§12. Передаточная функция. Свойства и особенности передаточной функции

Применение преобразования Лапласа при математическом описании САУ обусловливается также и тем, что с его помощью определяют так называемую передаточную функцию, которая является самой компактной формой описания свойств САУ или ее составных элементов.

Пусть дано линейное неоднородное уравнение САУ

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ \dots \ + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \ \dots \ + b_m x(t).$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ \dots \ + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \ \dots \ + b_m X(s). \quad (2.6)$$

Воспользовавшись (2.6), можем записать:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ \dots \ + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ \dots \ + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (2.7)$$

Анализ выражения (2.7) показывает, что соотношение $Y(s)/X(s)$ не зависит от вида входного воздействия $x(t)$, а характеризует только собственные свойства САУ. Это соотношение и называется передаточной функцией и обозначается $W(s)$.

Таким образом, *передаточной функцией называется отношение выходной величины ко входной, преобразованных по Лапласу при нулевых начальных условиях*.

Свойства и особенности передаточной функции

1. Передаточная функция устанавливает связь между входной и выходной величинами как в динамическом, так и в статическом режимах.
2. Передаточная функция является функцией комплексной переменной $s = \alpha + j\beta$, которая может при некоторых значениях s обращаться в нуль или в бесконечность. Значение переменной s, при котором $W(s) = 0$, называется *нулем*, а значение, при котором $W(s) = \infty$ -

полюсом передаточной функции. Из (2.7) следует, что нулями являются корни полинома $B(s)$, а полюсами – корни полинома $A(s)$.

3. Корни полиномов $B(s)$ и $A(s)$ могут быть комплексными сопряженными и вещественными. Если эти корни известны, то в соответствии с теоремой Безу выражение (2.7) можно представить в виде:

$$W(s) = \frac{b_0(s - \rho_1)(s - \rho_2)\ \dots\ (s - \rho_m)}{a_0(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\ \dots\ (s - \lambda_m)},$$

где ρ_i - нули, а λ_j - полюса $W(s)$.

4. Если полином $A(s)$ имеет один или несколько нулевых корней, то передаточную функцию можно представить в форме с явным выделением этих корней, а именно, в виде:

$$W(s) = k\frac{W^*(s)}{s^r}, \qquad (2.8)$$

где: k - коэффициент передачи по соответствующему каналу; $\lim\limits_{s \to 0} W^*(s) = 1$;

r - количество нулевых корней полинома $A(s)$.

В самом деле передаточная функция (2.7) имеет полюса, когда один или несколько младших коэффициентов полинома $A(s)$ равны нулю: $a_n = a_{n-1} = \ \dots\ = a_{n-r+1} = 0$, т.е. $W(s) = \dfrac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ \dots\ + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ \dots\ + a_{n-p} s^r}$, или

после преобразований:

$$W(s) = \frac{k}{s^r}W^*(s) = \frac{k}{s^r}\,\frac{B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \ \dots\ + 1}{A_0 s^{n-r} + A_1 s^{n-1-r} + \ \dots\ + 1},$$

где $B_i = b_i / b_m$ при $i = \overline{0,m}$; $A_j = a_j / a_{n-r}$ при $j = \overline{0, n-r}$; $k = b_m / a_{n-r}$.

Элементы САУ, у которых $r > 0$, называются астатическими, т.е. не имеющими статического режима, характеризуемого однозначной зависимостью между входной и выходной величинами. Величину r при этом принято называть порядком астатизма. Если же $r = 0$, то элемент называется статическим.

Для проверки приведенного утверждения воспользуемся теоремой о конечном значении оригинала операционного исчисления и формулой (2.8) при условии $x(t) = const = x_0$.

Имеем:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sW(s)X(s) = \lim_{s\to 0} \$ \frac{kW^*(s)}{s^r}\frac{x_0}{\$} = kx_0 \frac{\lim\limits_{s\to 0} W^*(s)}{\lim\limits_{s\to 0} s^r} = \frac{kx_0}{\lim\limits_{s\to 0} s^r}.$$

Таким образом, только при $r = 0$ между величинами x_0 и $y(\infty)$ существует определенная однозначная зависимость вида:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = kx_0 .$$

При $r > 0$ такая зависимость отсутствует.

Пример 2.2.

Пусть система описывается уравнением вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = kx .$$

Требуется найти передаточную функцию $W(s)$ системы при $k = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$.

Решение.

Преобразуем уравнение системы по Лапласу при нулевых начальных условиях. Получим $(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)Y(s) = kX(s)$. Откуда передаточная функция будет:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

***