1.2 Временные характеристики

1.2.1 Реакция на произвольное воздействие

Для решения дифференциального уравнения (нахождения реакции системы) с помощью преобразования Лапласа необходимо:

- найти корни характеристического уравнения $D(s) = a_0 s^n + \ldots + a_n = 0$;
- найти изображение реакции умножением ПФ на изображение входа по Лапласу $Y(s) = W(s) \times X(s)$ и записать его в виде суммы простых дробей по теореме разложения в соответствии с корнями характеристического уравнения;
- найти коэффициенты числителей дробей (вычеты в полюсах);
- найти оригинал для каждой дроби по таблице соответствия и записать конечное решение в виде суммы отдельных оригиналов.

Рекомендуется:

а) перед вычислением корней обязательно нормировать ПФ по старшему коэффициенту при s^n знаменателя;

б) не сокращать существующие нули и полюса с положительной действительной частью, ведущие к неустойчивости системы, если их части не являются целыми числами; остальные нули и полюса могут быть сокращены перед переходом во временную область;

в) для кратных полюсов записывать дробями все степени корня от наибольшей до первой в порядке их убывания;

г) комплексные сопряженные корни представлять одним общим квадратным трехчленом.

После разложения на простые дроби и вычисления вычетов полезно проверить правильность результата. Первое правило проверки – сумма дробей правой части должна быть равна изображению в левой части равенства. Второе правило проверки – сумма всех составляющих оригинала при $t = 0$ (начальное значение оригинала) в соответствии со свойствами преобразования Лапласа должна быть равна $\lim\limits_{s\to\infty} Y(s) \cdot s$.

Пример 1. Используя преобразование Лапласа, найти оригинал реакции на воздействие e^{-2t} системы с ПФ $W(s) = 4e^{-s}/(s + 2)$. Находим изображение по Лапласу входного воздействия $X(s) = 1/(s + 2)$, умножаем его на передаточную функцию системы, получаем изображение реакции

$$Y(s) = \frac{4e^{-s}}{(s+2)^2}.$$

При переходе от изображения к оригиналу коэффициент 4 сохраняется, полюс -2 образует составляющую e^{-2t}, а поскольку он кратный (два одинаковых корня), то появляется составляющая t, и, наконец, оператор сдвига $e^{-s\tau}$ при $\tau = 1$ с создаёт запаздывание во времени, которое отображается скачком со сдвигом вида $1(t - \tau)$ или, в данном случае, $1(t - 1)$. Окончательно оригинал равен $y(t) = 4te^{-2t} \times 1(t - 1)$.

Пример 2. Найти начальное, конечное значения и аналитическую запись для оригинала, если изображение по Лапласу отклика системы равно $F(s) = 3/s/(s + 1)$.

Начальное значение оригинала (при $t = 0_+$) вычисляется как предел $\lim\limits_{t \to 0_+} x(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s \cdot X(s)$, для производной по времени n-го порядка от функции $x(t)$ производится умножение изображения на s^{n+1}, т.е. $\lim\limits_{t \to 0_+} x^{(n)}(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s^{n+1} \cdot X(s)$. Поэтому

$$F(s) = \frac{3}{s(s+1)}; \quad f(0_+) = \left.\frac{3 \cdot s}{s(s+1)}\right|_{s=\infty} = \left.\frac{3}{s+1}\right|_{s=\infty} = 0.$$

Конечное значение оригинала (при $t = \infty$) для устойчивых систем также вычисляется как предел $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \lim\limits_{s \to 0} s \cdot X(S)$

$$F(s) = \frac{3}{s(s+1)}; \quad f(\infty) = \left.\frac{3 \cdot s}{s(s+1)}\right|_{s=0} = \left.\frac{3}{s+1}\right|_{s=0} = 3.$$

Для полной записи оригинала разлагаем изображение на простые дроби в соответствии с полюсами, находим вычеты a и b в полюсах методом подстановки полюсов (приложение Б)

$$\frac{3}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} = \frac{3}{s} + \frac{-3}{s+1}.$$

По таблице соответствия оригиналов и изображений (приложение А) записываем оригинал в виде формулы $f(t) = 3 - 3e^{-t}$. Проверка: при $t = 0$ значение оригинала равно нулю, при $t = \infty$ соответственно 3.

Задания для самостоятельного решения.

1.2.1.1 Определить реакцию на воздействие $1(t)$ объекта с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{20}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}.$$

1.2.1.2 Записать изображение реакции на воздействие $x(t) = t^2$, определить коэффициент передачи в установившемся режиме для объекта

$$100\frac{d^3y}{dt^3}+10\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+0{,}1y=50\frac{dx}{dt}+5x.$$

1.2.1.3 Система имеет коэффициент усиления $k = 5$, нуль –2 и полюса –1, –5 и –10. Определить реакцию на воздействие $r(t) = \delta(t)$.

1.2.1.4 Найти реакцию системы (рисунок 1.18) на единичный скачок при нулевых начальных условиях

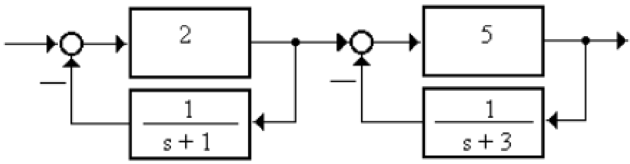


Рисунок 1.18

1.2.1.5 Найти с помощью преобразования Лапласа вынужденную составляющую переходного процесса от воздействия $x(t) = t$.

$$0{,}2y''+1{,}2y'+y=2x$$

1.2.2 Переходная и импульсная функции

К типовым функциям времени (реакциям системы) относятся переходная и импульсная переходная (весовая) функции.

Переходной функцией $h(t)$ называется реакция системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях. Реакция на скачок произвольной величины называется кривой разгона.

Импульсной (весовой) функцией $g(t)$ или $w(t)$ называется реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Она является оригиналом передаточной функции.

Поскольку всегда $Y(s)=X(s)\cdot W(s)$, то

$$h(t)\div H(s)=L\{1(t)\}\cdot W(s)=\frac{1}{s}\cdot W(s)=W(s)/s,$$

$$g(t)\div G(s)=L\{\delta(t)\}\cdot W(s)=1\cdot W(s)=W(s).$$

Для оценки начального и конечного (установившегося) значений переходной характеристики объекта нужно найти отношение коэффициентов при s в степени n числителя и знаменателя ПФ в первом случае, и отношение свободных членов передаточной функции во втором (если объект устойчив).

Начальное значение: $h(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{W(s) \cdot s}{s} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m < n \\ \dfrac{b_0}{a_0} & \text{при} \quad m = n \end{cases}$

Конечное значение: $h(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{W(s) \cdot s}{s} = \dfrac{b_m}{a_m} = k_{уст}$.

Связь между импульсной и переходной функциями определяется соотношением $G(s)=H(s)\cdot s$, откуда $g(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$ и $h(t) = \int\limits_0^\infty g(t)dt$.

Иначе говоря, импульсная функция является производной по времени от переходной функции.

Пример 1. Для системы $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3 = 3\ddot{u} + 2\dot{u} + u$ найти $h(0)$ и $k_{уст}$.

Поскольку порядок многочлена числителя ПФ $m = 2$ равен порядку многочлена знаменателя $n = 2$, начальное значение переходной функции равно $h(0) = b_0/a_0 = 3/1 = 3$. Коэффициент усиления в установившемся режиме равен $k_{уст} = b_m/a_n = 1/3 = 0.333$.

Пример 2. Определить передаточную функцию объекта регулирования, если его весовая функция равна $g(t) = 3 + 2e^{-t} - e^{-4t}$.

По таблице соответствия А.1 находим изображение весовой функции (а это уже и есть передаточная функция объекта)

$$G(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+4}.$$

Приведя все дроби к общему знаменателю, получим ПФ в стандартном виде

$$W(s) = G(s) = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s(s+1)(s+4)} = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s^3 + 5s^2 + 4s}.$$

Пример 3. Найти весовую функцию системы, если переходная функция равна $h(t) = 4(1 - e^{-0,3t})$.

Весовая функция равна производной по времени от переходной

$$g(t) = 1{,}2e^{-0{,}3t}.$$

Другой путь решения – через преобразование Лапласа

$$H(s) = L\left\{4(1-e^{-0{,}3t})\right\} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+0{,}3} = \frac{4s+1{,}2-4s}{s(s+0{,}3)} = \frac{1{,}2}{s(s+0{,}3)},$$

убираем нулевой корень s в знаменателе, принадлежащий входному воздействию – скачку, получаем ПФ или изображение весовой функции $1{,}2/(s + 0{,}3)$, откуда весовая функция

$$g(t) = L^{-1}\{1{,}2/(s + 0{,}3)\} = 1{,}2e^{-0{,}3t}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.2.2.1 Записать изображение весовой функции системы с $h(t) = 0{,}16 - 0{,}16e^{-5t} + 0{,}2t$.

1.2.2.2 Вычислить $h(t)$ системы (рисунок 1.19), если $k = 9$

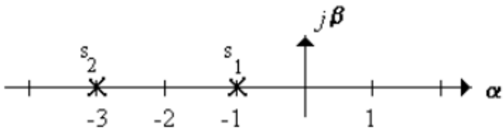


Рисунок 1.19

1.2.2.3 Весовая функция системы равна

$$g(t) = 0{,}02(e^{-0{,}5t} - e^{-0{,}2t}).$$

Записать изображение переходной функции.

1.2.2.4 Найти изображение весовой функции (рисунок 1.20)

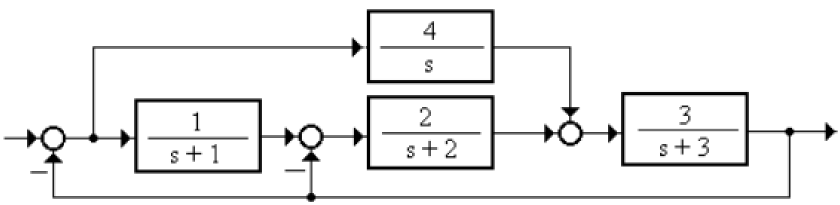


Рисунок 1.20

1.2.2.5 Записать $h(t)$ фильтра по выходу a (рисунок 1.21)

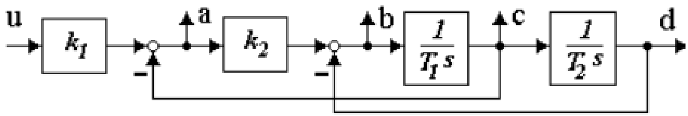


Рисунок 1.21

при значениях параметров $k_1 = 1$, $k_2 = 12$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0{,}1$.

1.2.2.6 Записать $g(t)$ фильтра (рисунок 1.21) по выходу c при тех же значениях параметров схемы.

1.2.2.7 Найти оригинал передаточной функции объекта (рисунок 1.22)

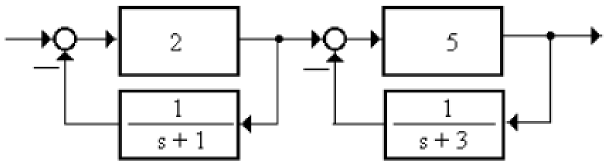


Рисунок 1.22

1.3 Частотные характеристики

1.3.1 Основные частотные характеристики

Аналитическое выражение для комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$ можно получить по операторной передаточной функции $W(s)$, приравняв в переменной Лапласа $s = \sigma + j\omega$ действительную часть σ нулю. Из комплексной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{Y(\omega,t)}{X(\omega,t)} = \frac{A_{вых}(\omega)\cdot\sin(\omega t + \varphi_{вых}(\omega))}{A_{вх}\cdot\sin(\omega t + \varphi_{вх})} = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega)$$

получают амплитудную (АЧХ) $A(\omega) = A_{вых}(\omega)/A_{вх}$, фазовую (ФЧХ) $\varphi(\omega) = \varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}$, действительную (ВЧХ) $P(\omega) = \mathrm{Re}W(j\omega)$ и мнимую (МЧХ) $Q(\omega) = \mathrm{Im}W(j\omega)$ частотные характеристики, связанные соотношениями

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)};$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = A(\omega)\cdot\cos\varphi(\omega), \qquad \mathrm{Im}(\omega) = A(\omega)\cdot\sin\varphi(\omega).$$

Если представить комплексный коэффициент передачи в виде дроби

$$W(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{P_1(\omega)+jQ_1(\omega)}{P_1(\omega)+jQ_1(\omega)},$$

то амплитудная характеристика будет равна

$$A(\omega)=\frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}=\frac{\sqrt{P_1^2(\omega)+Q_1^2(\omega)}}{\sqrt{P_2^2(\omega)+Q_2^2(\omega)}},$$

а фазовая характеристика

$$\varphi(\omega)=\arg N(j\omega)-\arg D(j\omega)=arctg\,\frac{Q_1(\omega)}{P_1(\omega)}-arctg\,\frac{Q_2(\omega)}{P_2(\omega)}.$$

Обобщающей является амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ или просто АФХ) – кривая (годограф), которую чертит на комплексной плоскости конец вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

В ходе расчетов следует отбросить отрицательные, мнимые и комплексные частоты и по возможности сократить получающиеся выражения для действительной и мнимой частей на ω.

При построении частотных характеристик учитывают гладкость кривой (при разрывах годограф изменяется асимптотически), указывают на графике стрелкой направление увеличения частоты и/или крайние частоты. В каком бы порядке не были расположены частоты в таблице, построение кривой следует всегда производить по возрастанию значений частоты.

Быстрая проверка правильности расчетов:

- АФЧХ и АЧХ начинаются при значении $b_m/a_n = k_{уст}$;
- АФЧХ и АЧХ заканчиваются в нуле ($m<n$) или при b_0/a_0 (для $m=n$);
- АФЧХ устойчивой системы, не имеющей нулей, проходит по часо-

вой стрелке столько квадрантов, каков порядок характеристического полинома.

Реакцию системы на гармоническое воздействие любой частоты ω в показательной форме получают путем умножения на $A(\omega)$ амплитуды входного сигнала и добавления $\varphi(\omega)$ к его фазе.

Пример 1. Построить частотные характеристики системы с ПФ $W(s) = 2/(s^2+5s+6)$.

Подставляем $s=j\omega$, учитывая, что $j=\sqrt{-1}$, снижаем порядок j ($j^2 = -1$; $j^3 = -j$ и т.п.), избавляемся от мнимости в знаменателе, умножая числитель и знаменатель дроби на комплексное выражение, сопряженное стоявшему в знаменателе, отделяем действительную и мнимую части, приводим в знаменателе подобные члены

$$W(j\omega)=\frac{2}{(j\omega)^2+j5\omega+6}=\frac{2}{6-\omega^2+j5\omega}=$$

$$=\frac{2\cdot(6-\omega^2-j5\omega)}{(6-\omega^2+j5\omega)\cdot(6-\omega^2-j5\omega)}=\frac{12-2\omega^2-j10\omega}{36-6\omega^2-6\omega^2+\omega^4+25\omega^2}=$$

$$=\frac{12-2\omega^2}{36+13\omega^2+\omega^4}+j\frac{-10\omega}{36+13\omega^2+\omega^4}=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega)\,.$$

В данном случае числители и знаменатели дробей (действительной и мнимой частей) на ω сократить нельзя. Составляем таблицу (таблица 1), используя обязательные значения частот (можно взять больше точек, но не меньше), и подставляем эти значения:

- крайние частоты 0 и +∞;
- частоты пересечения характеристик с осями (определяются путем приравнивания числителей дробей мнимой и действительной части к нулю и решения полученного уравнения);
- частоты разрыва характеристики (находят, приравнивая знаменатель нулю и решая уравнение) и близкие к ним (чуть больше-чуть меньше) частоты;
- прочие частоты для повышения точности расчета.

Таблица 1

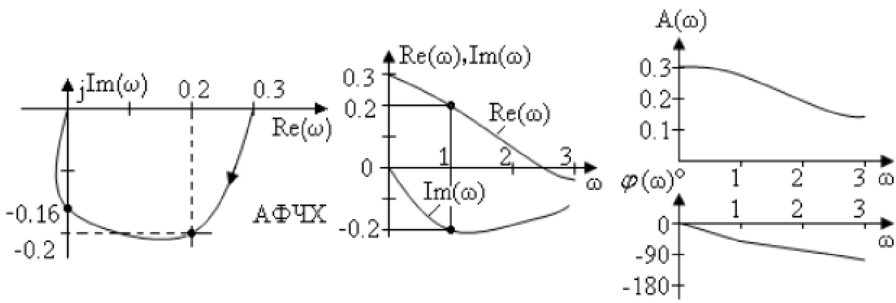
ω	Re(ω)	Im(ω)	A(ω)	φ(ω)
0	0,33	0	0,3	0
∞	0	0	0	~
2,45	0	-0,16	0,16	-90°
1,00	0,20	-0,20	0,28	-45°
3,00	-0,03	-0,14	0,14	-120°

Приравнивая Re(ω) = 0, получаем $6 - \omega^2 = 0$, откуда ω = 2,45.

Приравнивая Im(ω) = 0, получаем 10ω = 0, откуда ω = 0.

По виду биквадратного уравнения $36+13\omega^2+\omega^4=0$ определяем, что частот разрыва (действительных корней) нет. Частоты 1 и 3 рад/с добавлены произвольно для более точного построения графика.

По одной таблице можно построить АФЧХ на комплексной плоскости (рисунок 1.25, а), индивидуально ВЧХ и МЧХ (рисунок 1.25, б), и после дополнительных расчетов АЧХ и ФЧХ (рисунок 1.25, в).



а б в

Рисунок 1.25

Пример 2. Записать аналитически реакцию системы с известными АЧХ и ФЧХ (рисунок 1.26) на воздействие $x(t) = 3{,}5\sin(t)$.

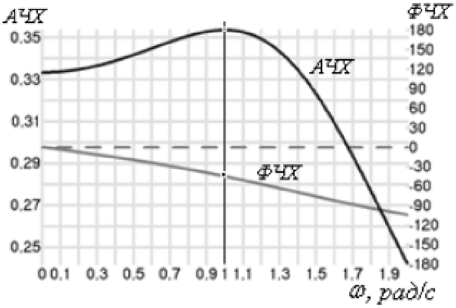


Рисунок 1.26

Общий вид гармонического сигнала $A\sin(\omega t + \varphi)$. Следовательно, входное воздействие характеризуется параметрами: амплитуда 3,5, фаза 0 рад, частота $\omega = 1$ рад/с. Находим для этой частоты по графику $A(\omega) = 0{,}36$; $\varphi(\omega) = -45° = -0{,}785$ рад.

Отсюда амплитуда выходной величины равна $3{,}5 \cdot 0{,}36 = 1{,}26$; фаза выходной величины $0 - 0.785$ рад и окончательный вид реакции $y(t) = 1{,}26\sin(t - 0{,}785)$.

Пример 3. При воздействии $x(t) = 2\sin 10t$ найти сигнал на выходе системы с передаточной функцией $W(s) = 4/(0{,}1s + 1)$.

Получаем по ПФ аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{0{,}01\omega^2 + 1}}; \qquad \varphi(\omega) = -arctg(0{,}1\omega).$$

Для известной частоты 10 рад/с значения АЧХ и ФЧХ равны $A(\omega = 10) = 4/\sqrt{2} = 2{,}828$; $\varphi(\omega = 10) = -\pi/4 = -0{,}785$. Выражение для выходного гармонического сигнала $y(t) = 5{,}656(\sin 10t - 0{,}785)$.

Задания для самостоятельного решения.

1.3.1.1 Построить АФЧХ звена (рисунок 1.27), если $k = 10$

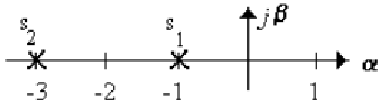


Рисунок 1.27

1.3.1.2 Записать формулы для вычисления АЧХ и ФЧХ системы (рисунок 1.28)

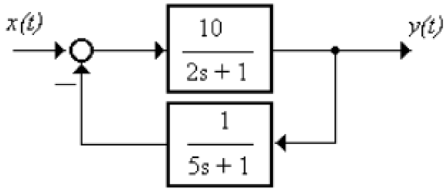
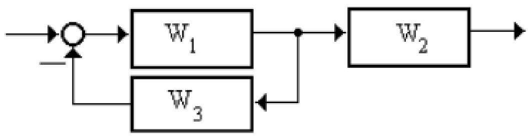


Рисунок 1.28

1.3.1.3 Записать формулы для вычисления АЧХ и ФЧХ системы (рисунок 1.29), если $W_1(s) = 10/(1 + 10s)$, $W_2(s) = 100/s$, $W_3(s) = 1$.



1.3.1.4 Записать дифференциальное уравнение движения для системы с комплексным коэффициентом передачи

1.3.1.5 Построить АЧХ фильтра (рисунок 1.30) по выходу d

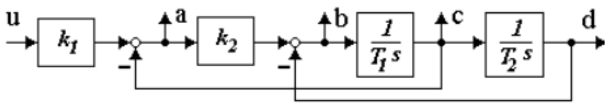


Рисунок 1.30

при значениях параметров $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $T_1 = 2$, $T_2 = 0{,}1$.

1.3.1.6 Описать формулой частотную реакцию *y(t)* на входное гармоническое воздействие *x(t)=3sint*, если передаточная функция фильтра равна

$$W(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 3}.$$

1.3.2 Логарифмические частотные характеристики

Зависимость $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ от $\lg(\omega)$ называется логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ) или ЛАХ. Зависимость $\varphi(\omega)$ от $\lg(\omega)$ называется логарифмической фазной частотной характеристикой (ЛФЧХ) или просто ЛФХ. Частоту откладывают либо в логарифмах (в декадах), либо в радианах, но с учетом логарифмического масштаба. Декада соответствует изменению частоты в 10 раз, $L(\omega)$ откладывают в децибелах (дБ), $\varphi(\omega)$ в градусах.

Для упрощения при построении вручную действительную ЛАЧХ заменяют асимптотической, т.е. ломаной линией из прямых отрезков, имеющих стандартный наклон, кратный ±20дБ/дек.

Частоты пересечения отрезков ω_{ci} называются частотами сопряжения, они соответствуют корням ПФ. Частоты пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс ω_{cp} называются частотой среза, они соответствуют значению $\lg A(\omega)=0$ или $A(\omega)=1$ (усиление или ослабление сигнала на частоте среза отсутствует). Для удобства построения через значения сопрягающих частот проводят на графике вертикальные линии, а на свободном поле графика – вспомогательные линии со стандартными наклонами $k(-20)$ дБ/дек.

Частоты сопряжения находят по корням (постоянным времени *T*) простых дробей, на которые разбивают ПФ, или типовых звеньев, из которых состоит структурная схема системы регулирования.

Звено первого порядка (один действительный корень)

$$\frac{1}{Ts+1} \to \omega_c = \left|\frac{1}{T}\right| \text{ или } \frac{1}{s+\alpha} \to \omega_c = |\alpha|.$$

Звено второго порядка (комплексные сопряженные корни)

$$\frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \to \omega_c = \left|\frac{1}{T}\right|,\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

или

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \to \omega_c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \xi = |\alpha| \cdot T = \frac{|\alpha|}{\omega_c},$$

где ξ – показатель затухания (коэффициент демпфирования), характеризует величину резонанса в звене. При $\xi = 1$ резонанс отсутствует, при $\xi \to 0$ резонансный выброс h стремится к бесконечности. При значениях $\xi < 0{,}6$ асимптотическую ЛАЧХ корректируют на величину выброса h, определяемого по формуле $h = 20\lg\left(\frac{1}{2\xi}\right) \cdot \frac{l}{2}$, где l – число одинаковых корней (кратность корня), либо по типовым характеристикам (таблица 2) и графикам.

Таблица 2

ξ	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	1,00
h, дБ	20,00	14,00	10,30	8,00	6,50	5,00	3,00	1,50	-6,00

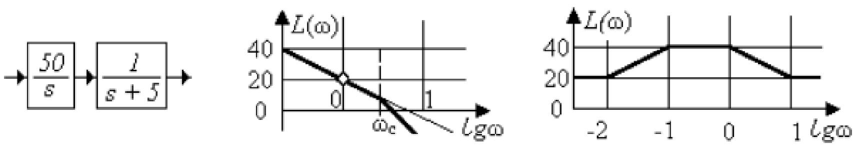
Левую (начальную) часть ЛАЧХ (низкочастотную или НЧ-асимптоту) или ее продолжение проводят через точку с координатами $\lg\omega=0$ ($\omega = 1$) и $L(\omega)=20\lg K$ слева направо с наклоном $\nu\cdot$(-20 дБ/дек) до первой (наименьшей) частоты сопряжения. Здесь $\nu = r - l$ это степень астатизма, r – число нулевых корней знаменателя, l – числителя; добротность K – отношение свободных членов полиномов числителя и знаменателя ПФ после удаления нулевых корней.

Двигаясь вправо, на каждой частоте сопряжения продолжают ЛАЧХ с отклонением от предыдущего направления: для корня числителя вверх (+20 дб/дек); для корня знаменателя вниз (–20 дБ/дек). Если кратность корня $l \neq 1$, наклон асимптоты изменяется в l раз. Общий наклон ЛАЧХ в конце равен $(n-m)\cdot$(–20 дБ/дек). Выбросы при комплексных корнях откладывают вверх для корней знаменателя, вниз для корней числителя, близкие выбросы суммируются графически.

ЛФЧХ устойчивых систем строят по шаблону, неустойчивых – по вычисляемым точкам. Приближенно считают, что участку ЛАЧХ с наклоном ±20 дБ/дек соответствует фазовый сдвиг около ±90°, а участку с наклоном ±40 дБ/дек сдвиг на ±180°; действительному корню знаменателя соответствует угол наклона ЛФЧХ на сопрягающей частоте $\varphi = -\mathrm{arctg}(\omega T) = -45°$, комплексной паре $\varphi = -\mathrm{arctg}(\xi \cdot 2\omega T/(1 - \omega^2 T^2))$.

У статических систем (степень астатизма $\nu = 0$) НЧ-асимптота представляет собой прямую, параллельную оси частот, и значение K в децибелах равно расстоянию этой прямой от оси частот ω. У астатических систем находят частоту ω_k пересечения НЧ-асимптоты или её продолжения с осью частот, откуда $K = \omega_k^\nu$. Степень астатизма определяется по наклону НЧ-асимптоты относительно оси частот, частоты сопряжения находят по точкам пересечения асимптот – касательных, проведенных к линейным участкам реальной ЛАЧХ.

Пример 1. Построить ЛАЧХ системы, заданной структурной схемой (рисунок 1.31, а). Передаточная функция системы равна $W(s) = 50/[s(s + 5)]$.



а б в

Рисунок 1.31

Определяем параметры НЧ-асимптоты:
- порядок астатизма $\nu = 1 - 0 = 1$ (имеется один нулевой корень в знаменателе);
- добротность $K = 50/5 = 10$; $20\lg K = 20$.

Нули в системе отсутствуют, полюс -5 имеется, отсюда частота сопряжения $\omega_c = 5$ рад/с; lg5 = 0,7. Строим график ЛАЧХ толстой сплошной линией, проводя слева вниз прямую линию с наклоном 1×(-20 дБ/дек) через точку с координатами (20 дБ, 0) до первой частоты сопряжения (рисунок 1.31, б). Поскольку частота сопряжения соответствует полюсу, отклоняемся от текущего направления вниз на угол -20 дБ/дек, общий наклон ЛАЧХ в конце равен -40 дБ/дек. Корень действительный, поэтому резонанса нет, выбросы не учитываем.

Пример 2. Составить ПФ системы с заданной ЛАЧХ (рисунок 1.31, в), предполагая, что все корни имеют отрицательную действительную часть.

На частотах сопряжения $\omega_{c1} = 10^{-2} = 0.01$ и $\omega_{c4} = 10^{1} = 10$ наблюдается отклонение характеристики от предыдущего направления вверх на +20 дБ/дек, на частотах сопряжения $\omega_{c2} = 10^{-1} = 0.1$ и $\omega_{c3} = 10^{0} = 1$ – вниз на -20 дБ/дек, поэтому передаточная функция будет иметь вид

$$W(s) = \frac{(\frac{1}{\omega_{c1}}s+1)(\frac{1}{\omega_{c4}}s+1)}{(\frac{1}{\omega_{c2}}s+1)(\frac{1}{\omega_{c3}}s+1)} \cdot K = \frac{(\frac{1}{0,01}s+1)(\frac{1}{10}s+1)}{(\frac{1}{0,1}s+1)(\frac{1}{1}s+1)} \cdot K.$$

Поскольку $20\lg K = 20$ дБ, то $\lg K = 1$, $K = 10$ и окончательно

$$W(s) = \frac{(100s+1)(0,1s+1)}{(10s+1)(s+1)} \cdot 10 = \frac{10s^2+100,1s+1}{10s^2+11s+1} \cdot 10.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.3.2.1 Найти частоты среза системы $\dfrac{100s}{(10s+1)(0,1s+1)}$.

1.3.2.2 Определить конечное значение ЛФЧХ (рисунок 1.32)

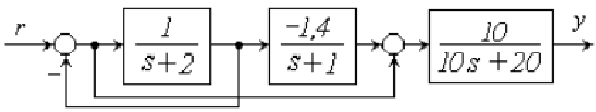


Рисунок 1.32

1.3.2.3 Построить ЛАЧХ системы

$$W(s) = \frac{2s^2}{(1+0,5s)^2(1+0,1s)}$$

1.3.2.4 Вычислить уклон высокочастотной части ЛАЧХ системы (рисунок 1.33)

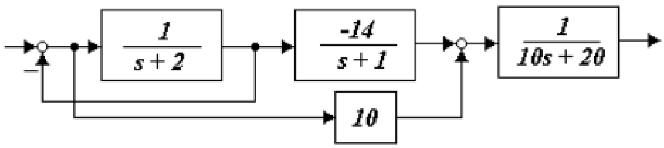


Рисунок 1.33

1.3.2.5 На каком уровне и под каким углом пройдёт низкочастотная асимптота при частоте 0,1 рад/с, если ПФ системы равна

$$W(s) = \frac{s(s+1)}{(0,1s+1)(s+10)}.$$

1.4 Устойчивость непрерывных стационарных систем

1.4.1 Математический и физический признаки устойчивости

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после снятия воздействия, выведшего систему из этого состояния.

Математический (прямой) признак устойчивости: система устойчива, если все корни её характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть. Другими словами – если все полюса системы левые (лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости). Корни полинома числителя передаточной функции (нули) на устойчивость системы не влияют.

Если хотя бы один полюс располагается справа от мнимой оси, система неустойчива. Она находится на апериодической границе устойчивости, если при остальных левых корнях имеет один нулевой корень, и на колебательной (периодической) границе устойчивости, если при остальных левых корнях характеристического уравнения имеет пару чисто мнимых корней (значение ω мнимой части таких корней равно частоте незатухающих колебаний системы на границе устойчивости).

Физический признак устойчивости: система устойчива, если свободная составляющая $y_{св}(t)$ переходного процесса (импульсная функция $g(t)$) с увеличением времени стремится к нулю, неустойчива, если она стремится к бесконечности, и нейтральна (находится на границе устойчивости), если она стремится к некоторой постоянной величине (амплитуде). Для анализа подходит любая реакция системы, если из нее исключить составляющую, обусловленную вынуждающим сигналом. Нельзя применять для анализа формулу $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot G(s)$, т.к. она может давать нулевой результат и для неустойчивых систем.

Пример 1. Оценить прямым методом устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 3y^{(1)} = 4u^{(1)} + 5u .$$

Характеристическое уравнение системы

$$D(s)=s^3+2s^2+3s=s(s^2+2s+3)=0$$

имеет нулевой корень $s_1 = 0$ и комплексно-сопряженную пару корней, определяемую из квадратного трехчлена

$$s_{2,\,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm j1{,}414\,.$$

Система находится на апериодической границе устойчивости, т.к. нулевой корень находится на мнимой оси комплексной плоскости корней, а остальные корни лежат слева от мнимой оси.

Пример 2. Оценить устойчивость системы со свободной составляющей переходного процесса $y_{св}(t)=-1.23e^{-t}+0.14\sin t+1{,}23\cos t$.

Выражение содержит гармонические составляющие с постоянной амплитудой (не затухающие и не расходящиеся с течением времени), отсюда вывод: система находится на колебательной границе устойчивости. Частота незатухающих колебаний, соответствующая колебательной границе устойчивости, равна 1 рад/с или 1/6,28 с$^{-1}$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.1.1 Оценить устойчивость системы, если

$$G(s)=\frac{A}{(s+0{,}1)^3}+\frac{B}{(s+0{,}1)^2}+\frac{C}{s+0{,}1}+\frac{D}{s+0{,}5}+\frac{Es+F}{s^2+2s+2}.$$

1.4.1.2 Система имеет нуль 10 и полюса -1 ± 3j, 0, -3,14. Оценить устойчивость системы.

1.4.1.3 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.34)

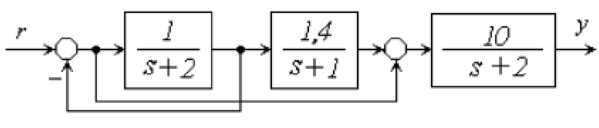


Рисунок 1.34

1.4.1.4 Систему образуют последовательно включенные звенья с передаточными функциями 1/(s + 1), 3/(s + 2,5), 1/(s^2 + 2). Определить частоту незатухающих колебаний.

1.4.1.5 При каком значении α система (рисунок 1.35) окажется на апериодической границе устойчивости.

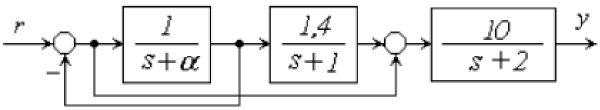


Рисунок 1.35

1.4.1.6 По переходной функции системы $h(t) = 5 - 10e^{-t} + 5e^{-2t}$ оценить её устойчивость, используя физический признак.

1.4.1.7 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.36)

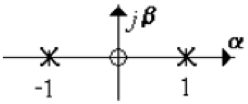


Рисунок 1.36

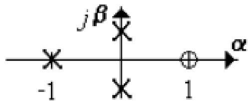


Рисунок 1.37

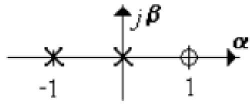


Рисунок 1.38

1.4.1.8 Оценить устойчивость системы с $g(t) = 1{,}5e^{-t} - 1{,}5e^{-3t}$.

1.4.1.9 Какова устойчивость системы с $D(s) = s(s^2 + s + 1)$.

1.4.1.10 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.37)

1.4.1.11 Оценить устойчивость системы с $y_{св}(t) = 3\sin t - 2\cos 3t$.

1.4.1.12 Оценить устойчивость системы с $D(s) = (s - 1)(s^2 + 1)$.

1.4.1.13 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.38)

1.4.2 Алгебраические критерии устойчивости. Критический коэффициент усиления

Критерий Гурвица: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ и все диагональные миноры $\Delta_1 \ldots \Delta_{n-1}$ матрицы Гурвица положительны.

Для устойчивости систем первого и второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны (были одного знака). Достаточные условия для системы третьего порядка $\Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$, для системы четвертого порядка $\Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_1^2 a_4 = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) - a_1^2 a_4 > 0$. Критерий Гурвица удобно использовать при устном счете для систем не выше четвертого порядка.

Критерий Рауса: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения и все элементы первого столбца таблицы Рауса положительны. Необходимое условие (положительность всех коэффициентов) совпадает с критерием Гурвица.

Для проверки достаточного условия составляют таблицу, первую и вторую строки которой заполняют попарно коэффициентами характеристического уравнения, начиная со старшего, недостающие коэффициенты заменяют нулем. Элементы последующих строк вычисляют по формулам $c_{i,\,j} = c_{i\text{-}2,\,j+1} - c_{i\text{-}1,\,j+1} \times r_i$, где i – номер строки, j – номер столбца, $r_i = c_{i\text{-}2,\,1} / c_{i\text{-}1,\,1}$ – вспомогательное число для i-той строки. Таблица содержит $n + 1$ строку и $(n + 1)/2$ с округлением столбец.

Число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака элементов первого столбца таблицы Рауса. При положительности остальных элементов первого столбца система находится на апериодической границе устойчивости, если равен нулю последний элемент столбца (a_n), и на периодической границе устойчивости, если равен нулю какой-либо иной элемент первого столбца.

Критическим или предельным (граничным) называется значение параметра (коэффициента), входящего в характеристическое уравнение, при котором система находится на границе устойчивости. Для его определения формулируют условия нахождения системы на границе устойчивости по какому-нибудь критерию.

Пример 1. Оценить по критерию Гурвица устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Характеристическое уравнение $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0.$

Проверяем необходимое условие – все коэффициенты характеристического уравнения положительны, что можно кратко записать как «условие $a_i > 0$ выполняется».

Проверяем достаточное условие по определителю Гурвица

$$\begin{array}{c|ccc|} \Delta 1 & 2 & 4 & 0 \\ \Delta 2 & 1 & 3 & 0 \\ & 0 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 6 - 4 = 2 > 0. \end{array}$$

Оба диагональных минора положительны. Так как необходимое и достаточное условия выполняются, система устойчива.

Пример 2. Оценить по Раусу устойчивость системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6 = 0.$

Необходимое условие $a_i > 0$ выполняется.

	1	3	5
	2	4	6
$r_3 = 0,5$	1	2	0
$r_4 = 2,0$	0	6	0
$r_5 = +\infty$	$-\infty$	0	0
	6	0	0

Проверяем достаточное условие – составляем таблицу Рауса: число строк равно числу коэффициентов (шесть), число столбцов 6/2 = 3. Заполняем две первые строки попарно коэффициентами с четными a_0, a_2, a_4 и нечетными a_1, a_3, a_5 индексами. Последний коэффициент $a_n = a_5 = 6$ смещается вниз и влево ходом шахматного коня (три клетки вниз и одна влево), ниже него записываем нули. Вычисляем вспомогательное число и элементы третьей строки: $r_3 = c_{1,1}/c_{2,1} = a_0/a_1 = 1/2 = 0,5$; откуда $c_{31} = 3 - 4 \cdot 0,5 = 1$; $c_{32} = = 5 - 6 \cdot 0,5 = 2$, затем элементы остальных строк.

В первом столбце имеется отрицательное число, следовательно, система неустойчива. Число перемен знака в первом столбце равно двум (от 1 к $-\infty$ и от $-\infty$ к 6), значит система имеет два правых корня характеристического уравнения, остальные три корня левые.

Пример 3. Найти критическое значение коэффициента усиления $k_{кр}$ системы с характеристическим уравнением

$$D(s) = 15,3s^3 + 10,7s^2 + s + k - 1,2 = 0.$$

Формулируем условия нахождения системы на границе устойчивости по критерию Гурвица (он наиболее удобен и нагляден для систем первого-третьего порядка):

- на апериодической границе $a_n = 0$, откуда $a_n = k - 1,2 = 0;\ k_{кр1} = 1,2;$
- на периодической границе $\Delta_{n-1} = 10,7 \cdot 1 - 15,3(k - 1,2) = 0$, откуда следует $k_{кр2} = (10,7 + 15,3 \cdot 1,2)/15,3 = 29,06/15,3 = 1,899$. Учитывая опущенные знаки неравенств, делаем вывод, что система устойчива при значениях коэффициента усиления $1,2 < k < 1,899$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.2.1 При каких значениях коэффициента k система (рисунок 1.39) устойчива, если $W_1 = 1/(1+0,1s)$, $W_2 = 2/(1 + 0,01s)$, $W_3 = k/(1 + s)$, $W_4 = 10$?

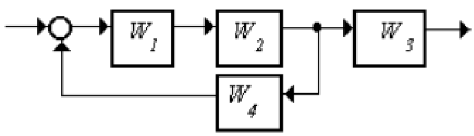


Рисунок 1.39

1.4.2.2 Оценить устойчивость системы $y''' + 4y'' + y' + 4y = 3u$.

1.4.2.3 С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рисунок 1.40), если $W_1 = 5/(1 + 10s)$, $W_2 = -1/s$, $W_3 = 100$.

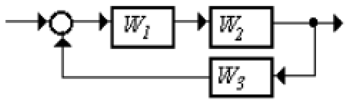


Рисунок 1.40

1.4.2.4 Система задана нулями $0 \pm 3j$ и полюсами $-1 \pm 5j$; -1; -10. Оценить устойчивость системы до и после замыкания единичной ООС.

1.4.2.5 Устойчива ли система $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s + 2 = 0$?

1.4.2.6 Оценить устойчивость системы по критерию Рауса

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^2 + 2s + 3 = 0.$$

1.4.2.7 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.41) по критерию Гурвица

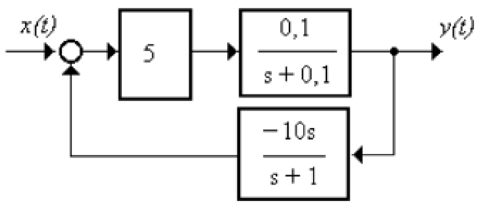


Рисунок 1.41

1.4.2.8 Оценить устойчивость системы по критерию Гурвица при $D(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 5s + 2 = 0$.

1.4.2.9 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.42), если $W_1(s) = 1$, $W_2(s) = 2$, $W_3(s) = 3$, $W_4(s) = 1$, $W_5(s) = 6$, $W_6(s) = 10$, $W_7(s) = 2$, $W_8(s) = 2s$, $W_9(s) = 10/(1 + 10s)$, $W_{10}(s) = 1/3$, $W_{11}(s) = 1/10s$.