§15. Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают передаточные свойства САУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Эти характеристики широко используются в ТАУ, так как реальные внешние воздействия могут быть представлены в виде суммы гармонических сигналов. Они определяются вынужденной составляющей решения дифференциального уравнения при подаче на вход воздействия:

$$x(t) = a\sin(\omega t) . \tag{3.13}$$

Представим воздействие (3.13) с помощью формулы Эйлера в виде суммы двух экспоненциальных воздействий:

$$x(t) = a\,\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = x_1(t) + x_2(t) , \tag{3.14}$$

где

$$x_1(t) = \frac{a}{2j} e^{j\omega t} \tag{3.15}$$

и

$$x_2(t) = -\frac{a}{2j} e^{-j\omega t} . \tag{3.16}$$

Решим (3.1), подставив в правую часть выражение (3.14). При этом будем искать только вынужденную составляющую решения $y_{в}(t)$.

Используя принцип суперпозиции, решение $y_{в}(t)$ можно представить в виде суммы двух составляющих: $y_{в}(t) = y_1(t) + y_2(t)$, где $y_1(t)$ - решение при $x(t) = x_1(t)$, а $y_2(t)$ - при $x(t) = x_2(t)$.

Будем искать $y_1(t)$ в виде:

$$y_1(t) = Y(j\omega)x_1(t) = Y(j\omega)\frac{a}{2j}e^{j\omega t} . \tag{3.17}$$

Подставив (3.17) и (3.15) в (3.1), после преобразований получим:

$$Y(j\omega)\frac{a}{2j}e^{j\omega t}\underbrace{\left[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ \dots\ + a_n\right]}_{A(j\omega)} =$$

$$= \frac{a}{2j} e^{j\omega t} \underbrace{\left[b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ \ldots \ + b_m \right]}_{B(j\omega)}$$

Из последнего выражения имеем:

$$Y(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = W(j\omega). \qquad (3.18)$$

$W(j\omega)$ называют *частотной передаточной функцией* . Сравнив (3.18) с выражением для передаточной функции $W(s)$, можно сделать вывод о том, что $W(j\omega)$ является частным случаем $W(s)$ при $s = j\omega$.

Воспользовавшись прямым преобразованием Фурье

$$\Phi\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

можно сделать следующее определение: *частотной передаточной функцией называется отношение выходной величины ко входной, преобразованных по Фурье при нулевых начальных условиях*.

$W(j\omega)$, как и любая функция комплексной переменной, может быть представлена в алгебраической и показательной формах.

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \qquad (3.19)$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ - вещественная и мнимая части соответственно.

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3.20)$$

где $A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ - модуль, а $\varphi(\omega) = arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ - аргумент.

Подставив (3.20) в (3.17), получим:

$$y_1(t) = W(j\omega) \frac{a}{2j} e^{j\omega t} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \frac{a}{2j} e^{j\omega t} = A(\omega) \frac{a}{2j} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}. \qquad (3.21)$$

Аналогичным образом получим составляющую $y_2(t)$:

$$y_2(t) = A(\omega)\frac{a}{2j}e^{-j[\omega t+\varphi(\omega)]}. \qquad (3.22)$$

Сложив (3.21) и (3.22), окончательно получим:

$$y_{\text{в}}(t) = A(\omega)\frac{a}{2j}\left[e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]} - e^{-j[\omega t+\varphi(\omega)]}\right] = A(\omega)\cdot a\cdot\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]. \qquad (3.23)$$

Таким образом при гармоническом воздействии на входе выходная величина после окончания переходного процесса ($\underset{t\to\infty}{y_{\text{c}}(t)=0}$) также изменяется по гармоническому закону, но с другой амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг фаз – аргументу $W(j\omega)$.

Кривая, которую описывает конец вектора частотной передаточной функции на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞ называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

Кроме АФЧХ, являющейся самой общей частотной характеристикой, различают следующие разновидности частотных характеристик:

- *амплитудная частотная характеристика* (АЧХ) – график функции $A(\omega) = |W(j\omega)|$;

- *фазовая частотная характеристика* (ФЧХ) – график функции $\varphi(\omega) = Arg\ W(j\omega)$;

- *вещественная частотная характеристика* – график функции $P(\omega) = \text{Re}\ W(j\omega)$;

- *мнимая частотная характеристика* – график фупкции $Q(\omega) = \text{Im}\ W(j\omega)$.

Из сравнения (3.23) и (3.13) следует важное свойство частотных характеристик – возможность их экспериментального определения на реальном объекте.

Пример 3.4.

Определить частотные характеристики для условий примера

Уравнение САУ имеет вид:

$$T^2 y''(t) + 2\xi T y'(t) + y(t) = k \cdot x(t)$$

Определим временную характеристику $h(t)$ при $T = 0{,}3$ с; $\xi = 0{,}5$; $k = 10$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$(0{,}09s^2 + 0{,}3s + 1)Y(s) = 10X(s).$$

Откуда можно получить выражение для передаточной функции:

$$W(s) = \frac{10}{0{,}09s^2 + 0{,}3s + 1}.$$

Сделав замену $s = j\omega$, имеем:

$$W(j\omega) = \frac{10}{-0{,}09\omega^2 + 0{,}3j\omega + 1} = \frac{10}{1 - 0{,}09\omega^2 + j0{,}3\omega}.$$

Получим алгебраическую форму представления $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = \frac{10}{1 - 0{,}09\omega^2 + j0{,}3\omega} = \left|\begin{array}{l}\text{умножим и разделим на} \\ \text{комплексно сопр. число}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{10}{1 - 0{,}09\omega^2 + j0{,}3\omega} \cdot \frac{1 - 0{,}09\omega^2 - j0{,}3\omega}{1 - 0{,}09\omega^2 - j0{,}3\omega} =$$

$$= \frac{10(1 - 0{,}09\omega^2)}{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + (0{,}3\omega)^2} + j\frac{-3\omega}{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + (0{,}3\omega)^2}$$

Откуда :

$$P(\omega) = \frac{10(1 - 0{,}09\omega^2)}{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + 0{,}09\omega^2};\quad Q(\omega) = -\frac{3\omega}{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + 0{,}09\omega^2};$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\left[10(1 - 0{,}09\omega^2)\right]^2 + 9\omega^2}{\left\{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + 0{,}09\omega^2\right\}^2}} = \sqrt{\frac{100\left\{\left[(1 - 0{,}09\omega^2)\right]^2 + 0{,}09\omega^2\right\}}{\left\{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + 0{,}09\omega^2\right\}^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{\left[1 - 0{,}09\omega^2\right]^2 + 0{,}09\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = arctg - \frac{3\omega}{10(1-0,09\omega^2)} = \left|\begin{matrix}\text{функция}\\ \text{нечетная}\end{matrix}\right| = -arctg\frac{3\omega}{10(1-0,09\omega^2)}$$

Соответствующие графики представлены на рис. 3.5.

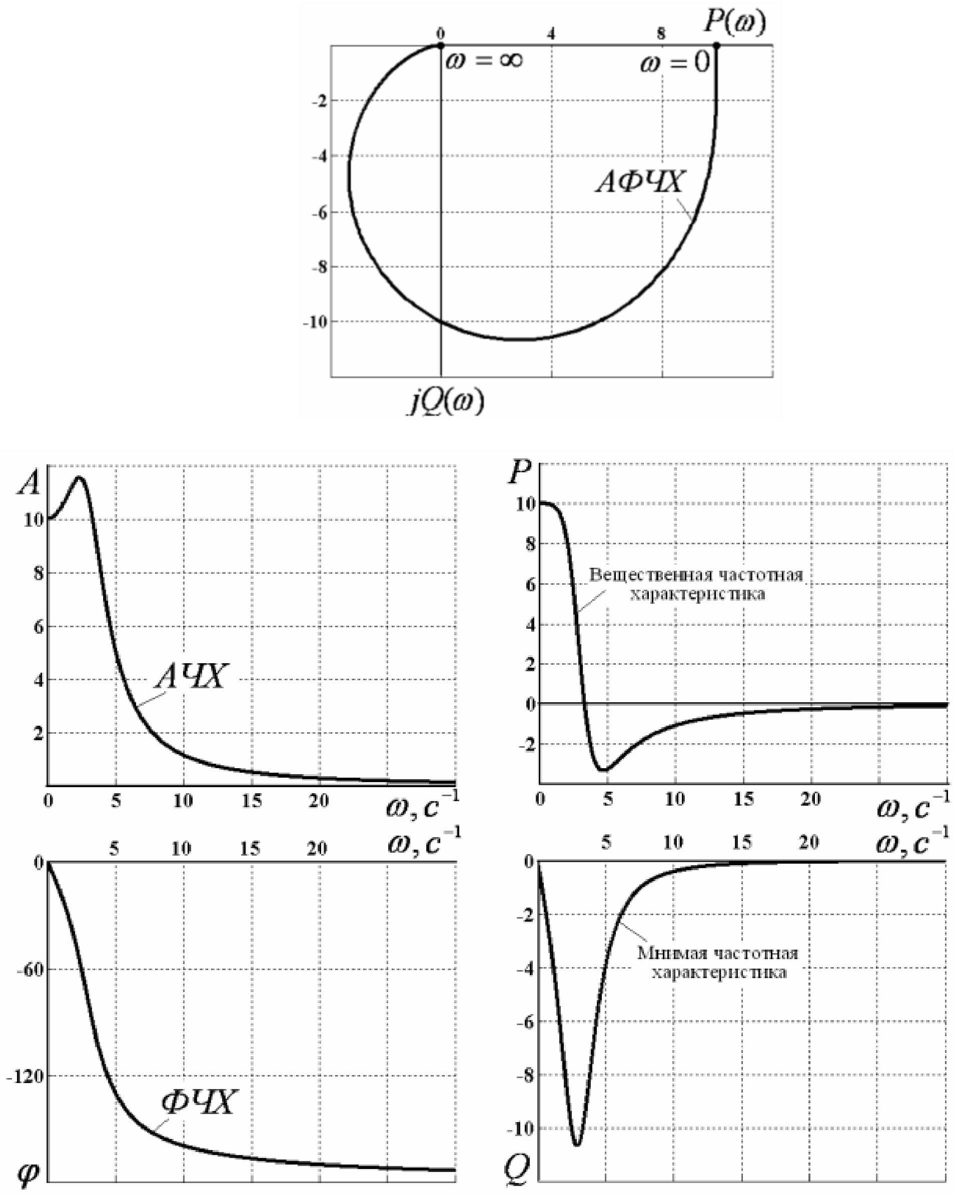

Рис. 3.5