la droite Δ d'équation $y = 2$;
– la droite T, parallèle à l'axe des abscisses, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Les points A et B ont respectivement pour coordonnées (0, 2) et (1, – 1).

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

2. Sachant que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

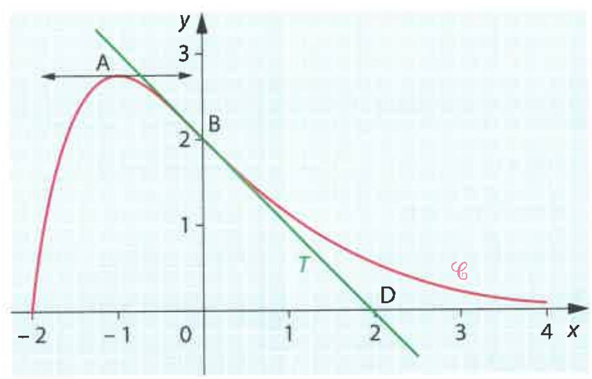
On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de la droite (AB). Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. Lire sur le graphique les valeurs entières de $f(0)$ et $f'(1)$.
Établir le tableau de variation de la fonction f.

4. On considère les quatre valeurs décimales suivantes :
$I_1 = 6{,}5$; $I_2 = -3{,}8$; $I_3 = 3{,}8$ et $I_4 = -6{,}5$.
L'une d'entre elles est la valeur décimale approchée arrondie à 10^{-1} de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Laquelle ? Expliquer l'élimination des trois autres.

96. +++ Lectures graphiques et encadrement d'une intégrale

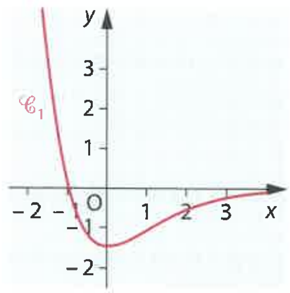
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2, 4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
On note e le nombre réel tel que $\ln e = 1$. La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points B(0, 2) et A(– 1, e).
Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente T au point B à la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point D(2, 0).

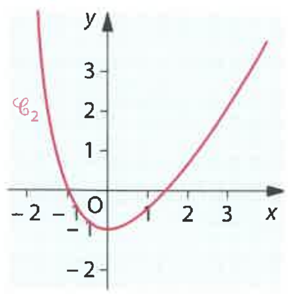


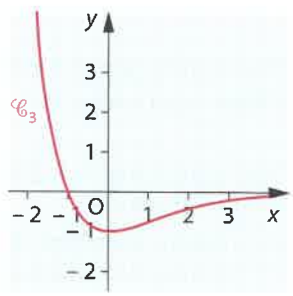
1. En utilisant les données graphiques, donner sans justifier :
a) le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2, 4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,25 des solutions éventuelles ;
b) la valeur de $f'(-1)$;
c) le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2, 4]$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner en justifiant :
a) le coefficient directeur de la tangente T ;
b) l'encadrement par deux entiers naturels consécutifs de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$;
c) celle des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ données en annexe qui représente la fonction dérivée f' de la fonction f.

Annexe







97. +++ Étude d'un mouvement

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 25(1 - e^{-2t})$.

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique Γ de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$f(t)$ représente la vitesse exprimée en mètres par seconde d'un mouvement.

Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction f donnée en annexe.

1. a) Par lecture graphique, déterminer la valeur arrondie au dixième de l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

b) Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de t_0.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point O, origine du repère.

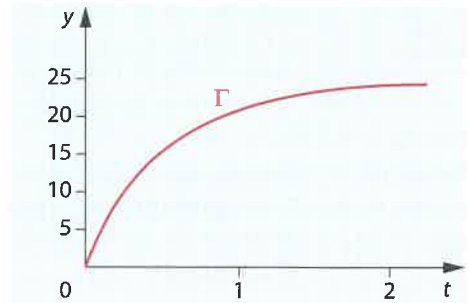
Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.

5. En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = 2$.

6. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Calculer l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,dt$. En donner une interprétation graphique.

Annexe à remettre avec la copie
Courbe représentative de la fonction f.



98. +++ Une hotte pour les locaux industriels

A. *Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit f la fonction définie sur $[0, 15]$ par :

$f(t) = (4t + 1)e^{-0,5t}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

On admet que, pour tout nombre réel t de $[0, 15]$,

$f'(t) = (3,5 - 2t)e^{-0,5t}$.

Ce résultat, obtenu avec un logiciel de calcul formel, n'a pas à être démontré.

a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0, 15]$.

b) Établir alors le tableau de variation de f.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, 15]$ par :

$F(t) = (-18 - 8t)e^{-0,5t}$.

a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0, 15]$.

b) On note $I = \int_0^{11} f(t)\,dt$. Démontrer que $I = 18 - 106e^{-5,5}$.

B. *Application de la partie A*

Dans une usine, on se propose de tester un nouveau modèle de hotte aspirante pour les locaux industriels.

Avant de lancer la fabrication en série, on a réalisé l'expérience suivante avec un prototype : dans un local clos de volume 500 m^3, équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche. Les mesures réalisées permettent d'admettre qu'au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte, avec $0 \leq t \leq 15$, le volume de dioxyde de carbone, exprimé en m^3, contenu dans le local est $f(t)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le volume de dioxyde de carbone, en m^3, présent dans le local au moment de la mise en marche de la hotte aspirante.

2. L'atmosphère « ordinaire » contient 0,035 % de dioxyde de carbone, ce qui correspond pour le local où a été réalisée l'expérience à un volume de 0,175 m³ de dioxyde de carbone.

À l'aide d'une lecture graphique sur la figure réalisée à la question **A.2.**, déterminer au bout de combien de temps de fonctionnement de la hotte aspirante l'atmosphère dans le local clos contenait un volume de dioxyde de carbone inférieur ou égal à 0,175 m³.

3. On désigne par V_m le volume moyen de dioxyde de carbone présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante. On admet que $V_m = \frac{1}{11}\int_0^{11} f(t)\mathrm{d}t$. Donner la valeur exacte de V_m puis la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-1}.

CORRIGÉ P. 332

99. +++ Avec une fonction logistique

▶ **Fonctions logistiques :** *On peut se reporter à l'exercice* **254** *du chapitre* **1**.

A. *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+125\,504e^{-1,9x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité est 2 cm.

1. a) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}(125\,504e^{-1,9x}) = 0$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{715\,372,8e^{-1,9x}}{(1+125\,504e^{-1,9x})^2}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0, +\infty[$.

c) Donner le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

3. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01						

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début. Sur l'axe des abscisses, commencer la graduation à 3.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2,5$.

On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. *Calcul intégral*

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{3e^{1,9x}}{e^{1,9x}+125\,504}.$$

2. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{3}{1,9}\ln(e^{1,9x}+125\,504).$$

Démontrer que F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

3. a) Calculer la valeur moyenne V_m de f sur $[0, 9]$.

b) Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2}.

C. *Application de la partie* **A**

On admet que le nombre d'un certain modèle d'équipement de téléphonie mobile vendu en France au cours de l'année $(2005 + n)$ est égal à $f(n)$ millions où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. Déterminer le nombre d'équipements vendus en France en 2010.

2. Donner le nombre total d'équipements vendus pendant les quatre années 2009, 2010, 2011 et 2012.

3. Indiquer au cours de quelle année les ventes de cet équipement dépassent 2 500 000 unités.

100. +++ Plutôt pour le groupement D

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$f(t) = 0,2te^{-0,2t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants. L'expression $\%e^{(-0,2)t}$ représente le nombre $e^{-0,2t}$.

```
(%i1) f(t):=0.2*t*%e^(-0.2*t);
(%o1) f(t):=0.2 t %e^((-0.2) t)

(%i2) limit(f(t),t,+inf);
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
(%o2) 0

(%i3) df(t):=diff(f(t),t);
(%o3) df(t):=diff(f(t), t)

(%i4) df(t);
(%o4) 0.2 %e^(-0.2 t) -0.04 t %e^(-0.2 t)

(%i5) solve(df(t)=0,t);
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced -0.04 by -1/25 = -0.04
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
(%o5) [t=5]

(%i6) float(1/23*integrate(f(x),x,0,23));
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
(%o6) 0.20515428691958
```

A. *Étude d'une fonction*

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0, +\infty[$:

$f'(t) = (-0,04t + 0,2)e^{-0,2t}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et donner son tableau de variation. On précisera les valeurs remarquables de t et $f(t)$.

4. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira les résultats à 10^{-2}.

x	0	2,5	5	10	15	20	25
$f(x)$							

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.

Sur l'axe des x, 2 cm représentent 5 unités. Sur l'axe des y, 2 cm représentent 0,05 unité.

B. *Application*

À l'aide d'une perfusion, on injecte pendant cinq minutes un médicament antalgique à un patient. Après l'injection, l'organisme élimine peu à peu le médicament.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'injection.

On fait l'hypothèse qu'à l'instant t, exprimé en minute (min), la quantité de médicament, exprimée en millilitre (ml), est égale à $f(t) = 0{,}2te^{-0{,}2t}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

1. Déterminer graphiquement, à une minute près, l'instant à partir duquel la quantité de médicament redevient inférieure à 0,05 ml.

On fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.

2. a) On admet que la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle [0, 23] est : $m = \frac{1}{23}\int_1^{23} f(x)\mathrm{d}x$. Donner, à l'aide des résultats affichés par le logiciel de calcul formel, une valeur approchée de m arrondie à 10^{-2}.

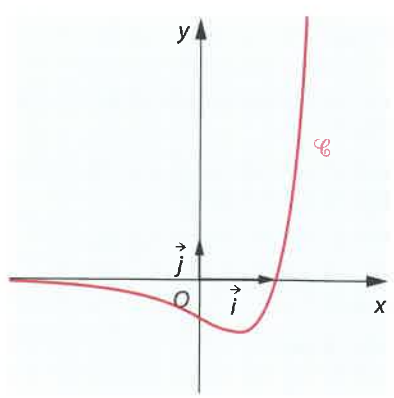
b) Que représente la valeur moyenne m dans le contexte de l'exercice ?

Les exercices 101 à 104 concernent le groupement B.

101. +++ Intégration par parties

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-dessous, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, dont les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.



A. *Étude de la fonction f*

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ du résultat obtenu au b) ?

2. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f'(x) = (2x-1)e^{2x}$

Ce résultat a été obtenu avec un logiciel de calcul formel.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

c) Établir le tableau de variation de f.

B. *Calcul d'aire*

1. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ sur [0, 1].

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que
$\int_0^1 (x-1)e^{2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}$.

3. Déduire de ce qui précède l'aire $\mathscr{A}$, en cm², de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

Donner la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

CORRIGÉ P. 332

102. +++ Développement limité et intégration par parties

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-0{,}5 ; 0{,}5]$ par $f(x) = (x-2)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le développement limité en 0 d'ordre 2 de la fonction f :
$f(x) = -2 + 3x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

a) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

b) Étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage du point A.

2. a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $I = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)\mathrm{d}x = 0{,}5e^{-0{,}5} - 1{,}5e^{0{,}5}$.

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. a) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale :
$J = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} (-2 + 3x - 2x^2)\mathrm{d}x$.

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c) Vérifier que $J - I \leq 10^{-2}$.

La valeur de l'intégrale J est une « bonne » approximation de la valeur de l'intégrale I.

CORRIGÉ P. 333

103. +++ Avec un vrai-faux

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(e^x + e^{-x})$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le développement limité en 0 d'ordre 3 de la fonction f :
$f(x) = 2x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette première question est un « Vrai-Faux ». Aucune justification n'est demandée. À partir du développement limité précédent, ou en utilisant d'autres méthodes, déterminer *pour chaque affirmation si elle et vraie ou fausse. (Une absence de réponse à une affirmation sera moins pénalisée qu'une réponse fausse.)*

Affirmation A :
La courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 2x$.

Affirmation B :
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite d'équation $y = 2x$ lorsque x est voisin de zéro.

2. a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale :
$J = \int_0^1 (2x + x^3)\mathrm{d}x$.

c) Vérifier que $I - J < 0{,}02$.

J est une « bonne » approximation de I.

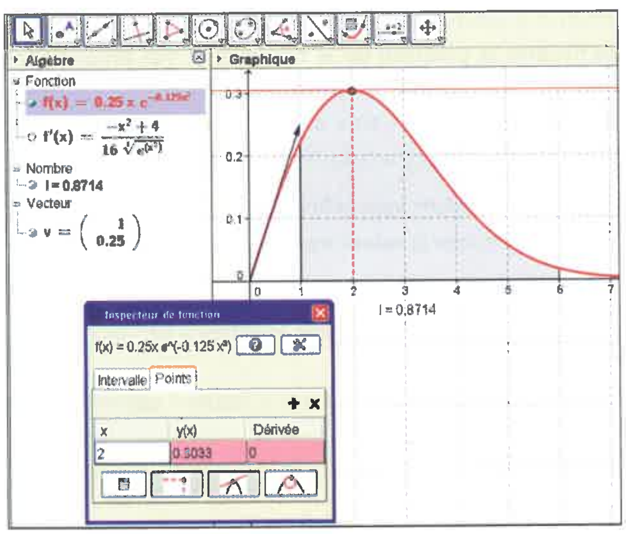
104. +++ Vitesse du vent avec GeoGebra et Maxima

Dans cet exercice, on étudie une fonction intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = (0{,}25x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.

Le logiciel GeoGebra a permis d'obtenir les résultats suivants.



A. *Étude d'une fonction*

1. La probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 m/s et 6 m/s est donnée par l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 6$.

Donner, à l'aide de l'affichage de GeoGebra, une valeur approchée de cette probabilité.

2. Le logiciel de calcul formel Maxima a permis d'obtenir les résultats suivants.

```
(%i1) f(x):=0.25*x*exp(-0.125*x^2);
(%o1) f(x):=0.25 x exp((-0.125)x^2)

(%i2) limit(f(x),x,inf);
`rat' replaced -0.125 by -1/8 = -0.125
`rat' replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
(%o2) 0

(%i3) diff(f(x),x);
(%o3) 0.25 %e^(-0.125 x^2) - 0.0625 x^2 %e^(-0.125 x^2)

(%i4) factor(%);
`rat' replaced -0.125 by -1/8 = -0.125
`rat' replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
`rat' replaced -0.0625 by -1/16 = -0.0625
(%o4) - (x - 2)(x + 2) %e^(-x^2/8) / 16
```

a) Donner, à l'aide de l'affichage de Maxima, la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

b) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f'(x) = 0{,}0625(2 + x)(2 - x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Le logiciel de calcul formel fournit ci-dessous la partie régulière du développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro.

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
`rat' replaced -0.125 by -1/8 = -0.125
`rat' replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
(%o5) x/4 - x^3/32 + ...
```

a) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de T et de $\mathscr{C}$ au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

B. *Application à l'étude de la vitesse du vent*

1. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

b) Démontrer que F est une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (0{,}25x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$.

2. Calculer $I = \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2}.

Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 m/s et 6 m/s.