CHAPITRE 3

Équations différentielles

Il s'agit de montrer l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale, en reliant les exemples étudiés aux enseignements scientifiques et technologiques et en exploitant largement l'apport des outils logiciels.

Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre et déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée :

- à la main dans les cas simples ;
- à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.

Nous avons vu au chapitre **1** que la fonction exponentielle est sa propre fonction dérivée : $\exp' = \exp$.

Nous pouvons chercher toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f$.

Il s'agit alors de résoudre un nouveau type d'équation où l'inconnue est une fonction.

Dans ce chapitre la variable et notée t car on étudie essentiellement l'évolution de phénomènes en fonction du temps.

En électricité, en mécanique, en biologie, … de nombreux phénomènes continus satisfaisant à une **loi d'évolution** et à une **condition initiale** sont décrits par une fonction f plusieurs fois dérivable sur un intervalle I et définie comme solution d'une équation où interviennent une ou plusieurs de ses dérivées.

De telles équations sont appelées **équations différentielles**.

Ainsi savez-vous que la même équation différentielle, aux coefficients près, permet de modéliser d'une part la décharge d'un condensateur à travers une bobine et, d'autre part, la descente d'un parachute ?

De même, l'étude de l'effet d'un amortisseur de voiture et l'étude de l'établissement du courant électrique à travers un circuit RLC alimenté par un générateur présentent quelques analogies.

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à résoudre quelques équations différentielles simples rencontrées notamment en sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques, …) ou en biologie.

1 | Équations différentielles linéaires du premier ordre

Cette partie concerne les trois groupements B, C, et D.

t désignant la variable et $y : t \mapsto y(t)$ la fonction inconnue, définie et dérivable sur un intervalle donné I de $\mathbb{R}$, les équations différentielles considérées dans ce paragraphe sont du type :

À tout instant t de I, $ay'(t) + by(t) = c(t)$.

(*E*) $$ay' + by = c(t)$$

où a, b sont des constantes réelles et c une fonction dérivable sur I.

Exemples

- (E_1) $2y' + y = \frac{1}{2}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Ici $a = 2$, $b = 1$ et $c(t) = \frac{1}{2}$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

- (E_2) $y' + 2y = 4x - 1$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Ici $a = 1$, $b = 2$ et $c(x) = 4x - 1$, la variable étant notée x.

En électricité on rencontre i : $t \mapsto i(t)$ au lieu de $y : t \mapsto y(t)$ et on utilise la notation différentielle $\frac{di}{dt}$ pour la dérivée i'.

- (E_0) $x' + 2x = 4t - 1$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Ici $a = 1$, $b = 2$ et $c(t) = 4t - 1$, la variable étant notée t et la fonction inconnue étant $x : t \mapsto x(t)$.

Les équations différentielles (E_2) et (E_0) sont les mêmes, aux notations près.

A. Théorème

Par exemple la fonction constante $y_1 : t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E_1) ci-dessus, la dérivée y_1' étant la fonction nulle.

Soit $y_1 : t \mapsto y_1(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle (E).

On a alors $ay_1' + by_1 = c(t)$.

Une fonction y est solution de (E) si et seulement si

$$ay' + by = c(t)$$

qui est équivalent à chacune des équations différentielles suivantes :

$$ay' + by = ay_1' + by_1,$$
$$a(y' - y_1') + b(y - y_1) = 0,$$
$$a(y - y_1)' + b(y - y_1) = 0.$$

$y' - y_1' = (y - y_1)'$.

Donc y est solution de (E) si et seulement si $Y = y - y_1$ est solution de l'équation différentielle

$$(E') \qquad aY' + bY = 0,$$

appelée **équation « sans second membre » associée à l'équation (E).**

Le second membre $c(t)$ de (E) est remplacé par la fonction nulle 0.

Nous en déduisons le théorème suivant en remarquant que

$$Y = y - y_1 \quad \text{équivaut à} \quad y = Y + y_1.$$

THÉORÈME

La solution générale de l'équation différentielle

$$(E): \quad ay' + by = c(t)$$

est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation « sans second membre » associée

$$(E'): \quad ay' + by = 0.$$

Avec une équation différentielle on parle habituellement de la **solution générale**, par opposition à une **solution particulière**, pour désigner une solution quelconque de cette équation. La solution générale donne l'ensemble des solutions.

Nous en déduisons que la résolution de l'équation (E) se ramène à la résolution de l'équation (E') et à la recherche d'une solution particulière de (E).

Remarque

Dans le cas particulier où $a = 0$, l'équation (E) $ay' + by = c(t)$ devient $by = c(t)$ qui a pour seule solution la fonction $y : t \mapsto y(t) = \frac{c(t)}{b}$.

$b \neq 0$.

Dans toute la suite, on se place dans le cas général où $a \neq 0$.

B. Résolution de (E') $ay' + by = 0$

L'équation « sans second membre » (E') $ay' + by = 0$ équivaut, en divisant par a non nul, à $y' + \alpha y = 0$ où $\alpha = \frac{b}{a}$.

(E_1') : $2y' + y = 0$ est équivalente à $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

Dans le cas particulier où $\alpha = -1$, (E') devient $y' - y = 0$ et nous savons que la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$ et est une solution de cette équation différentielle.

Pour $y : t \mapsto e^t$, on a $y' = y$, donc $y' - y = 0$.

De même, dans le cas particulier où $\alpha = 2$, (E') devient $y' + 2y = 0$ et nous savons que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-2t}$ est une solution de cette équation différentielle.

Pour $y : t \mapsto e^{-2t}$, on a $y' : t \mapsto -2e^{-2t}$ donc $y' + 2y = 0$.

Dans le cas général où α est une constante réelle quelconque, montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$.

En effet, pour $y : t \mapsto e^{-\alpha t}$, on a $y' : t \mapsto -\alpha e^{-\alpha t}$.

Alors $y' + \alpha y : t \mapsto -\alpha e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\alpha t}$,
donc $y' + \alpha y = 0$.

$y' + \alpha y$ est la fonction nulle.

Pour trouver **toutes** les solutions de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$, nous allons faire un raisonnement en deux parties après avoir observé que, pour la fonction $y : t \mapsto e^{-\alpha t}$ on a :
pour tout t de $\mathbb{R}$, $y(t)e^{\alpha t} = e^{-\alpha t}e^{\alpha t}$,
donc $y(t)e^{\alpha t} = e^0$, donc $y(t)e^{\alpha t} = 1$.

> $e^{-\alpha t}e^{\alpha t} = e^{-\alpha t+\alpha t}$.

Ainsi pour cette solution y de l'équation différentielle (E'), la fonction $t \mapsto y(t)e^{\alpha t}$ est une fonction constante, donc sa dérivée est nulle.

En est-il de même pour les autres solutions de (E') ?

Théorème direct

Si y est une solution de (E'), alors $y' + \alpha y = 0$, donc, pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (1)$$

> Ici y n'est pas nécessairement la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = y(t)e^{\alpha t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = y'(t)e^{\alpha t} + y(t)\alpha e^{\alpha t}$,
$f'(t) = (y'(t) + \alpha y(t))e^{\alpha t}$,
donc $f'(t) = 0$ d'après la relation (1) ci-dessus.

> On dérive un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$: il existe une constante réelle C telle que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) = C$.

> Voir le **2D** du chapitre 1.

Donc $y(t) = Ce^{-\alpha t}$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

> $f(t) = y(t)e^{\alpha t}$.

Conclusion

Si y est une solution de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$, alors $y : t \mapsto Ce^{-\alpha t}$ où C est une constante réelle.

> Il n'y a pas d'autres solutions, mais on ne sait pas si toutes ces fonctions sont solutions.

Réciproque

Est-ce que toutes les fonctions $t \mapsto Ce^{-\alpha t}$ où C est une constante réelle sont solutions de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$?

Soit $y : t \mapsto Ce^{-\alpha t}$.

Sa dérivée est $y' : t \mapsto C(-\alpha e^{-\alpha t})$.

Donc $y' + \alpha y : t \mapsto -\alpha Ce^{-\alpha t} + \alpha Ce^{-\alpha t}$,
donc $y' + \alpha y = 0$.

> $y' + \alpha y$ est la fonction nulle.

THÉORÈME

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' + \alpha y = 0}$, où α est un nombre réel fixé, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{t \mapsto Ce^{-\alpha t}}$ **où C est une constante réelle quelconque.**

> **La solution générale** de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$ est $t \mapsto Ce^{-\alpha t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Exemple

L'équation différentielle (E'_1) $2y' + y = 0$, équivalente à $y' + \frac{1}{2}y = 0$, a pour solutions les fonctions $y : t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t}$ où C est une constante réelle quelconque.

> Ici $\alpha = \frac{1}{2}$.

De ce théorème et de celui du paragraphe **A** nous déduisons le théorème suivant :

THÉORÈME

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) $ay' + by = c(t)$ est l'ensemble des fonctions définies par $t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t} + g(t)$ où C est une constante réelle quelconque et où la fonction g est une solution particulière de (E).

> $a \neq 0$.

> Cet ensemble de solutions a pour représentation graphique une famille de courbes.

COURS

C. Recherche d'une solution particulière de (E) $ay' + by = c(t)$

Dans les sujets de BTS, les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données.

Voici quelques cas simples où la recherche, sans utilisation d'un logiciel de calcul formel, est une capacité attendue au BTS.

Cas où $c(t)$ est une constante

Une solution particulière de (E) $ay' + by = k$, où k est une constante, est la fonction constante g définie par $g(t) = \frac{k}{b}$ car $g'(t) = 0$.

On suppose $b \neq 0$; sinon (E) $ay' = k$ avec $a \neq 0$ et $g : t \mapsto \frac{k}{a}t$ convient.

Exemple 1

$g : t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E_1) $2y' + y = \frac{1}{2}$. La solution générale de (E_1) est $t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}$ où C est une constante quelconque.

Voir le dernier théorème du paragraphe B.

Cas où $c(t)$ est un polynôme

MÉTHODE

Chercher $g(t)$ sous la forme d'un polynôme de même degré que $c(t)$.

Exemple 2

Pour (E_2) $y' + 2y = 4x - 1$, cherchons une solution particulière g telle que $g(x) = ax + b$.

Ici $C(x) = 4x - 1$ est un polynôme du premier degré.

Alors $g'(x) = a$ et g convient si et seulement si $a + 2(ax + b) = 4x - 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$, $2ax + (a + 2b) = 4x - 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$, qui est équivalent à $\begin{cases} 2a = 4 \\ a + 2b = -1. \end{cases}$

On identifie les coefficients des polynômes.

Donc, $a = 2$, $b = -\frac{3}{2}$ et $g : x \mapsto 2x - \frac{3}{2}$.

La solution générale de (E_2) est $t \mapsto Ce^{-2t} + 2x - \frac{3}{2}$ où C est une constante quelconque.

Voir le dernier théorème du paragraphe B.

Cas où $c(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$

A, B, ω, φ sont des constantes données.

MÉTHODE

Chercher $g(t)$ sous la forme $g(t) = A'\cos(\omega t + \varphi) + B'\sin(\omega t + \varphi)$ où A′ et B′ sont des constantes à déterminer.

Exemple 3

Pour (E_3) $y' + y = \sin 2t$, cherchons une solution particulière g telle que $g(t) = A'\cos(2t) + B'\sin(2t)$.

Ici $A = 0$, $B = 1$, $\omega = 2$ et $\varphi = 0$.

Alors $g'(t) = -2A'\sin(2t) + 2B'\cos(2t)$.

Voir le tableau des dérivées des fonctions de référence du chapitre 1.

g convient si et seulement si, pour tout t de $\mathbb{R}$,
$-2A'\sin(2t) + 2B'\cos(2t) + A'\cos(2t) + B'\sin(2t) = \sin(2t)$,
$(B' - 2A')\sin(2t) + (2B' + A')\cos(2t) = \sin(2t)$,

qui est équivalent à $\begin{cases} B' - 2A' = 1 \\ 2B' + A' = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} A' = -2B' \\ B' - 2(-2B') = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} A' = -2B' \\ 5B' = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} B' = \frac{1}{5} \\ A' = -\frac{2}{5}. \end{cases}$

On identifie les coefficients des deux expressions en $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$.

$g : t \mapsto -\frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t)$ est une solution particulière de (E_3).

Vérifiez-le.

La solution générale de (E_3) est $t \mapsto Ce^{-t} - \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t)$ où C est une constante quelconque.

Voir le dernier théorème du paragraphe B.

Cas où $c(t) = ke^{\lambda t}$

k et λ sont des constantes données.

MÉTHODE

Chercher $g(t)$ sous la forme $g(t) = Ae^{\lambda t}$ où A est une constante à déterminer.

Exemple 4

Pour (E_4) $y' + 3y = 4e^{-t}$, cherchons une solution particulière g telle que $g(t) = Ae^{-t}$.

Alors $g'(t) = -Ae^{-t}$ et g convient si et seulement si $-Ae^{-t} + 3Ae^{-t} = 4e^{-t}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, $2Ae^{-t} = 4e^{-t}$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

$(e^u)' = u'e^u$.

$A = 2$ et $g : t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution particulière de (E_4).

Vérifiez-le.

La solution générale de (E_4) est $t \mapsto Ce^{-3t} + 2e^{-t}$ où C est une constante quelconque.

Voir le dernier théorème du paragraphe B.

Remarque

Dans le cas très particulier où (E) $ay' + by = ke^{-\frac{b}{a}t}$, chercher $g(t)$ sous la forme $g(t) = Ate^{-\frac{b}{a}t}$.

Ce cas n'est pas à mémoriser.

Autres cas

Dans tous les cas, un logiciel de calcul formel permet de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 5

Résolution de l'équation différentielle

$$2y' + y = 2{,}9e^{-3t}\sin t$$

avec **Maxima**.

Ici $c(t) = 2{,}9e^{-3t}\sin t$.

On peut **nommer** l'équation différentielle, E1 par exemple, et ainsi vérifier que la saisie de l'équation est correcte. Attention à bien mettre le ' devant diff sans quoi le logiciel calcule la dérivée au lieu de considérer la fonction dérivée.

La résolution s'effectue par l'instruction **ode2** (ordinary differential equation pack 2).

```
(%i1) E1:2*'diff(y,t)+y=2.9*sin(t)*exp(-3*t);
```

(%o1) $2\left(\frac{d}{dt}y\right) + y = 2.9\,\%e^{-3t}\sin(t)$

```
(%i2) ode2(E1,y,t);
rat: replaced -2.9 by -29/10 = -2.9
```

(%o2) $y = \%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{\%e^{-\frac{5t}{2}}\left(-\frac{5\sin(t)}{2} - \cos(t)\right)}{5} + \%c\right)$

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $y = -\frac{\%e^{-3t}\sin(t)}{2} - \frac{\%e^{-3t}\cos(t)}{5} + \%c\,\%e^{-\frac{t}{2}}$

Nous lisons sur l'écran que la solution générale de l'équation différentielle $2y' + y = 2{,}9e^{-3t}\sin t$ est $t \mapsto -0{,}5e^{-3t}\sin t - 0{,}2e^{-3t}\cos t + Ce^{-\frac{t}{2}}$ où C est une constante quelconque.

D. Existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée

Exemple

Reprenons l'équation différentielle (E_1) $2y' + y = \dfrac{1}{2}$ et cherchons les solutions, s'il en existe, telle que $y(0) = 3$.

Nous savons que les solutions de (E_1) sont les fonctions y définies par

$y(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2}$ où C est une constante réelle quelconque.

$y(0) = 3$ équivaut à $C + \dfrac{1}{2} = 3$, donc $C = \dfrac{5}{2}$.

Il existe donc une solution unique de (E_1) telle que $y(0) = 3$: c'est y définie par

$y(t) = \dfrac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2}$.

> Voir le début du paragraphe C.

> Observer que la valeur de C est obtenue comme solution d'une équation du premier degré.

Dans le cas général où (E) $ay' + by = c(t)$, on démontre de la même façon qu'il existe une solution unique vérifiant $y(t_0) = k$ où les nombres t_0 et k sont donnés.

> L'égalité $y(t_0) = k$ est appelée **condition initiale** car dans beaucoup de problèmes où la variable est le temps on donne la valeur $y(0)$ à l'origine du temps.

THÉORÈME

Une équation différentielle linéaire (E) du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.

> On la détermine dans chaque cas particulier comme dans l'exemple ci-dessus.

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir directement la solution vérifiant une condition initiale.

Exemple

Cherchons avec **Maxima** la solution particulière de l'équation différentielle

$$2y' + y = 2{,}9e^{-3t}\sin t$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

La solution particulière s'obtient par l'instruction **ic1** (initial condition order 1).

> Voir la fin du paragraphe C.

> C'est la suite de la copie d'écran de la fin du paragraphe C.

```
(%i4) ic1(%,t=0,y=0);
```

$$(\%o4)\quad y = -\frac{\%e^{-\frac{7t}{2}}\left(5\,\%e^{t/2}\sin(t) + 2\,\%e^{t/2}\cos(t) - 2\,\%e^{3t}\right)}{10}$$

```
(%i5) expand(%);
```

$$(\%o5)\quad y = -\frac{\%e^{-3t}\sin(t)}{2} - \frac{\%e^{-3t}\cos(t)}{5} + \frac{\%e^{-\frac{t}{2}}}{5}$$

Nous lisons sur l'écran que cette solution particulière est

$$t \mapsto -0{,}5e^{-3t}\sin t - 0{,}2e^{-3t}\cos t + 0{,}2e^{-\frac{t}{2}}.$$

On n'a pas besoin de l'expression de $y(t)$ en fonction de t.

Remarque

Le logiciel **GeoGebra** permet de tracer la courbe représentative de la fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre vérifiant une condition initiale donnée sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression de cette solution en fonction de la variable.

Exemple

Soit à représenter la fonction solution de l'équation différentielle :

$$2y' + y = 2{,}9\sin t e^{-3t}$$

La condition initiale a changé.

vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

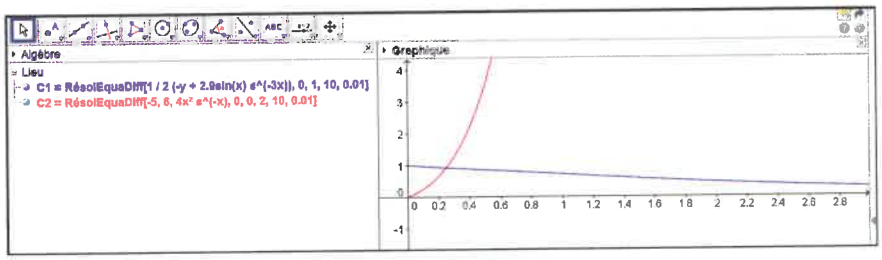
L'équation doit être écrite sous la forme $y' = (1/2)(-y + 2{,}9\sin t e^{-3x})$. La variable est notée x.

On entre dans la barre de saisie :

RésolEquadiff[(1/2)*(-y+2.9*sin(x)*exp(-3*x)),0,1,10,0.01]

Les arguments 0 et 1 correspondent à la condition initiale. L'argument 10 à la valeur maximale de x pour laquelle on souhaite le tracé de la courbe. L'argument 0,01 est le pas de calcul (méthode approchée).

La courbe cherchée est la **courbe bleue** sur la copie d'écran ci-contre : observez qu'elle passe par le point de coordonnées (0, 1) car $y(0) = 1$.



2 Nombres complexes

Nouveauté pour les bacheliers professionnels

Cette partie concerne les trois groupements B, C et D à l'exception d'Analyses de biologie médicale, Bio-analyses et contrôles, Biotechnologie.

Vous savez que certaines équations du second degré n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$. À partir du XVIe siècle, pour obtenir des solutions pour divers types d'équations, on a créé, en plus des nombres réels, de nouveaux nombres appelés d'abord **impossibles**, puis **imaginaires** (Descartes en 1637) et enfin **complexes** au début du XIXe siècle.

Pensez à $x^2 + 1 = 0$ et, plus généralement, au cas où $\Delta < 0$.

A. Forme algébrique d'un nombre complexe

Nous admettons l'existence d'un nouvel ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres appelés **nombres complexes**.

Les nombres complexes sont de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels quelconques et i un nombre nouveau.
$a + bi = a' + b'i$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

i est la première lettre du mot *imaginaire* ; la notation i a été introduite par Euler en 1777. $1 + 2i$ et $-0{,}5 + 1{,}5i$ sont des nombres complexes.

Remarque

Les nombres complexes sont très utilisés en électronique ; afin d'éviter des confusions avec l'intensité i d'un courant électrique, un nombre complexe est alors noté $a + bj$ au lieu de $a + bi$ qui demeure l'écriture utilisée habituellement en mathématiques.

1 est la partie réelle de $1 + 2i$.
1,5 et la partie imaginaire de $-0,5 + 1,5i$.

DÉFINITIONS

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.
- a est la ***partie réelle*** de z. Notation : $a = \mathrm{Re}(z)$.
- b est la ***partie imaginaire*** de z. Notation : $b = \mathrm{Im}(z)$.
- $a + bi$ est la ***forme algébrique*** du nombre complexe z.

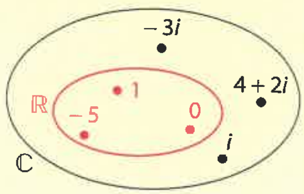
Nous admettons le théorème suivant :

Toute construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de ces opérations est hors programme.

THÉORÈME

On peut définir dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication pour lesquelles **les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, avec $i^2 = -1$.**

$i^2 = -1$, donc i est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.



Remarques
- i n'est pas un nombre réel puisque son carré est négatif.
- Tout nombre réel a peut s'écrire $a + 0i$; c'est donc un élément de $\mathbb{C}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Ce résultat se note $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ qui se lit « $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ ».

$\bar{z}$ se lit « z barre ».

DÉFINITION

Le **nombre complexe conjugué** de $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$, noté $\bar{z}$.

$\bar{\bar{z}} = z$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

Exemple

Le conjugué de $z = 3 + 2i$ est $\bar{z} = 3 - 2i$.

Le conjugué de $\bar{z} = 3 - 2i$ est $\bar{\bar{z}} = 3 + 2i = z$.

B. Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré d'inconnue le nombre **complexe z** :

$$\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0},$$

où a, b, c sont des nombres **réels**, avec $a \neq 0$.

On note Δ le **nombre réel $b^2 - 4ac$.**

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$ est équivalente à

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0,$$

$z^2 + \frac{b}{a}z$ est le début du développement de $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ $= z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $= z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}$.

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

Cas où $\Delta \geq 0$

Par exemple $\sqrt{9} = 3$ et $3^2 = 9$.

Le nombre **positif** Δ a une racine carrée telle que $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = \Delta$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est alors équivalente à

Dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0,$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0,$$

$$z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0,$$

$$z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous retrouvons des résultats connus.

Dans le cas particulier où $\Delta = 0$, nous obtenons deux fois $z = -\frac{b}{2a}$.

Cas où $\Delta < 0$

L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, $-\Delta > 0$ et comme $\Delta = -(-\Delta)$, on a :

$$\Delta = \mathrm{i}^2(-\Delta) \text{ car } \mathrm{i}^2 = -1, \text{ donc } \Delta = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2.$$

Par exemple $-4 = (2\mathrm{i})^2$ où $2 = \sqrt{-(-4)}$.

D'après le début de la résolution de $az^2 + bz + c = 0$, cette équation est équivalente à $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, c'est-à-dire dans ce cas à $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$.

Par des calculs analogues à ceux du cas $\Delta \geq 0$, nous obtenons en remplaçant $\sqrt{\Delta}$ par $\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$:

$$z = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Ces deux nombres complexes sont conjugués.

Aussi dans le cas où $\Delta < 0$, une équation du second degré a deux solutions **complexes** conjuguées.

THÉORÈME

Soit a, b, c des nombres **réels**, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles, $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double, $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées,

$$z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple

Pour l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, on a $\Delta = -3$.

Cette équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Nouveauté pour les bacheliers professionnels

Cette partie concerne les trois groupements *B*, *C* et *D* à l'exception d'Analyses de biologie médicale, Bio-analyses et contrôles, Biotechnologie.

t désignant la variable et $y : t \mapsto y(t)$ la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur un intervalle donné I de $\mathbb{R}$, les équations différentielles considérées dans ce paragraphe sont du type

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$$

où a, b, c sont des constantes réelles données, avec $a \neq 0$, et d une fonction donnée, dérivable sur I.

y'' est la fonction dérivée seconde de y, c'est-à-dire la dérivée de y'.

Exemples

(E_1) $\quad y'' - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t \quad$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

(E_2) $\quad y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t} \quad$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

(E_3) $\quad y'' - 2y' + 5y = 5\cos t \quad$ avec $\mathrm{I} = [0, +\infty[$.

En notant x la variable, au lieu de t, l'équation (E_2) s'écrit :

$$y'' - 4y' + 4y = 3e^{-x}.$$

En électricité, on rencontre $q : t \mapsto q(t)$ au lieu de $y : t \mapsto y(t)$ et on utilise la notation différentielle $\frac{dq}{dt}$ pour la dérivée q' et $\frac{d^2q}{dt^2}$ pour la dérivée seconde q''.

A. Théorème

Avec une démonstration analogue à celle détaillée pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, nous obtenons le théorème suivant.

Voir le paragraphe 1A.

THÉORÈME

La solution générale de l'équation différentielle

$$(E) : \quad ay'' + by' + cy = d(t)$$

est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation « sans second membre » associée

$$(E') : \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Nous en déduisons que la résolution de l'équation (E) se ramène à la résolution de l'équation (E') et à la recherche d'une solution particulière de (E).

C'est la même démarche que dans la partie 1.

B. Résolution de (E') $ay'' + by + c = 0$

Théorème

Soit f et g deux fonctions, deux fois dérivables sur I et solutions de l'équation différentielle (E').

Alors :

$$af'' + bf' + cf = 0 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad ag'' + bg' + cg = 0 \quad (2).$$

C_1 et C_2 étant deux constantes quelconques, la fonction $C_1f + C_2g$ est deux fois dérivable sur I ; montrons qu'elle est solution de (E').

$$\begin{aligned} & a(C_1f + C_2g)'' + b(C_1f + C_2g)' + c(C_1f + C_2g) \\ & = a(C_1f'' + C_2g'') + b(C_1f' + C_2g') + c(C_1f + C_2g) \\ & = C_1(af'' + bf' + cf) + C_2(ag'' + bg' + cg) \\ & = 0 \text{ d'après les relations (1) et (2).} \end{aligned}$$

$(u + v)' = u' + v'$ et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

COURS

Réciproquement on démontre, et nous l'admettons ici, que si f et g sont des solutions particulières de (E') telles qu'aucune n'est le produit de l'autre par une constante, alors toute solution de (E') peut s'écrire sous la forme $C_1 f + C_2 g$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

THÉORÈME

Si f et g sont deux solutions sur I de l'équation différentielle

$$(E') : \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

aucune n'étant le produit de l'autre par une constante, alors l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions $C_1 f + C_2 g$ où C_1 et C_2 sont des constantes quelconques.

f et g sont alors dites **linéairement indépendantes.**

Il s'agit donc de déterminer deux solutions linéairement indépendantes de (E').

Équation caractéristique

Comme pour les équations linéaires du premier ordre, nous allons chercher s'il existe des fonctions exponentielles solutions de (E').

Soit $y : t \mapsto e^{rt}$ où r est une constante réelle.

Nous savons que $y' : \quad t \mapsto re^{rt} \quad$ et $\quad y'' : t \mapsto r^2 e^{rt}$.

Donc $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E') si, et seulement si, pour tout t de I,

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

qui équivaut à $\quad ar^2 + br + c = 0 \quad$ car $\quad e^{rt} \neq 0$ pour tout t de I.

Mettre e^{rt} en facteur.

DÉFINITION

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est l'équation caractéristique de

$$(E') : \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

$t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E') si, et seulement si, la constante réelle r est une solution de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ de } (E').$$

Exemples

(E'_1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$.
(E'_2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$.
(E'_3) $y'' - 2y' + 5y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$.

$\Delta > 0$.
$\Delta = 0$.
$\Delta = -16$.

Théorème

Nous savons résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \text{de } (E').$$

Voir la partie **2**.

Cas $\Delta > 0$

L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 ; donc $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont deux solutions particulières de (E').

Elles sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$ donc

$$e^{r_1} \neq e^{r_2}, \quad \text{donc} \quad \frac{e^{r_1}}{e^{r_2}} \neq \frac{1}{1}.$$

Pour (E'_1), $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

t	0	1
$e^{r_1 t}$	1	e^{r_1}
$e^{r_2 t}$	1	e^{r_2}

D'après le premier théorème de ce paragraphe, dans le cas où $\Delta > 0$ la solution générale de (E') est définie sur I par $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Pour (E_1'), $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$.

Cas $\Delta = 0$

L'équation caractéristique a une solution réelle double : $r = -\dfrac{b}{2a}$; donc $t \mapsto e^{rt}$, où $r = -\dfrac{b}{2a}$, est une solution particulière de (E').

Pour (E_2'), $r = 2$.

Pour pouvoir utiliser, comme dans le cas précédent, le premier théorème de ce paragraphe, nous avons besoin d'une deuxième solution particulière de (E').

Considérons la fonction $f : t \mapsto te^{rt}$ où $r = -\dfrac{b}{2a}$.

$f'(t) = e^{rt} + rte^{rt}$, donc $f'(t) = (1 + rt)e^{rt}$.

$f''(t) = re^{rt} + r(1 + rt)e^{rt}$, donc $f''(t) = (r^2 t + 2r)e^{rt}$.

$(uv)' = u'v + uv'$.

$(e^u)' = u'e^u$.

$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = (ar^2 t + 2ar + b + brt + ct)e^{rt}$,

$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = (ar^2 + br + c)te^{rt} + (2ar + b)e^{rt}$.

Or $ar^2 + br + c = 0$ car r est solution de l'équation caractéristique et $2ar + b = 0$ car $r = -\dfrac{b}{2a}$.

Donc $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0$ pour tout t de I.

Donc $t \mapsto te^{rt}$, où $r = -\dfrac{b}{2a}$, est une deuxième solution de (E').

t	0	1
te^{rt}	0	e^r
e^{rt}	1	e^r

Les fonctions $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto te^{rt}$ sont linéairement indépendantes car $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{e^r}{e^r}$.

D'après le premier théorème de ce paragraphe, dans le cas où $\Delta = 0$ la solution générale de (E') est définie sur I par $y(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$ où $r = -\dfrac{b}{2a}$ et où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Pour (E_2'), $y(t) = (C_1 t + C_2)e^{2t}$.

Cas $\Delta < 0$

L'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ où α et β sont des nombres réels avec $\beta \neq 0$.

Voir la partie **2**. Pour (E_3'), $\Delta = (4i)^2$, $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$.

On démontre, de la même façon que dans le cas où $\Delta = 0$, que les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}\cos\beta t$ et $t \mapsto e^{\alpha t}\sin\beta t$ sont deux solutions particulières de (E').

t	0	$\dfrac{\pi}{4\beta}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	0	k
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	1	k

Elles sont linéairement indépendantes car $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{k}{k}$ où $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\dfrac{\alpha\pi}{4\beta}\right)$.

D'après le premier théorème de ce paragraphe, dans le cas où $\Delta < 0$ la solution générale de (E') est définie sur I par $y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Pour (E_3'), $y(t) = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

THÉORÈME

• a, b, c étant des constantes réelles données avec $a \neq 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E') : $ay'' + by' + cy = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par $t \mapsto C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

• Les fonctions f_1 et f_2 sont définies à partir des solutions réelles ou complexes de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

– Si $\Delta > 0$, $f_1(t) = e^{r_1 t}$ et $f_2(t) = e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les solutions réelles de cette équation.

L'ensemble des solutions de (E') est défini par $\boldsymbol{f(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}}$.

– Si $\Delta = 0$, $f_1(t) = e^{rt}$ et $f_2(t) = te^{rt}$ où $r = -\dfrac{b}{2a}$ est la solution réelle double de cette équation.

L'ensemble des solutions de (E') est défini par

$$\boldsymbol{f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{rt}}.$$

– Si $\Delta < 0$, $f_1(t) = e^{\alpha t}\cos \beta t$ et $f_2(t) = e^{\alpha t}\sin \beta t$ où $\alpha + i\beta$ est une solution complexe de cette équation.

L'ensemble des solutions de (E') est défini par

$$\boldsymbol{f(t) = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}}.$$

On choisit en général $\beta > 0$.

Remarque

Dans le cas particulier de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ rencontrée en physique où ω est la pulsation, l'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $i\omega$ et $-i\omega$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par $t \mapsto C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ où C_1 et C_2 sont de constantes réelles quelconques.

$a = 1$, $b = 0$ et $c = \omega^2$.

C. Recherche d'une solution particulière de (E) $ay'' + by' + cy = d(t)$

Dans les sujets de BTS, les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données.

Dans les cas simples où la recherche, sans utilisation d'un logiciel de calcul formel, est une capacité attendue au BTS, **les méthodes détaillées dans la partie 1 pour les équations différentielles du premier ordre restent valables pour le second ordre.**

Exemples

Reprenons les trois exemples (E_1), (E_2) et (E_3) introduits au début de la partie 3 et utilisés comme exemples de résolution d'équation sans second membre dans le paragraphe B.

Pour chacun de ces trois exemples, rédigez la démonstration comme dans le paragraphe 1C.

• (E_1) $y'' - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$ ayant pour second membre un polynôme du second degré, a une solution particulière définie par $t \mapsto at^2 + bt + c$.

La fonction $t \mapsto -t^2 - 2t - 2$ convient.

La solution générale de (E_1) est : $t \mapsto C_1 e^t + C_2 e^{3t} - t^2 - 2t - 2$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Voir A et le cas $\Delta > 0$ de B.

• (E_2) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t}$ ayant un second membre de la forme $ke^{\lambda t}$, a une solution particulière définie pour $t \mapsto Ae^{-t}$.

Ici $\lambda = -1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{3}e^{-t}$ convient.

Voir A et le cas $\Delta = 0$ de B.

La solution générale de (E_2) est :

$t \mapsto (C_1 t + C_2)e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t}$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Ici $A = 5$, $B = 0$, $\omega = 1$ et $\varphi = 0$.

• (E_3) $y'' - 2y' + 5y = 5\cos t$ ayant un second membre de la forme $A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$, a une solution particulière définie par : $t \mapsto A'\cos t + B'\sin t$.

La fonction $t \mapsto \cos t - \frac{1}{2}\sin t$ convient.

Voir A et le cas $\Delta < 0$ de B.

La solution générale de (E_3) est :

$t \mapsto e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) + \cos t - \frac{1}{2}\sin t$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Dans tous les cas, un logiciel de calcul formel permet de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre.

Exemple

Résolution de l'équation différentielle :

$$y'' - 5y' + 6y = 4t^2e^{-t}$$

avec **Maxima**.

On peut **nommer** l'équation différentielle, $E2$ par exemple, et ainsi vérifier que la saisie de l'équation est correcte.

Attention à bien mettre le ' devant diff sans quoi le logiciel calcule la dérivée au lieu de considérer la fonction dérivée.

La fonction dérivée seconde est obtenue par le 2 dans 'diff(y,t,2).

La résolution s'effectue par l'instruction **ode2** (ordinary differential equation pack 2).

```
(%i1) E2:'diff(y,t,2)-5*'diff(y,t)+6*y=4*t^2*exp(-t);
```
(%o1) $\frac{d^2}{d\,t^2}\,y - 5\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) + 6\,y = 4\,t^2\,\%e^{-t}$
```
(%i2) ode2(E2,y,t);
```
(%o2) $y = \%k1\,\%e^{3\,t} + \%k2\,\%e^{2\,t} + \frac{(72\,t^2 + 84\,t + 37)\,\%e^{-t}}{216}$

$\frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ et $\frac{84}{216} = \frac{7}{18}$.

Nous lisons sur l'écran que la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 4t^2e^{-t}$ est

$t \mapsto C_1e^{3t} + C_2e^{2t} + \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{7}{18}t + \frac{37}{216}\right)e^{-t}$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

D. Existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales données

Exemple

Notez qu'ici la **condition initiale est double.**

Reprenons l'équation différentielle (E_1) $y'' - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$ et cherchons les solutions, s'il en existe, telles que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Nous savons que la solution générale de l'équation (E_1) est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} - t^2 - 2t - 2$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

$y(0)=0$ équivaut à $C_1+C_2-2=0$.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, $y'(t)=C_1e^t+3C_2e^{3t}-2t-2$;

donc, $y'(0)=0$ équivaut à $C_1+3C_2-2=0$.

y convient, si et seulement si $\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ C_1+3C_2=2 \end{cases}$

qui est équivalent à $\begin{cases} 2C_2=0 \text{ (par différence)} \\ C_1+C_2=2. \end{cases}$

Donc $C_2=0$ et $C_1=2$.

Il existe donc une solution unique de (E_1) telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=0$: c'est y définie par $y(t)=2e^t-t^2-2t-2$.

Dans beaucoup de problèmes où la variable est le temps, t_0 est l'origine des temps.

Dans le cas général où (E) $ay''+by'+cy=d(t)$, on démontre de la même façon qu'il existe une solution unique vérifiant $y(t_0)=k$ et $y'(t_0)=k'$ où les nombres t_0, k et k' sont donnés.

On la détermine dans chaque cas particulier comme dans l'exemple ci-dessus.

THÉORÈME

Une équation différentielle linaire du second ordre a une solution unique vérifiant des conditions initiales données.

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir directement la solution vérifiant des conditions initiales.

Exemple

Voir la fin du paragraphe **B**.

Cherchons avec **Maxima** la solution particulière de l'équation différentielle $y''-5y'+6y=4t^2e^{-t}$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=2$.

La solution particulière s'obtient par l'instruction **ic2** (initial condition order 2).

C'est la suite de la copie d'écran du paragraphe **C**.

```
(%i3) ic2(%,t=0,y=0,'diff(y,t)=2);
```

(%o3) $y=\dfrac{17\,\%e^{3\,t}}{8}-\dfrac{62\,\%e^{2\,t}}{27}+\dfrac{(72\,t^2+84\,t+37)\,\%e^{-t}}{216}$

$\dfrac{72}{216}=\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{84}{216}=\dfrac{7}{18}$.

Nous lisons sur l'écran que cette solution particulière est

$$t\mapsto \frac{17}{8}e^{3t}-\frac{62}{27}e^{2t}+\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{7}{18}t+\frac{37}{216}\right)e^{-t}$$

Remarque

Il s'agit de la **courbe rouge** sur la copie d'écran de la page 185 : observez qu'elle passe par l'origine car $y(0)=0$ et qu'en ce point sa tangente a pour coefficient directeur 2 : c'est la droite qui passe par l'origine et le point de coordonnées (2, 4).

Nous pouvons aussi représenter graphiquement (par une méthode approchée) la fonction solution de l'équation différentielle $y''-5y+6y=4t^2e^{-t}$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=2$ avec le logiciel **GeoGebra**.

On entre dans la barre de saisie où la variable est notée x :

RésolEquadiff[−5,6,4*x^2*exp(−x),0,0,2,10,0.01]

où, dans les crochets, on place dans l'ordre :

– le coefficient de y' lorsque le coefficient de y'' est 1 : ici – 5,

– le coefficient de y lorsque le coefficient de y'' est 1 : ici 6,

– le second membre de l'équation différentielle,

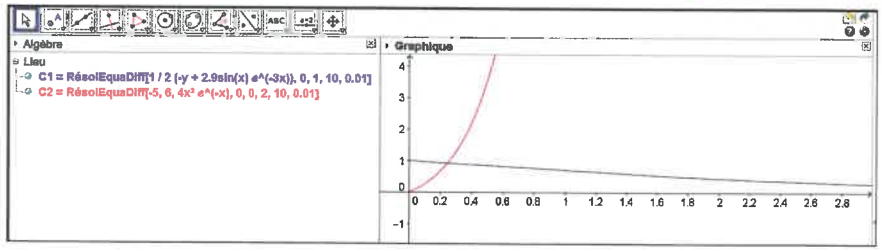
– l'instant initial : ici 0,

– la valeur initiale prise par y : ici, 0,

– la valeur initiale prise par y' : ici 2,

– la valeur maximale de x pour laquelle on souhaite le tracé de la courbe : ici 10,

– le pas de calcul (méthode approchée) : ici 0,01 noté 0.01.



Ce qu'il faut savoir

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équations sans second membre $ay' + by = 0$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = 0$,

où a et b sont des constantes réelles : **est l'ensemble des fonctions définies par :**

$t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t}$

où C est une constante réelle quelconque.

Équations $ay' + by = c(t)$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = c(t)$,

où a et b sont des constantes réelles et c une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **est l'ensemble des fonctions définies par : $t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t} + g(t)$**

où C est une constante réelle quelconque et où la fonction g est une solution particulière de (E).

Nombres complexes

Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Soit a, b, c des nombres **réels** avec $a \neq 0$.

On note **Δ le nombre réel $b^2 - 4ac$.**

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- **Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles, $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;**
- Si **$\Delta = 0$, une solution réelle double, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$;**
- Si **$\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées,**

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

COURS

Équations différentielles du second ordre à coefficients réels constants

Équations $ay'' + by' + cy = 0$

• **Équation caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$**

L'équation $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant Δ, est appelée **équation caractéristique de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$.**

• **Ensemble des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$**

Dans ce qui suit, C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

Si $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies par : $t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique.

Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies par : $t \mapsto (C_1 t + C_2)e^{rt}$, où r est la solution double de l'équation caractéristique.

Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies par : $t \mapsto (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \beta i$, et $r_2 = \alpha - \beta i$ sont les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Cas particulier : $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans ce cas $\alpha = 0$ et $\beta = \omega$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies par $t \mapsto C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Équations $ay'' + by' + cy = d(t)$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$ s'obtient en ajoutant à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$, une solution particulière $t \mapsto g(t)$ de l'équation différentielle (E).

Sous X cas

desolve (0,00353 y'(t) + 0,00786 y(t) = 0,02156, t, y)

desolve (... diff(y(t), t) + ... y(t) = 0,02156, [t, y])

$C_0 + 2,743 e^{2,226 t}$

$C_0 e^{-2,226 t} + 2,743$

desolve ([..., y(0) = 0], [t, y])

$2,74 \times e^{2,226 t}$

RÉPONSES P. 333

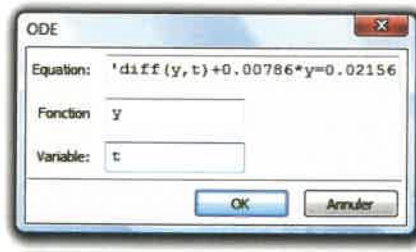
TP 1 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 et déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée avec Maxima

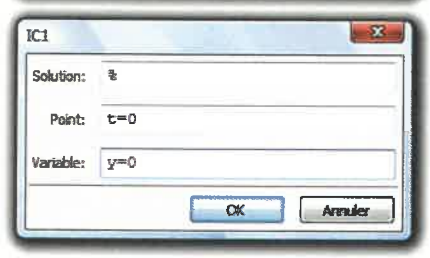
Sédimentation et traitement des eaux

Dans les processus de traitement des eaux, l'étape de décantation permet d'éliminer les particules de taille supérieure à une dizaine de micromètres. L'objet de ce TP est l'étude de l'évolution de la vitesse dans une eau à 10 °C d'une particule minérale, de forme sphérique, de 1 mm de rayon.
(D'après *Mathématiques et développement durable* IREM de Clermont-Ferrand).

On lâche, sans vitesse initiale, une sphère de sable de rayon 1 mm. Les lois de la physique permettent d'établir que la fonction v correspondant à la vitesse, en mètres par seconde, de la sphère au temps t, exprimé en secondes, est solution de l'équation différentielle (E) :

$0{,}003\,53\,y' + 0{,}007\,86\,y = 0{,}021\,56.$





1. **a. Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation différentielle (E).**

Avec Maxima, entrer la commande :

ode2(0.00353*'diff(y,t)+0.00786*y=0.02156,y,t)

ou utiliser le menu Equations/Résoudre une équation différentielle…

y' se traduit par 'diff(y,t), attention à ne pas oublier le ' devant diff.

$C_1 e^{-\frac{786x}{353}} + \frac{539}{1065}$

$y(0)=0$

$-\frac{539}{1965}e + \frac{539}{1965}$

b. Déterminer, à l'aide du logiciel, la solution particulière v, définie sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E), vérifiant la condition initiale :

$v(0) = 0$.

Avec Maxima, on peut entrer l'instruction ic1(%,t=0,y=0), où % reprend le résultat précédemment obtenu, ou utiliser le menu Equations/Condition initiale(1).

Tracer famille courbe

c. Vérifier, à l'aide du logiciel, que $v(t)$ peut, en arrondissant les coefficients, s'écrire :

$$v(t) = 2{,}743(1 - e^{-2{,}227t}).$$

Avec Maxima, l'instruction define(v(t),rhs(%)) permet d'attribuer à $v(t)$ le membre de droite d'une égalité venant d'être obtenue. L'instruction float(*quantité*) permet d'obtenir un affichage décimal approché d'une *quantité*.

2. Déterminer la vitesse limite de la particule.

Avec Maxima, l'instruction limit(v(t),t,inf) affiche $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

3. **a.** Soit T un réel positif. La hauteur $h(T)$, en mètres, parcourue par la particule durant l'intervalle de temps $[0, T]$ est donnée par $h(T) = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$.

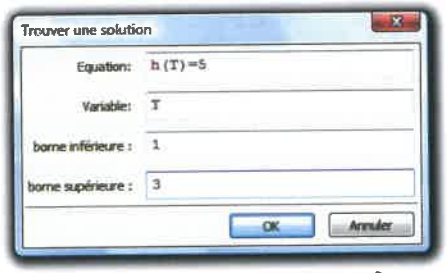
À l'aide du logiciel de calcul formel, expliciter, sous forme développée, l'expression de $h(T)$.

Avec Maxima, l'intégrale est obtenue par l'instruction integrate(v(t),t,0,T).

b. On souhaite déterminer la durée nécessaire à la particule pour atteindre le fond du bassin de décantation, situé à 5 m sous la surface de l'eau.

Effectuer une résolution numérique de l'équation $h(T) = 5$.

Avec Maxima, on peut compléter la boîte de dialogue ci-contre, obtenue par le menu Equations/Trouver une solution…



Vérif avec la vitesse ?

TP 2 Représenter la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 avec GeoGebra

Injection d'une substance médicamenteuse

À l'instant $x = 0$, on injecte à un malade une substance médicamenteuse, qui est ensuite progressivement éliminée. On désigne par $y(x)$ la quantité de substance, en mg/L, présente à l'instant x, exprimé en heures. On suppose qu'à chaque instant x, la vitesse d'élimination $y'(x)$ est proportionnelle à la quantité de substance $y(x)$ restante dans le sang du malade. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par l'équation différentielle (E_a) :

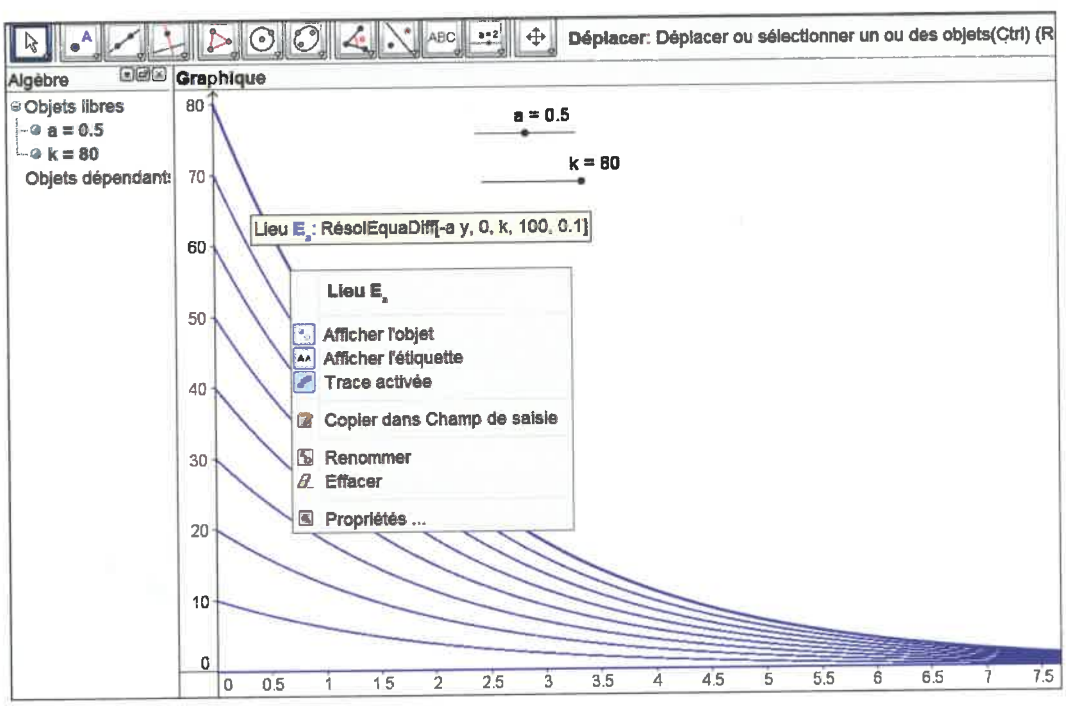
$$y'(x) = -ay(x),$$

où a est une constante strictement positive et où $x \mapsto y(x)$ est une fonction inconnue définie sur $[0, +\infty[$.

Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur a allant de 0 à 1 avec un incrément 0,01 et un curseur k allant de 0 à 80 avec un incrément 10.

Entrer dans la barre de saisie l'expression : E_a=RésolEquaDiff[-a*y,0,k,100,0.1].

On obtient un « lieu » qui est la représentation graphique d'une fonction solution de l'équation (E_a) sur l'intervalle [0, 100].



1. **a.** Fixer le curseur a à la valeur $a = 0{,}5$.

Par un clic droit, activer la « trace » du « lieu » tracé.

Modifier le curseur k. Chaque valeur de k fournit une solution à l'équation différentielle $(E_{0,5})$. L'équation différentielle $(E_{0,5})$ possède une infinité de fonctions solutions définies sur $[0, +\infty[$.

À quoi correspond le curseur k, dans le contexte de cette activité ?

b. Fixer le curseur k à la valeur $k = 50$. Nettoyer la trace et modifier le curseur a. Chaque valeur de a fournit une équation différentielle (E_a) différente.
Quel est l'impact de a sur l'allure de la courbe représentant une solution de l'équation (E_a) ?

2. Supprimer la trace.

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = ke^{-ax}$.

a. Représenter la fonction f sur le fichier GeoGebra. Que constate-t-on ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, on a $f'(x) = -af(x)$.

3. On suppose que l'on a injecté 50 mg/L à l'instant $x = 0$ et qu'au bout d'une heure, il ne reste plus que 25 mg/L de substance médicamenteuse dans le sang du malade.

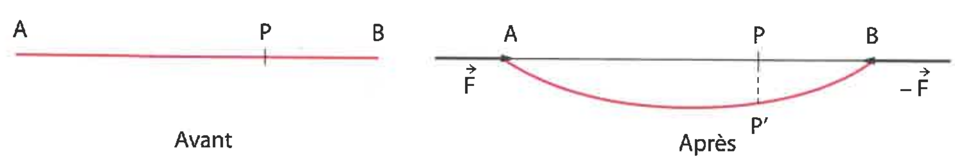
a. Ajuster le curseur k pour que la solution corresponde à la donnée « on a injecté 50 mg/L à l'instant $x = 0$ ». Par quel point A la courbe doit-elle passer pour que la solution corresponde à la donnée « au bout d'une heure, il ne reste plus que 25 mg/L de substance médicamenteuse dans le sang du malade » ?
Créer ce point sur le fichier GeoGebra et ajuster le curseur a pour que la solution tracée passe par ce point.

b. Montrer, par un calcul, que $a = \ln 2$.

TP 3 Résoudre une équation différentielle d'ordre 2 et déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée avec Maxima

Fléchissement d'une tige

Aux deux extrémités d'une tige métallique homogène AB de longueur 1 mètre, on exerce deux forces opposées de même intensité. Si la force exercée est suffisamment importante, il y a fléchissement de la tige, comme l'indique la figure ci-dessous.



Les longueurs sont exprimées en millimètres. À chaque point P de la tige, tel que AP $= x$, avec $x \in [0, 1\,000]$, on associe la déformation PP' $= f(x)$, comme représenté sur la figure. On cherche à expliciter la fonction f. Les lois de la physique permettent de montrer que la fonction f est solution, sur l'intervalle $[0, 1\,000]$, de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{F_c}{E \times I}\, y = 0,$$

où E et I sont des constantes positives caractérisant le matériau, et F_c l'intensité de la force critique, c'est-à-dire la force minimale à exercer pour qu'il y ait fléchissement.

En posant $A = \dfrac{F_c}{E \times I}$, qui est une constante positive, l'équation différentielle devient (1) :

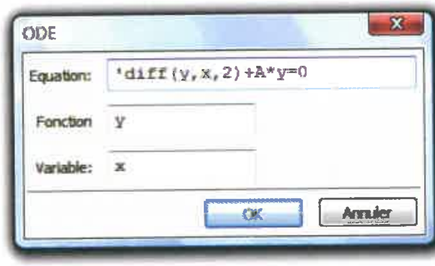
$$y'' + Ay = 0.$$

1. Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation différentielle (1).

Avec Maxima, entrer la commande :

ode2('diff(y,x,2)+A*y=0,y,x)

ou utiliser le menu Equations/Résoudre une équation différentielle…



y'' se traduit par 'diff(y,x,2), attention à ne pas oublier le ' devant diff.

2. a. Justifier que la solution f du problème posé doit vérifier $f(0) = 0$.

b. En déduire que, pour tout x de l'intervalle [0, 1 000], $f(x) = k \sin(\sqrt{A}x)$, où k est une constante réelle.

Avec Maxima, l'instruction define(f(x),%) affecte à $f(x)$ l'expression précédemment calculée. On peut alors calculer $f(0)$. Pour affecter une valeur numérique à une constante, l'instruction Maxima est : par exemple a:1 affecte à a la valeur 1.

3. On donne les valeurs numériques suivantes :

$E = 210\,000$ N.mm^{-2} ; $I = 30{,}7$ mm^4 et $F_c = 63{,}6$ N.

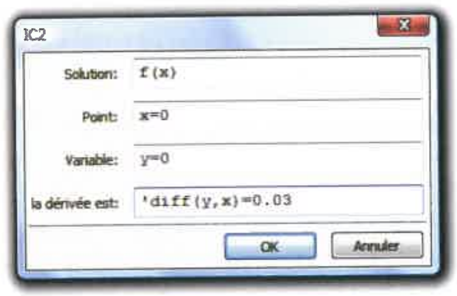
a. Calculer, à l'aide du logiciel, la constante A.

b. Pour ces valeurs numériques, on admet que la fonction f doit vérifier la condition initiale :

$f'(0) = 0{,}03$. Déterminer, à l'aide du logiciel, la solution particulière f de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales :

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 0{,}03$.

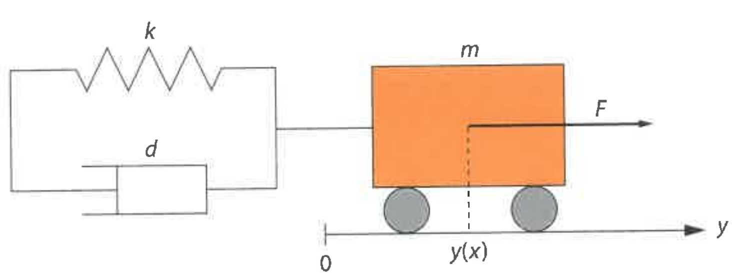
Avec Maxima, on peut entrer l'instruction ic2(f(x),x=0,y=0,'diff(y,x)=0.03) ou utiliser le menu Equations/Condition initiale(2).



4. Pour des raisons de symétrie, la déformation maximale est obtenue au centre de la barre. Déterminer la déformation maximale.

TP 4 Représenter les courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 à second membre non constant avec GeoGebra

Oscillateur et séismes



On considère le schéma ci-dessus, susceptible de modéliser le comportement d'une structure lors d'un séisme. Les constantes positives m, k et d désignent respectivement la masse du chariot, la constante de raideur du ressort et le coefficient d'amortissement du piston. On note F l'intensité d'une force extérieure appliquée au chariot. La position du chariot en fonction du temps x est désignée par $y(x)$. Les lois de la physique montrent que la fonction y est solution de l'équation différentielle :

$$my'' + dy' + ky = F(x).$$

On se place tout d'abord dans la situation sans force extérieure.

En posant $b = \frac{d}{m}$ et $c = \frac{k}{m}$, l'équation différentielle s'écrit $(E) : y'' + by' + cy = 0$.

Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur b allant de 0 à 1 avec un incrément 0,1 et un curseur c allant de 0 à 10 avec un incrément 0,1. Entrer dans la barre de saisie :

RésolEquaDiff[b,c,0,0,0,1,100,0.1]

qui représente sur l'intervalle [0, 100], avec un pas de calcul de 0,1, la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

A. Étude sans amortissement

Dans cette partie, on suppose $b = 0$.

1. Donner l'ensemble des solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'' + cy = 0,$$

où c est une constante strictement positive.

2. **a.** Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle précédente vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

b. Vérifier votre réponse à l'aide de GeoGebra en traçant la courbe représentative de f (la racine carrée s'obtient par sqrt).

B. Étude avec amortissement

$\Delta < 0$ pour $\Delta = b^2 - 4c$

$0 < b < 1$

$0 < b^2 < 1$

prendre $c > 0{,}25$

pr $\Delta < 0$

Dans cette partie, on suppose $b > 0$.

On admet que, dans ce cas, la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{b}{2}x} \sin(\omega x)$ avec $\omega = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$. $= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

1. Modifier le curseur b. Quel est l'effet de l'amortissement ?

2. **a.** Représenter sur le fichier GeoGebra les fonctions g et h définies, pour tout x réel, par :

$g(x) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{b}{2}x}$ et $h(x) = -g(x)$. Qu'observe-t-on ?

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

b. Justifier que, pour tout x réel, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

C. Intervention d'une force extérieure périodique

Les séismes provoquent des vibrations forcées.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E_2) : y'' + by' + cy = \sin x$.

Entrer dans la barre de saisie de GeoGebra :

RésolEquaDiff[b,c,sin(x),0,0,1,100,0.1]

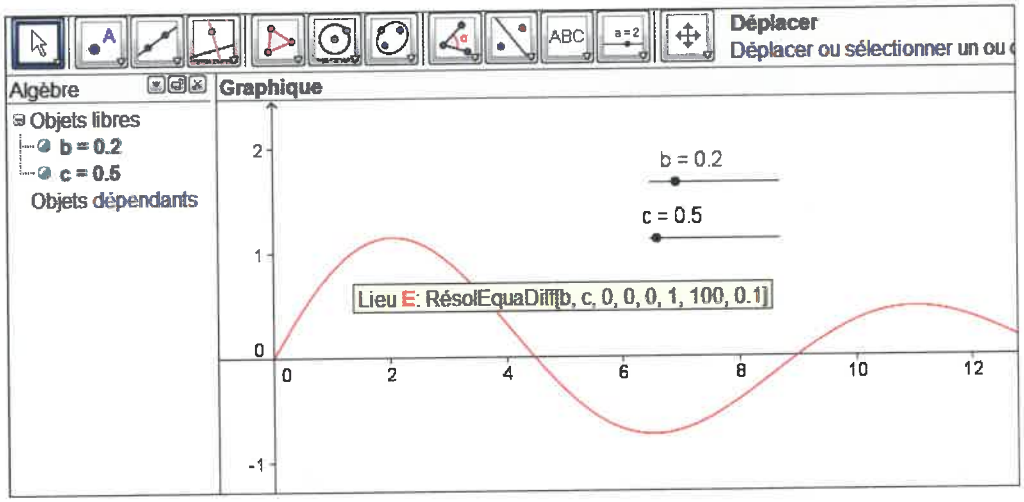
qui représente sur l'intervalle [0, 100], avec un pas de calcul de 0,1, la solution φ de (E_2) vérifiant les conditions initiales $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

1. Régler les curseurs à $b = 0{,}2$ et $c = 0{,}5$. Décrire le comportement de φ.

2. Régler les curseurs à $b = 0{,}2$ et $c = 1$. Décrire le comportement de φ.

Que se passe-t-il si l'on augmente b ?

Pour aller plus loin : un simulateur de séismes est accessible à l'adresse http://sstl.cee.illinois.edu/java/sin.html.



TP 5 Résoudre de manière approchée une équation différentielle avec Scilab ou Python

Un TP pour approfondir.

Méthode d'Euler

Il n'est pas toujours possible d'obtenir la forme explicite des solutions d'une équation différentielle. On utilise alors des méthodes numériques de résolution approchée. La méthode d'Euler est l'algorithme le plus simple. Cet exercice propose de le mettre en œuvre sur un exemple que l'on sait résoudre explicitement, de façon à en évaluer la performance.

Soit a un nombre réel non nul. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + ay = 0.$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, 2]$, et y' la dérivée de y. On cherche à déterminer la fonction f, solution sur $[0, 2]$ de l'équation différentielle (E) et vérifiant la condition initiale $f(0) = c$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on partage l'intervalle $[0, 2]$ en n intervalles avec un pas $\frac{1}{n}$.

On construit n points $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n$ de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, à partir du point initial $\mathrm{M}_1(0, c)$ et en passant de M_{k-1} à M_k en utilisant un coefficient directeur proche de $f'(x_{k-1})$.

1. Montrer que, pour k allant de 2 à n, $f'(x_{k-1}) = -af(x_{k-1})$.

On peut supposer que, pour k allant de 2 à n, $f(x_k) \approx y_k$ d'où $f'(x_{k-1}) \approx -ay_{k-1}$. On construit les points M_k en posant :

$x_1 = 0$ et $y_1 = c$ et, pour k allant de 2 à n, $x_k = x_{k-1} + \frac{2}{n}$ et $y_k = y_{k-1} - ay_{k-1} \times \frac{2}{n}$.

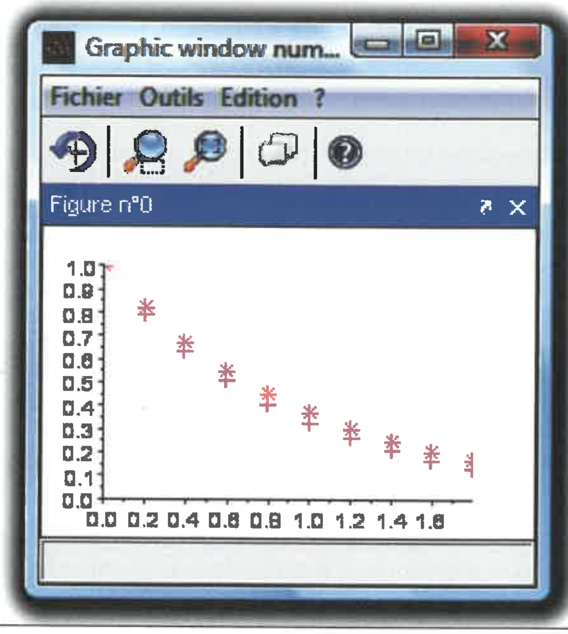
2. On se place dans le cas $a = 1$ et $c = 1$.

a. Donner l'expression de la solution f (on sait résoudre l'équation (E)).

b. Implanter le programme suivant dans Scilab ou Python et l'exécuter pour $n = 10$ puis pour $n = 100$.
Comparer les graphiques obtenus.

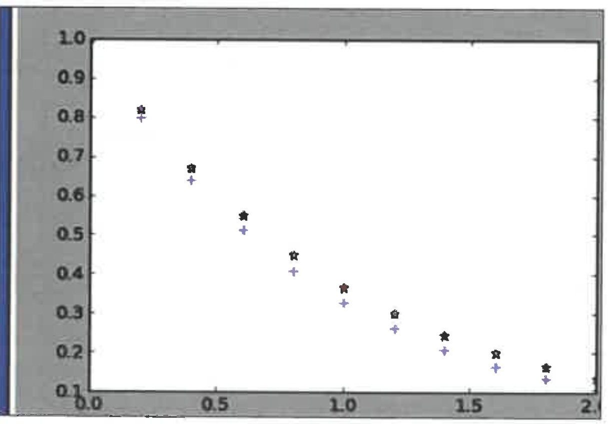
Scilab :

```
n=input("nombre de subdivisions n = ")
function y=f(x)
    y=exp(-x)
endfunction
x(1)=0
y(1)=1
for k=2:n
    x(k)=x(k-1)+2/n
    y(k)=(1-2/n)*y(k-1)
end
clf
plot(x,y,"+",x,f,"*r")
```



Python :

```python
def euler(n):
    import matplotlib.pyplot as plt
    import numpy as np
    x=[2*i/n for i in range(n+1)]
    f=[np.exp(-2*i/n) for i in range(n+1)]
    y=[1]
    for k in range(1,n+1):
        y.append((1-2/n)*y[k-1])
    plt.clf()
    plt.plot(x,y,'b+',x,f,'r*')
    plt.show()
```



3. **a.** Modifier le programme de façon à pouvoir à pouvoir introduire une valeur modifiable de a et de c.

b. Exécuter votre programme pour $a = 2$, $c = 5$ et $n = 100$.

L'exercice 67 peut être également traité comme un TP « pour approfondir ».

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES	Exercices corrigés
• Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Résoudre une équation différentielle du premier ordre : à la main dans les cas simples ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans tous les cas.	1, 2, 8, 12, 18, 26, 27, 30, 33, 34, 72, 75, 78, 79, 84
Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée : à la main, dans les cas simples ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans tous les cas.	1, 2, 8, 12, 18, 26, 27, 30, 33, 34, 73, 78, 79, 84
Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle de premier ordre.	17, 84
• Nombres complexes	
Résoudre une équation du second degré à coefficients réels.	47
• Équations différentielles linéaires du second ordre	
Résoudre une équation différentielle du second ordre : à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans tous les cas.	49, 50, 55, 58, 64, 76, 86
Déterminer la solution vérifiant des conditions initiales données : à la main, dans les cas simples, ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans tous les cas.	48, 49, 58, 64, 86
Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle du second ordre.	67

Résoudre une équation différentielle de la forme $ay' + by = c(t)$

Cette partie concerne les BTS des trois groupements B, C et D.

▶ *Pour l'ensemble des exercices suivants vérifier les résultats obtenus avec un logiciel de calcul formel.* TICE

Équations de la forme $ay' + by = 0$

▶ *Les solutions de l'équation différentielle : $ay' + by = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t}$, où C est une constante réelle quelconque.*

1. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 1$.

CORRIGÉ P. 338

2. ++

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution f vérifiant $f(\ln 4) = 1$.

CORRIGÉ P. 338

3. + La fonction est x

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et x' la dérivée de x.

a) $x' - 4x = 0$; b) $\frac{1}{2}x' = x$.

4. + La variable est x

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

a) $y' - 2y = 0$; b) $y' = -\frac{y}{4}$; c) $10y' - 2y = 0$.

5. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{3}y = 0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f'(0) = \frac{1}{3}$.

6. +++

Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).

2. a) Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point A $(\ln 9, 1)$.

b) Déterminer la dérivée de f et en déduire le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

3. Montrer que la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ est une autre solution de (E).

7. ++ Avec du calcul intégral

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+2y=0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution f dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ passe par le point $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3. Calculer le nombre réel a tel que : $\int_0^a f(x)dx=-2$.

8. +++ Équation de la forme $y'+ay=0$, lectures graphiques

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'-2y=0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

2. On note f la solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $f(0)=1$ et g la solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $g(0)=2$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x)=e^{2x}$.

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

3. Sur l'annexe, à rendre avec la copie, figurent les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y=2$.

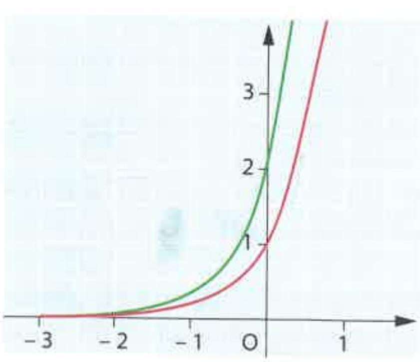
Cette droite coupe respectivement les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ aux points A et B.

a) Tracer la droite Δ et placer les points A et B.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite T tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ et celui de la droite T' tangente en B à la courbe $\mathscr{C}'$.

c) Quelle remarque peut-on faire sur les deux tangentes T et T' ?

Annexe (à rendre avec la copie)



CORRIGÉ P. 338

9. +++ Résolution d'une équation différentielle et calcul d'aire

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E) :

$4y'+3y=0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

b) Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f'(0)=-6$.

2. Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I=[0, 4]$ par :

$$g(x)=8e^{\frac{-3}{4}x}.$$

a) Étudier les variations de la fonction g sur I et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

b) Déterminer la valeur exacte de l'aire A en cm^2 de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées x et y telles que : $0\le x\le 4$ et $0\le y\le f(x)$.

Donner la valeur approchée de A arrondie au mm^2.

10. ++ Problème de température

1. On considère l'équation différentielle

(E) $y'+2\times10^{-4}y=0$ où y est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0,+\infty[$.

a) Résoudre cette équation différentielle.

b) Déterminer la solution f qui vérifie la condition initiale $f(0)=-80$.

2. On chauffe un liquide dans une cuve. On note $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t, exprimé en secondes. La fonction g est définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=f(t)+100$, où f est la solution déterminée au **1.b)**.

a) Exprimer $g(t)$ en fonction de t.

b) Calculer $g(0)$, la température du liquide à l'instant $t=0$.

c) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85 °C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

11. +++ Pollution

Après des violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.

On admet que le volume de pesticides en litres dans ce bassin est une fonction du temps définie par $g(t) = f(t) + 1\,200$, t étant le temps en minutes et f étant une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 5 \times 10^{-3}y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

En déduire l'expression générale de $g(t)$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume des pesticides dans l'eau est nul.

Déterminer la fonction g satisfaisant à cette condition.

3. Le corps médical considère que des affections cutanées peuvent survenir dès que le taux de pesticides dans le bassin atteint 2 %.

Au bout de combien de minutes ce taux est-il atteint ? (On donnera d'abord le résultat exact puis la valeur approchée arrondie à une minute.)

▶ *Les exercices 12 à 14 sont bien adaptés au groupement D.*

12. ++ Production industrielle de pénicilline

Lors de la production industrielle de pénicilline G par la moisissure *Penicilium chrysogenum*, l'évolution de la biomasse de moisissure dans le fermenteur est suivie par des déterminations de masse sèche.

On admet que la quantité X de biomasse, en grammes par litre, sur un intervalle de temps donné est solution de l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = kX$, où k est une constante réelle strictement positive, et où t est le temps exprimé en heures.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Exprimer X en fonction de t, sachant que :

$X(0) = 2{,}7$ et $X(20) = 24$.

13. ++ Culture bactérienne en milieu liquide

Dans cet exercice, on étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide. On suppose que le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t vérifie l'équation différentielle suivante $(E) : N'(t) = -\,0{,}04N(t)$ où t est exprimé en heures.

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition $N(0) = 10^4$.

3. Déterminer t pour que le nombre de bactéries de la culture soit inférieur ou égal à 8 000.

14. +++ Croissance d'une population

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $y' = 0{,}12y$.

1. Résoudre cette équation différentielle où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle prenant la valeur 3,5 pour la valeur 0 de la variable.

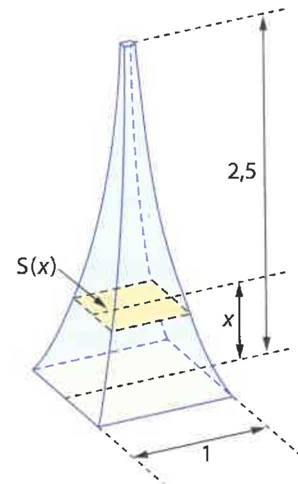
B. *Application*

Dans un milieu donné, on appelle N le nombre de cellules d'une population en développement. N varie en fonction du temps t selon la relation $N = f(t) = 3{,}5\mathrm{e}^{0{,}12t}$, où N est exprimé en millions de cellules et t en heures.

Calculer l'instant t (arrondi au centième) où le milieu donné contiendra une population de 6 millions de cellules.

15. +++ Solide d'égale résistance

Un solide **d'égale résistance** est un solide où chaque point est soumis à la même pression, quelle que soit la section considérée de celui-ci.



On montre, en mécanique, que pour qu'un solide soit d'égale résistance, l'aire $S(x)$ de sa section à la hauteur x, exprimée en mètres, doit vérifier la condition suivante, notée (E) :

$S'(x) + \frac{a}{R}S(x) = 0$ où S' désigne la fonction dérivée de la fonction S, a le poids d'une unité de volume, et R la pression souhaitée en chaque point du solide.

La tour Eiffel a été construite sur ce principe.

On souhaite réaliser une maquette de la tour Eiffel dans un matériau pour lequel on a établi que $\frac{a}{R} = 2$.

La base carrée aura pour aire 1 m^2 et la hauteur sera 2,5 m.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Avec les valeurs numériques données :

a) Justifier que $S(0) = 1$. Cette condition sera notée (F).

b) Écrire la condition (E).

2. On considère les fonctions numériques f, g et h définies pour tout nombre réel x par :

$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $\quad g(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$, $\quad h(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$.

Déterminer les fonctions dérivées f', g' et h' des fonctions f, g et h.

3. Parmi les trois fonctions définies à la question **2.** :

a) Y en a-t-il qui vérifient la condition (E) ? Justifier.

b) Y en a-t-il qui vérifient la condition (F) ? Justifier.

c) Y en a-t-il qui vérifient les conditions (E) et (F) ?

Partie B

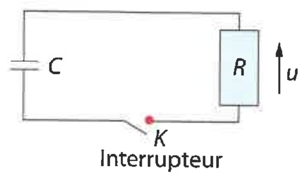
On considère que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2{,}5]$, on a $S(x) = e^{-2x}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction S sur $[0 ; 2{,}5]$ et dresser son tableau de variation.

2. Résoudre l'équation $S(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0 ; 2{,}5]$.

3. À partir de quelle hauteur l'aire de la section de la maquette devient-elle inférieure ou égale à la moitié de l'aire de sa base ? Donner la valeur exacte de cette hauteur, puis sa valeur arrondie au centimètre. Justifier.

16. +++ Circuit électrique



Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R. Pour $t \geq 0$, on sait que la tension u est une fonction du temps t, exprimé en secondes, solution de l'équation différentielle (E) :

$$RC\,u'(t) + u(t) = 0.$$

On prend $C = 15 \cdot 10^{-5}$ farads et $R = 2 \cdot 10^4$ ohms.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la fonction u solution de (E) vérifiant la condition initiale : $u(t_0) = u_0 = 10$ volts.

2. À partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ vérifiera :

$u(t) \leq \frac{1}{10} u_0$.

On donnera la valeur exacte de t_1, puis sa valeur arrondie au dixième de seconde.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction u entre les instants t_0 et t_1.

On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au dixième de volt.

17. +++ Représenter à l'aide d'un logiciel des courbes représentatives d'une solution

TICE

1. Étude d'une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle :

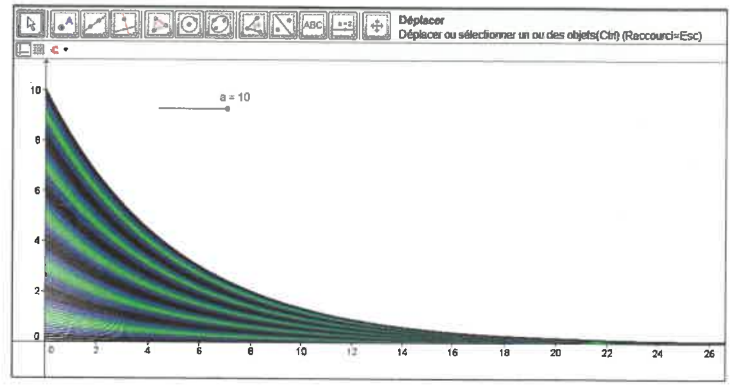
$$(E)\ y' = -0{,}2\,y$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la dérivée de y.

La réalisation d'un fichier GeoGebra permet de visualiser la famille des courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle (E).

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 10.

On désigne par f la fonction définie sur $[0, +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant la condition initiale : $f(0) = a$.



Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément 0,1.

Tracer une représentation de la fonction f sur l'intervalle [0, 30] avec un pas de calcul 0,01 en entrant dans la barre de saisie RésolEquaDiff[-0.2*y,0,a,30,0.01].

Par un clic droite sur la courbe, activer la trace et créer des couleurs dynamiques en faisant Avancé/Couleurs dynamiques Rouge : 0 ; Vert : a et Bleu : 2a.

Balayer les valeurs de a puis visualiser les courbes obtenues. À quoi correspond, graphiquement, la condition initiale $f(0) = a$?

2. Application à la puissance des fibres optiques

Dans cette partie, les puissances sont exprimées en mW et les longueurs en km.

Pour un signal d'entrée de puissance a fixée, la puissance lumineuse à la sortie d'une fibre optique dépend de sa longueur x. On considère une fibre optique pour laquelle la perte relative de puissance lumineuse est de 20 %. On peut modéliser la puissance $f(x)$ de sortie en fonction de la longueur x comme la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) précédente vérifiant la condition initiale $f(0) = a$.

a) On suppose que $a = 5$, déterminer l'expression de $f(x)$.

Vérifier votre réponse en saisissant l'expression trouvée dans GeoGebra.

b) Déterminer la longueur de fibre à partir de laquelle la puissance du signal de sortie sera inférieure à 1 mW.

Contrôler votre réponse à l'aide de GeoGebra.

CORRIGÉ P. 339

Équations de la forme $ay' + by = c(t)$

La fonction c est constante (exercices 18 à 25)

▶ *Dans le cas où la fonction c est une constante, on cherche une solution particulière constante.*

18. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

La modélisation d'un phénomène physique conduit à l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = \frac{1}{2}$, où y est une fonc-

EXERCICES

tion de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $2y' + y = 0$.

2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution φ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

CORRIGÉ P. 339

19. ++ Résolution

Résoudre chacune des équations différentielles (E) suivantes où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

> **Méthode :** *Résoudre d'abord l'équation « sans second membre » (E_0) : $ay' + by = 0$ puis chercher une solution particulière constante de l'équation (E) « avec second membre ».*

a) $y' - 3y = 1$; b) $y' + 2y = 2$; c) $2y' - y = 3$.

20. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

Soit (E) l'équation différentielle : $2x' + x = 2$, où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et x' sa fonction dérivée.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $2x' + x = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 1$.

21. ++ Eau douce et eau de mer

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0{,}12\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.

À la suite d'un accident regrettable, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.

On note s la salinité de l'eau du réservoir ; s est une fonction du temps t (exprimé en minutes).

On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E) : s'(t) + 0{,}01\ s(t) = 0{,}39.$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).

$$(E_1) : s'(t) + 0{,}01\ s(t) = 0.$$

b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).

c) Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Considérant qu'à l'instant $t = 0$ où débute l'incident la salinité de l'eau du réservoir était de $0{,}12\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$, montrer que l'on a : $s(t) = 39 - 38{,}88\ e^{-0{,}01t}$.

3. Déduire du résultat précédent la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2}.

4. De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée si, pour réduire les conséquences de l'incident, la salinité doit rester inférieure à $3{,}9\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$?

22. ++ La qualité de l'eau

À la suite de violents orages, des eaux de ruissellement polluées à 4 % par des triazines (pesticides très utilisés), se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin un volume constant de 30 000 litres d'eau.

On admet que le volume de triazines dans l'eau du bassin à l'instant t ($t \geq 0$) est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'(t) + 5 \times 10^{-3}\ y(t) = 6.$$

1. a) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y'(t) + 5 \times 10^{-3}\ y(t) = 0.$$

b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).

c) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation (E).

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume de triazines dans l'eau du bassin est nul.

Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), satisfaisant à cette condition.

3. Les baigneurs peuvent souffrir d'affections cutanées dès que le taux de triazines dans l'eau du bassin atteint 2 %. Déterminer l'instant auquel ce taux est atteint.

23. +++ Trois équations différentielles issues de situations de transfert d'énergie

Dans chacun des cas suivants, y (ou T) est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' (ou T') est la fonction dérivée de y (ou de T). Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $y' + 3{,}2 \times 10^{-7} y = 6{,}56 \times 10^{-6}$;
$f(0) = 50$.

b) $625T' + 1{,}5T = 7{,}5$;
$T(0) = 400$.

c) $y' = -(y - 18)$;
$f(0) = 100$.

▶ *Pour résoudre l'équation différentielle (E), utiliser la méthode décrite à l'exercice* **19**.

24. +++ Établissement d'un courant dans une bobine

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 10y = 6$ où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. a) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 10y = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

B. *Établissement d'un courant dans une bobine*

Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à la date $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts). L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. À la date $t = 0$ l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle : $Li' + Ri = E$.

Valeurs numériques. Dans toute la suite, on prend $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$, $E = 3$.

1. Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.

2. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} i(t)$.

25. ++ Charge d'un condensateur

L'étude de la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur conduit à écrire l'équation différentielle (E) : $u'(t) + 10^3 u(t) = 5 \times 10^3$ avec $t \geq 0$.

1. En procédant comme à l'exercice **19**, résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution satisfaisant à la condition initiale $u(0) = 0$.

La fonction *c* n'est pas constante (exercices **26** à **38**).

26. +++ Résolution avec le logiciel Maxima

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^x - 2x$ où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous une copie d'écran obtenue avec le logiciel Maxima.

```
(%i1) ode2('diff(y,x)-y=0,y,x);
(%o1) y=%c %e^x

(%i2) g(x):=x*%e^x+2*x+2;
(%o2) g(x):=x %e^x+2 x+2

(%i3) diff(g(x),x);
(%o3) x %e^x+%e^x+2

(%i4) ode2('diff(y,x)-y=%e^x-2*x,y,x);
(%o4) y=(-2(-x-1)%e^-x+x+%c)%e^x

(%i5) ic1(%, x=0, y=3);
(%o5) y=(x+1)%e^x+2 x+2
```

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y' - y = 0.$$

Justifier l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E_0), fournie par la sortie logicielle notée (%o1).

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 2x + 2$ est une solution particulière de (E).

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). Vérifier que votre réponse correspond à la sortie logicielle notée (%o4).

4. On cherche la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = 3$. Vérifier que la solution cherchée est fournie par la sortie logicielle (%o5).

CORRIGÉ P. 339

27. ++ Une solution particulière est donnée

Soit (E) l'équation différentielle :

$y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle y est une fonction, dérivable sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle x et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

CORRIGÉ P. 339

28. ++ Avec un polynôme

On considère l'équation différentielle (E) :

$y' - y = x - 1$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Montrer que la fonction g, définie par : $g(x) = -x$ est solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' - y = 0$.

3. En déduire les solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f qui vérifie $f(1) = 0$.

29. ++ Avec un polynôme *(suite)*

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = -2x^2 - 2x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\varphi(x) = (x+1)^2$ est une solution particulière de (E).

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) :
$y' - 2y = 0$.

3. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution de l'équation (E) qui s'annule pour $x = 0$.

30. +++ La forme de la solution particulière est donnée

Soit (E) l'équation différentielle :

$$2x' + 3x = 6t^2 - 7t - 7$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$2x' + 3x = 0.$$

2. Déterminer trois constantes a, b, c telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \mathrm{a}t^2 + \mathrm{b}t + \mathrm{c}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

CORRIGÉ P. 339

31. ++ On cherche une fonction affine

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $(H) : y' + y = 0$.

2. Déterminer les deux nombres a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E).

3. a) Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-x} + x - 1.$$

Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

b) Déterminer le nombre réel k pour que $f(0) = 0$.

4. Dans cette question, on prend $k = 1$.

a) Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0, 2]$.

b) En déduire la valeur approchée de m arrondie à 10^{-2}.

32. ++ On cherche une fonction polynôme

On considère l'équation différentielle (E) :

$$6y' - 2y = 4x^2 - 5,$$

où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$6y' - 2y = 0.$$

2. Déterminer une fonction polynôme du second degré, h, solution de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

33. ++ Une solution particulière est donnée

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + y = 0.$$

b) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = xe^{-x}$$

est une solution particulière de (E).

c) En déduire la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution f de (E) prenant la valeur 3 pour $x = 0$.

CORRIGÉ P. 340

34. ++ La forme d'une solution particulière est donnée

On considère l'équation différentielle (E) :
$y' + 3y = 6\,e^{-x}$, où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0) : y' + 3y = 0$.

2. Déterminer une solution particulière g de (E), définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\,e^{-x}$, où a désigne un nombre réel.

3. Déterminer la solution générale de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

CORRIGÉ P. 340

35. ++ Avec une exponentielle

Soit (E) l'équation différentielle

$$x' - 4x = 2e^{3t}$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$x' - 4x = 0.$$

2. Déterminer une constante réelle k telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = k\,e^{3t}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

36. ++ **La forme d'une solution particulière est donnée**

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad 4v' + v = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

où v est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $[0, +\infty]$, et v' est la dérivée de v.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $4v' + v = 0$.

2. Déterminer les constantes réelles A et B pour que la fonction u telle que : $u(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Résoudre l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière v_0 de l'équation différentielle (E) vérifiant $v_0(0) = 0$.

37. ++ **Plutôt pour le groupement D**

On fait absorber une substance S, dosée à 2 mg de principe actif, à un animal. Cette substance libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $f(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$), donné en heures).

Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}5y = 0{,}5e^{-0{,}5t}$$

et qu'elle vérifie : $f(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}5y = 0.$$

2. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction :

$$t \mapsto \alpha t\, e^{-0{,}5t}$$

soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution générale de (E). En déduire la solution de (E) satisfaisant la condition initiale.

38. +++ **La vitesse d'un parachute**

La trajectoire suivie par un objet suspendu à un parachute est un axe vertical noté $(O\,;\,\vec{i})$.

À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t)\vec{i}$ où v est une fonction de la variable réelle positive t.

Dans les conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad mv'(t) + kv(t) = mg$$

où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. a) Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (E) ;

b) Montrer que les fonctions solutions de (E) sont définies pour tout nombre réel positif t par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.

2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8$ kg ; $g = 10$ ms^{-2} et $k = 25$ unités S. I.

a) Donner la fonction particulière v_1 solution de l'équation différentielle (E) correspondant à une vitesse initiale $v_1(0)$ de 5 ms^{-1}.

b) Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (E) correspondant à une vitesse initiale nulle.

c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

d) Donner la fonction particulière v_3 solution de l'équation différentielle (E) correspondant à une vitesse initiale $v_3(0)$ de 3,2 ms^{-1}.

39. ++ **Avec un cosinus**

Soit (E) l'équation différentielle

$$3x' - 2x = -20\cos 2t$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$3x' - 2x = 0.$$

2. Déterminer deux constantes réelles A et B telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

▶ *On peut se reporter à l'exemple 3 du paragraphe* **1C** *du cours.*

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = f(x)$

▶ **Indication :** *les solutions de l'équation différentielle $y' = f(x)$ sont les primitives de la fonction f.*

40. +

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle y' est la fonction dérivée d'une fonction y de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) $y' = x^2 + x + 1$; **b)** $y' = \sin 3x$.

EXERCICES

41. +

Déterminer la solution f, telle que $f(1) = 0$, de l'équation différentielle suivante dans laquelle y' est la fonction dérivée d'une fonction y de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) $y' = x + 3$; **b)** $y' = x^2 - 1$; **c)** $y' = e^x$.

42. +++ **Développement durable : capteur solaire**

Un ballon de stockage d'eau de 500 litres est chauffé par un capteur solaire d'aire 10 m^2 situé sur le toit d'une maison.

On s'intéresse à une période d'exposition au soleil de 10 heures consécutives, dans une région où la température extérieure est de 0 °C.

On désigne par $T(t)$ la température de l'eau dans le ballon à l'instant t exprimé en secondes.

On a $0 \leq t \leq 36\,000$.

On admet que la fonction T est solution de l'équation différentielle du premier ordre (E) :

$$4\,185 \times T'(t) = 4{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right).$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution de (E) qui vérifient la condition initiale $T(0) = 19$.

(Avant la période de chauffe, l'eau est à 19 °C.)

Arrondir à 10^{-1} la constante obtenue.

3. Déterminer la température de l'eau :

a) après 5 heures d'exposition au soleil ;

b) après 10 heures d'exposition au soleil.

Nombres complexes

Cette partie concerne les trois groupements B, C et D à l'exception d'Analyses de biologie médicale, Bioanalyses et contrôles, Biotechnologie.

Calculer dans $\mathbb{C}$

▶ *On peut vérifier les calculs avec une calculatrice.*

43. + **Sommes et produits dans $\mathbb{C}$**

Soit les nombres complexes $z = 2 + 3i$ et $z' = -1 + i$; écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $a + bi$:

a) $z + z'$; **b)** $2z - 3z'$; **c)** $z \times z'$;

d) z'^2 ; **e)** z^3 ; **f)** $(1 + z)(1 + z')$.

CORRIGÉ P. 340

44. + **Sommes et produits**

Soit les nombres complexes $z = 4 - 2i$ et $z' = -2 - 5i$; mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $a + bi$:

a) $z + z'$; **b)** $2z - 4z'$; **c)** $z \times z'$;

d) z'^2 ; **e)** z^3 ; **f)** $(-2 - z)(3 - 4z')$.

45. + **Développer**

Développer et mettre sous la forme algébrique $a + bi$ les nombres complexes :

a) $(3 + i)^2$; **b)** $(-4 - i)^2$; **c)** $(4 - 2i)(4 + 2i)$.

▶ **Rappel :** *dans $\mathbb{C}$ on dispose des mêmes produits remarquables que dans $\mathbb{R}$.*

46. + **Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$**

Méthode : *pour mettre un quotient de nombres complexes sous la forme a + bi, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le nombre complexe conjugué du dénominateur.*

Soit les nombres complexes $z = 2 - 3i$ et $z' = -4 - i$; mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $a + bi$:

a) $\dfrac{1}{z}$; **b)** $\dfrac{1}{z'}$; **c)** $\dfrac{z}{z'}$;

d) $\dfrac{1}{z^2}$; **e)** $\dfrac{1+z}{1-z}$.

CORRIGÉ P. 340

Équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

47. + **Résolution**

En appliquant les formules, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 + 2z + 2 = 0$. **2.** $r^2 + 2r + 65 = 0$.

3. $r^2 + 4r + 4 = 0$. **4.** $z^2 - 3z - 4 = 0$.

▶ **Remarque :** *Les fonctions « solve » et « factor » des calculatrices permettent directement (sans utiliser de formules) de résoudre des équations.*

CORRIGÉ P. 340

48. + **L'inconnue est notée z ou r**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -4$; **b)** $z^2 = -5$;

c) $z^2 = 7$; **d)** $z^2 - 4z + 8 = 0$;

e) $r^2 - \dfrac{1}{2}r + \dfrac{1}{8} = 0$; **f)** $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$;

g) $r^2 - 3r + 3 = 0$; **h)** $r^2 + 8r + 20 = 0$.

Résoudre une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = d(t)$

Cette partie concerne les trois groupements B, C et D à l'exception d'Analyses de biologie médicale, Bioanalyses et contrôles, Biotechnologie.

▶ *Pour l'ensemble des exercices suivants, vérifier les solutions obtenues avec un logiciel de calcul formel.*

Équations de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.
On dispose du même résultat avec la variable x.

49. ++

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 16y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' la dérivée seconde de y.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant :

$$f(0) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

CORRIGÉ P. 340

50. ++

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' la fonction dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

▶ **Conseil :** *pour résoudre, mettre (E) sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$.*

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la fonction g solution de l'équation différentielle (E) qui satisfait aux conditions suivantes :

- la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
- la tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.

CORRIGÉ P. 341

51. +

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' la dérivée seconde de y.

a) $y'' + 16y = 0$; **b)** $9y'' + y = 0$;
c) $4y'' + 25y = 0$; **d)** $4y'' + 169y = 0$.

52. ++

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' la dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et $f'(0) = 2\sqrt{3}$.

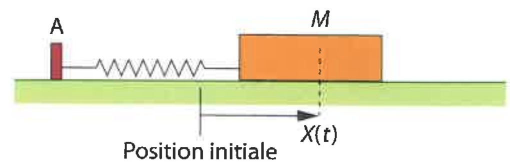
53. ++ Ressort

On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet M, qui peut coulisser sans frottement sur un plan. Le point A, où est accrochée l'autre extrémité du ressort, est fixe.

Après avoir été écarté de sa position d'équilibre, l'objet est lâché avec une vitesse initiale.

On repère l'objet par son abscisse X qui est fonction du temps t et qui mesure l'écart entre la position à un instant t et sa position initiale.

On admet qu'à un instant t, la fonction X est solution de l'équation différentielle (E) : $X'' + 100X = 0$.

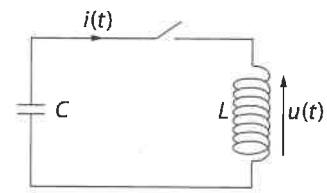


1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'expression de la solution particulière X de (E) qui vérifie les conditions initiales : $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 1$.

54. +++ Circuit LC avec Maxima

Un circuit est composé d'une bobine d'inductance L, mesurée en henrys, d'un condensateur de capacité C, mesurée en farads, et d'un interrupteur. L'unité de temps est la seconde.



On sait que : $C = 125 \cdot 10^{-6}$ et $L = 200 \cdot 10^{-3}$.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur ; le circuit est alors parcouru par un courant.

On désigne par :
$q(t)$ la charge, mesurée en coulombs, du condensateur,
$i(t)$ l'intensité, mesurée en ampères, du courant qui parcourt le circuit, et $u(t)$ la tension, mesurée en volts, aux bornes de la bobine à l'instant t.

À l'instant $t = 0$, la charge du condensateur, mesurée en coulombs, est 10^{-3} et l'intensité du courant est nulle. On en déduit les conditions initiales suivantes :
$q(0) = 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

On admet que la charge du condensateur est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + \frac{1}{LC} y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, et y'' la dérivée seconde de y.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, où (%i1) indique l'entrée n° 1 et (%o1) la sortie n° 1.

Dans cet exercice, on peut utiliser ces résultats **sans justification**.

EXERCICES

```
(%i1) C:125E-6;
(%o1) 1.25 10^-4

(%i2) L:200E-3;
(%o2) 0.2

(%i3) ode2('diff(y,t,2)+(1/(L*C))*y=0, y, t);
rat: replaced 40000.0 by 40000/1 = 40000.0
(%o3) y=%k1 sin(200 t)+%k2 cos(200 t)

(%i4) ic2(%, t=0, y=1E-3, 'diff(y,x)=0);
rat: replaced 0.001 by 1/1000 = 0.001
(%o4) y=cos(200 t)/1000

(%i5) define(q(t),rhs(%));
(%o5) q(t):=cos(200 t)/1000

(%i6) define(i(t),-diff(q(t),t));
(%o6) i(t):=sin(200 t)/5

(%i7) define(u(t),-L*diff(i(t),t));
(%o7) u(t):=-8.0 cos(200 t)

(%i8) (100/%pi)*integrate((u(t))^2,t,0,%pi/100);
(%o8) 32.0
```

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. Donner, pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, une expression de $q(t)$.

3. Quelle relation existe-t-il entre $i(t)$ et $q(t)$, pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$?

4. Quelle relation existe-t-il entre $u(t)$ et $i(t)$, pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$?

5. La tension efficace U_{eff} aux bornes de la bobine est définie par :

$$U_{eff}^2 = \frac{100}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{100}} [u(t)]^2 dt.$$

Déterminer la valeur exacte de U_{eff}

Équations de la forme ay'' + by' + cy = 0

55. ++ **Résoudre une équation différentielle de la forme ay'' + by' + cy = 0 où a, b, c sont des constantes, avec a ≠ 0**

Résoudre l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$;
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
c) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

CORRIGÉ P. 341

56. +

Résoudre l'équation différentielle (E) où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

a) $(E) : y'' + 3y' + 2y = 0$;
b) $(E) : y'' - y = 0$;
c) $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$;
d) $(E) : y'' - 2y' + y = 0$;
e) $(E) : y'' - 4y' + 4y = 0$;
f) $(E) : y'' - 4y' + 8y = 0$;
g) $(E) : y'' - 2y' + 2y = 0$.

57. +

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution f qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

58. + **Oscillations amorties**

L'écart à sa position d'équilibre d'une masse oscillant sur un fluide élastique est une fonction du temps. Cette fonction définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ vérifie l'équation différentielle (dite des oscillations amorties) (E) :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

y est exprimé en centimètres, t est exprimé en secondes.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière qui s'annule pour $t = 0$ et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

CORRIGÉ P. 341

59. ++ **Le second membre est constant**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - 3y' + 2y = 4$$

dans laquelle y est une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y' est la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde de y.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant les deux conditions initiales :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

60. +++ **Une équation différentielle d'ordre 2 avec Maxima**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = x$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable x, où y' est la fonction dérivée de y et où y'' est la fonction dérivée seconde de y.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) E:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x)+y=x;
```
$$\text{(\%o1)}\quad \frac{d^2}{dx^2}y+2\left(\frac{d}{dx}y\right)+y=x$$

```
(%i2) E0:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x)+y=0;
```
$$\text{(\%o2)}\quad \frac{d^2}{dx^2}y+2\left(\frac{d}{dx}y\right)+y=0$$

```
(%i3) ode2(E0,y,x);
```
$$\text{(\%o3)}\quad y=(\%k2\ x+\%k1)\,\%e^{-x}$$

```
(%i4) ode2(E,y,x);
```
$$\text{(\%o4)}\quad y=(\%k2\ x+\%k1)\,\%e^{-x}+x-2$$

```
(%i5) ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=0);
```
$$\text{(\%o5)}\quad y=(x+2)\,\%e^{-x}+x-2$$

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E_0)\quad y''+2\,y'+y=0.$$

Justifier l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E_0), fournie par la sortie logicielle notée (%o3).

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x-2$ est une solution de (E).

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). Vérifier que votre réponse correspond à la sortie logicielle notée (%o4).

4. On recherche la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet, en ce point, l'axe des abscisses pour tangente. Justifier que l'entrée logicielle notée (%i5) permet de répondre à ces conditions graphiques.

Donner une expression de $f(x)$.

61. + Avec un polynôme

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y''-3y'+2y=2x-1$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la dérivée de y et y'' la dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation $(E_0) : y''-3y'+2y=0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+1$ est solution de (E).

3. En déduire la solution générale (ou l'ensemble des solutions) de (E).

62. ++ La forme d'une solution particulière est donnée

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\quad x''-2x'-3x=3t^2+1$$

où x est une fonction numérique de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, où x' est la fonction dérivée de x et où x'' est la fonction dérivée seconde de x.

1. Résoudre l'équation $(E') : x''-2x'-3x=0$.

2. Chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme d'une fonction polynôme du second degré.

3. En déduire la solution générale de (E).

63. ++ Une solution particulière définie par deux points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y''+4y'+4y=e^{-2x}$$

y étant une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') :

$$y''+4y'+4y=0.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

est une solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative passe par les points $I\,(-1,0)$ et $J\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

64. ++ Fonctions trigonométriques

L'étude d'un système mécanique soumis à un amortissement et à une excitation entretenue, conduit à la résolution de l'équation différentielle (E) suivante où l'inconnue y est une fonction du temps t, définie et deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$:

$$y''+2y'+2y=10\cos 2t.$$

1. Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle (E_1) :

$$y''+2y'+2y=0.$$

2. Montrer que la fonction g, définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$g(t)=2\sin 2t-\cos 2t,$$

est une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f_1, solution de l'équation (E), vérifiant les conditions initiales $f_1(0)=0$ et $f_1'(0)=2$.

CORRIGÉ P. 341

65. ++ Avec des fonctions trigonométriques

L'objectif de cet exercice est la recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) :

$$y''+4y'+13y=4\sin t$$

qui représente l'intensité du courant dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale.

1. Déterminer la solution générale sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y''+4y'+13y=0.$$

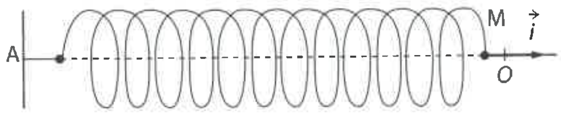
2. Déterminer les constantes réelles A et B pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=A\cos t+B\sin t$ soit une solution de (E).

3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de (E) telle que :

$$f(0)=0 \text{ et } f'(0)=\frac{3}{10}.$$

66. ++ Aucune connaissance de physique n'est nécessaire



Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M. L'abscisse du point M varie en fonction du temps t.

On admet que l'abscisse du point M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ vérifie l'équation différentielle du second ordre $(E) : y'' + 9y = 8 \sin t$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et y'' la fonction dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 9y = 0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = A \cdot \cos 3t + B \cdot \sin 3t + \sin t$ (où A et B sont des réels) est une solution de l'équation différentielle (E).

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le ressort étant compressé, le mobile passe en O avec une vitesse de $4\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On considère la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = A\cos 3t + B\sin 3t + \sin t$.

Déterminer A et B pour que h soit la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 4$.

67. +++ Avoir du ressort avec GeoGebra

TICE

Cet exercice peut être traité en TP Tice.

1. Étude d'une équation différentielle d'ordre 2

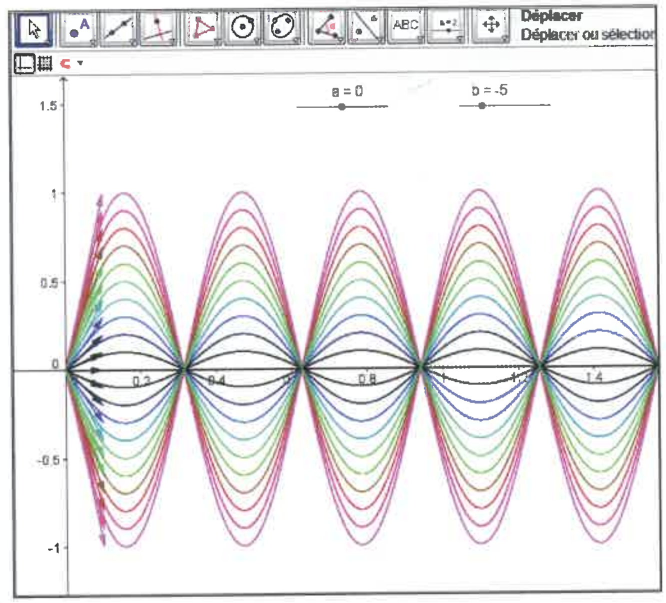
On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 100y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, et y'' la dérivée seconde de y.

La réalisation d'un fichier GeoGebra permet de visualiser la famille des courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle (E).

Soit a un nombre réel compris entre -1 et 1, et b un nombre réel compris entre -10 et 10. On désigne par f la fonction définie sur $[0, +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant les conditions initiales : $f(0) = a$ et $f'(0) = b$.



Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur a allant de -1 à 1 avec un incrément 0,1 et un curseur b allant de -10 à 10 avec un incrément 1.

~~Créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(0, a)$ et $B(0,1\,; a + 0,1b)$.~~

Tracer une représentation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5]$ avec un pas de calcul 0,01 en entrant dans la barre de saisie RésolEquaDiff[0,100,0,0,a,b,5,0.01].

Par un clic droite sur la courbe puis sur le vecteur, activer la trace et créer des couleurs dynamiques en faisant Avancé/Couleurs dynamiques Rouge : a+0.1b ; Vert : 2a+0.2b et Bleu : 3a+0.3b.

a) Fixer a à la valeur $a = 0$. Nettoyer la trace, balayer les valeurs de b puis visualiser les courbes obtenues.

Fixer a à la valeur $a = 1$. Nettoyer la trace, balayer les valeurs de b puis visualiser les courbes obtenues.

À quoi correspond, graphiquement, la condition initiale $f(0) = a$?

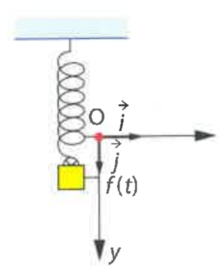
b) Fixer b à la valeur $b = 0$. Nettoyer la trace, balayer les valeurs de a puis visualiser les courbes obtenues.

Fixer b à la valeur $b = 2$. Nettoyer la trace, balayer les valeurs de a puis visualiser les courbes obtenues.

À quoi correspond, graphiquement, la condition initiale $f'(0) = b$?

2. Application au mouvement d'un ressort

Un ressort de raideur $800\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ pend verticalement, son extrémité supérieure étant fixée. Une masse de 8 kg est attachée à l'extrémité libre.



On abaisse la masse au-dessous de sa position d'équilibre O de 0,1 m et on la relâche. (Sur la figure la position de O a été décalée vers la droite.)

On considère la fonction prenant pour valeur, à l'instant t exprimé en secondes, l'ordonnée en mètres du centre de gravité de la masse dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On montre en physique que si l'on néglige la résistance de l'air, la fonction précédente est la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = a = 0{,}1$ et $f'(0) = b = 0$.

a) Montrer que, pour tout t de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = 0{,}1\sin(10t)$.

b) Déterminer la plus petite valeur t_0 de t telle que $f(t) = 0$.

c) En modifiant la condition initiale $f(0) = a$, avec $a \neq 0$, que devient t_0 ?

CORRIGÉ P. 342

Résoudre une équation différentielle de la forme $y'' = f(x)$

Méthode : *déterminer d'abord les primitives y' de f, puis les primitives y de y'.*

*Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur ℝ, et y'' la dérivée seconde de y (exercices **68** à **69**).*

68. +

a) $y'' = 2x + 1$. **b)** $y'' = \cos 2x$.

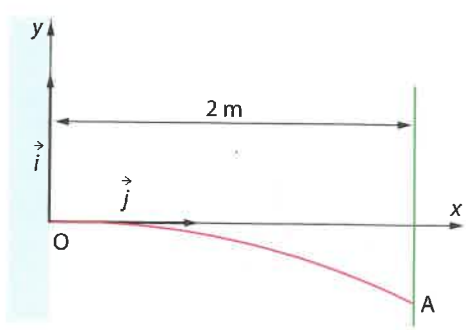
CORRIGÉ P. 344

69. +

a) $y'' = \sin 3x$. **b)** $y'' = e^x$.

70. +++ Déformation d'une poutre

Une poutre horizontale de longueur 2 mètres « travaille en console » (elle est fixée à l'extrémité O, l'autre, A, étant libre). On suppose qu'elle supporte une charge de ω newtons par mètre de longueur. On se propose de déterminer une équation $y = f(x)$ de la déformée OA de la poutre dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité de longueur est le mètre.



En résistance des matériaux on admet que f est deux fois dérivable sur $[0, 2]$ et que f'' vérifie l'équation (E) :

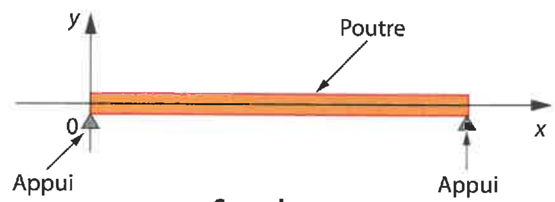
$Kf''(x) = -\frac{1}{2}\omega(2 - x)^2$ où K est une constante.

Déterminer l'équation de la déformée en tenant compte des conditions : la déformée passe par O et a pour tangente en ce point l'axe des abscisses.

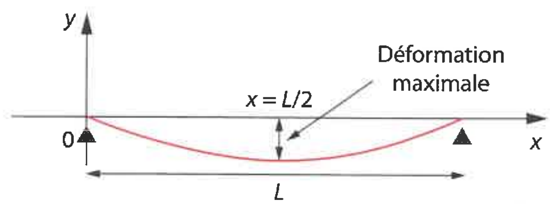
71. ++++ Déformation d'une poutre *(bis)*

Un plancher est supporté par des poutres en acier.

On se propose de déterminer la déformation maximale d'une poutre supportant une charge.



Sans charge



Axe de la poutre chargée

La déformation, exprimée en centimètres, subie au point d'abscisse x est donnée par $d(x)$ où d est une fonction de la variable x dont la dérivée seconde d'' vérifie la relation :

$d''(x) = -\frac{P}{K}(x^2 - Lx)$, où K est une constante caractéristique du matériau et de la poutre, L la longueur de cette poutre (en centimètres) et P la charge (en Newtons par centimètre linéaire). On suppose en outre que la poutre ne subit aucune déformation à l'origine ($d(0) = 0$) et que le maximum de déformation est atteint pour $x = \frac{L}{2}$.

1. a) Déterminer la primitive d' de la fonction d'' qui s'annule pour $x = \frac{L}{2}$.

b) En déduire que la fonction d est définie par :

$$d(x) = -\frac{P}{12K}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x).$$

2. Montrer que la déformation maximale est $D = -\frac{5PL^4}{192K}$.

3. *Application numérique* :

On pose $K = 10^{10}\text{N} \cdot \text{cm}^2$, $L = 5$ m.

a) Déterminer la valeur approchée de la déformation maximale de la poutre arrondie au millimètre pour une charge P de 10 N par centimètre linéaire.

b) La condition de sécurité est une déformation maximale de 0,5 % de la longueur de la poutre.

Déterminer la charge maximale de Newtons par centimètre linéaire, à 0,1 N/cml près, que peut supporter cette poutre.

FAITES le POINT

RÉPONSES P. 344

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs

▶ *Dans ce qui suit, C, C_1, C_2 sont des constantes réelles quelconques.*

72. + **Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont définies par :

a) $f(x) = \mathrm{C}e^{x}$ où C est une constante réelle quelconque ;

b) $f(x) = \mathrm{C}e^{\frac{1}{2}x}$ où C est une constante réelle quelconque ;

c) $f(x) = \mathrm{C}e^{2x}$ où C est une constante réelle quelconque.

73. ++ **Solution satisfaisant à une condition initiale**

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

La solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $f(0) = 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $x \mapsto e^{-2x} + 3$;

b) $x \mapsto e^{2x} + 2$;

c) $x \mapsto e^{-2x} + 2$.

74. + **Solution particulière d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**

On considère l'équation différentielle (E) :

$y' - 2y = 2x^2 - 4x + 5$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

Une solution particulière de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$;

b) $g(x) = x^2 - x + 2$;

c) $g(x) = -x^2 + x - 2$.

75. ++ **Ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre**

L'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 1$ a pour ensemble de solutions ;

a) $x \mapsto \mathrm{C}e^{2x} - 1$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$;

b) $x \mapsto \mathrm{C}e^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$;

c) $x \mapsto \mathrm{C}e^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$;

d) $x \mapsto \mathrm{C}e^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Les QCM 76 et 77 ne concernent pas les BTS Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, et Biotechnologies.

76. ++ **Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**

On considère l'équation différentielle

$(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont définies par :

a) $f(x) = \mathrm{C}_1e^{-3x} + \mathrm{C}_2e^{x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques ;

b) $f(x) = (\mathrm{C}_1\cos 2x + \mathrm{C}_2\sin 2x)e^{-x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques ;

c) $f(x) = (\mathrm{C}_1\cos x + \mathrm{C}_2\sin x)e^{2x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

77. + **Solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**

y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y :

$y'' - 4y' + 3y = -3x - 2$.

Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$.

La fonction g est une solution particulière de (E) si :

a) $a = -1$ $\quad b = 2$;

b) $a = 1$ $\quad b = 2$;

c) $a = -1$ $\quad b = -2$.

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS **(épreuve finale ou CCF)**.

Avec une équation différentielle du premier ordre

Les exercices 78 à 83 concernent les trois groupements B, C et D.

78. +++ Résolution d'une équation différentielle du premier ordre et étude d'une solution particulière

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 1$ est une solution particulière de (E).

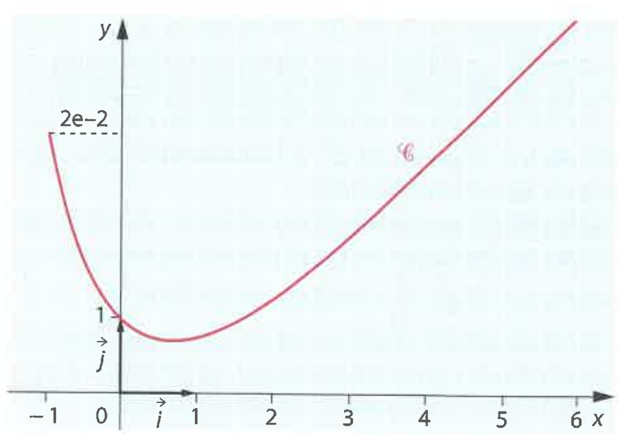
3. En déduire la solution générale de (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la représentation graphique sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ est donnée en annexe.

B. *Étude d'une solution particulière*

On étudie la fonction trouvée ci-dessus fonction f définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par
$f(x) = 2e^{-x} + x - 1$.

Sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm) est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous ; elle pourra permettre le contrôle des résultats trouvés.



1. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. La construire sur le graphique donné en annexe.

3. Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[-1, +\infty[$.

4. a) Calculer en cm² l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ $(a > 1)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}$.

Le candidat doit rendre ce graphique complété avec sa copie (partie **B. 2.**).

CORRIGÉ P. 344

79. +++ Évolution du taux d'alcool

Partie 1 : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle, notée (E), $y' + y = 2e^{-t}$, où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction g définie sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$ par $g(t) = ate^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle E.

3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle E.

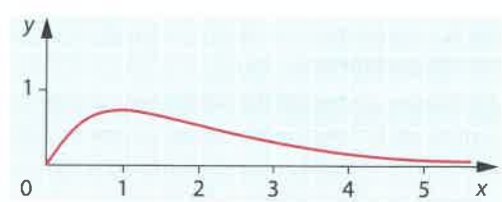
4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle E qui vérifie $f(0{,}025) = 0$.

Partie 2 : Lectures graphiques

Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures.

Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur $[0{,}025\,;+\infty[$ par $f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}$.

La représentation graphique C_f de la fonction f dans un repère orthonormé est fournie ci-dessous.



1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.

2. Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.

Partie 3 : Étude d'une fonction

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) f(t):=(2*t-1/20)*%e^(-t);
(%o1) f(t):=(2 t - 1/20) %e^(-t)

(%i2) factor(diff(f(t),t));
(%o2) - (40 t-41) %e^(-t) / 20

(%i3) f(41/40);
(%o3) 2 %e^(-41/40)

(%i4) factor(integrate(f(t),t));
(%o4) - (40 t+39) %e^(-t) / 20

(%i5) expand(1/2*integrate(f(t),t,2,4));
(%o5) 119 %e^(-2)/40 - 199 %e^(-4)/40

(%i6) float(%), numer;
(%o6) 0.31150216415747
```

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f, justifier le résultat obtenu avec le logiciel pour $f'(t)$.

2. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0{,}025, +\infty[$. Donner la valeur exact du maximum de $f(t)$.

3. Donner à l'aide du logiciel une expression de $F(t)$ où F est une primitive de f sur $[0{,}025, +\infty[$.

4. On considère l'intégrale $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

T_m est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$.

Donner la valeur exacte de T_m et en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

CORRIGÉ P. 344

80. +++ Problème d'isolation

Pour tester la résistance d'une plaque d'isolation phonique à la chaleur on porte en laboratoire sa température à 100 °C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps t (en minutes).

Soit $\theta(t)$ la température (en degré Celsius) de la plaque à l'instant t (t exprimé en minutes).

La température ambiante du laboratoire est de 19 °C et après 6 minutes la température est redescendue à 82 °C.

En exploitant ces données on peut admettre que la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$(E) : y'(t) + 0{,}042y(t) = 0{,}798$

où y est la fonction inconnue, de variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$y'(t) + 0{,}042y(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Trouver une solution particulière de (E) constante du type $g(t) = a$, où a est un nombre réel à déterminer.

3. En déduire toutes les solutions de (E).

4. D'après l'énoncé, donner $\theta(0)$, puis déterminer la solution θ de l'équation (E) vérifiant cette condition initiale.

Partie B

On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, $\theta(t) = 81\mathrm{e}^{-0{,}042t} + 19$.

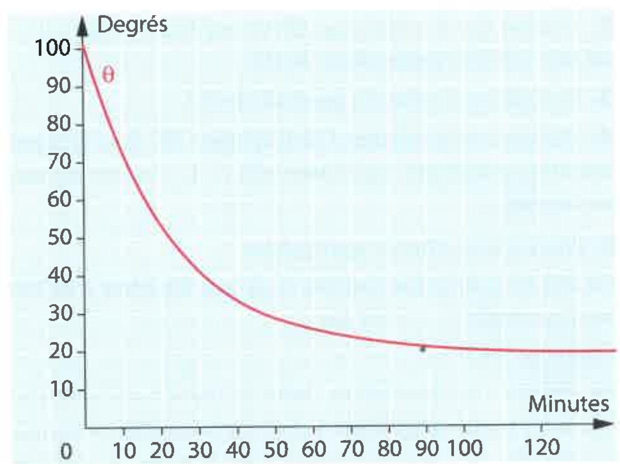
1. Calculer la température de la plaque après 35 minutes. Vérifier ce résultat à l'aide du graphique, en annexe, en laissant apparents les traits de construction.

2. Calculer la fonction dérivée θ' sur $[0, +\infty[$. En déduire le sens de variation de θ sur $[0, +\infty[$.

3. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30 °C. Vérifier ce résultat à l'aide du graphique, en annexe, en laissant apparents les traits de construction.

4. Déterminer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, et interpréter ce résultat.

Annexe



81. +++ Thermomètre de Galilée

Un thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre contenant un liquide dans lequel sont immergées des boules de différentes masses. Lorsque la température T varie, les boules se mettent en mouvement. On se propose d'étudier le mouvement d'une boule pendant un temps t dans ce type de thermomètre.

Nous admettons ici que la vitesse v en $m.s^{-1}$ de cette boule, en fonction du temps, est la solution de l'équation différentielle $(E) : y' = cg - \frac{k}{m}y$ vérifiant : $v(0) = 0$, où :

c est une constante liée aux masses volumiques du liquide et de la boule ; g est la constante de gravitation ; k est le coefficient de frottement du liquide sur la boule ;

m est la masse de la boule.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$m = 0{,}03019 kg$; $k = 9.10^{-3} kg.s^{-1}$; $c = 0{,}001$ et $g = 9{,}81 m.s^{-2}$.

Partie A

1. Montrer, qu'avec ces valeurs numériques, l'équation différentielle (E) s'écrit (en arrondissant les coefficients de cette équation à 10^{-2}) : $y' = 0{,}01 - 0{,}3y$.

2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' + 0{,}3y = 0$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et y' est la fonction dérivée de la fonction y.

3. Vérifier que la fonction définie par $t \mapsto h(t) = \frac{1}{30}$ est une solution particulière de l'équation (E).

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

5. Déterminer la fonction v solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que : $v(0) = 0$.

Partie B

On admet que pour tout t dans $[0, +\infty[$
$v(t) = \frac{1}{30}(1 - e^{-0{,}3t})$.

1. Montrer que la fonction dérivée v' de v sur $[0, +\infty[$ est définie par : $v'(t) = 0{,}01e^{-0{,}3t}$ puis en déduire le sens de variation de v sur son ensemble de définition.

2. Tracer la courbe représentative de v dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ pour des valeurs de t comprises entre 0 et 10 s. (Unités graphiques : 1 cm représente 0,5 s sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 0,003 $m.s^{-1}$ sur l'axe des ordonnées.)

3. Déterminer la limite v_l de la vitesse.
À l'aide du graphique puis par le calcul, déterminer à partir de quelle valeur de t la vitesse de la boule est égale à 90 % de v_l (arrondir la réponse à 10^{-1}).

82. +++ Équation différentielle, étude d'une fonction et calcul intégral

Les deux parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats à démontrer dans les parties A et B sont à obtenir ou à vérifier sur les images d'écran fournies en annexe.

A. *Résolution d'une équation différentielle*
On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 8e^{-0{,}5t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions g sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = 4te^{-0{,}5t}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. *Étude d'une fonction et calcul intégral*
Soit f la fonction définie sur $[0, 15]$ par $f(t) = (4t + 1)e^{-0{,}5t}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
L'expression de $f'(t)$ est à lire sur une des copies d'écran fournies en annexe.
a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0, 15]$.
b) Établir alors le tableau de variation de f.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, 15]$ par :
$$F(t) = (-18 - 8t)e^{-0{,}5t}.$$
a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0, 15]$.
b) On note $I = \int_0^{11} f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que $I = 18 - 106e^{-5{,}5}$.

Annexes

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

```
(%i1) ode2(2*'diff(y,t)+y=0,y,t);
                      t
                    - -
                      2
(%o1) y = %c %e
(%i2) h(t):=4*t*%e^(-1/2*t);
                   -1
                   -- t
                   2
(%o2) h(t):=4 t %e
(%i3) define(h(t),diff(h(t),t));
                  t          t
                - -        - -
                  2          2
(%o3) h(t):=4 %e   - 2 t %e
(%i4) ode2(2*'diff(y,t)+y=8*%e^(-1/2*t),y,t);
                        t
                      - -
                        2
(%o4) y=(4 t+%c) %e
(%i5) ic1(%,t=0,y=1);
                       t
                     - -
                       2
(%o5) y=(4 t+1) %e
```

Partie B. Étude d'une fonction et calcul intégral

```
(%i1) f(t):=(4*t+1)*%e^(-1/2*t);
                       -1
                       -- t
                       2
(%o1) f(t):=(4 t+1) %e
(%i2) define(df(t),factor(diff(f(t),t)));
                          t
                        - -
                          2
                (4 t-7) %e
(%o2) df(t):= - -----------
                     2
```

```
(%i3) define(F(t),factor(integrate(f(t),t)));
                        t
                      - -
                        2
(%o3) F(t):=-2(4 t+9)%e
(%i4) integrate(f(t),t,0,11);
                11
              - --
                2
(%o4) 18-106 %e
(%i5) float(%), numer;
(%o5) 17.56680222752281
```

83. +++

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2e^{-2t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $h(t) = 2te^{-2t}$. Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

B. *Étude d'une fonction*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. Unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Justifier le résultat pour $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ obtenu avec un logiciel de calcul formel (voir l'annexe). Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Justifier l'expression de $f'(t)$ donnée par un logiciel de calcul formel (voir l'annexe).

b) En déduire le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ et donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. a) Compléter le tableau de valeurs donné en *annexe*. Arrondir à 10^{-2}.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

C. *Application de la partie B*

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}$,

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la *partie B*.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.

a) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?

b) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?

2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.

a) Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leq 0{,}25$.

b) En utilisant la courbe représentative de la fonction f, déterminer graphiquement, la durée d'utilisation du réfractomètre. Arrondir à 10^{-1}. On laissera les traits de construction apparents.

Annexes

a) Tableau de valeurs (arrondie à 10^{-2}) de la fonction f.

x	0	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

b) Copie d'écran.

```
(%i1) f(t):=(1+2*t)*%e^(-2*t);
                        (-2) t
(%o1) f(t):=(1+2 t)%e
(%i2) limit(f(t),t,+inf);
(%o2) 0
(%i3) expand(diff(f(t),t));
              -2 t
(%o3) -4 t %e
```

84. ++++ Plutôt pour le groupement D

On étudie l'évolution d'une population de paramécies (paramecium aurelia), organismes unicellulaires, dans un milieu de culture clos. Soit $N(t)$ le nombre de paramécies à l'instant t, exprimé en jours. On peut considérer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$, définie pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}75y = 0{,}001\ 5,$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la dérivée de y.

On désigne par a la population à l'instant $t = 0$. On a donc $N(0) = a$, avec $a > 0$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, où (%i1) indique l'entrée n° 1 et (%o1) la sortie n° 1.

Dans cet exercice, on peut utiliser ces résultats **sans justification.**

```
(%i1) ode2('diff(y,t)+0.75*y=0.0015,y,t);
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
```

(%o1) $y = \%e^{-\frac{3t}{4}}\left(\dfrac{\%e^{\frac{3t}{4}}}{500} + \%c\right)$

(%i2) `expand(%);`

(%o2) $y = \%c\,\%e^{-\frac{3t}{4}} + \dfrac{1}{500}$

(%i3) `ic1(%, t=0, y=1/a);`

(%o3) $y = \dfrac{\%e^{-\frac{3t}{4}}\left(a\,\%e^{\frac{3t}{4}} - a + 500\right)}{500\,a}$

(%i4) `define(N(t),1/rhs(%));`

(%o4) $N(t) := \dfrac{500\,a\,\%e^{\frac{3t}{4}}}{a\,\%e^{\frac{3t}{4}} - a + 500}$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

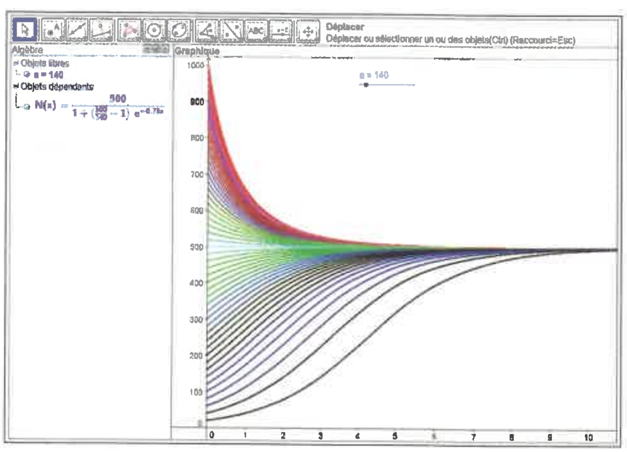
2. À quoi correspond l'entrée (%i3) ?

3. La sortie (%o4) donne une expression de $N(t)$. Montrer que l'on peut aussi écrire :

$$N(t) = \frac{500}{1 + \left(\dfrac{500}{a} - 1\right)e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

4. Utiliser l'expression précédente pour déterminer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Que signifie le résultat pour la population de paramécies ?

5. On a représenté ci-dessous, à l'aide du logiciel GeoGebra, les fonctions $t \mapsto N(t)$, pour $t \geq 0$ et différentes valeurs de a allant de 20 à 1 000.



a) Où lit-on, sur la représentation graphique d'une fonction $t \mapsto N(t)$, la valeur de a ?

b) Conjecturer, d'après le graphique, le sens de variation de la fonction $t \mapsto N(t)$, selon les valeurs du nombre réel strictement positif a.

6. Utiliser l'affichage fourni ci-dessous par un logiciel de calcul formel, pour justifier la conjecture précédente.

(%i5) `diff(N(t),t);`

(%o5) $\dfrac{375\,a\,\%e^{\frac{3t}{4}}}{a\,\%e^{\frac{3t}{4}} - a + 500} - \dfrac{375\,a^2\,\%e^{\frac{3t}{2}}}{\left(a\,\%e^{\frac{3t}{4}} - a + 500\right)^2}$

(%i6) `factor(%);`

(%o6) $-\dfrac{375(a-500)\,a\,\%e^{\frac{3t}{4}}}{\left(a\,\%e^{\frac{3t}{4}} - a + 500\right)^2}$

CORRIGÉ P. 345

Avec une équation différentielle du second ordre

Pour tous les BTS des groupements B, C, D sauf : Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, et Biotechnologies (exercices 85 à 88).

85. +++ Équation différentielle, étude d'une fonction, calcul intégral

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1. a) Résoudre l'équation différentielle : $2y'' + y' - y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, y' est la fonction dérivée de y et y'' est la fonction dérivée seconde de y.

b) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle

$$(E) : 2y'' + y' - y = -x + 2.$$

c) En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Une copie d'écran fournie en annexe, donne certains résultats.

1. a) Justifier le résultat lu pour $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Tracer l'asymptote $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. Justifier par un calcul le résultat donné par le logiciel pour l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$ et en déduire l'aire A, en cm², de la portion du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de l'aire A.

Annexe

Étude d'une fonction et calcul intégral

Calcul Formel

```
(%i1) f(x):=%e^(-x)+x-1;
(%o1) f(x):=%e^-x+x-1

(%i2) diff(f(x),x);
(%o2) 1-%e^-x

(%i3) limit(f(x),x,+inf);
(%o3) ∞

(%i4) limit(%e^(-x),x,+inf);
(%o4) 0

(%i5) integrate(%e^(-x),x,0,2);
(%o5) 1-%e^-2

(%i6) float(%), numer;
(%o6) 0.86466471676339
```

86. +++ Résolution d'une équation différentielle, étude d'une fonction

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 2y' + y = 0.$$

2. Soit un réel b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g par : $g(x) = b$.

Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, qui vérifie les conditions : $f(0) = 3$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

La courbe $\mathscr{C}$ est représentée *en annexe* qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

En écrivant $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}$ dont on donnera une équation.

c) Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique fourni en annexe.

3. a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.

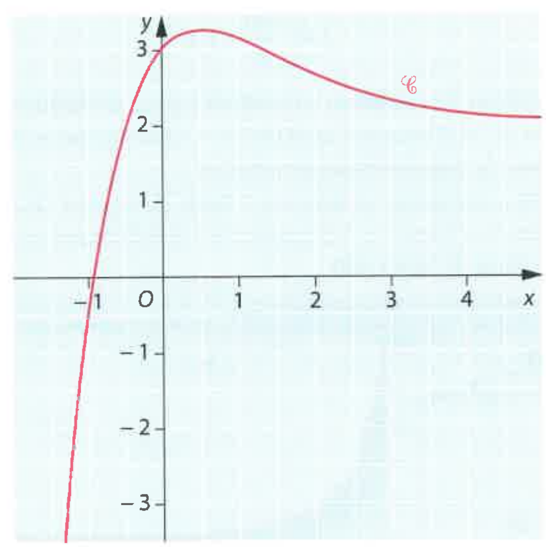
b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 2x.$$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

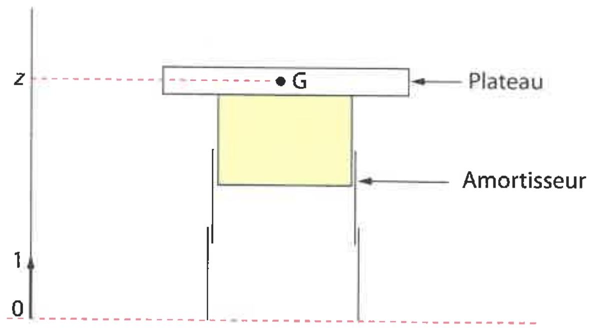
b) Calculer la mesure A, en cm², de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de A.



CORRIGÉ P. 345

87. +++ Système mécanique

On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-après.



On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, t représentant le temps exprimé en secondes.

L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E) : 5z'' + 6z' + z = 2.$$

A. 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0) : 5z'' + 6z' + z = 0$.

2. Chercher une solution particulière constante g de l'équation (E) et en déduire la solution générale de (E).

3. Donner la solution f de (E) qui vérifie les conditions $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$.

B. On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = 0{,}5e^{-t} + 2{,}5e^{-0{,}2t} + 2.$$

1. Étudier les variations de f.

2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

3. Déduire des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t.

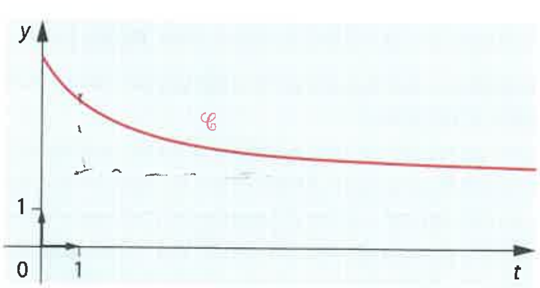
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthornormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation. Tracer cette asymptote sur le graphique de la feuille jointe en annexe.

C. 1. Déterminer une primitive de la fonction h, définie pour tout t de l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
$h(t) = 0{,}5e^{-t} + 2{,}5e^{-0{,}2t}$.

2. a) Déterminer la valeur exacte de $I = \int_1^5 [f(t) - 2]\,dt$.

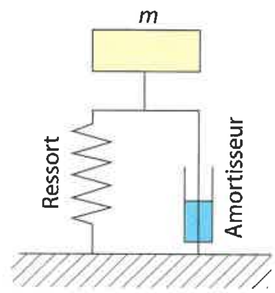
b) Interpréter géométriquement ce résultat sur la feuille jointe en annexe.

Courbe à compléter et à rendre avec la copie.



88. +++ Vibration

Une masse m est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie comme le montre le schéma suivant.



Pour tout t de $[0, +\infty[$, on désigne par $x(t)$ la longueur du ressort.

On établit en mécanique que la fonction de la variable t définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle : $x'' + kx' + 25x = 20$ où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur.

A. Les questions **1.** et **2.** sont, dans une large mesure, indépendantes.

1. *Résolution de l'équation différentielle* (E_1) :

$$x'' + kx' + 25x = 0$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et k une constante positive.

a) Écrire l'équation caractéristique de l'équation (E_1).

b) Donner suivant les valeurs de k les différentes formes des solutions.

c) Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que l'équation (E_1) n'admette pas de solutions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations.

2. *Dans la suite, on prend $k = 10$.*

On note (E_2) l'équation différentielle :

$$x'' + 10x' + 25x = 20$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_3) :

$$x'' + 10x' + 25x = 0.$$

b) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction constante h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de l'équation (E_2).

c) Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (E_2).

d) Déterminer la solution particulière x de l'équation (E_2) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0{,}4$ et $x'(0) = 0$.

B. Soit x la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$x(t) = (-2t - 0{,}4)\,e^{-5t} + 0{,}8$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 10 cm.

1. a) On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} -2\,te^{-5t} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.
En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.
b) En admettant que la fonction x que l'on étudie soit solution du problème mécanique décrit au début de cet exercice, donner une interprétation du résultat obtenu au **B. 1. a)**.

2. a) Déterminer la dérivée x' de x.
b) Établir le tableau de variation de x.

3. a) Déterminer la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b) Compléter, après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer éventuellement les valeurs décimales approchées à 10^{-3}.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$x(t)$							

c) Construire $\mathscr{D}$, T et $\mathscr{C}$.

Uniquement pour le groupement B (exercices 89 à 92).

89. +++ Avec un développement limité

A. *Résolution d'une équation différentielle*
On considère l'équation différentielle (E) :
$y'' - 2y' + y = 1 - \sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.

2. Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = k\cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

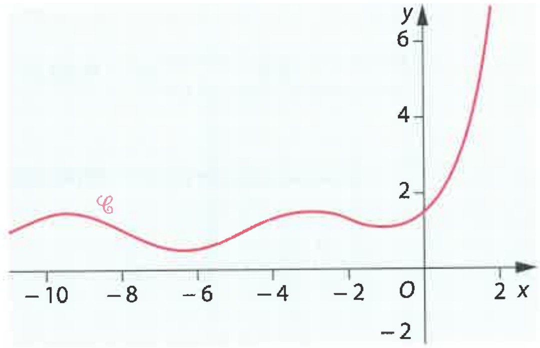
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(0) = 1$.

B. *Étude locale d'une fonction*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 1 + e^x - \frac{1}{2}\cos x.$$
On a tracé ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Avec un logiciel de calcul formel on a obtenu que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = \dfrac{3}{2} + x + \dfrac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0}\varepsilon(x) = 0$.

1. Déduire de ce qui précède une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.



90. +++ Équation différentielle, étude locale, calcul intégral

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*
On considère l'équation différentielle (E) $y' + 2y = -5e^{-2x}$, où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' + 2y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. *Étude locale d'une fonction*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 5x)e^{-2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} -5xe^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 1 - 5x$	$y = 0$	$x = 0$

2. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
$$f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
a) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1-7x$ est positif au voisinage de 0.

C. *Calcul intégral*

1. On note $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la *partie B*.

a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = \dfrac{23e^{-4} - 13e^{-2}}{4}$.

b) Donner la valeur approchée de I, arrondie à 10^{-2}.

2. a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[1, 2]$.

b) Interpréter graphiquement le nombre I.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

91. +++

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' + y = 2x - 2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2x + 2$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

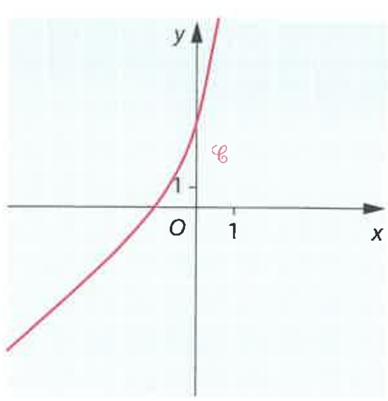
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = 3 \text{ et } f(-1) = 0.$$

B. *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x + 2x + 2$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = x + 1$	$y = 2x + 2$	$y = 2$

3. Avec un logiciel de calcul formel on a obtenu que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour les questions **3.**a) *et* **3.**b), *une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*

Une réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse na rapporte ni n'enlève de point.

a) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 3$	$y = 3 + 4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

b) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
Au-dessus de la tangente T pour tout x.	Au-dessous de la tangente T pour tout x.	Au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. *Calcul intégral*

1. On note $I = \int_{-1}^{1} (2x + 2)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = 4$.

2. On note $J = \int_{-1}^{1} (x+1)e^x\,\mathrm{d}x$.

Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e + e^{-1}$.

3. a) On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie *B*.

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b) Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$, $f(x) \geq 0$.

Donner une interprétation graphique de K.

92. +++

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ où les unités graphiques sont : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

EXERCICES pour le BTS

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - y' - 6y = -5e^{-2x}$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable x, où y' est la fonction dérivée de y et où y'' est la fonction dérivée seconde de y.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) E:'diff(y,x,2)-'diff(y,x)-6*y=-5*exp(-2*x);
```
(%o1) $\frac{d^2}{dx^2}y - \frac{d}{dx}y - 6\,y = -5\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i2) E0:'diff(y,x,2)-'diff(y,x)-6*y=0;
```
(%o2) $\frac{d^2}{dx^2}y - \frac{d}{dx}y - 6\,y = 0$

```
(%i3) ode2(E0,y,x);
```
(%o3) $y = \%k1\,\%e^{3\,x} + \%k2\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i4) ode2(E,y,x);
```
(%o4) $y = \%k1\,\%e^{3\,x} + \frac{(5\,x+1)\,\%e^{-2\,x}}{5} + \%k2\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i5) expand(%);
```
(%o5) $y = \%k1\,\%e^{3\,x} + x\,\%e^{-2\,x} + \%k2\,\%e^{-2\,x} + \frac{\%e^{-2\,x}}{5}$

```
(%i6) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=-1);
```
(%o6) $y = x\,\%e^{-2\,x} + \%e^{-2\,x}$

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y'' - y' - 6y = 0.$$

Justifier l'expression de la solution générale de l'équation différentielle (E_0), fournie par la sortie logicielle notée (%o3).

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-2x}$ est une solution de (E).

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). Comparer votre réponse à la sortie logicielle notée (%o5).

4. On recherche la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$. Justifier que la sortie logicielle notée (%o6) fournit une expression de $f(x)$.

B. *Étude des variations et recherche d'un développement limité*

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,e^{-2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

```
(%i7) f(x):=(x+1)*%e^(-2*x);
```
(%o7) $f(x) := (x+1)\,\%e^{(-2)\,x}$

```
(%i8) limit(f(x),x,-inf);
```
(%o8) $-\infty$

```
(%i9) limit(f(x),x,inf);
```
(%o9) 0

```
(%i10) diff(f(x),x);
```
(%o10) $\%e^{-2\,x} - 2\,(x+1)\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i11) factor(%);
```
(%o11) $-(2\,x+1)\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i12) taylor(f(x),x,0,3);
```
(%o12)/T/ $1 - x + \frac{2\,x^3}{3} + \ldots$

1. a) Justifier les limites obtenues par le logiciel pour $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) On admet l'expression obtenue pour $f'(x)$ à la sortie logicielle notée (%o11). Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

b) Rassembler les résultats précédents dans un tableau de variation.

2. La sortie logicielle notée (%o12) fournit la partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et préciser la position de courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T, au voisinage de ce point.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

D'autres exercices pour le BTS (épreuve finale ou CCF) avec des réponses, figurent dans les épreuves complètes à la fin du tome 2.