

## 引入各向异性的规则张力样条函数插值

葛莹, 徐旭, 路新强, 胡维鑫

( 河海大学地球科学与工程学院, 南京 210098 )

**摘要:** 为解决垃圾填埋场由于沉降引发的安全问题, 需要进行沉降变形监测。本文引入变异函数的理论模型, 对规则张力样条函数法的各向异性做适当修正, 以解决沉降数据空间插值的空间变异性问题, 并利用改进后的规则张力样条函数法, 实现填埋场沉降数据的插值估计。试验结果表明, 该方法能在一定程度上提高规则张力样条函数法的插值结果精度。

**关键词:** 规则张力样条函数; 空间插值; 变异函数; 各向异性

**【中图分类号】** P258

**【文献标识码】** A

**【文章编号】** 1009-2307(2013)06-0137-03

## 1 引言

填埋场因处理量大、成本低廉等优点, 成为垃圾日常处置的常用手段。但在填埋过程中, 垃圾堆体会随着其成分、覆盖量等不同, 而产生不均匀沉降, 这直接威胁填埋场的安全运营<sup>[1]</sup>。因此, 垃圾堆体的沉降变形监测研究, 得到有关学者的普遍关注<sup>[2]</sup>。实地观测是垃圾堆体沉降监测的有效方法之一<sup>[3]</sup>。由于种种原因, 垃圾堆体的采样点有限, 所以空间插值方法的选择显得尤为重要。按照 Goodin 的研究, 样本数据稀疏时, 最小二乘多项式法较合适<sup>[4]</sup>。Parajka 和 Szolgay 研究表明, 采样点足够时, 克里格法能获得更高的插值精度; 但采样点不足时, 共协克里格法的插值精度更胜一筹<sup>[5]</sup>。

空间插值方法的确影响插值精度。Dubois 用日降水量数据, 对 20 种插值方法比较后发现, 引入各向异性的多面函数法, 能获得较高的插值精度<sup>[6]</sup>。但 Collins 却认为, 克里格法优于样条函数法, 原因是前者考虑插值要素分布的各向异性, 而后者对空间异质性的反映程度偏弱<sup>[7]</sup>。克里格法在国内应用极为普遍<sup>[8]</sup>。但考虑到误差估计等因素, 与克里格法比较, 样条函数法可能更具优势<sup>[9]</sup>。特别是规则张力样条函数, 在样本数据有限的情况下, 能提供高精度的插值结果<sup>[10]</sup>。

本文尝试运用地统计学原理, 解决规则张力样条函数法的空间变异性问题, 对填埋场的沉降数据进行空间插值。先对规则张力样条函数法做深入剖析, 再引入变异函数理论模型, 拟合沉降估计值的实验变异函数, 获取各向异性的参数, 对规则张力样条函数法做适度修正。

## 2 引入各向异性的规则张力样条函数法

## 2.1 基本原理

Mitas 和 Mitasova 采用规则张力样条函数, 逼近不规则地形表面<sup>[11]</sup>, 随后又用该函数来解决地理要素的插值问题<sup>[10]</sup>。其原理是, 构造满足曲率最小化条件的规则张力样条函数  $S(x, y)$ , 对已知采样点数据拟合, 再根据  $S(x, y)$

计算未知点数据。

任一点  $(x, y)$  处的沉降量  $S$ , 可以用下列样条函数逼近<sup>[12]</sup>:

$$S(x, y) = T(x, y) + \sum_{i=1}^N a_i \Phi(x, y) \quad (1)$$

(1) 式中,  $T(x, y)$  称为趋势函数,  $\Phi$  为径向基函数,  $a_i$  为待定系数,  $N$  为采样点数量。

采用规则张力样条函数时,  $T(x, y)$  为待定系数  $a_0$ ,  $\Phi$  的一般形式为:

$$\Phi(x, y) = - \left[ E_1 \left[ \frac{\varphi^2 [r(x, y)]^2}{4} \right] + \ln \left[ \frac{\varphi^2 [r(x, y)]^2}{4} \right] + C_E \right] \quad (2)$$

(2) 式中,  $\varphi$  为张力因子, 用来控制生成曲面的张力,  $E_1$  为指数积分函数,  $C_E = 0.577215$ 。

所用采样点的数量取决于邻域半径  $r$ , 这是因为我们通常是以待定点  $r(x, y)$  为圆心, 以  $r$  为半径的圆内诸采样点来计算函数的待定系数。对于任一点  $(x, y)$  的邻域半径  $r$ :

$$r(x, y) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2} \quad (3)$$

采用规则张力样条函数法时, 采样点数量越多, 构造的表面就越接近现实。但采样点数量超出阈值, 该方法既不会提高空间插值结果精度, 又要增加计算时间和数据容量<sup>[13]</sup>。

(1) 式和 (2) 式中的待定系数  $a_0$  和  $a_i$  可由 (4) 式求解:

$$S(x_j, y_j) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \left\{ - \left[ E_1 \left[ \frac{\varphi^2 [r(x_j, y_j)]^2}{4} \right] + \ln \left[ \frac{\varphi^2 [r(x_j, y_j)]^2}{4} \right] + C_E \right] + \delta_{ij} \omega_0 / \omega_j \right\} \quad (4)$$

(4) 式中,  $\sum_{j=1}^N a_j = 0$ ,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ 。令  $\omega = \omega_0 / \omega_j$  为平滑因子, 用于消除原始数据可能存在的测量误差。当该因子为 0 时, 所构造的曲面经过所有已知采样点。

## 2.2 各向异性与插值方法改进

式 (1) 在要素空间分布呈各向同性时才成立。但由于降解速率不一致, 垃圾堆体存在不均匀沉降。此时, 规则张力样条函数法将垃圾堆体当作各向同性体来插值, 这显然不符合实际情况。朱会议等认为, 各向异性影响了样条函数法的表现力, 造成函数法插值结果精度不高<sup>[14]</sup>。由此看来, 各向异性的引入将有助于改善式 (1) 函数的性状。

根据地统计学原理, 各向异性可由变异函数  $\gamma(h)$  反映:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(\sqrt{2}h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [S(x_i, y_i) - S(x_i + \sqrt{2}h, y_i + \sqrt{2}h)]^2 \quad (5)$$



**作者简介:** 葛莹 (1963), 女, 副教授, 硕士生导师, 主要从事 GIS 与区位理论研究。

E-mail: geying@hhu.edu.cn

**收稿日期:** 2012-3-13

**基金项目:** 国家自然科学基金 (41071347); 地理空间信息工程国家测绘局重点实验室经费资助项目 (201005)

(5) 式中,  $N(\sqrt{2}h)$  为距离  $\sqrt{2}h$  的采样点数,  $S(x_i, y_i)$  是  $(x_i, y_i)$  处采样数据,  $S(x_i + \sqrt{2}h, y_i + \sqrt{2}h)$  是距离  $\sqrt{2}h$  处的采样数据。

实际上, (5) 式是未知的, 通常采用球状模型、高斯模型、指数模型等理论模型, 拟合实验变异函数。经反复试验与比较, 本文最终选定指数模型作为变异函数的理论模型:

$$\gamma(h) = C_0 - C(1 - e^{-\frac{h}{a}}) \quad (6)$$

(6) 式中,  $C_0$  为块金值,  $C$  为拱高,  $C_0 + C$  为基台值,  $a$  为变程, 反映沉降稳定性。变程越大, 表示沉降变化越小, 稳定越强; 反之, 稳定性越弱。各向异性的存在, 造成 (6) 式中的变程  $a$ , 在各方向上发生改变, 可由椭圆近似地描述 (图 1)。椭圆的长半轴为  $a_1$ , 短半轴为  $a_2$ , 且旋转角度为  $\theta$ 。为了消除各向异性, 必须将椭圆形状的变程图转换为以长轴  $a_1$  为半径的圆。

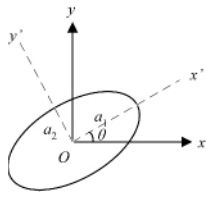


图 1 椭圆形状的变程图

若转换前各向异性的坐标为  $[x, y]^T$ , 转换后各向同性的坐标为  $[x', y']^T$ , 则<sup>[15]</sup>

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7)$$

(7) 式中,  $k = a_1/a_2$ , 称为比例因子。转换后的新坐标  $[x', y']^T$ , 才能用于计算 (3) 式和 (4) 式。

改进后的插值算法步骤是:

1) 设采样点数量不小于 10, 不大于 33 (所有采样点参与运算)。按 (1) 式、(3) 式和 (4) 式, 对每个格网进行插值计算, 并通过反复调节  $\varphi$ 、 $\omega$ , 比较插值结果精度, 直至找到一组较优的沉降插值结果。

2) 借助于标准的地统计软件 Variowin, 选择不同的变异函数理论模型, 为沉降估计值建模, 并通过反复调节模型参数, 确定与实际估计值较吻合的变异理论函数形式, 同时得到各向异性的 3 个参数  $a_1$ ,  $a_2$  和  $\theta$ 。

3) 按 (7) 式, 消除所有坐标的各向异性, 即将坐标  $(x_i, y_i)$  转换为  $(x'_i, y'_i)$ 。

4) 再将转换后各向同性坐标代入 (1) 式、(3) 式和 (4) 式, 重复步骤 1), 直至找到一组较优的沉降插值结果。

### 3 研究结果与分析

#### 3.1 研究数据

研究区位于江苏省境内某个大型垃圾填埋场, 场区总面积约为 0.2 km<sup>2</sup>, 共布设 33 个监测采样点, 如图 2a 所示。试验数据包括现场实测沉降量和格网。各点沉降量均通过磁环沉降指示计在现场测定, 选择一期沉降观测数据作为样本数据。

最终的插值结果呈格网形式排列, 这就需要以格网为基础进行插值运算。在 ArcGIS 环境下, 用 Python 语言编制程序, 按研究区范围生成格网, 如图 2b 所示。由于插值结果精度随格网密度而异, 所以我们按不同的分辨率生成多级格网, 完成一系列试验。

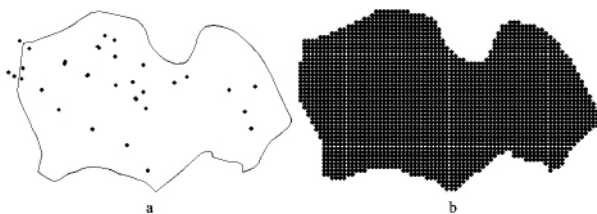


图 2 研究区范围和监测点分布

为了比较规则张力样条函数法、改进后的规则张力样条函数法、张力样条函数法和规则样条函数法, 本文利用 33 个沉降数据, 对研究区沉降量进行插值。前二种方法利用 Python 语言在 ArcGIS 中实现的, 后二种方法是 ArcGIS 附加模块。

本文采用平均误差 (ME) 和均方根误差 (RMSE) 评价规则张力样条函数的插值精度。ME 越接近于 0, 插值精度越高。

#### 3.2 改进前的插值结果分析

为了获取较优的沉降插值结果, 设格网数为 180, 平滑因子  $\omega$  为 0.1, 通过改变张力因子  $\varphi$ , 利用式 (1), 对填埋场的沉降量进行内插 (表 1)。

表 1  $\omega = 0.1$  时张力因子  $\varphi$  的交叉验证结果

张力因子 $\varphi$	ME	RMSE
0.001	0.0612	6.6303
0.005	-0.2221	2.5218
0.010	0.2167	2.5404
0.015	0.4843	3.3158
0.020	0.5902	3.8306
0.100	0.3943	3.7471

结果表明, 平滑因子  $\omega$  一定时, 随着张力因子  $\varphi$  增大, ME 和 RMSE 都是先急速减少, 再急速增加。由此可知, 张力因子  $\varphi$  在 0.005 ~ 0.01 之间, ME 和 RMSE 取得极小值。在这个区间, 继续完成一组插值试验, 最终找到  $\varphi = 0.0067$ , 插值结果的交叉验证 RMSE 最小。

又令张力因子  $\varphi$  为 0.0067, 通过改变平滑因子  $\omega$ , 利用 (1) 式, 再对填埋场的沉降量进行插值 (表 2)。

表 2  $\varphi = 0.0067$  时平滑因子  $\omega$  的交叉验证结果

平滑因子 $\omega$	ME	RMSE	SD
0.01	0.0194	1.9519	1.4377
0.02	-0.0092	1.9367	1.4539
0.03	-0.0261	1.9615	1.4870
0.04	-0.0378	1.9972	1.5237
0.05	-0.0467	2.0373	1.5617
0.06	-0.0539	2.0798	1.6004
0.07	-0.0598	2.1238	1.6396
0.08	-0.0648	2.1688	1.6793
0.09	0.1188	2.2144	1.7192
0.10	-0.0727	2.2605	1.7594

结果表明, ME 在 0.01 ~ 0.02、0.08 ~ 0.09 和 0.09 ~ 0.10 之间, ME 取得极小值。在这 3 个极小值, 当平滑因子  $\omega$  为 0.02 时, RMSE 最小, 而标准差 SD 次小。可以断定, 平滑因子  $\omega$  位于 0.01 ~ 0.02 之间。在该区间上, 继续试验, 最终当平滑因子  $\omega = 0.0141$  处, 规则张力样条函数法的交叉验证 RMSE 最小。

#### 3.3 改进后的插值结果分析

本文采用变异函数的 3 种理论模型, 即指数模型、球状模型和高斯模型, 以及 6 种步长值, 对沉降估计值分别拟合, 并用交叉验证法分析其误差 (表 3)。

表 3 3 种理论变异函数的交叉验证结果

步长	指数模型		球状模型		高斯模型	
	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE
7	0.1229	1.605	0.1605	1.470	0.1630	1.455
8	0.1418	1.438	0.1742	1.634	0.2559	1.622
9	0.1114	1.509	0.3080	1.964	0.4391	2.453
10	0.1227	1.648	0.4368	2.516	0.1648	3.091
11	0.2168	1.872	0.3675	2.783	0.1086	3.123
12	0.4114	2.253	0.4102	2.917	-0.0718	3.201

在拟合实验变异函数时, 指数模型要优于球状模型和

高斯模型。无论是哪一种步长值,前者的 ME 和 RMSE 均小于后者。对于指数模型来说,步长为 8 时, RMSE 最小,尽管 ME 并不是最小值。所以,我们选取步长为 8 的指数模型,对实验变异函数进行拟合。此时,各向异性参数:  $\theta = 287.2$ ,  $a_1 = 414.480$ ,  $a_2 = 210.693$ 。

将各向异性参数代入式(7)转换坐标,消除各向异性后,再计算(3)式和(4)式,并用交叉验证法来评价插值结果精度(表4)。

表4 改进前后规则张力样条函数法的插值比较

插值模型	标准差	均方根误差	最大预测误差	最大残差
规则张力样条函数	0.6025	1.9416	4.1633	0.98
改进后的规则 张力样条函数	0.5574	1.7120	3.0690	0.76
	-7.49%	-11.83%	-26.28%	-22.45%

从表4中可知,改进后的规则张力样条函数的性状明显得到改善,标准差、均方根误差、最大预测误差和最大残差分别减少7.49%、11.83%、26.28%和22.45%。这说明沉降数据的空间采样特性,的确对规则张力样条函数法的插值精度具有极大的影响。并且,主变程  $a_1$  是邻域半径,它反映沉降量稳定性的指标。主变程越大,表示垃圾堆体的沉降变化越小;反之,垃圾堆体的沉降变化越大。

#### 4 结束语

规则张力样条函数法可以改善填埋场沉降的插值结果精度,但会受到垃圾堆体不均匀沉降的影响,造成各向异性的存在。鉴于此,我们采用变异函数的理论模型,即指数模型拟合实验变异函数,获取各向异性的参数,并用这些参数对规则张力样条函数加以修正。试验结果表明,采用改进后的规则张力函数法,对填埋场的沉降数据进行拟合,插值结果精度约提高10%。

#### 参考文献

- [1] 柯瀚,陈云敏,谢焰,等. 适宜降解条件下填埋场的沉降模型及案例分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(6).
- [2] 陈勇,黄泽春,张增强,等. 填埋场沉降监测技术研究现状及其发展[J]. 环境科学与技术, 2009, 32(4).
- [3] 刘疆鹰,徐迪民,赵由才,等. 城市垃圾填埋场的沉降研究[J]. 土壤与环境, 2002, 11(2): 111-115.
- [4] GOODIN W R, MCRAE G J, SEINFELD J H. A Comparison of Interpolation Methods for Sparse Data: Application to Wind and Concentration Fields[J]. Journal of Applied Meteorology, 1979, 18(6): 761-771.
- [5] PARAJKA J. Mapping Long-term Mean Annual Precipitation in Slovakia Using Geostatistical Procedures[C]// Proceedings of the International Conference on Problems in Fluid Mechanics and Hydrology. Prague: Institute of Hydrodynamics, Academy of Sciences, Czech Republic, 1999: 424-430.
- [6] DUBOIS G. Spatial Interpolation Comparison 97: Foreword and Introduction[J]. Journal of Geographic Information and Decision Analysis, 1998, 2(2): 5-12.
- [7] COLLINS C. A Comparison of Spatial Interpolation Techniques in Temperature Estimation[EB/OL]. (1999). [http://www.ncgia.ucsb.edu/conf/SANTA\\_FE\\_CD-ROM/sf\\_papers/collins\\_fred/collins.html](http://www.ncgia.ucsb.edu/conf/SANTA_FE_CD-ROM/sf_papers/collins_fred/collins.html).
- [8] 王海栋,柴洪洲,王敏. 多波束测深数据的抗差 Kriging 拟合[J]. 测绘学报, 2011, 40(2): 238-248.
- [9] HARTKAMP A D, BEURS K D, STEIN A, et al. Interpolation Techniques for Climate Variables[M]. Mexico: Sub-department Soil Science and Geology, Department of Environmental Sciences, Wageningen Agricultural University, 1999: 1-16.
- [10] HOFIERKA J, PARAJKA J, MITASOVA H, et al. Multivariate Interpolation of Precipitation Using Regularized Spline with Tension[J]. Transactions in GIS, 2002, 6(2): 135-150.
- [11] MITAS L, MITASOVA H. General Variational Approach to the Interpolation Problem[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1988, 16(12): 983-992.
- [12] TALMI A, GILAT G. Method for Smooth Approximation of Data[J]. Journal of Computational Physics, 1977, 23(2): 93-123.
- [13] DEMERS M. 武法东,等译. 地理信息系统基本原理[M]. 北京:电子工业出版社, 2001: 184-193.
- [14] 朱会义,刘述林,贾绍凤. 自然地理要素空间插值的几个问题[J]. 地理研究, 2004, 23(4): 425-432.
- [15] 王政权. 地统计学及在生态学中的应用[M]. 北京:科学出版社, 1999.

#### Interpolation of integrated anisotropy into regularized spline with tension

**Abstract:** In the paper, a theoretical semivariogram function was introduced to modify the anisotropy of regularized spline with tension, so as to address the issue of the spatial variability of settlement data spatial interpolation. This modified method was applied for data sets from the settlement of a landfill. The results showed that the interpolation accuracy of an integrated anisotropy into regularized spline with tension could be improved to some extent.

**Key words:** regularized spline with tension; spatial interpolation; variability; anisotropy

GE Ying, XU Xu, LU Xin-qiang, HU Wei-xin (College of Earth Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

(上接第110页)

#### 3D GIS massive tile data management and scheduling

**Abstract:** This paper described the basic characteristics and the common scheduling method of the tile data in 3D GIS. It firstly analyzed the current problems such as complex management and inefficient scheduling method for the massive tile data, and put forward a management method based on crunched structure. Secondly, it described the models of the tile crunched structure and the retrieve data structure, and studied the issue of the incremental update and maintenance. Finally, experiment proved the feasibility and efficiency of the management and scheduling for the massive tile data based on the tile crunched structure.

**Key words:** 3D GIS; tile data; crunched data source

LI Zhi-qing<sup>1,2</sup>, MA Zhao-ting<sup>2</sup>, LI Cheng-ming<sup>2</sup>, ZHAO Zhan-jie<sup>2</sup> (1. Naval Air Engineering Institute, Shandong Yantai 264001, China; 2. Chinese Academy of Surveying & Mapping, Beijing 100830, China)