

题 1

1)

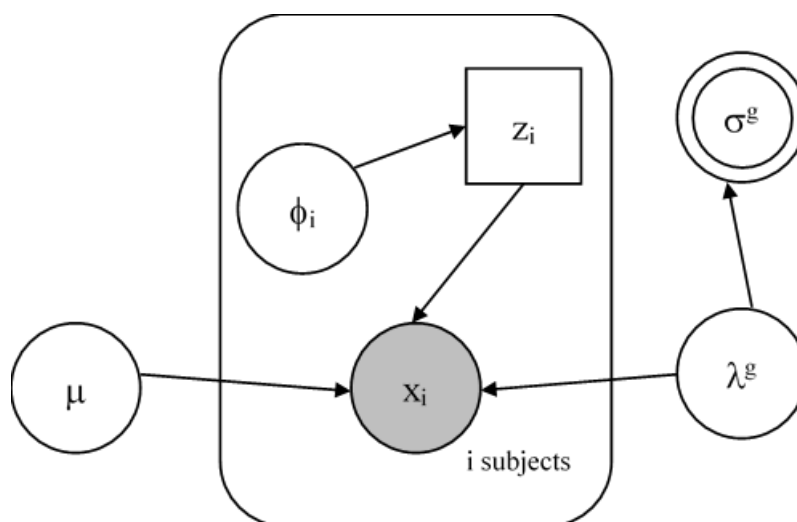


图 1-1 Low-High Measurement Precision Model 的图模型

$$\mu \sim \text{Gaussian}(0, 0.001)$$

$$\phi_i \sim \text{Uniform}(0, 1), \quad i = 1 \text{ to } 8$$

$$z_i \sim \text{Bernoulli}(\phi_i)$$

$$\lambda^1, \delta \sim \text{Gamma}(0.001, 0.001)$$

$$\lambda^2 = \lambda^1 + \delta$$

$$\sigma^g = \frac{1}{\sqrt{\lambda^g}} \quad g = 1, 2$$

$$x_i \sim \text{Gaussian}(\mu, \lambda^g) \quad g = 1, 2, \quad i = 1 \text{ to } 8$$

这里值得注意的是，表示每个物理学家有 ϕ_i 概率是低精度组的 ϕ_i 位于框内。这是由于我们这里关心的问题并不是所有物理学家有 ϕ 的比例是低精度，有 $(1-\phi)$ 的比例是高精度，此处的 7 个物理学家是上述物理学家的样本，故而具有公共的 ϕ 。这里的问题是有 7 个物理学家，他们可能一部分是低精度，另一部分是高精度，每个物理学家都有各自的 ϕ_i 的概率属于低精度，有 $(1-\phi_i)$ 的概率属于高精度。

2)

low-high measurement precision model:

DIC=36.68, WAIC=39.40

unique measurement precision model:

DIC=36.40, WAIC=32.76

两者相比，每个物理学家各自有一个测量精度的模型要优于只有两组物理学家他们分别有一个公共的高/低测量精度的模型。

题 2

1)

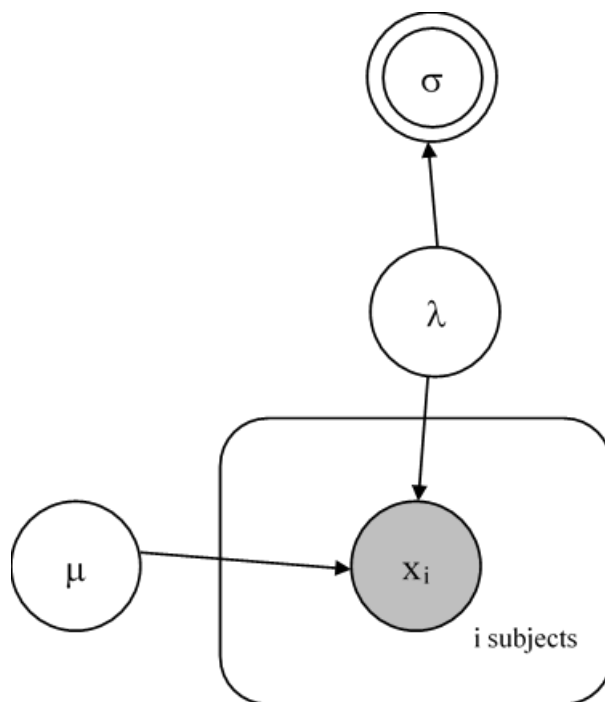


图 2-1 Same Measurement Precision Model 的图模型

$$\mu \sim \text{Gaussian}(0, 0.001)$$

$$\lambda \sim \text{Gamma}(0.001, 0.001)$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$x_i \sim \text{Gaussian}(\mu, \lambda) \quad i = 1 \text{ to } 8$$

2)

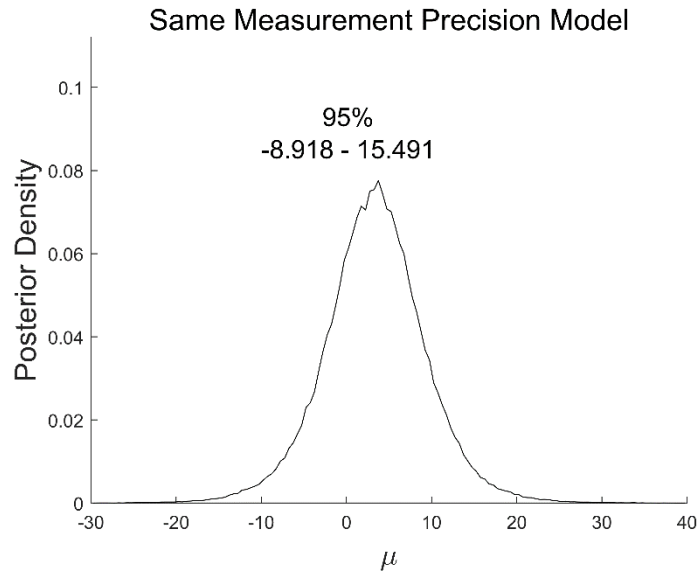


图 2-2 Same Measurement Precision Model 中 μ 的后验分布

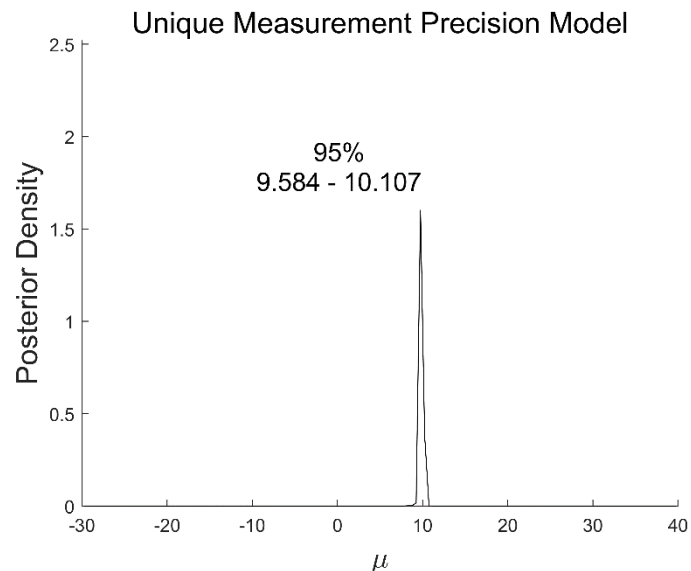


图 2-3 Unique Measurement Precision Model 中 μ 的后验分布

两个模型的 μ 的后验分布相比，Same Measurement Precision Model 的 μ 的方差要比 Unique Measurement Precision Model 的 μ 的方差更大。原因在于前者的精度是一样的，那么数据的方差除了归因于精度以外全部归因于 μ ，而后者的精度是不一样的，那么数据的方差除了归因于精度以外，还归因于精度的方差，所以归因于 μ 的方差更小。

两个模型的 μ 的后验分布相比，Same Measurement Precision Model 的 μ 的方差要比 Unique Measurement Precision Model 的 μ 的均值更小。原因在于前者的精度是一样的，那么 μ 的均值应接近数据的均值以避免 likelihood 很低的情形，由于数据中存在一个特别小的数，以至于 μ 的均值小；而后者的精度是不一样的，那么数据中集中的数会以高精度的方式吸引 μ ，从而使得 likelihood 极高，而特

别小的数会因为精度很低，从而 likelihood 也不低，故而 μ 会集中在数据聚集处，也就是数据中 9 附近。(注：在 prior 几乎不提供信息的情况下，likelihood 和 posterior 的形式差不多)

3)

same measurement precision model:

DIC=59.89, WAIC=61.14

unique measurement precision model:

DIC=36.40, WAIC=32.76

两者相比，每个物理学家各自有一个测量精度的模型要优于物理学家他们有一个公共的测量精度的模型。

题 3

1)

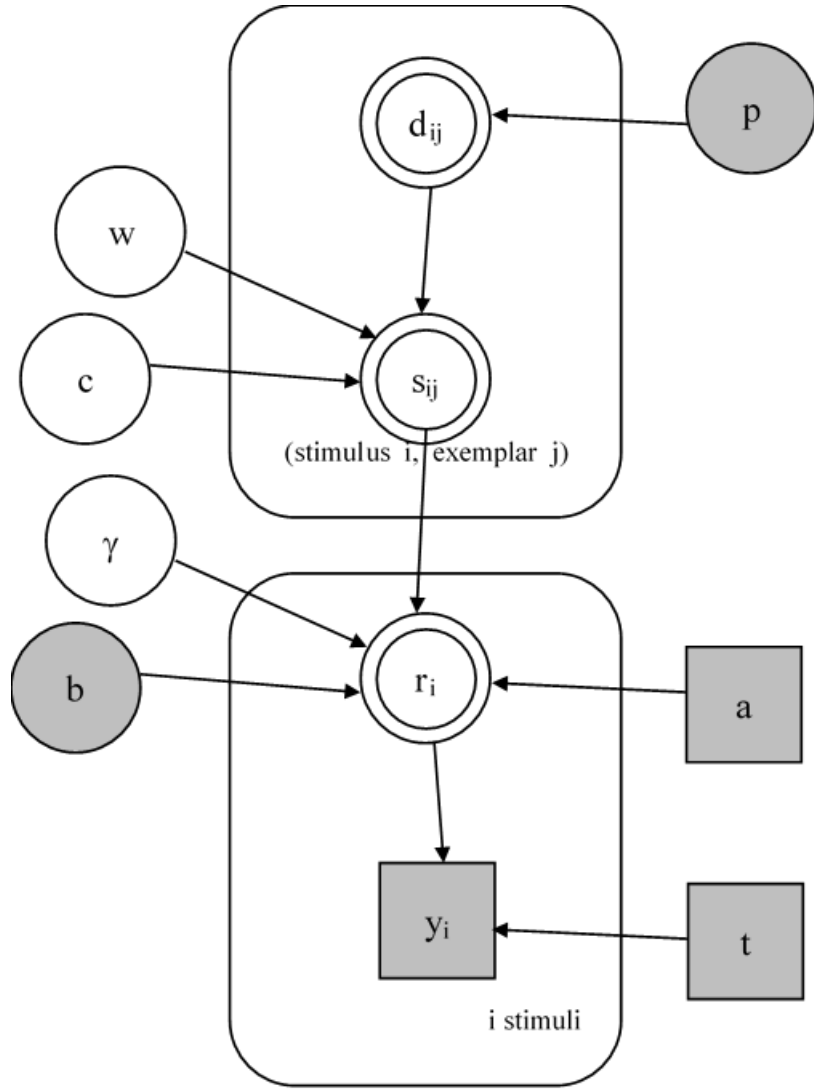


图 3-1 DEM model 的图模型

$$\begin{aligned}
 c &\sim \text{Uniform}(0,5) \\
 w &\sim \text{Uniform}(0,1) \\
 b &= 0.5 \\
 temp &\sim \text{Gamma}(0.001,0.001) \\
 \gamma &= 1/\text{sqrt}(temp) \\
 d_{ij}^m &= |p_i^m - p_j^m| \quad m = 1,2 \\
 s_{ij} &= \exp\{-c * (w * d_{ij}^1 + (1 - w) * d_{ij}^2)\} \\
 r_i &= \frac{b * (\sum_j a_j * s_{ij})^\gamma}{b * (\sum_j a_j * s_{ij})^\gamma + (1 - b) * (\sum_j (1 - a_j) * s_{ij})^\gamma} \\
 y_i &\sim \text{Binomial}(r_i, t)
 \end{aligned}$$

2)

DEM model:

DIC=67.76, WAIC=69.15

GCM model:

DIC=76.46, WAIC=81.62

两者相比，DEM 模型更优，意味着新加入的 γ 能够更好的解释数据。

3)

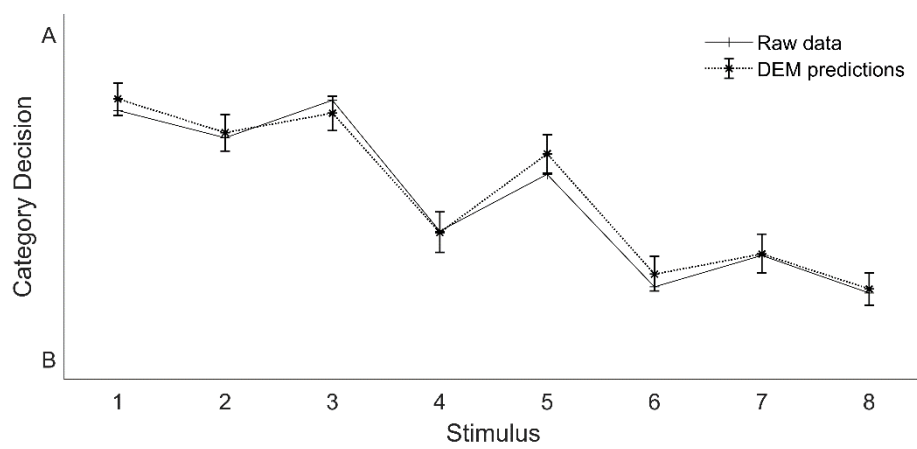


图 3-2 DEM 的预测结果

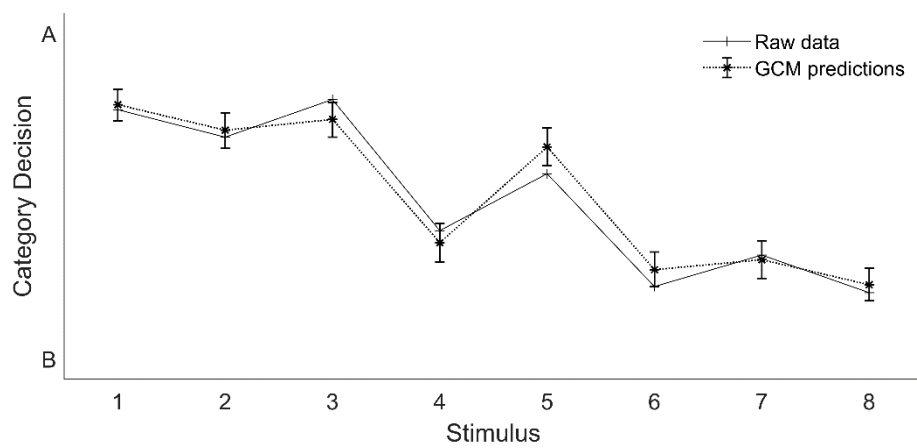


图 3-3 GCM 的预测结果

4)

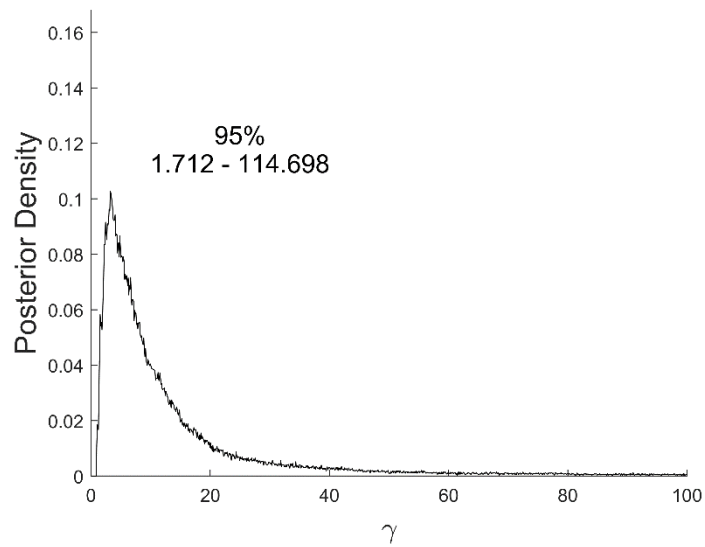


图 3-4 DEM Model 中 γ 的后验分布

γ 的后验分布中 95%HDI(这个不是置信区间吧。。)为[1.712, 114.698], 表明 $\gamma=1$ 的可能性不大, 而 $\gamma=1$ 时恰恰 DEM model 退化为 GCM model, 换言之 GCM model 的可能性就不高。反过来说, DEM model 中 γ 取一个大于 1 的数会是更可能的结果, 那么在 $\gamma=1$ 的时候, 也就是 GCM model, 的预测效果就不好。总之, 从 γ 的后验分布所得出的结论与上述直接使用 DIC 和 WAIC 等信息论方法的结论一致。