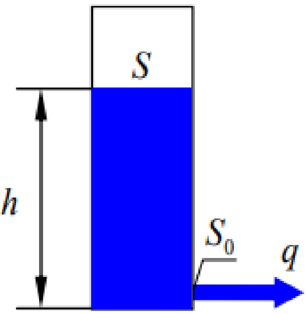
§7. Линеаризация уравнений

Вы уже знаете, что в теории управления лучше всего разработаны методы исследования линейных систем. Однако строго линейных систем в окружающем нас мире не существует. Поэтому для того, чтобы эти методы можно было применить на практике, нужно выполнить *линеаризацию* – построить приближенную линейную модель на основе более реалистичной нелинейной модели объекта.

Алгебраические уравнения

Представим себе бак с водой. В нижней части бака просверлено отверстие, через которое вытекает вода. Площадь сечения бака обозначим через S, а площадь сечения отверстия – через S_0.



Построим модель, которая связывает уровень воды в баке h (в *метрах*) и расход вытекающей воды q (в $м^3/с$). Эту связь можно найти с помощью закона Бернулли, который в данном случае принимает вид

$$\rho\, g\, h = \frac{\rho\, v^2}{2}.$$

Здесь → – плотность жидкости (в $кг/м^3$), $g \approx 9{,}81 м/с^2$ – ускорение свободного падения, v – скорость вытекания жидкости (в $м/с$). Отсюда получаем $v = \sqrt{2gh}$.

Учитывая, что расход воды вычисляется как $q = S_0 \cdot v$, находим

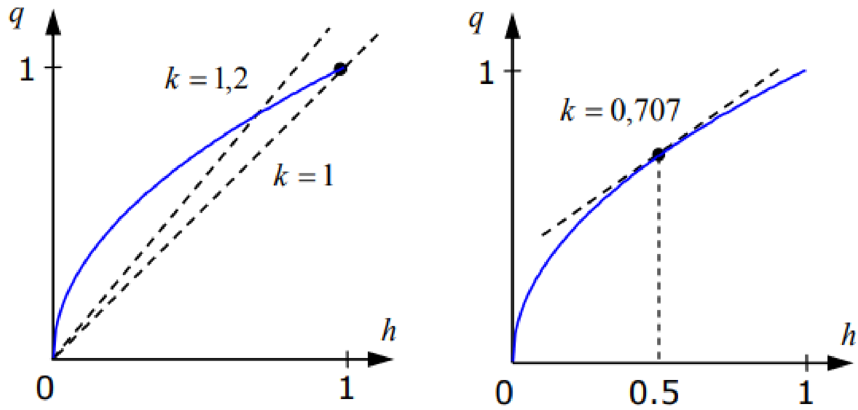
$$q = \alpha\sqrt{h}\,, \qquad (2)$$

где $\alpha = S_0\sqrt{2g}$ – постоянная величина. Это *статическая* модель, потому что она не содержит производных, характеризующих изменение сигналов во времени. Статическая модель описывает *установившееся* состояние (*статический режим*), когда в баке поддерживается постоянный уровень воды и поток вытекающей воды тоже постоянный.

Очевидно, что модель (2) – нелинейная, поскольку содержит h. Линеаризовать ее – значит приближенно заменить уравнение (2) линейным уравнением $q = kh$, где k – некоторый коэффициент. Как его выбрать? На этот вопрос нет однозначного ответа.

Предположим, что уровень воды изменяется в интервале от 0 до 1 м. Тогда один из вариантов – вычислить коэффициент как угол наклона отрезка, соединяющего точки кривой $q = \alpha\sqrt{h}$ на концах этого интервала. Для определенности далее везде принимаем $\alpha = 1$, тогда получаем $k = 1$.

Конечно, эта модель очень грубая и дает большую ошибку, особенно для уровней в диапазоне от 0,1 до 0,6. Чтобы уменьшить ошибку, можно попробовать несколько изменить k (например, увеличив его до 1,2), однако точность приближения по-прежнему будет невысока, хотя и чуть-чуть лучше, чем в первом случае.



Теперь предположим, что обычно уровень мало изменяется вблизи среднего значения h = 0,5 м. В этом случае можно применить другой подход. Заметим, что в этой области кривая $q = \alpha\sqrt{h}$ почти совпадает с касательной в точке $(0{,}5;\ \frac{\sqrt{2}}{2})$, угол наклона которой равен производной

$$k = \left.\frac{dq}{dh}\right|_{h=0,5} = \left.\frac{1}{2\sqrt{h}}\right|_{h=0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707 .$$

Касательная – это прямая с наклоном k, проходящая через точку $(0{,}5;\ \frac{\sqrt{2}}{2})$, ее уравнение имеет вид $q = kh + b$. Свободный член b определим из равенства

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = kh + b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}5 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354 ,$$

так что получаем модель

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} h + \frac{\sqrt{2}}{4} . \qquad (3)$$

Это линейное уравнение, однако модель (3) – *нелинейная*, поскольку для нее не выполняется, например, свойство умножения на константу. Это легко проверить, сравнив $U[2 \cdot h]$ и $2 \cdot U[h]$:

$$U[2 \cdot h] = \sqrt{2} h + \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad 2 \cdot U[h] = \sqrt{2} h + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq U[2 \cdot h] .$$

Принцип суперпозиции также не выполняется.