

文章编号: 1672—7940(2005)05—0387—04

# 曲线光滑的张力样条插值法 VC 实现

邓曙光<sup>1</sup>, 李 婉<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学资源学院国土资源信息系统研究所, 武汉 430074;  
2. 吉林省长吉高速公路管理处, 长春 130031)

**摘 要:** 在微机地理制图中, 张力样条插值法是一种有效实现光滑曲线的方法。它既能保证曲线光滑又能避免曲线相交。本文采用张力样条算法并用 VC++ 实现曲线的光滑, 同时还可以动态改变曲线张力系数  $\sigma$  值, 以使得节点间的曲线为最短, 这样既能消除可能出现的多余拐点, 又能保持曲线的光滑性, 能够满足实际工作中的需要。

**关键词:** 张力样条; 张力系数; 曲线光滑; 数据结构; 模板类

**中图分类号:** P315.69      **文献标识码:** A      **收稿日期:** 2005—06—08

## REALIZATION OF SMOOTHING CURVE WITH TENSION SPLINE INTERPOLATION UNDER VISUAL C++

DENG Shu guang<sup>1</sup>, LI Wan<sup>2</sup>

(1. Institute of National Land and Resources Information System,  
China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;  
2. Changji Expressway Administration of Jilin Province, Changchun 130031, China)

**Abstract:** In the computer geographic mapping, the tension spline interpolation is an effective method to realize the smoothing curve. It can prevent the curve from being crossing so as to make it smooth. This paper realizes smoothing curve with tension spline calculation and with VC++. At the same time, it changes the tension coefficient value of curve in order to make curve of node the shortest. In this way, it can not only remove the surplus inflexion, but also can keep the curve smooth.

**Key words:** tension spline; tension coefficient; smoothing curve; data structure; templates

### 1 引 言

等值线(如等气压线、等高线、剖面线等)反映的地物和现象通常都具有连续性, 相当多的线划图形实体都是光滑的曲线。因此选择满足应用要

求的曲线光滑算法具有十分重要的意义。  
Visual C++ 是 Microsoft 至今最全面和最完善的程序开发产品之一。用 Microsoft 的基本类(MFC)与代码框架生成工具 App Wizard 为窗口系统编写 C 程序, 是用 Visual C++ 编程的最高级也是最有效的部分。MFC 的集合类支持各

种不同的数据结构, 并且提供了对应用程序中使用信息的跟踪<sup>[1]</sup>。CArray 是任意类型数组的模板类, 支持与 C 类似的数组, 但可以按需要动态缩放。CTypedPtrList 是任意类型列表的模板类, 支持非唯一对象的有序列表, 这些对象可按序号或按值访问。CTypedPtrList 列表类似于双链表, 利用它们可以很方便地构成单向或双向链表, 对于链表的遍历、获取、插入、删除, 只需简单的调用它封装的成员函数即可<sup>[2]</sup>。通过使用 MFC 的模板类, 可以大大的缩短编程时间, 减少错误, 提高效率。

## 2 问题的提出

在大多数 GIS 系统中, 通常采用曲线光滑的算法主要有如下几种: 线形迭代法; Bezier 函数法; 五点光滑法; 三次样条函数法; 张力样条插值法等。对以上算法进行数学原理的分析, 并通过对各种算法的实际运用发现: 线形迭代法、Bezier 函数法拟合的光滑曲线不能通过已知的结点图 1 (a); 五点光滑法, 三次样条函数法在空间变量较大的时候会造成相邻的曲线相交图 1 (b); 张力样条函数有着既可以形成光滑的曲线, 也可以形成分段的线性函数的显著特征, 这样可以用它克服

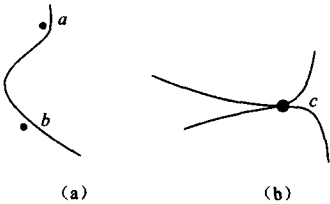


图 1 曲线光滑示意图  
Fig.1 Smooth sketch map of curve

曲线不能通过已知结点与相邻曲线相交的现象, 但是它具有一个张力系数  $\sigma$ 。当  $\sigma \rightarrow 0$  时, 张力样条函数就等同于三次样条函数, 当  $\sigma \rightarrow \infty$  时, 则它退成分段线性函数, 即从节点到节点是折线连接<sup>[3]</sup>。因此, 根据实际需要动态选择合适的  $\sigma$  值, 使点与点之间的曲线尽量缩短, 这样既能消除可能出现的多余拐点, 又能保持曲线的光滑性, 在绘制地形图中有着重要意义。

## 3 解决问题的思路

### 3.1 选择算法的基本思想

通过以上的算法的比较与分析, 笔者选择张力样条插值法, 并采用在 VC++ 下实现曲线的光滑, 同时封装一个张力系数的类来满足各种实际的、动态的需要, 即无论数据点的多少及间距的差别大小都能够绘制出满足要求的光滑曲线。

### 3.2 张力样条曲线的数学原理

张力样条函数是 Schweikert 为消除三次样条插值函数有时会出现多余的拐点而引入的<sup>[4]</sup>。其基本构思是分段插值函数为直线插值和两个双曲函数  $\text{sh}\sigma x$  和  $\text{ch}\sigma x$  的线性组合:

$$f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \text{sh}\sigma x + c_4 \text{ch}\sigma x \quad (1)$$

式(1)中,  $\sigma$  为张力系数。式(1)整体具有连续二阶导数,  $\sigma$  的作用是控制拐点的位置和曲线的形态<sup>[5]</sup>。通过有关复杂的数学推导, 可以得到张力样条函数的表达式:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{\sigma^2 \text{sh}(\sigma h_i)} [f''(x_i) \text{sh}(\sigma(x_{i+1} - x)) \\ & + f''(x_{i+1}) \text{sh}(\sigma(x - x_i))] \\ & + \left[ y_i - \frac{f''(x_i)}{\sigma^2} \right] \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \\ & + \left[ y_{i+1} - \frac{f''(x_{i+1})}{\sigma^2} \right] \frac{x - x_i}{h_i} \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , 分析张力样条函数的特点:

1) 如果  $\sigma \rightarrow 0$

$$f''(x) = f''(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (3)$$

那么, 式(3)为一标准的 3 次样条函数表达式。3 次样条插值, 不会出现拉格朗日插值时的那种“龙格现象”, 这样函数可以保证曲线既光滑, 又通过已知数据点。

2) 当  $\sigma \rightarrow +\infty$  时

$$f(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \quad (4)$$

此时张力样条函数退化为分段线性函数。分段线性插值, 其图形是锯齿形的折线, 它虽然连续, 但一阶导数在节点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 处都不存在, 因而极不光滑, 但分段线性函数可以绝对保证线段不相交。从张力样条函数优良的数学特性可以看出, 对某一地质变量分布区域, 只要选择合适的张力系数, 就可以尽量避免不合乎要求的

光滑曲线相交。

3.3 确定张力系数

由于地图上用曲线描绘的地形地物, 大多呈现出近似极限姿态, 特征点之间曲线应取最短的为好, 所以要选择合适的张力系数, 这样可避免相邻光滑曲线的相交又通过型值点。样条受比例的影响, 当节点坐标用某个常数相乘时, 节点间的距离亦增大为了消除这个非线性特性, 需要采用一个规范化张力系数即:

$$\sigma' = \frac{\sigma(x_n - x_1)}{n - 1} \quad (\text{非周期函数})$$
$$\sigma' = \frac{\sigma(x_{n+1} - x_1)}{n} \quad (\text{周期函数})$$

(5)

在程序中设计动态的张力系数函数来预先进行试验, 找出适合于地图上曲线要求的  $\sigma$  值作为标准, 以后当  $(x_n - x_1)/(n - 1)$  的比值发生变化时, 就可以由这个标准的  $\sigma$  值来改变  $\sigma$  值。这样, 不管比例变化如何, 各样具有同样规范化张力系数的样条有着相似的曲线外貌。本文绘制实例中借助式(5), 通过程序中动态测试函数实验出最适宜张力系数  $\sigma$  值。取不同  $\sigma$  值时函数可以绘制出的部分图形如图 2、图 3、图 4。

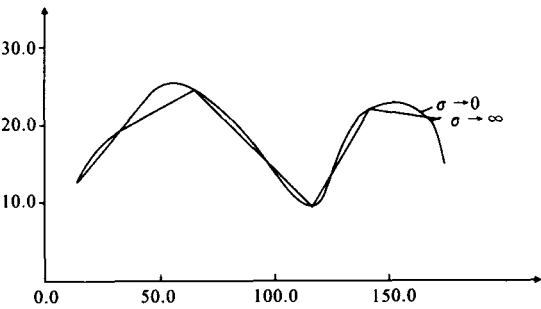


图 2 当  $\sigma \rightarrow \infty$  图形成锯齿形折线, 当  $\sigma \rightarrow 0$  3 次样条光滑曲线

Fig.2 When  $\sigma \rightarrow \infty$  becomes the broken line of saws shape, when  $\sigma \rightarrow 0$  is spline smooth curves

由不同  $\sigma$  值绘制的图形, 可以发现当  $\sigma = 1.5$  较为合适。

3.4 实现算法流程与数据结构

- 1) 算法流程: ①输入原始坐标点; ②判断曲线类型、计算首尾导数; ③计算分段弦长和累加弦长; ④动态输入张力系数; ⑤利用追赶法解线性方程组; ⑥内插数据绘出光滑曲线。
- 2) 数据结构(属性设计):

typedef CArray< CGeoPoint, CGeoPoint &> CCurve; //一条光滑曲线的点集的坐标

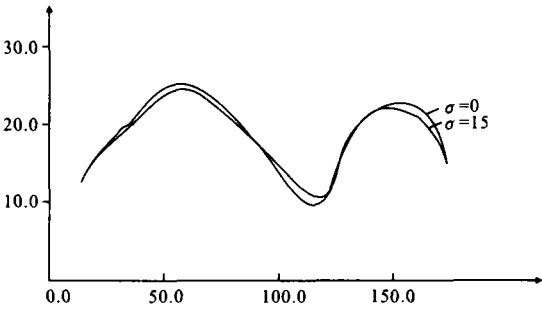


图 3 当  $\sigma = 15$  图形锯齿形折线变得较光滑, 向 3 次样条曲线接近

Fig.3 When  $\sigma = 15$  saw shapes broken line becomes smooth, it is close to three kinds of spline curves

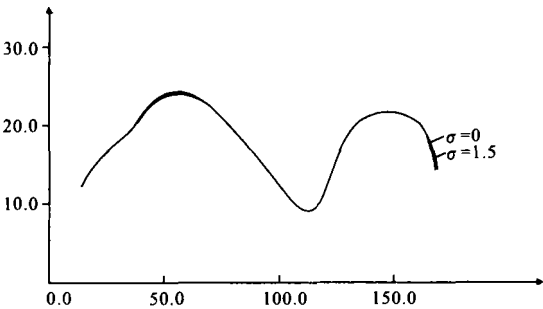


图 4 当  $\sigma = 1.5$  这些图形既通过型值点, 又能实现曲线光滑

Fig.4 When  $\sigma = 1.5$  is through type values, it can realize the smoothing curves

```
CCurve; //一条光滑曲线的点集的坐标
typedef CTypedPtrList< CPtrList, CCurve *>
CCurveList; //光滑曲线链表(给定某值的光滑曲线不限于一条)
// 定义的横向、纵向网格边的序号, 以及输入点坐标

struct IsoPoint
{
    int i; int j; //该光滑曲线点所在边的行号. 列号
    BOOL bHorV; //在横边还是列边上 1 - -> 横边; 0 - -> 纵边
    float x; float y; //输入点坐标
} PreviousPoint, CurrentPoint, NextPoint;

3) 方法设计:
class CCurve: public CObject //张力样条光滑曲
```

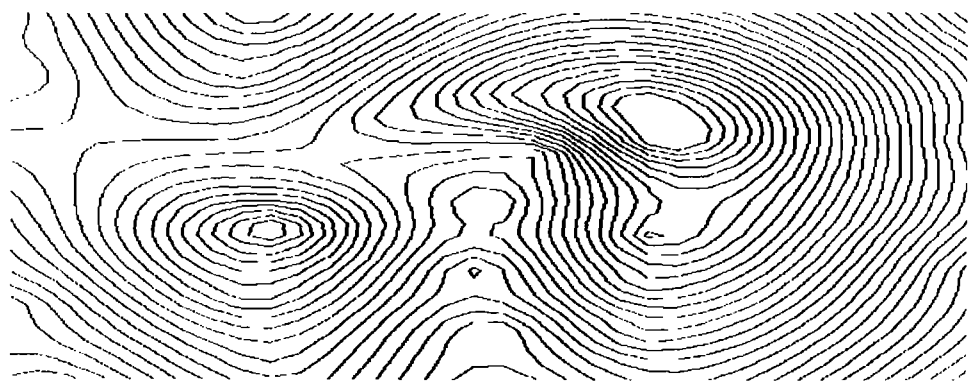


图 5 程序实现后生成的效果图(有波浪形、抖动现象)

Fig.5 Procedure result picture (in wave shapes and in shaking )

```
线类
{
public:
    int KindOfValues(); //判断曲线值的
    类型
        void GeneratePlusValues (int num
Curves, float valStart, float valEnd); //计算弦
长与累加弦长
        void SetStrainValueList(int n, Ccurve
&Sigma); //动态测试并设置张力系数 σ
public:
    BOOL DrawSmoothStroke( CDC * pDC );
    //绘制光滑曲线
protected:
    CCurveValues m_CurveValues; //管理样条
    曲线值
}
```

4 实现效果图

用以上方法编制程序生成(选取部分成图)效果图(图 5)。

5 结 语

利用张力样条法并动态改变曲线张力系数值,可以消除多余的拐点,节点的距离也不受限制,从而绘制出地形图上的各种光滑曲线。本方法的缺点是曲线在某些情形下呈波浪形,有抖动现象,致使曲线失真。

参考文献:

[ 1 ] 文伟, 杨耀权, 于希宁. 用 Visual C++ 语言实现的 Delaunay 三角剖分算法[ J ] . 华北电力大学学报, 2000, 27(4): 54-58.

[ 2 ] 凌海滨, 吴兵. 改进的自连接的 Delaunay 三角网生成算法[ J ] . 计算机应用, 1999, 19( 12): 10-12.

[ 3 ] 王来生, 鞠时光, 郭铁雄, 等. 大比例尺地形图机助绘图算法及程序[ M ] . 北京: 测绘出版社. 1999.

[ 4 ] Schweikert D G. An interpolation curve using a spline in tension[ J ] . Math. Physics, 1966, 45( 2): 312-317.

[ 5 ] 孙家旭. 样条函数与计算几何[ M ] . 北京: 科学出版社, 1982.