§10. Операционный метод описания линейных САУ. Основные свойства преобразования Лапласа

В математике под *операционным исчислением* подразумевается раздел математического анализа, в котором разрабатываются методы решения линейных дифференциальных, разностных и некоторых типов интегральных уравнений. Операционное исчисление базируется на *идее замены одних функций на другие*, получаемые по определенным правилам, например, используя *преобразование Лапласа* или *преобразование Фурье*.

В ТАУ самое широкое применение нашел операционный метод описания, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа (L- преобразования):

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \qquad (2.5)$$

Это преобразование устанавливает соответствие между функцией $f(t)$ действительной переменной t и функцией $F(s)$ комплексной переменной $s = \alpha + j\beta$. При этом $f(t)$ называют *оригиналом,* а $F(s)$ - *изображением.*

Достаточными условиями существования (2.5) являются следующие требования:

- *функция* $f(t)$ *должна быть однозначной и непрерывной при всех* $t \geq 0$, непрерывность может быть нарушена только в отдельных точках, являющихся точками разрыва непрерывности первого рода;

- *функция* $f(t) = 0$ *для всех* $t < 0$;

- *функция* $f(t)$ *должна иметь ограниченный порядок возрастания,* т.е. должны быть такие два постоянных числа $M > 0$ и $c > 0$, при которых $f(t) < Me^{ct}$ при $t > 0$.

Основные свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа ставит в соответствие операциям над оригиналами некоторые определенные операции над изображениями. В таблице 2.1 приведены основные соотношения, используемые при описании линейных САУ.

Таблица 2.1

Наименование свойства	Оригинал	Изображение
Линейность	$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)$	$\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s)$
Дифференцирование оригинала при нулевых начальных условиях	$\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^{n}}$	$s^n F(s)$
Интегрирование оригинала при нулевых начальных условиях	$\int_0^{\tau} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Изменение масштаба	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Смещение аргумента оригинала	$f(t-\tau)$	$F(s)e^{-s\tau}$
Свертка функций	$\int_0^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
Начальное значение оригинала	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Конечное значение оригинала	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$