# 不定方程相关理论及其应用

郑欢誉

2024 年 12 月 28 日

# 开题报告目录

Contents of Thesis Proposal

# 开题报告目录

Contents of Thesis Proposal

# 开题报告目录

Contents of Thesis Proposal

# 研究背景和意义

Research Background & Significance

$$x^n + y^n = z^n$$

1637 费马：提出猜想

1839 $n = 3, 4, 5, 7$，无穷递降

1847 **库默尔：唯一分解，理想**；$n$ 正规素数（不整除 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的类数）

1994 怀尔斯：模形式和椭圆曲线

# 文献调研

Literature Research

$$x^n + y^n = z^n \text{ 对任意的 } n > 2 \text{ 无整数解 } (x, y, z)$$

$$\xRightarrow{\text{分析}} \text{只需要考虑 } \underline{n = p \text{ 为奇素数}} \ \wedge \ \underline{x, y, z \text{ 互素}}\text{的情况}$$

$$\xRightarrow{\text{在}\mathbb{Q}(\zeta_p)\text{中}} \underline{(x+y)(x+\zeta_p y)\cdots(x+\zeta_p^{p-1}y) = z^p} \Leftarrow \text{在}\mathbb{Z}[\zeta_p]\text{中分解}$$

# 文献调研

Literature Research

**“在数域中唯一分解在什么程度上失效或保持?”**

所讨论的分解是在什么子环上进行的? $\Longrightarrow$ 整数环

修复唯一分解 $\Longrightarrow$ 理想

度量唯一分解失效的程度? $\Longrightarrow$ 类数

简化素理想在分解中的行为 $\Longrightarrow$ 正规素数

整数环里可逆元组成的群的结构? $\Longrightarrow$ 单位定理

# 文献调研

Literature Research

**“在数域中唯一分解在什么程度上失效或保持?”**

所讨论的分解是在什么子环上进行的? $\Longrightarrow$ <u>整数环</u>

修复唯一分解 $\Longrightarrow$ <u>理想</u>

度量唯一分解失效的程度? $\Longrightarrow$ <u>类数</u>

简化素理想在分解中的行为 $\Longrightarrow$ <u>正规素数</u>

整数环里可逆元组成的群的结构? $\Longrightarrow$ <u>单位定理</u>

# 文献调研

Literature Research

**“在数域中唯一分解在什么程度上失效或保持?”**

所讨论的分解是在什么子环上进行的? $\Longrightarrow$ 整数环

修复唯一分解 $\Longrightarrow$ 理想

度量唯一分解失效的程度? $\Longrightarrow$ 类数

简化素理想在分解中的行为 $\Longrightarrow$ 正规素数

整数环里可逆元组成的群的结构? $\Longrightarrow$ 单位定理

# 文献调研

Literature Research

**“在数域中唯一分解在什么程度上失效或保持?”**

所讨论的分解是在什么子环上进行的? $\Longrightarrow$ <u>整数环</u>
修复唯一分解 $\Longrightarrow$ <u>理想</u>
度量唯一分解失效的程度? $\Longrightarrow$ <u>类数</u>
简化素理想在分解中的行为 $\Longrightarrow$ <u>正规素数</u>
整数环里可逆元组成的群的结构? $\Longrightarrow$ <u>单位定理</u>

# 文献调研

Literature Research

**“在数域中唯一分解在什么程度上失效或保持?”**

所讨论的分解是在什么子环上进行的? $\Longrightarrow$ 整数环

修复唯一分解 $\Longrightarrow$ 理想

度量唯一分解失效的程度? $\Longrightarrow$ 类数

简化素理想在分解中的行为 $\Longrightarrow$ 正规素数

整数环里可逆元组成的群的结构? $\Longrightarrow$ 单位定理

# 文献调研

Literature Research

库默尔：将问题（正规素数情况）拆分为

$x, y, z$ 均与 $p$ 互素 v.s. 恰有一个被 $p$ 整除

$$\prod_{i=0}^{p-1}\langle x+\zeta_p^i y\rangle = \langle z\rangle^p \quad | \quad \prod_{i=0}^{p-1}\langle x+\zeta_p^i y\rangle = I^{pm}\langle z_0\rangle^p$$

# 文献调研

Literature Research

**FLT & ABC 猜想：**

(ABC 猜想)：$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon$ s.t. 对任意满足 $a + b = c$ 的互素的 $a, b, c$,

$$c \leq k_\epsilon \left( \prod_{p\ \text{素数},\ p | abc} p \right)^{1+\epsilon}$$

- ABC $\Longrightarrow$ FLT（Goldfeld, 1999）
- ABC 猜想次指数界的改良（Hector, 2024）

# 文献调研

Literature Research

**渐进费马大定理（Asymptotic Fermat's Last Theorem）：**

(渐进 FLT)： $K$ 为一个数域，存在一个仅依赖于 $K$ 的界 $B_K$，使得对任意的素数 $p > B_K$，下面的丢番图方程无非平凡解

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

- 通过 类域论 在无穷族数域上建立了渐进费马大定理（Freitas, 2020）

# 文献调研

Literature Research

## 正规素数情况的形式化（Riccardo, 2024）：

```
variable {p : ℕ+} {K : Type*} [Field K] [NumberField K] [IsCyclotomicExtension {p} ℚ K]
-- ↑ K = ℚ(ζₚ)        You, 3周前 • Uncommitted changes
variable {ζ : K} (hζ : IsPrimitiveRoot ζ p)
-- ↑ ζ 是p次单位根主根
notation "𝓞" => NumberField.RingOfIntegers
def IsRegularNumber (n : ℕ) [hn : Fact (0 < n)] : Prop :=
  letI : Fintype <| ClassGroup <| 𝓞 <| CyclotomicField ⟨n, hn.1⟩ ℚ := sorry
  n.Coprime <| Fintype.card <| ClassGroup <| 𝓞 <| CyclotomicField ⟨n, hn.1⟩ ℚ
-- ↑ 定义正规数为与类数互素的数
def IsRegularPrime (p : ℕ) [Fact p.Prime] : Prop := IsRegularNumber p (hn := ⟨Nat.pos_of_neZero p⟩)
-- ↑ 定义正规素数为正规的素数
theorem flt_regular {p : ℕ} [Fact p.Prime] (hreg : IsRegularPrime p) (hodd : p ≠ 2) :
  FermatLastTheoremFor p := sorry
```

# 研究方案和进度安排

Research Scheme & Scheduling

1-2 月 代数数论和交换代数（*Ian&Tall*，*Ash*，*Milne*，*Matsumura*）
理解掌握库默尔关于正规素数情况的证明

2-3 月 通过 *Hector* 和 *Andrew* 的工作学习费马大定理与 *ABC* 猜想间的关联
利用类域论拓展性地了解渐进费马大定理

3-4 月 形式化相关工作

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

1896