第2章 电阻电路的等效变换

● 重点：

1. 电路等效的概念；
2. 电阻的串、并联；
3. Y—Δ 变换；
4. 电压源和电流源的等效变换；

2.1 引言

- 电阻电路 → 仅由电源和线性电阻构成的电路

- 分析方法 →

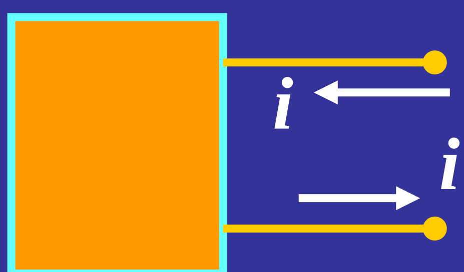
（1）欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据；

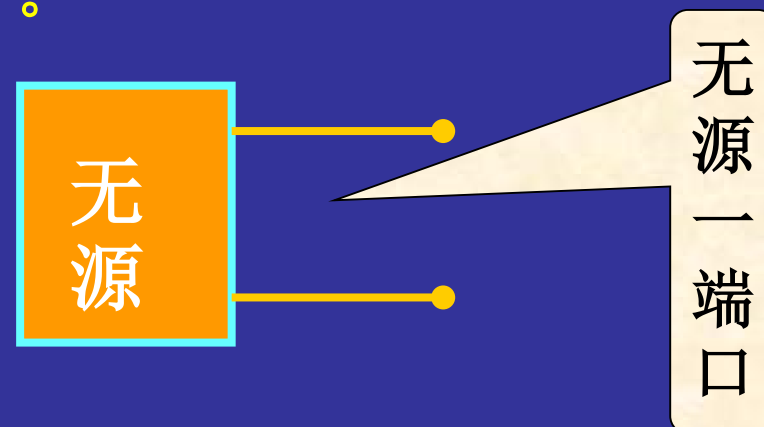
（2）等效变换的方法, 也称化简的方法

2.2　电路的等效变换

1. 两端电路（网络）

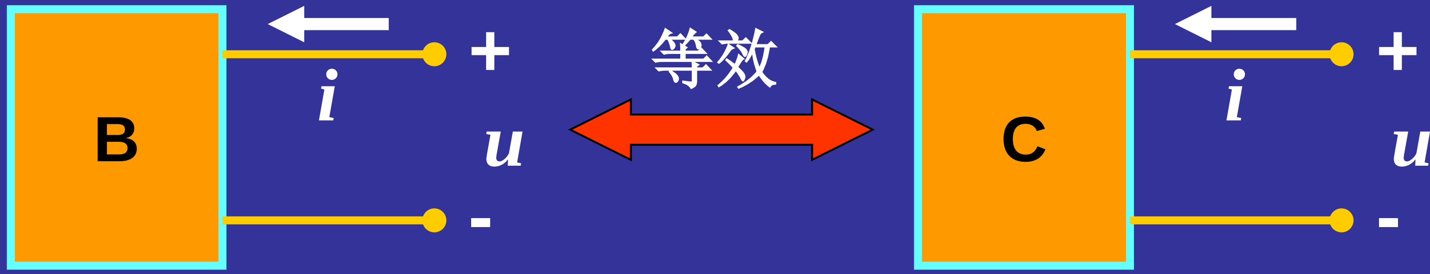
任何一个复杂的电路，向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为二端网络(或一端口网络)。



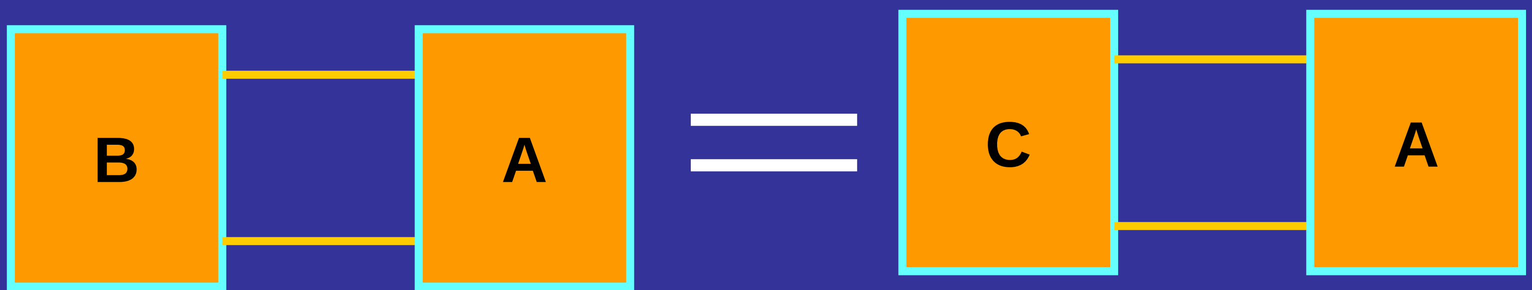


2. 两端电路等效的概念

两个两端电路，端口具有相同的电压、电流关系，则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足



明确

（1）电路等效变换的条件 → 两电路具有相同的VCR

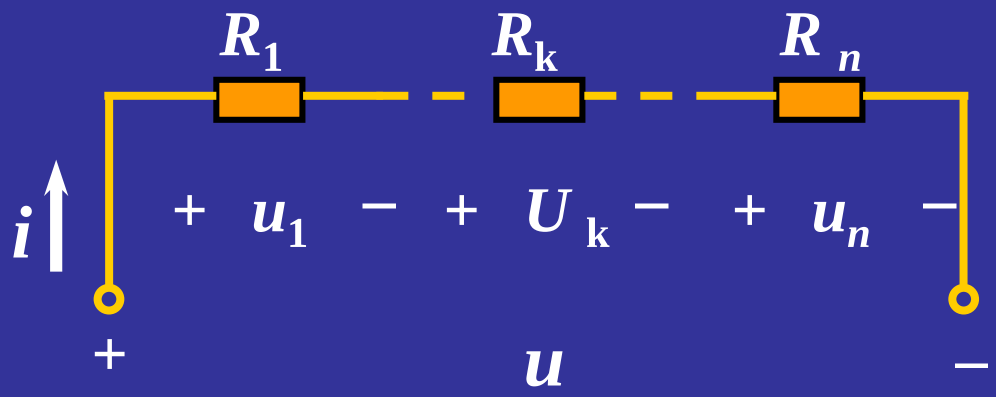
（2）电路等效变换的对象 → 未变化的外电路A中的电压、电流和功率

（3）电路等效变换的目的 → 化简电路，方便计算

2.3　电阻的串联、并联和串并联

1.　电阻串联（ Series Connection of Resistors ）

（1）　电路特点

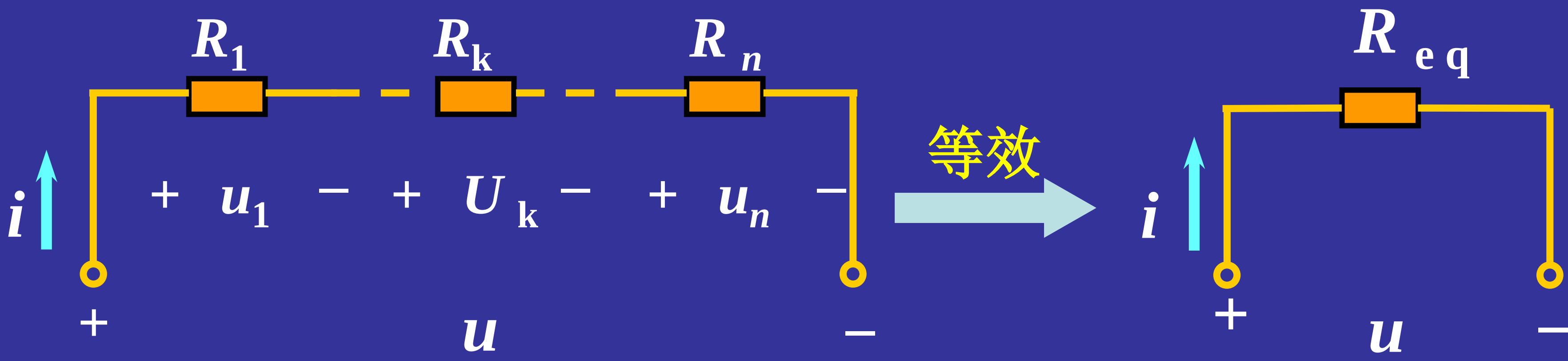


(a) 各电阻顺序连接，流过同一电流（KCL）；

(b) 总电压等于各串联电阻的电压之和（KVL）。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

(2) 等效电阻



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_K i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k > R_k$$

结论:

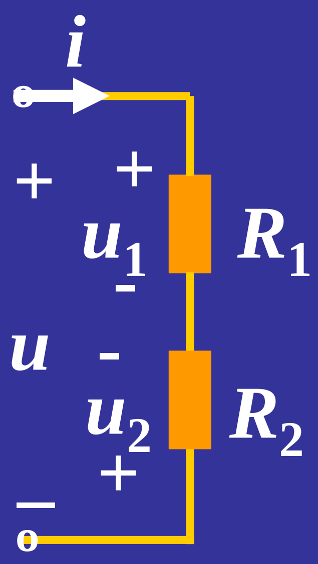
串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

(3) 串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

说明电压与电阻成正比，因此串连电阻电路可作分压电路

例 两个电阻的分压：



$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u$$

注意方向！

(4) 功率

$$p_1=R_1 i^2,\quad p_2=R_2 i^2,\quad \ldots,\quad p_n=R_n i^2$$

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = R_1 : R_2 : \ldots : R_n$$

总功率 $p=R_{eq} i^2 = (R_1+R_2+\ldots+R_n)\, i^2$

$$=R_1 i^2+R_2 i^2+\ldots+R_n i^2$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_n$$

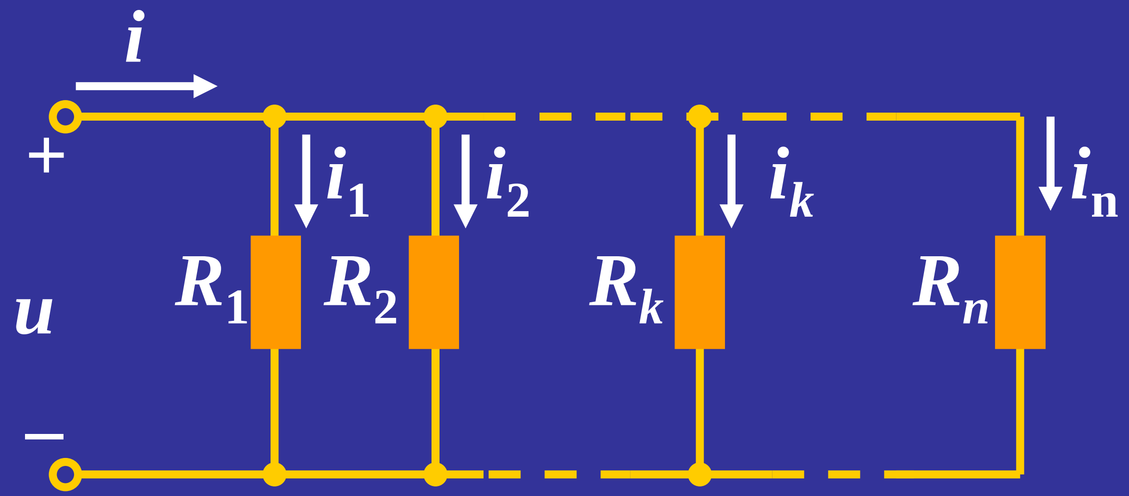
表明

（1） 电阻串连时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比

（2） 等效电阻消耗的功率等于各串连电阻消耗功率的总和

2.　电阻并联（Parallel Connection）

(1) 电路特点

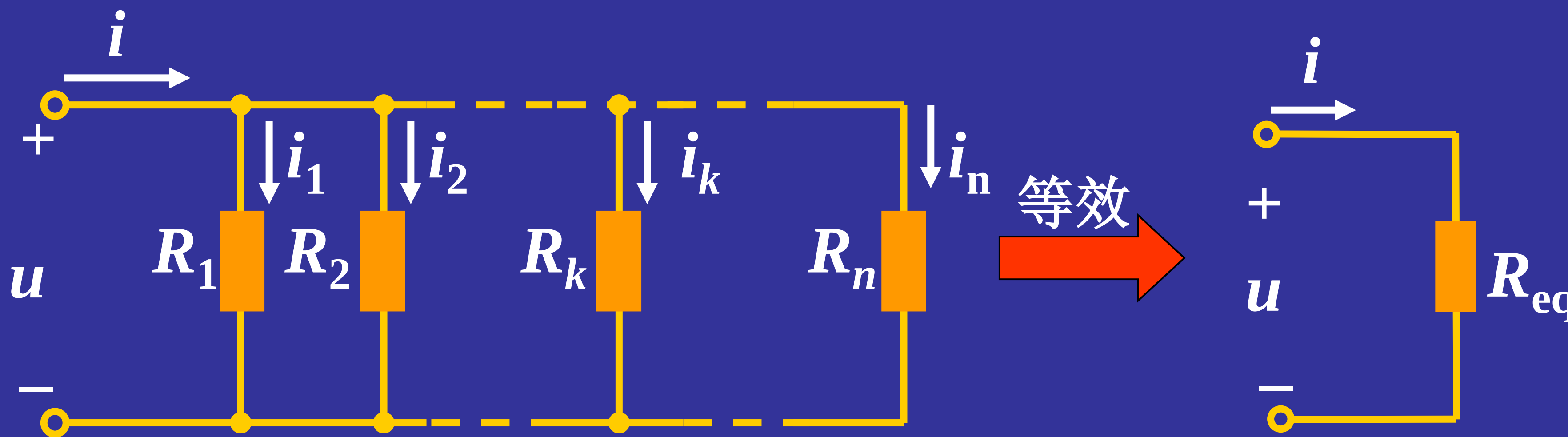


(a) 各电阻两端分别接在一起，两端为同一电压（**KVL**）；

(b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和（**KCL**）。

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n$$

(2) 等效电阻



由KCL: $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n = u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n) = uG_{eq}$$

$G = 1/R$ 为电导 $$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k > G_k$$

等效电导等于并联的各电导之和

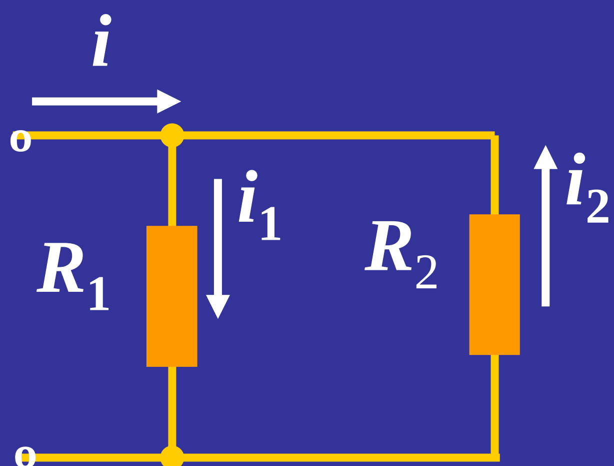
$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$ 即 $R_{eq} < R_k$

（3） 并联电阻的电流分配

电流分配与电导成正比

$$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}} \rightarrow i_k=\frac{G_k}{G_{eq}}i$$

对于两电阻并联，有：



$$R_{eq}=\frac{1/R_1\cdot 1/R_2}{1/R_1+1/R_2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_2 i}{R_1+R_2}$$

$$i_2=\frac{-1/R_2}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{-R_1 i}{R_1+R_2}=-(i-i_1)$$

（4） 功率

$$p_1=G_1u^2,\quad p_2=G_2u^2,\quad \ldots,\quad p_n=G_nu^2$$

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = G_1 : G_2 : \ldots : G_n$$

总功率 $p=G_{eq}u^2 = (G_1+ G_2+ \ldots+G_n)\, u^2$

$$=G_1u^2+G_2u^2+ \ldots+G_nu^2$$

$$=p_1+ p_2+\ldots+ p_n$$

表明

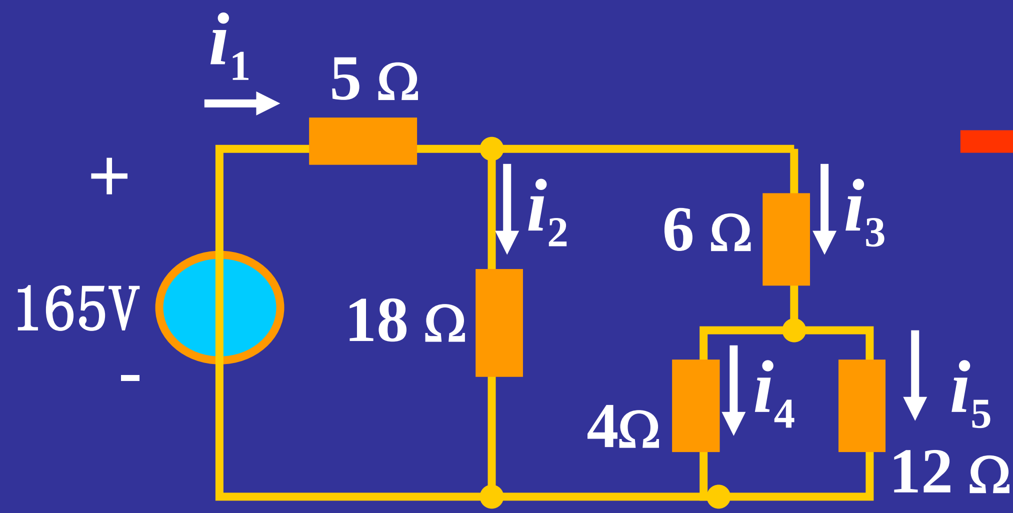
（1） 电阻并连时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比

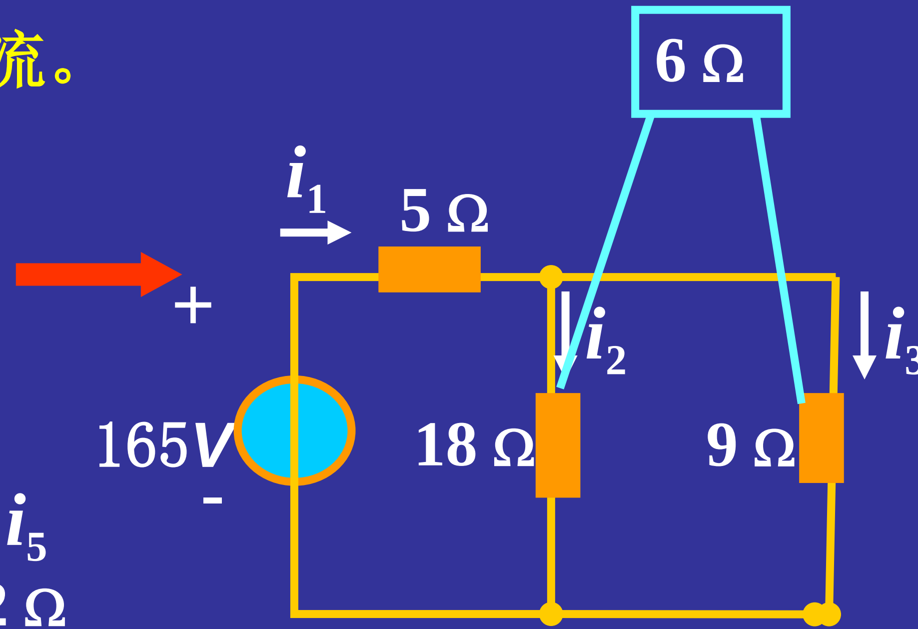
（2） 等效电阻消耗的功率等于各并连电阻消耗功率的总和

3. 电阻的串并联

电路中有电阻的串联，又有电阻的并联，这种连接方式称电阻的串并联。

例 计算各支路的电压和电流。





$$i_1 = 165/11 = 15A$$

$$u_2 = 6i_1 = 6\times 15 = 90V$$

$$i_2 = 90/18 = 5A$$

$$u_3 = 6i_3 = 6\times 10 = 60V$$

$$i_3 = 15 - 5 = 10A$$

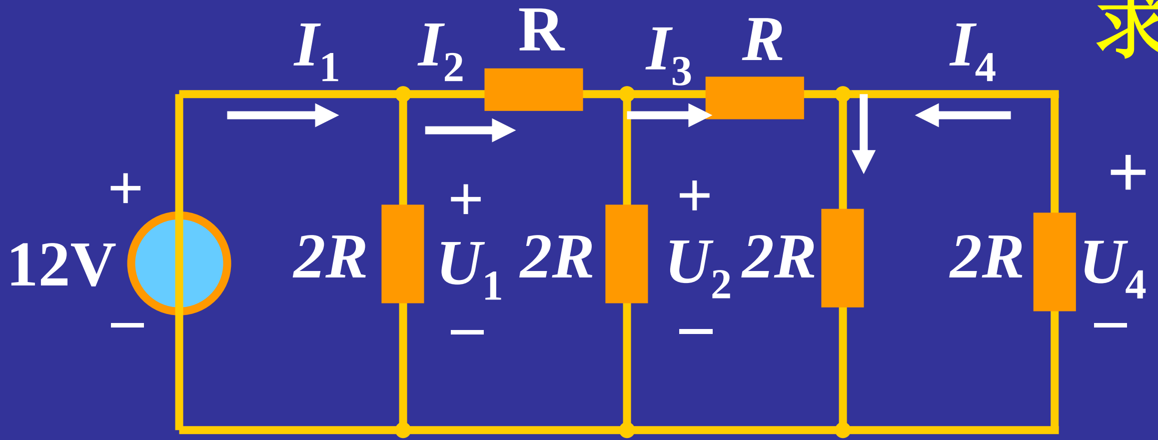
$$u_4 = 3i_3 = 30V$$

$$i_4 = 30/4 = 7.5A$$

$$i_5 = 10 - 7.5 = 2.5A$$

例

求：I_1, I_4, U_4



解 ① 用分流方法做

$$I_4 = -\frac{1}{2} I_3 = -\frac{1}{4} I_2 = -\frac{1}{8} I_1 = -\frac{1}{8}\frac{12}{R} = -\frac{3}{2R}$$

$$U_4 = -I_4 \times 2R = 3\ \text{V}$$

$$I_1 = \frac{12}{R}$$

②用分压方法做

$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4} U_1 = 3\ \text{V}$$

$$I_4 = -\frac{3}{2R}$$

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

（1） 求出等效电阻或等效电导；

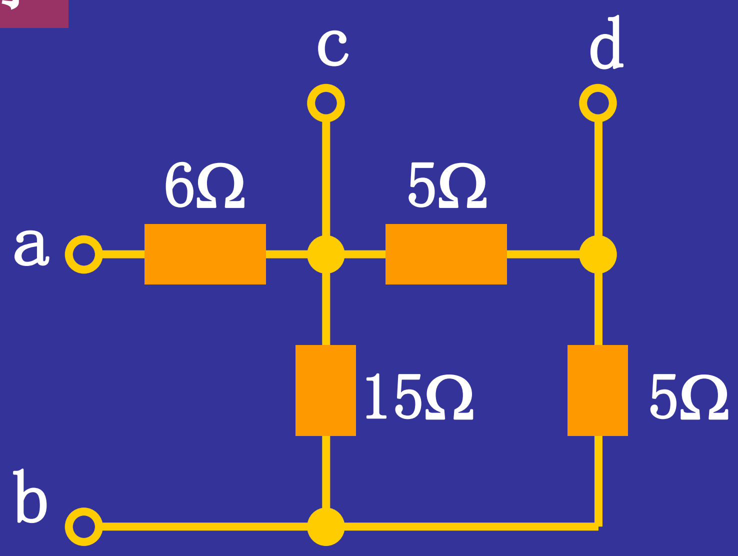
（2）应用欧姆定律求出总电压或总电流；

（3）应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例

求：R_{ab}，R_{cd}



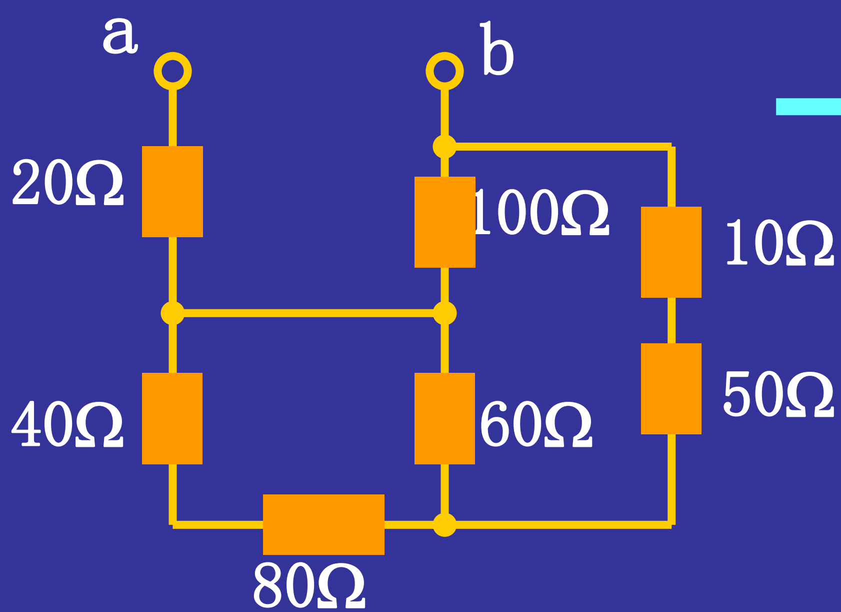
$$R_{ab} = (5+5)//15+6 = 12\Omega$$

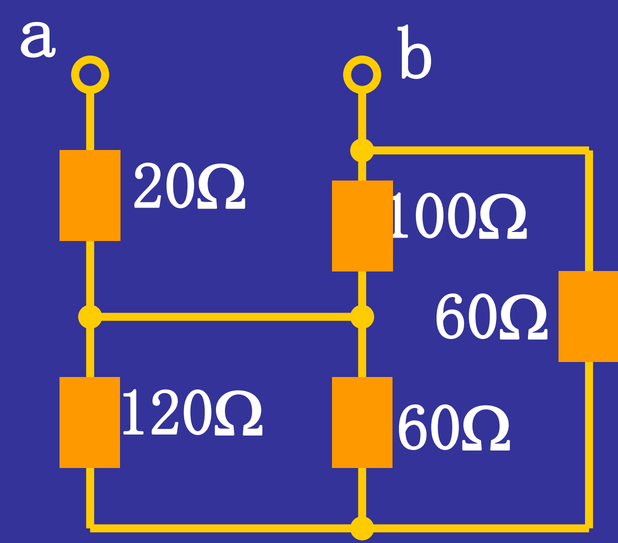
$$R_{cd} = (15+5)//5 = 4\Omega$$

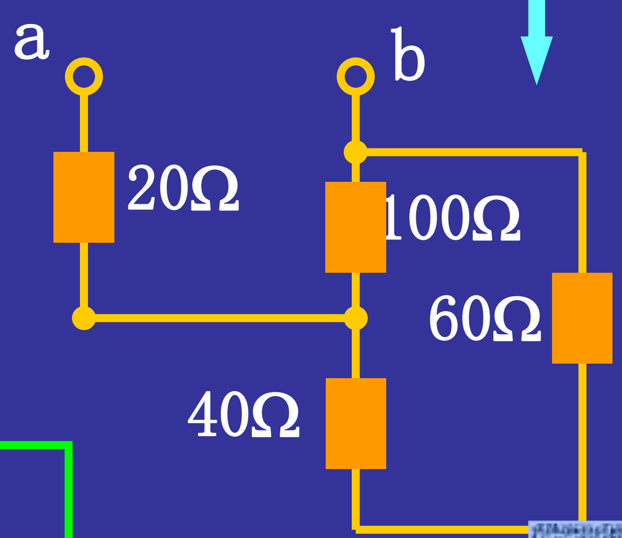
等效电阻针对电路的某两端而言，否则无意义。

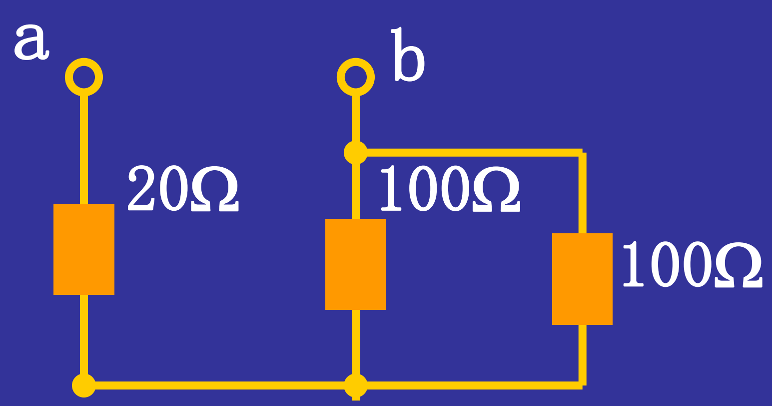
例

求：R_{ab}



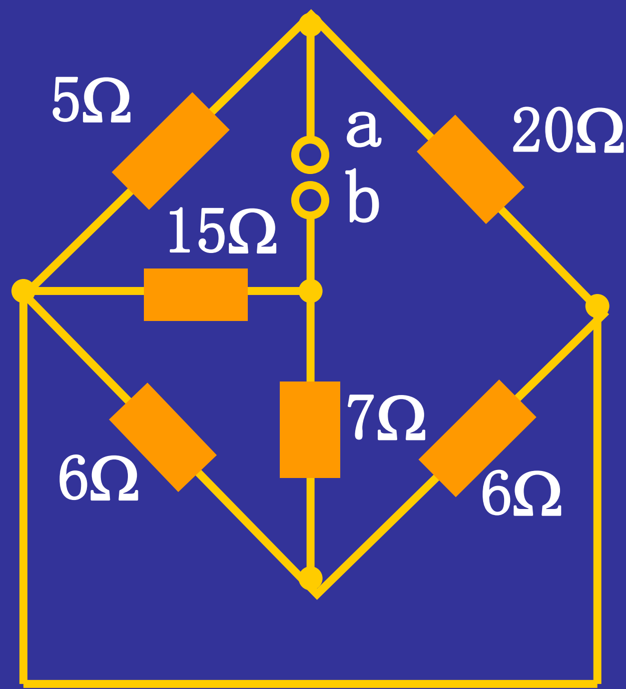




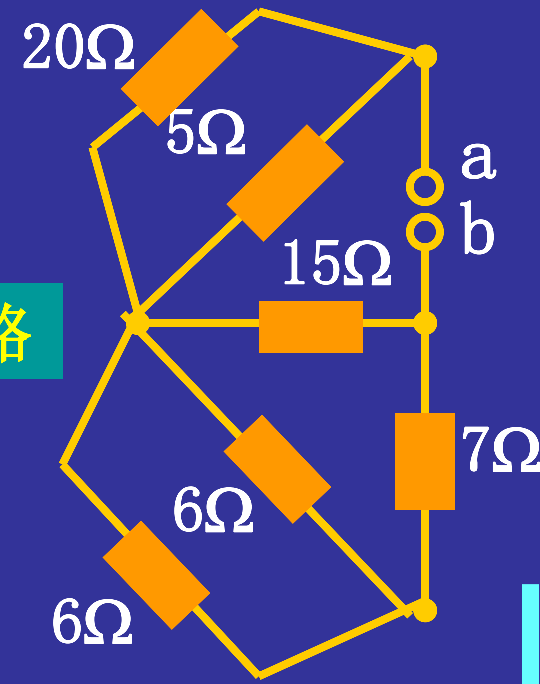


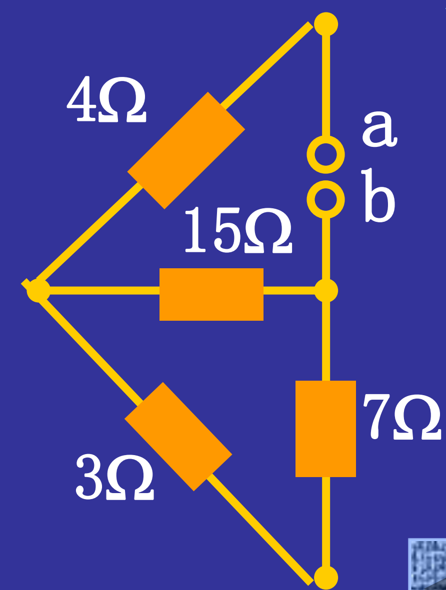
$$R_{ab}=70\Omega$$

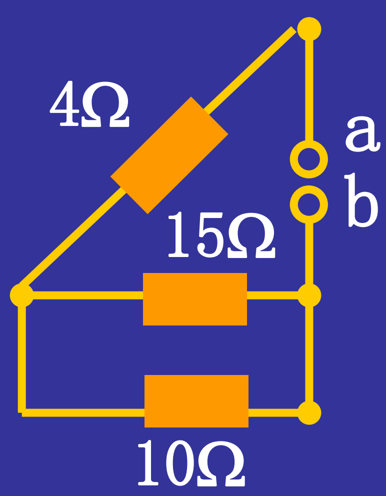
例　　求: R_{ab}



缩短无电阻支路

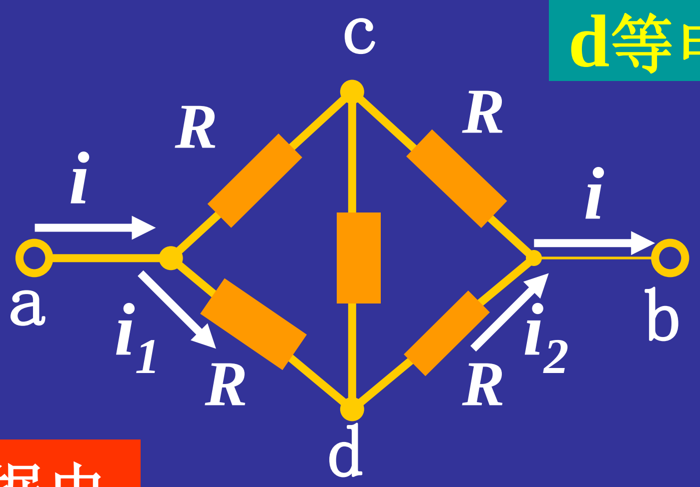






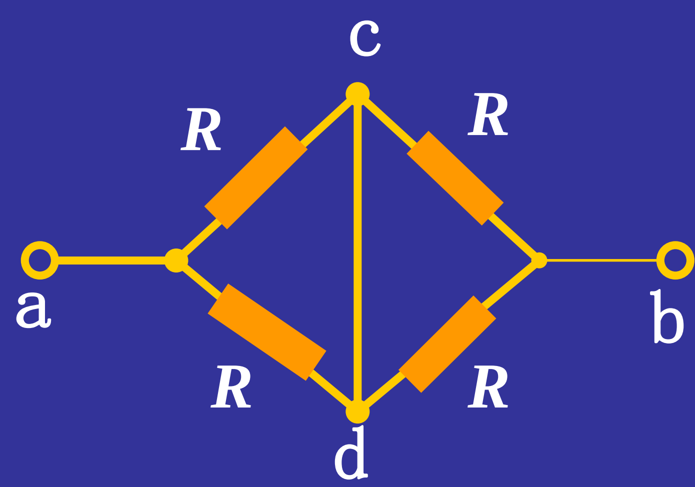
$$\boxed{R_{ab} = 10\Omega}$$

例　求：R_{ab}

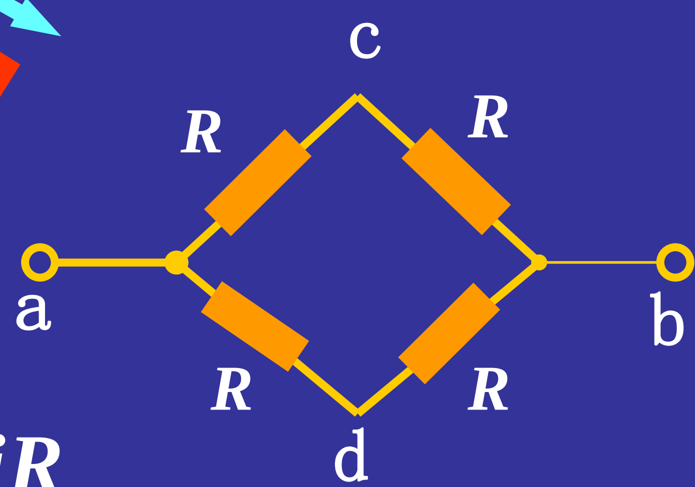


对称电路 c、d等电位

短路



断路



根据电流分配

$$i_1 = \frac{1}{2} i = i_2$$

$$u_{ab} = i_1 R + i_2 R = (\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} i) R = iR$$

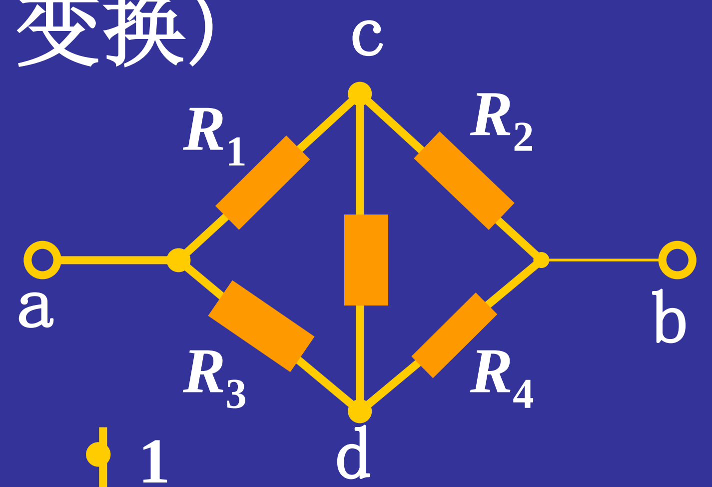
$$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i} = R$$

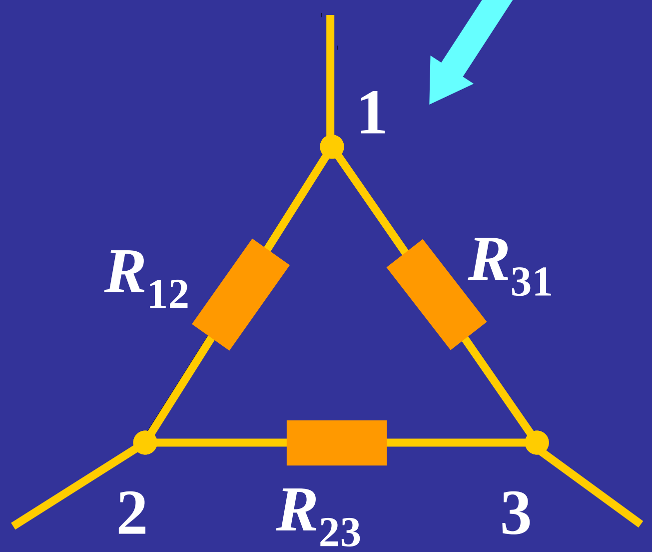
$$\boxed{R_{ab} = R}$$

2.4 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换（Δ—Y 变换）

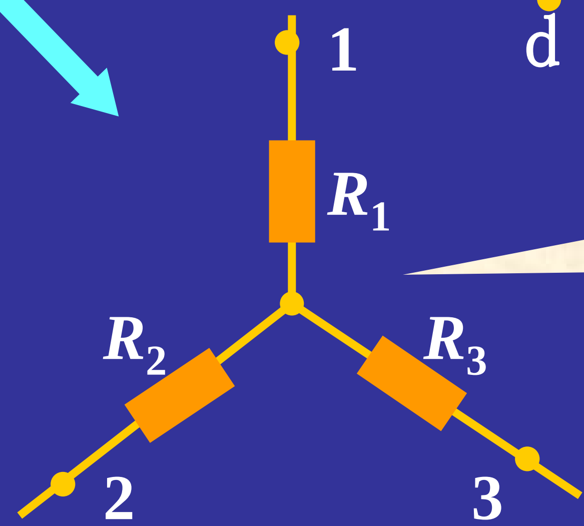
1. 电阻的Δ ，Y连接

包含





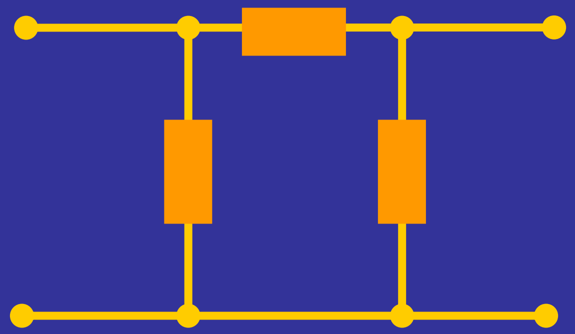
Δ 型网络



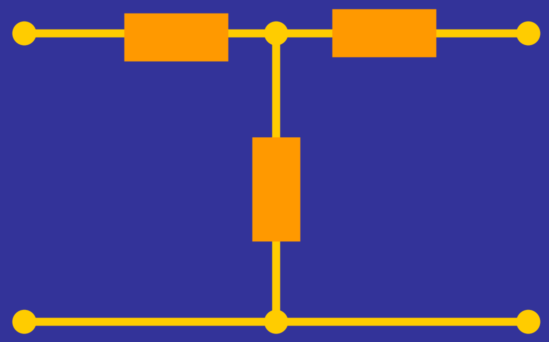
三端网络

Y型网络

Δ ，Y 网络的变形：



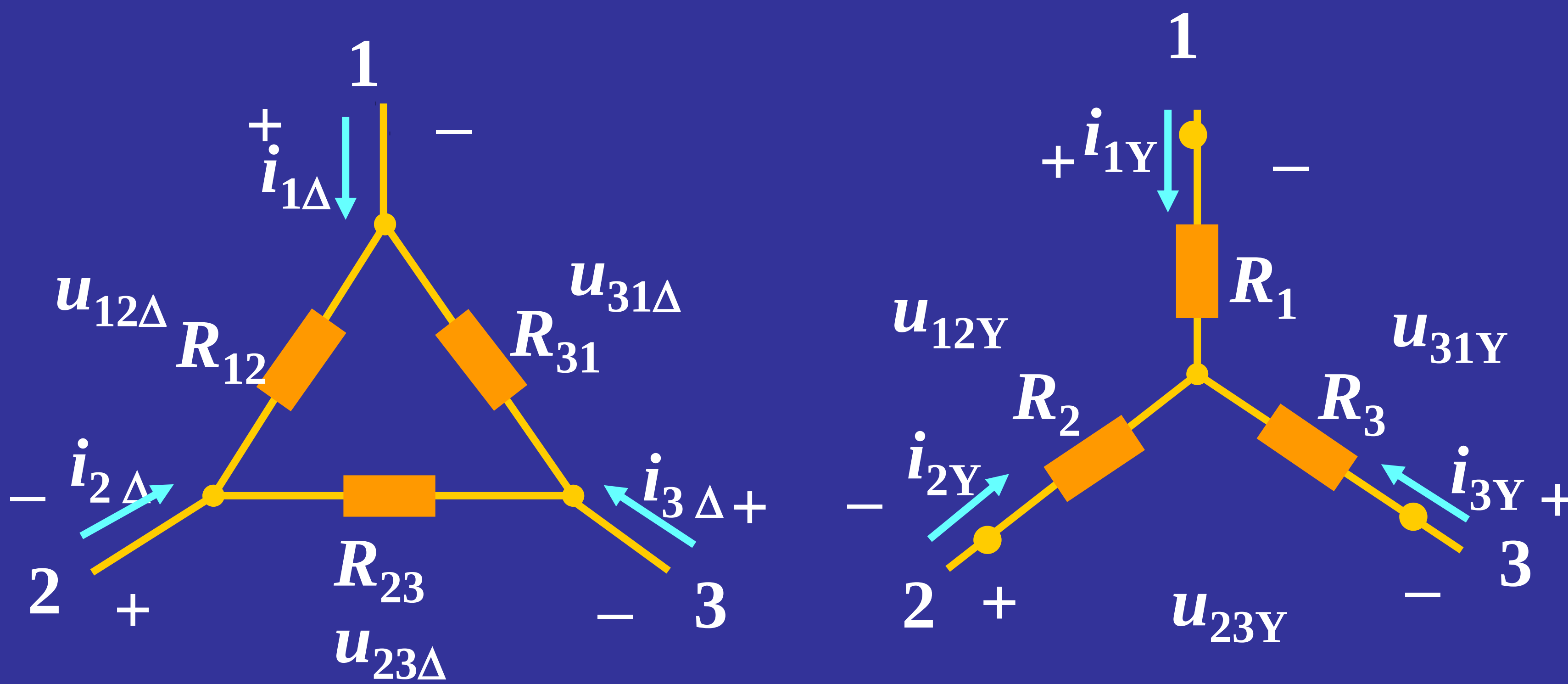
π 型电路 (Δ 型)



T 型电路 (Y、星 型)

这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效

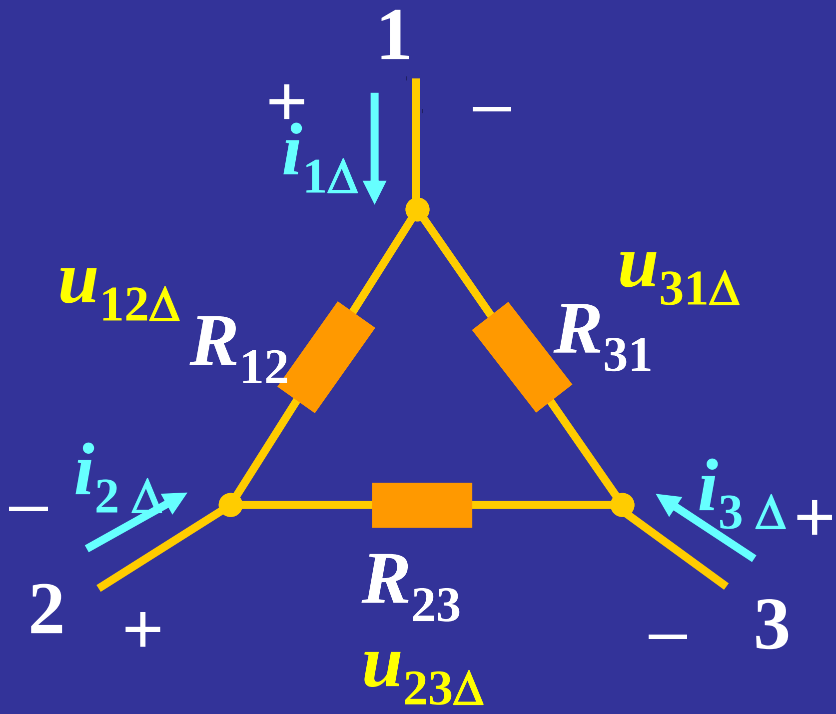
2. Δ—Y 变换的等效条件

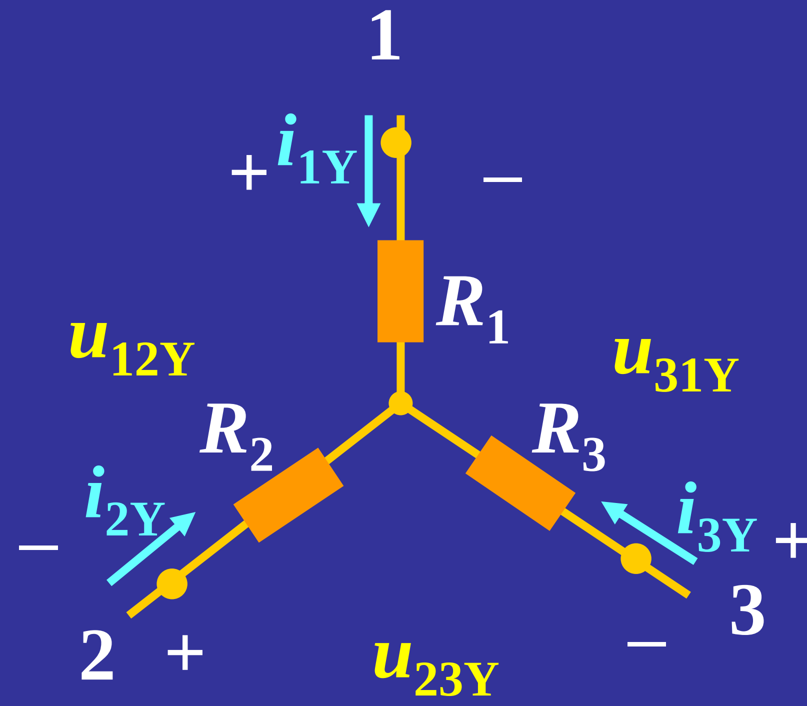


等效条件：

$$i_{1\Delta}=i_{1Y},\quad i_{2\Delta}=i_{2Y},\quad i_{3\Delta}=i_{3Y},$$

$$u_{12\Delta}=u_{12Y},\quad u_{23\Delta}=u_{23Y},\quad u_{31\Delta}=u_{31Y}$$





Δ接: 用电压表示电流

Y接: 用电流表示电压

$$\left.\begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{12Y} &= R_1 i_{1Y} - R_2 i_{2Y} \\ u_{23Y} &= R_2 i_{2Y} - R_3 i_{3Y} \\ u_{31Y} &= R_3 i_{3Y} - R_1 i_{1Y} \\ i_{1Y} &+ i_{2Y} + i_{3Y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

由式(2)解得：

$$\left.\begin{aligned}
i_{1Y} &= \frac{u_{12Y}R_3 - u_{31Y}R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\
i_{2Y} &= \frac{u_{23Y}R_1 - u_{12Y}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\
i_{3Y} &= \frac{u_{31Y}R_2 - u_{23Y}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\
i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\
i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23}
\end{aligned}\right\} (1)$$

根据等效条件，比较式(3)与式(1)，得Y型→Δ型的变换条件：

$$\left.\begin{aligned}
R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \\
R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \\
R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}
\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
G_{12} &= \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\
G_{23} &= \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\
G_{31} &= \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3}
\end{aligned}\right\}$$

类似可得到由Δ型→ Y型的变换条件：

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12}G_{31}}{G_{23}} \\ G_2 &= G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23}G_{12}}{G_{31}} \\ G_3 &= G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31}G_{23}}{G_{12}} \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\}$$

简记方法：

$$R_Y = \frac{\Delta\text{相邻电阻乘积}}{\sum R_\Delta}$$

或

$$G_\Delta = \frac{\text{Y相邻电导乘积}}{\sum G_Y}$$

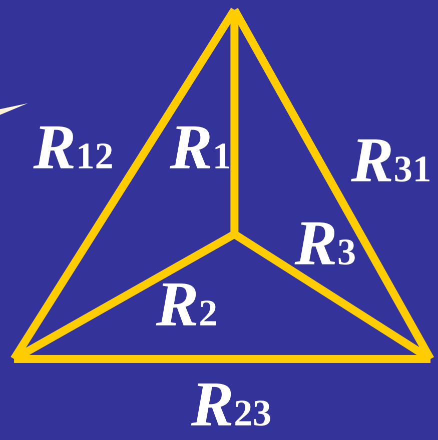
Δ变Y

Y变Δ

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$\boxed{R_{\Delta} = 3R_{Y}}$$

外大内小



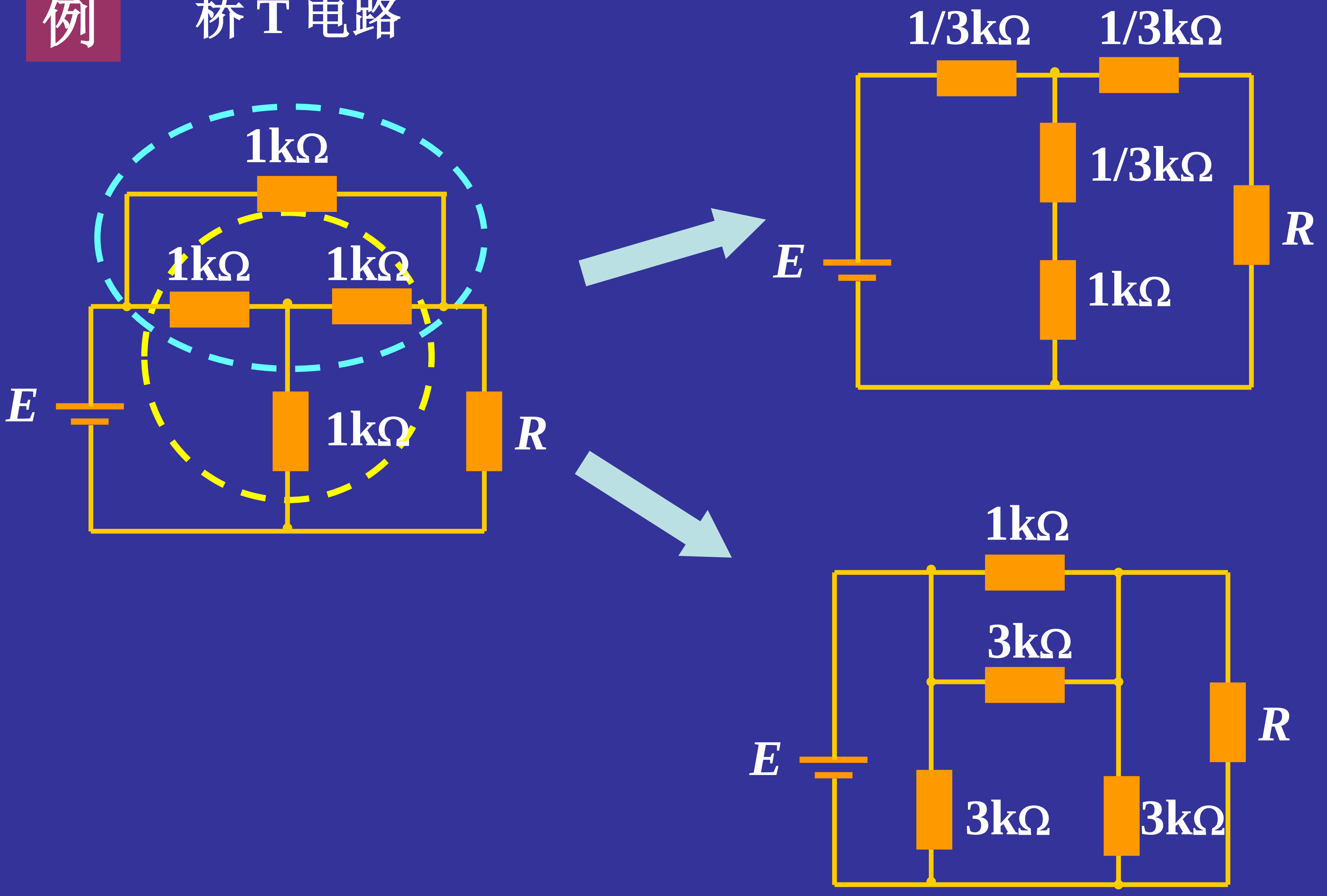
注意

(1) 等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立。

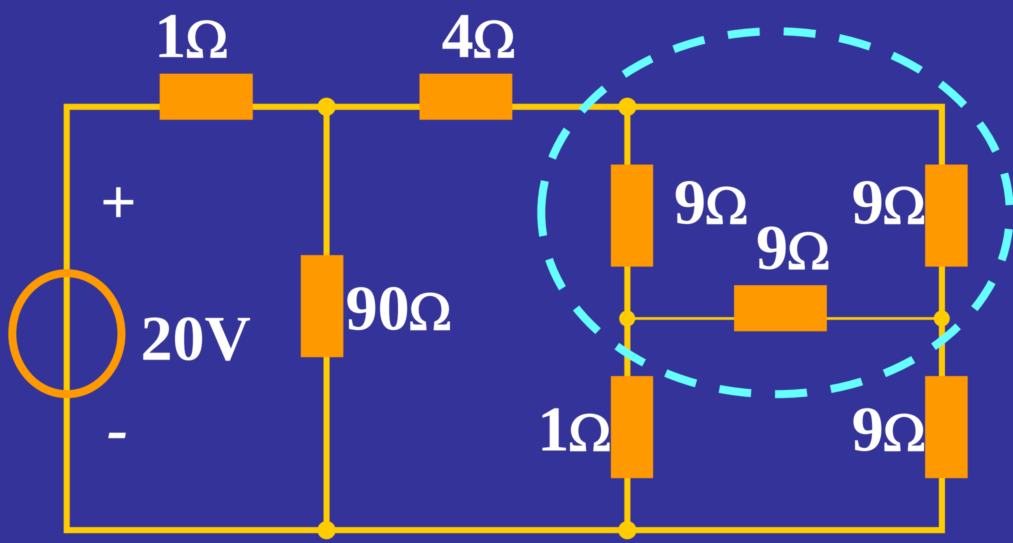
(2) 等效电路与外部电路无关。

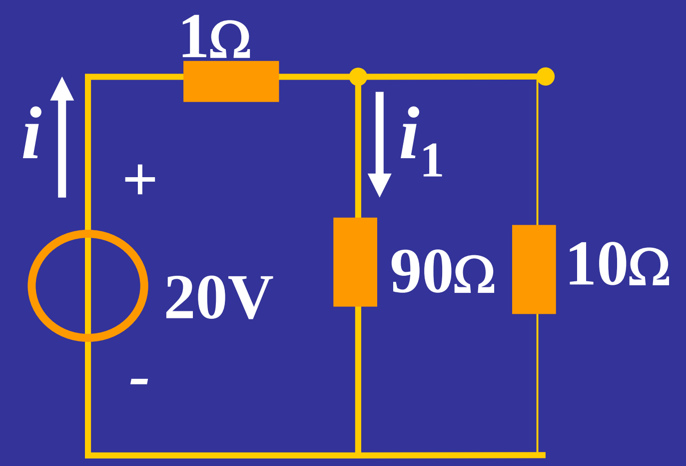
(3) 用于简化电路

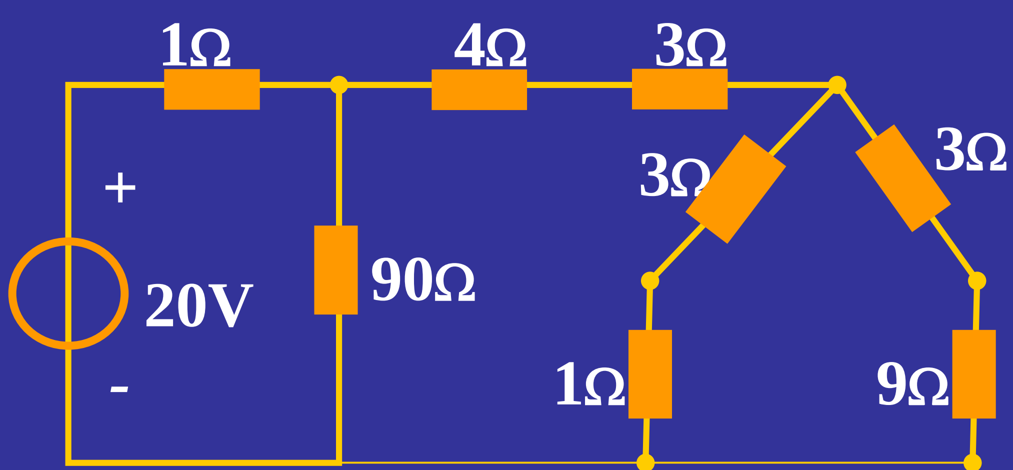
例 桥 T 电路



例 计算90Ω电阻吸收的功率







$$R_{eq} = 1 + \frac{10 \times 90}{10 + 90} = 10\Omega$$

$$i = 20/10 = 2A$$

$$i_1 = \frac{10 \times 2}{10 + 90} = 0.2A$$

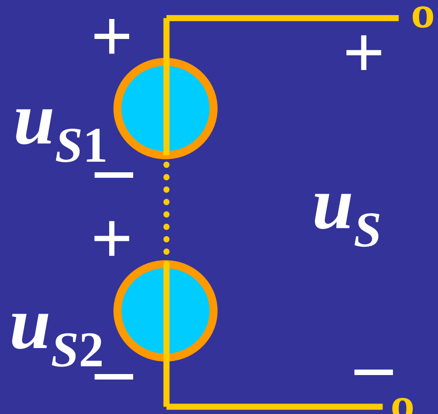
$$P = 90 i_1^2 = 90 \times (0.2)^2 = 3.6W$$

2.5 电压源和电流源的串联和并联

1. 理想电压源的串联和并联

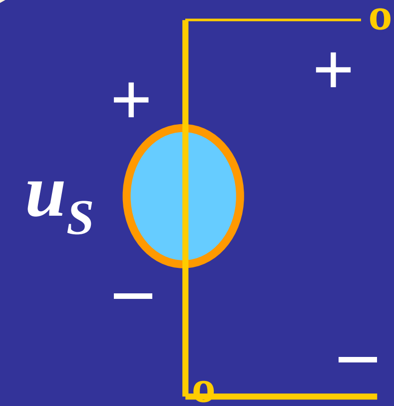
注意参考方向

●串联

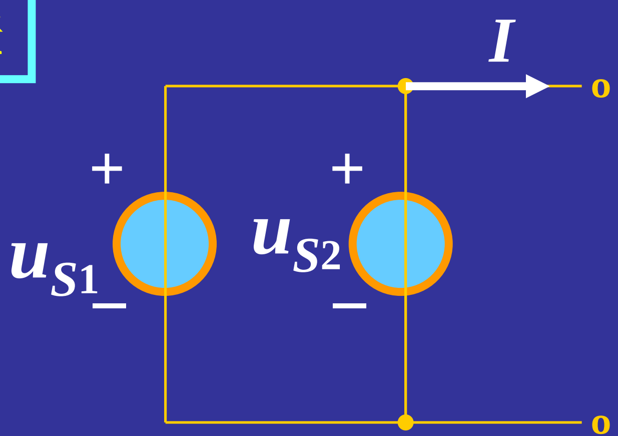


$$u_s = u_{s1} + u_{s2} = \sum u_{sk}$$

等效电路



●并联

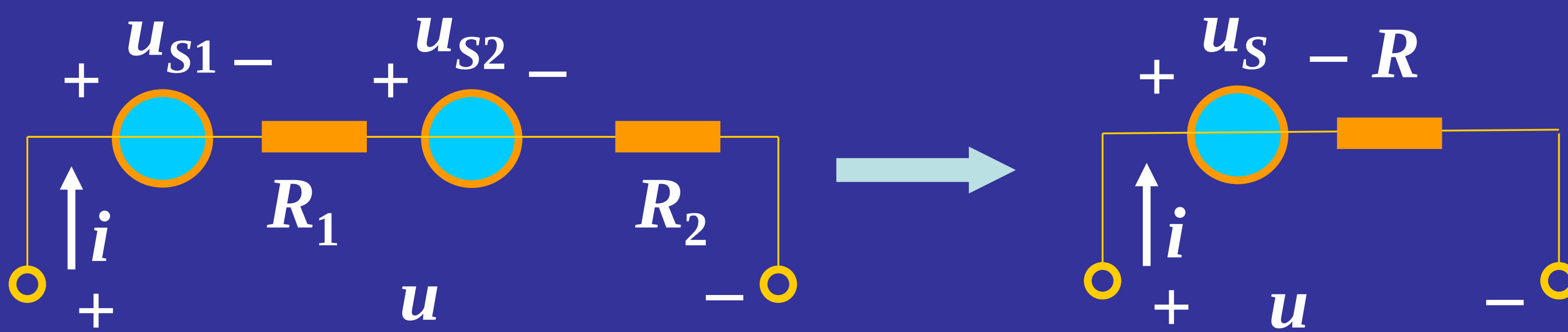


等效电路

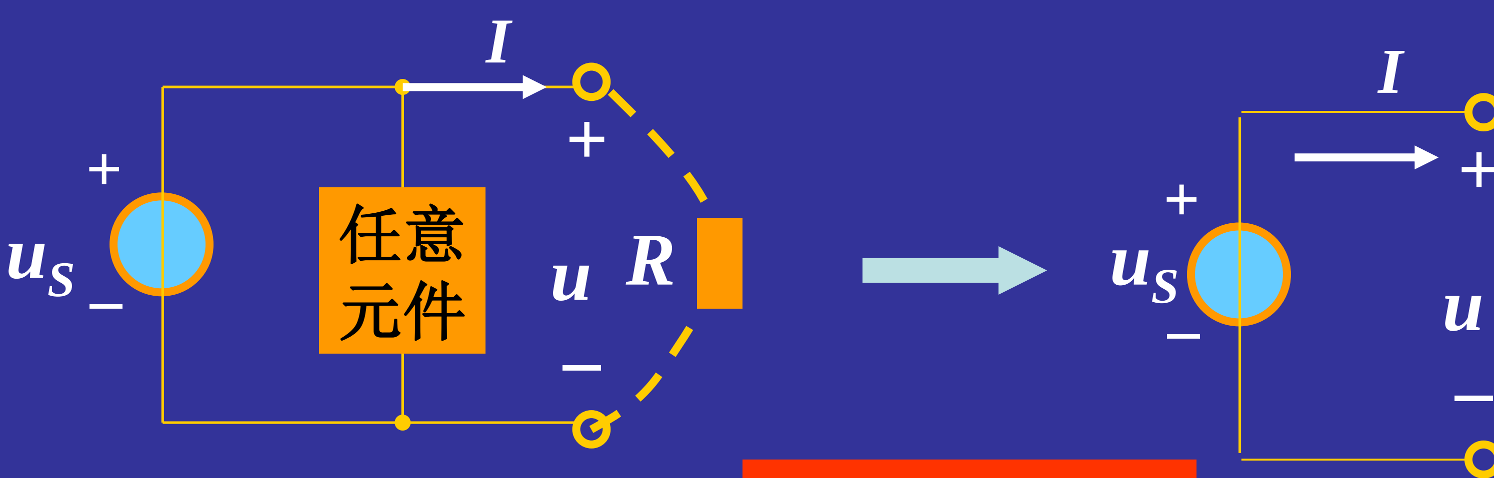
$$u_s = u_{s1} = u_{s2}$$

相同的电压源才能并联,电源中的电流不确定。

● 电压源与支路的串、并联等效



$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_S + Ri$$



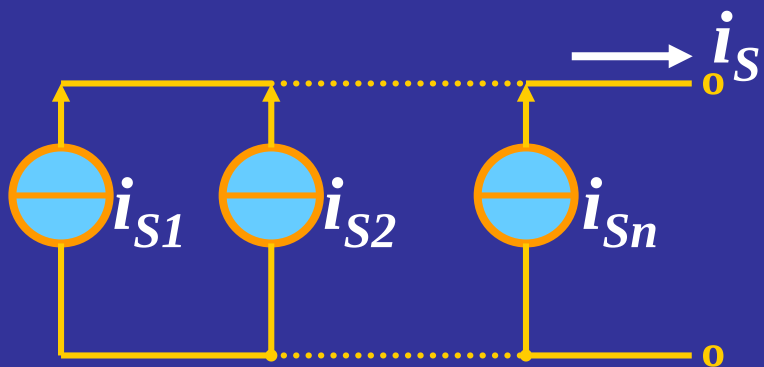
对外等效！

2. 理想电流源的串联并联

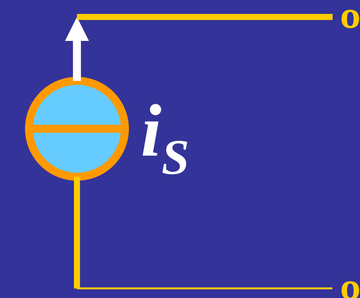
注意参考方向

● 并联

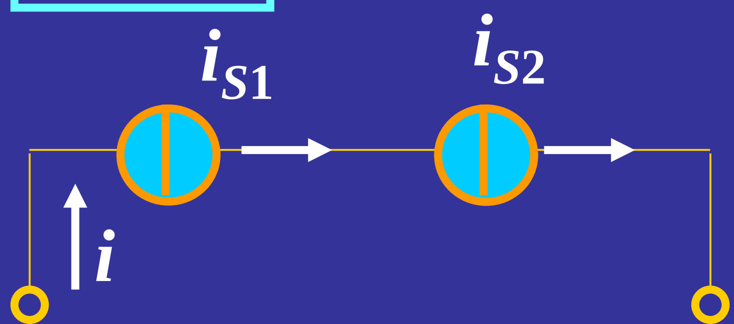
$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$



等效电路



● 串联

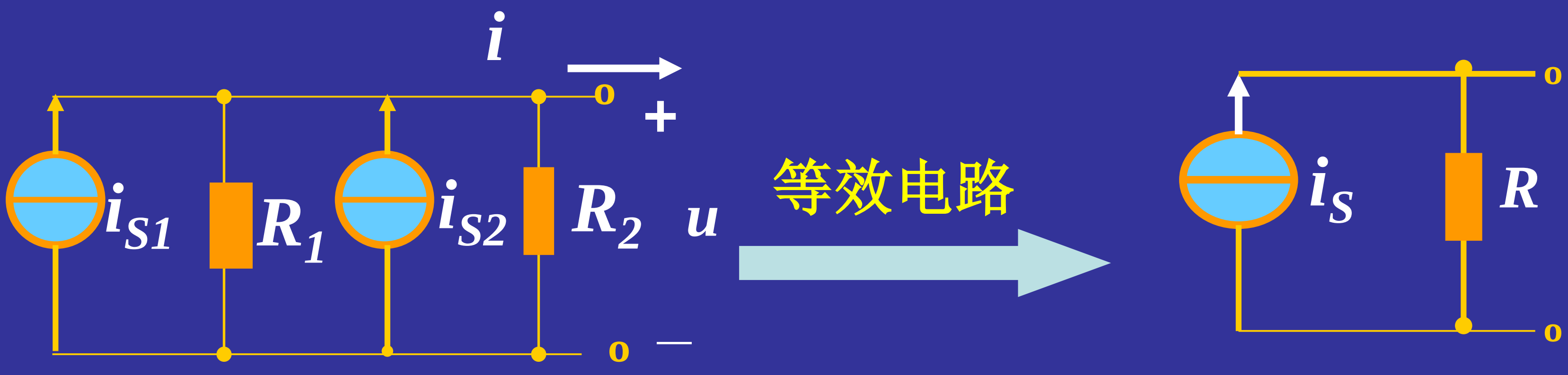


等效电路

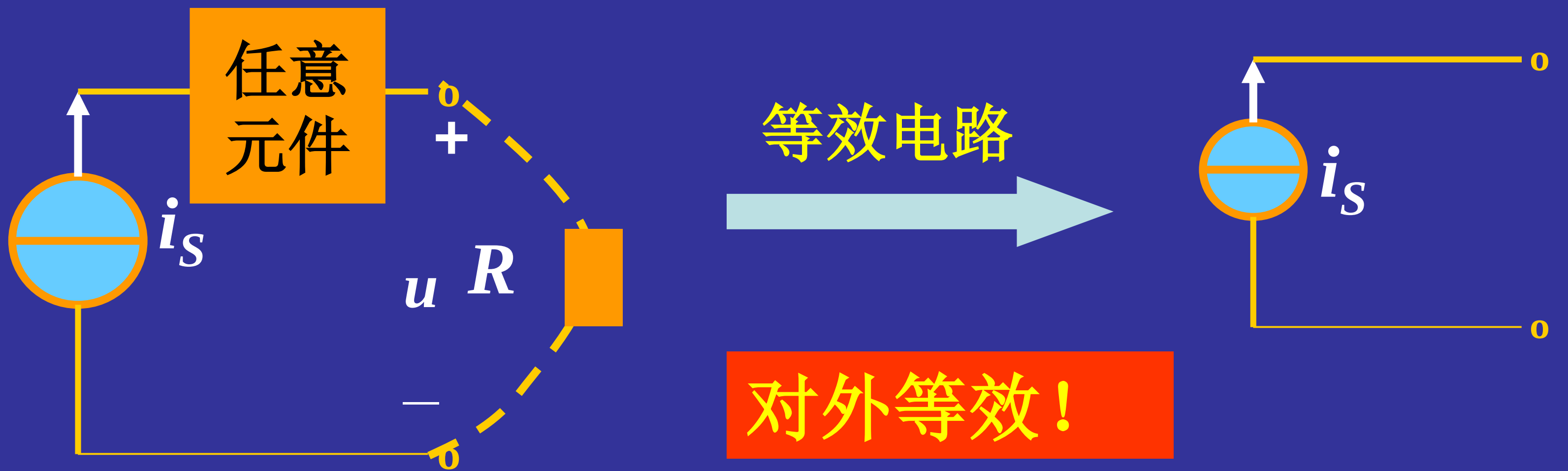
$$i_s = i_{s1} = i_{s2}$$

相同的理想电流源才能串联，每个电流源的端电压不能确定

● 电流源与支路的串、并联等效

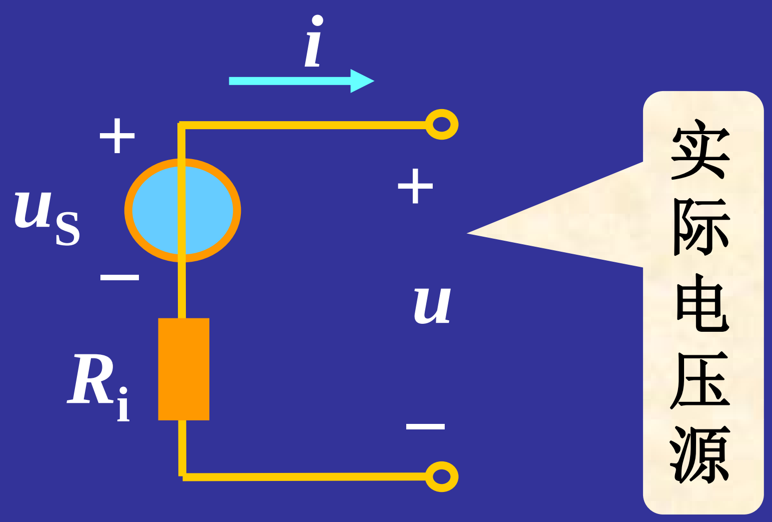


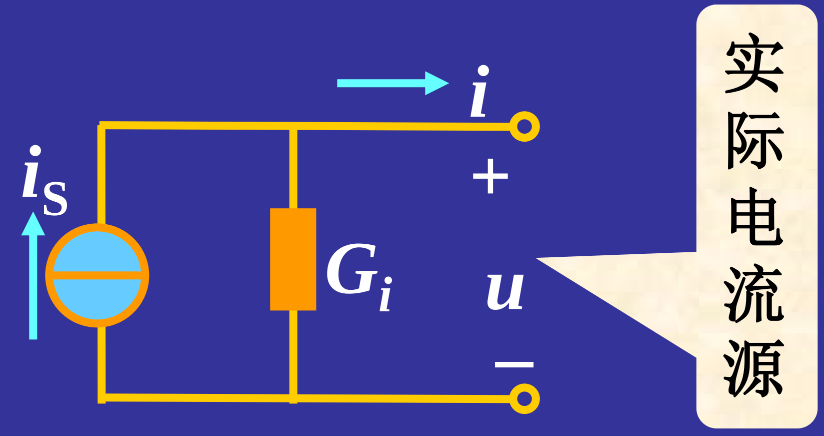
$$i = i_{s1} + u/R_1 + i_{s2} + u/R_2 = i_{s1} + i_{s2} + (1/R_1 + 1/R_2)u = i_s + u/R$$



2.6 电压源和电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。





端口特性

$u = u_S - R_i\, i$

$i = u_S/R_i - u/R_i$

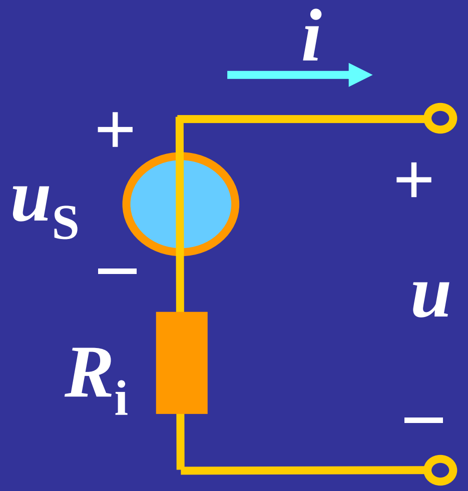
$i = i_S - G_i u$

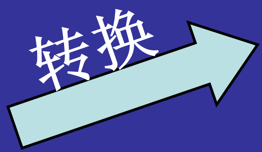
比较可得等效的条件：

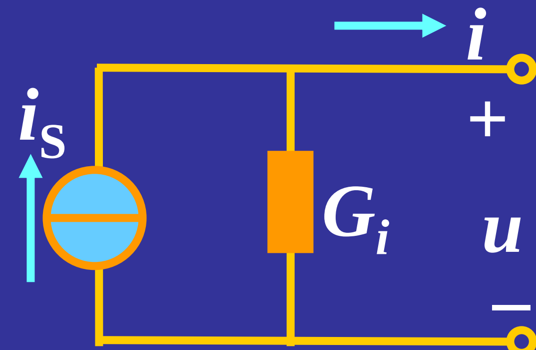
$i_S = u_S/R_i$

$G_i = 1/R_i$

由电压源变换为电流源：

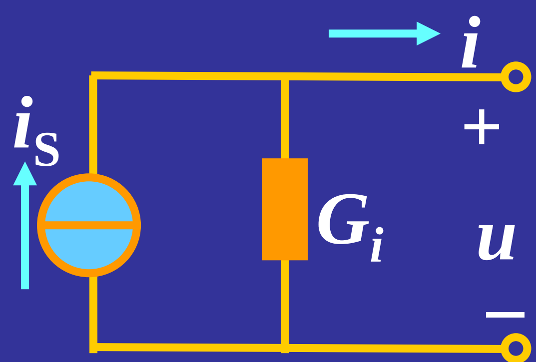


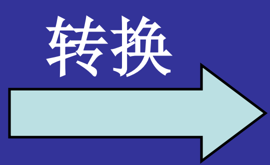


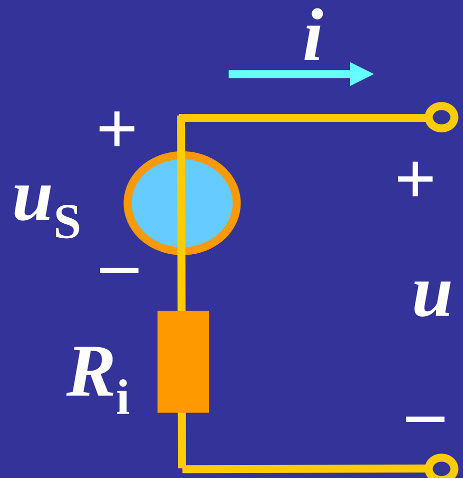


$$i_s = {u_s}/{R_i}, \quad G_i = {1}/{R_i}$$

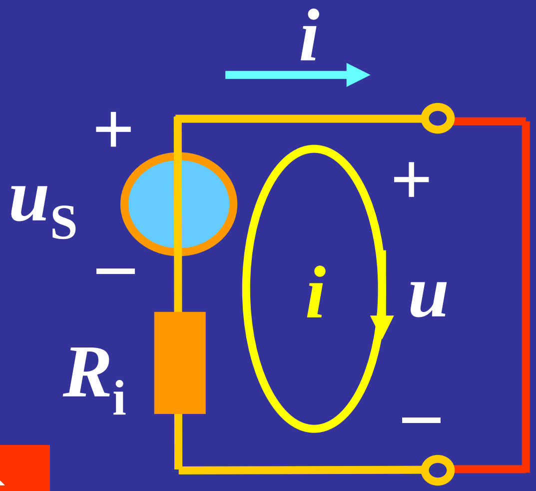
由电流源变换为电压源：

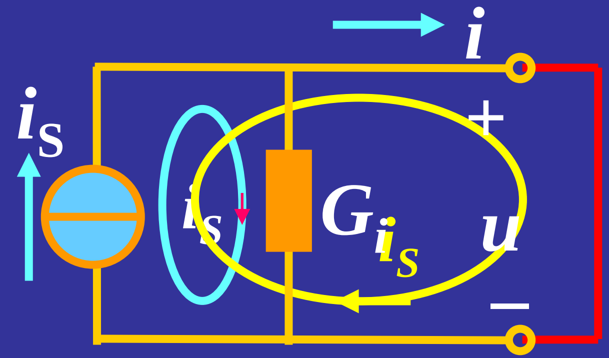






$$u_s = {i_s}/{G_i}, \quad R_i = {1}/{G_i}$$





注意

(1) 变换关系 ｛数值关系:
方向：电流源电流方向与电压源电压方向相反。

(2) 等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

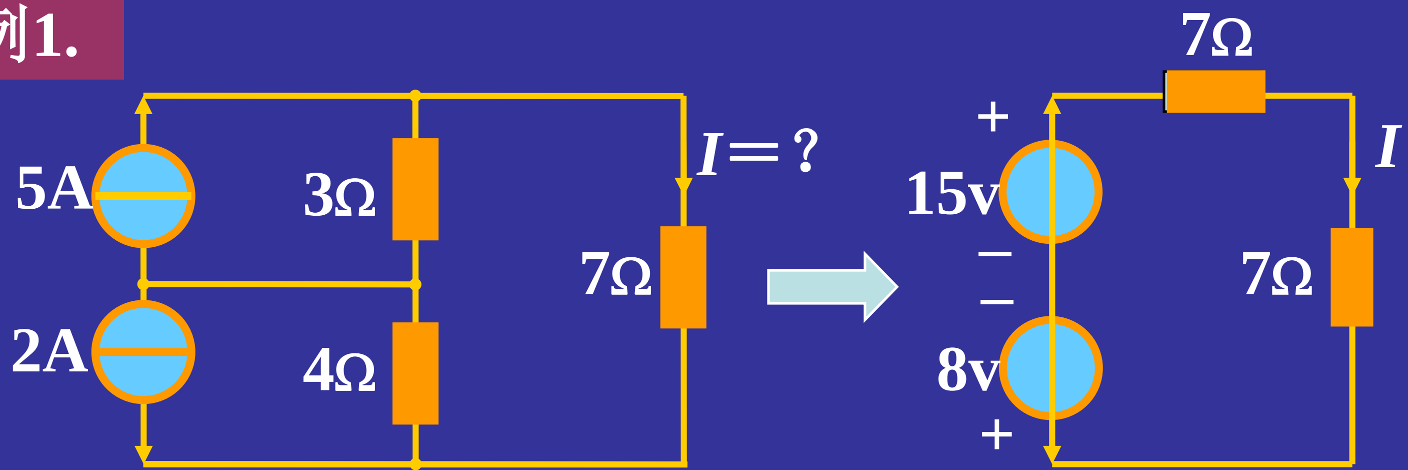
表现在

- 开路的电压源中无电流流过 R_i；
  开路的电流源可以有电流流过并联电导G_i 。
- 电压源短路时，电阻中R_i有电流；
  电流源短路时， 并联电导G_i中无电流。

(3) 理想电压源与理想电流源不能相互转换。

利用电源转换简化电路计算。

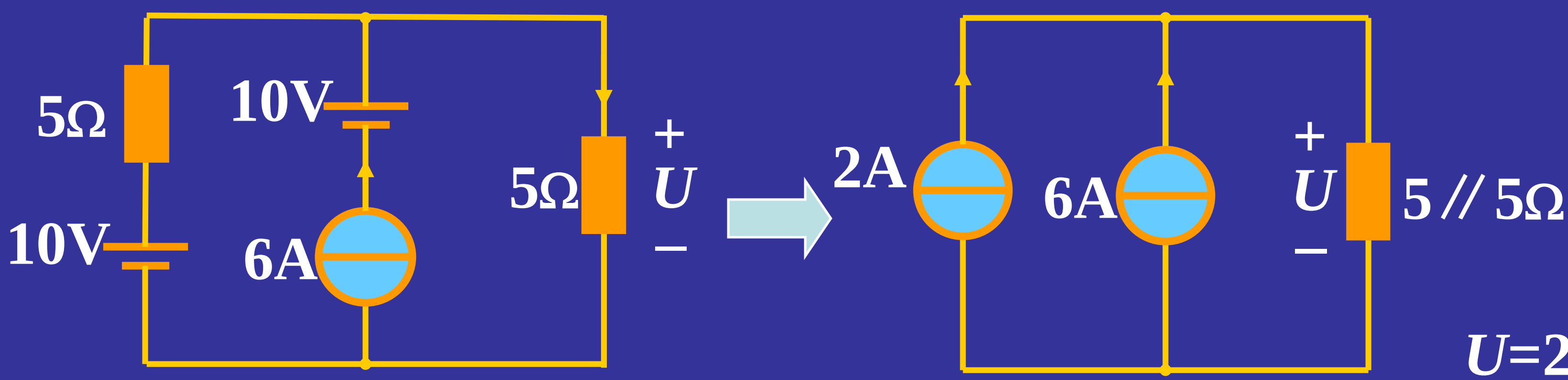
例1.



I=0.5A

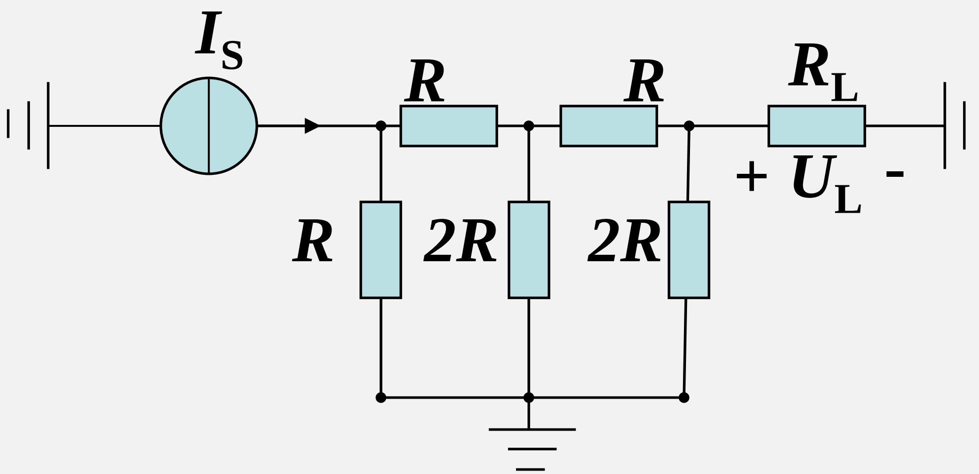
例2.

U=?

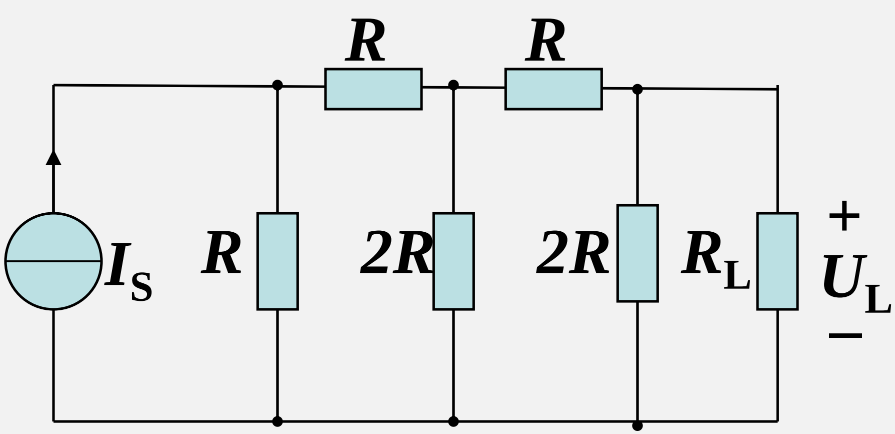


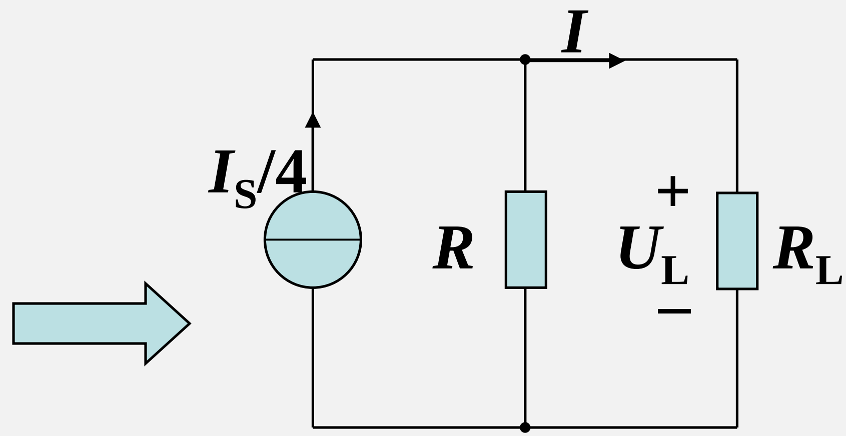
U=20V

例8.



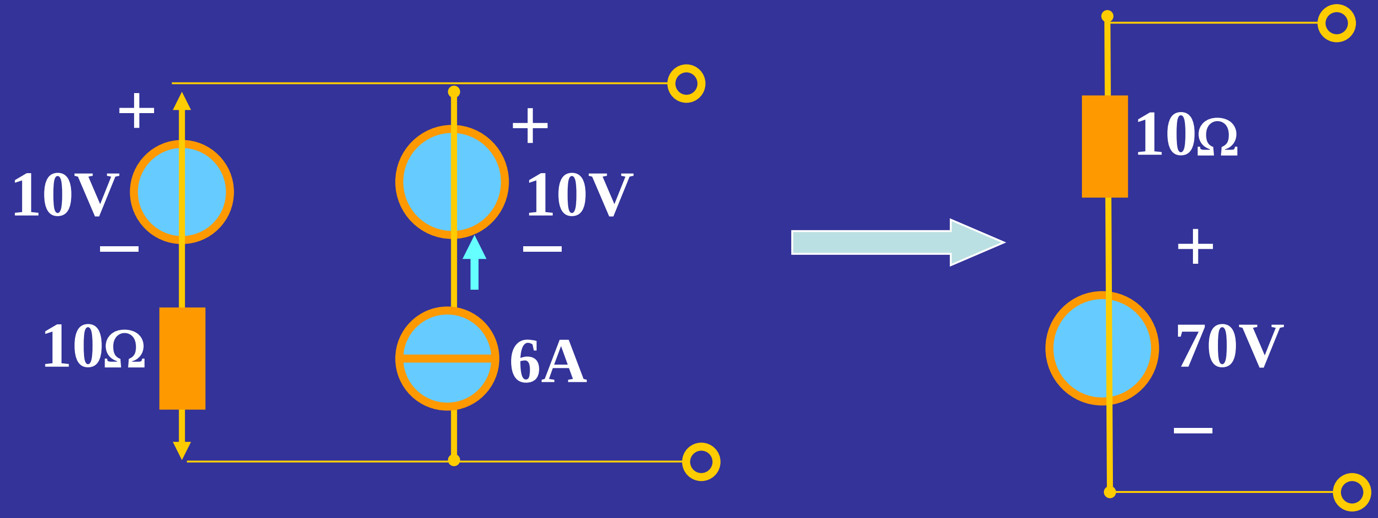
即

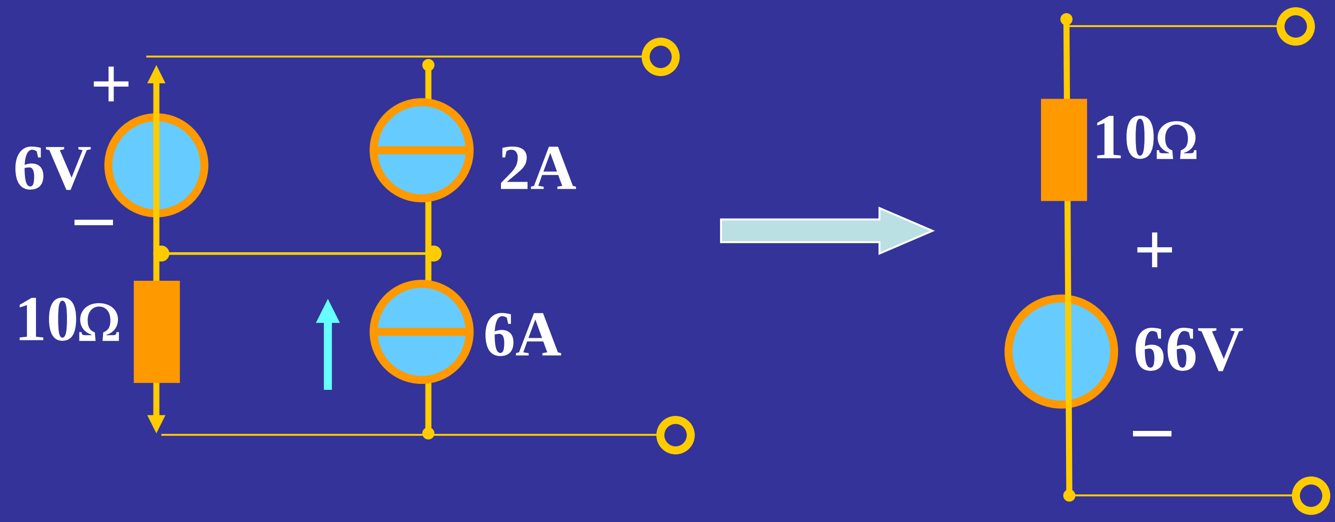




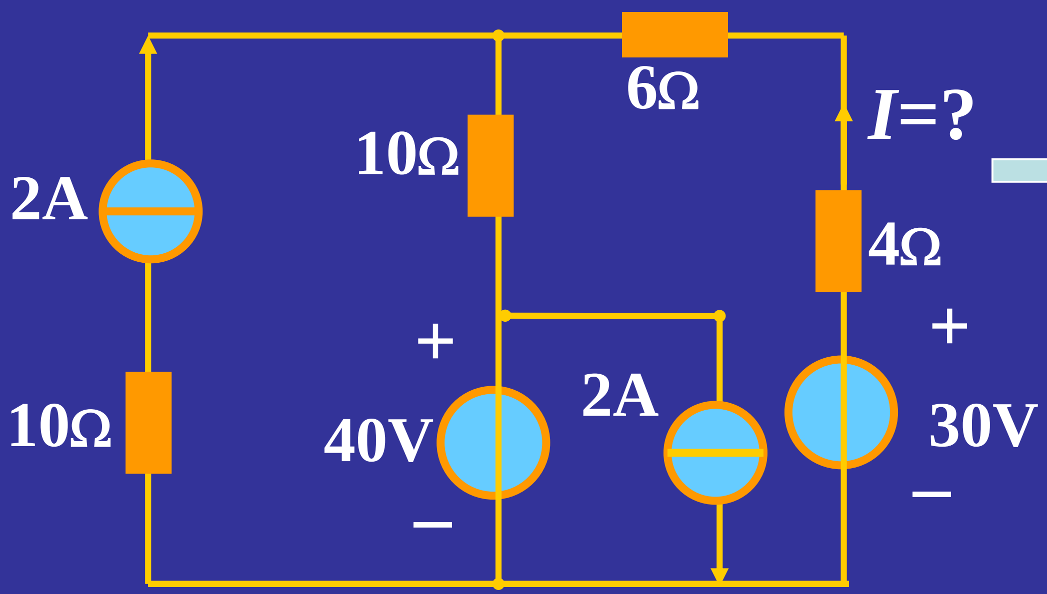
$$U_L = \frac{I_S}{4}\,\frac{RR_L}{R+R_L}$$

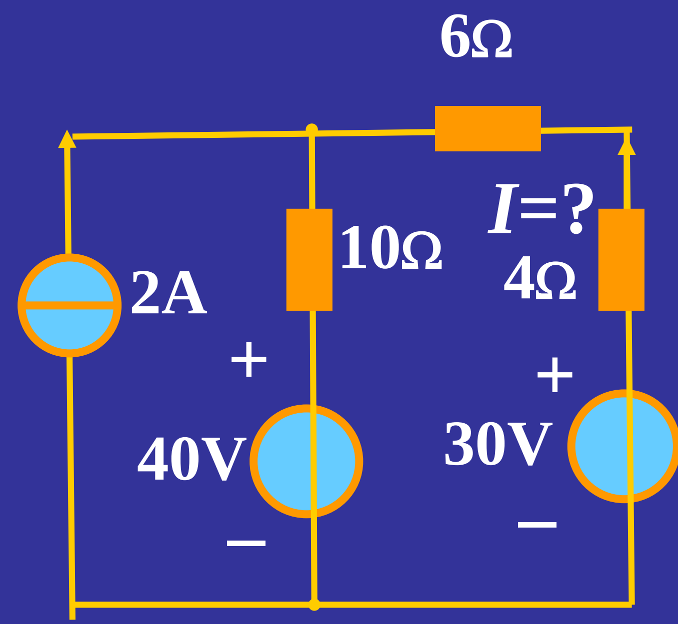
例3. 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串连。

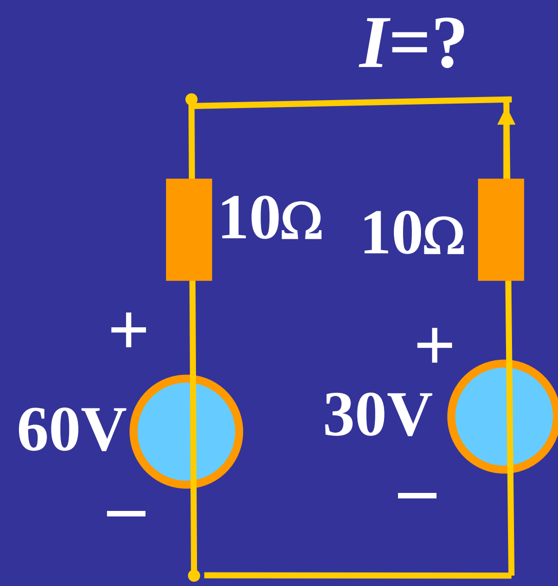




例4.

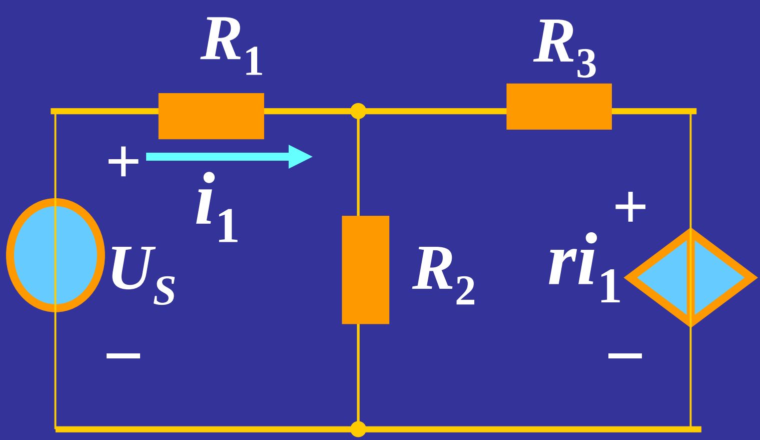


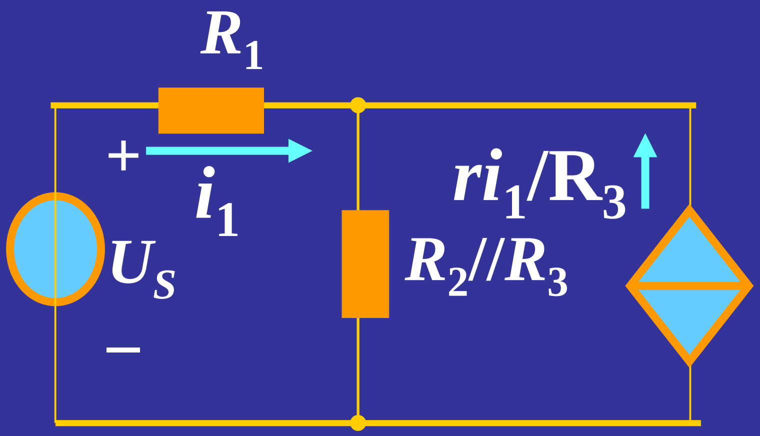


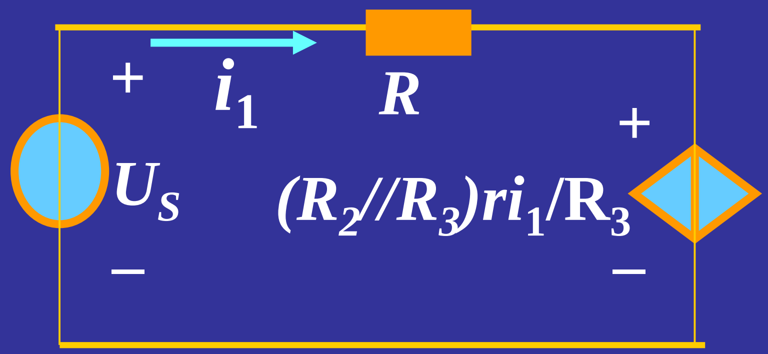


$$I=\frac{30-60}{20}=-1.5A$$

例5. 求电流 i_1







$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

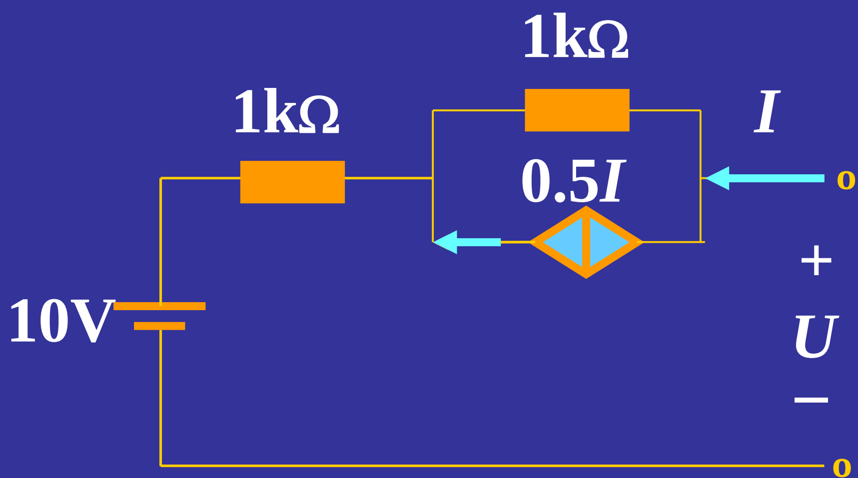
$$Ri_1 + (R_2 // R_3) ri_1 / R_3 = U_S$$

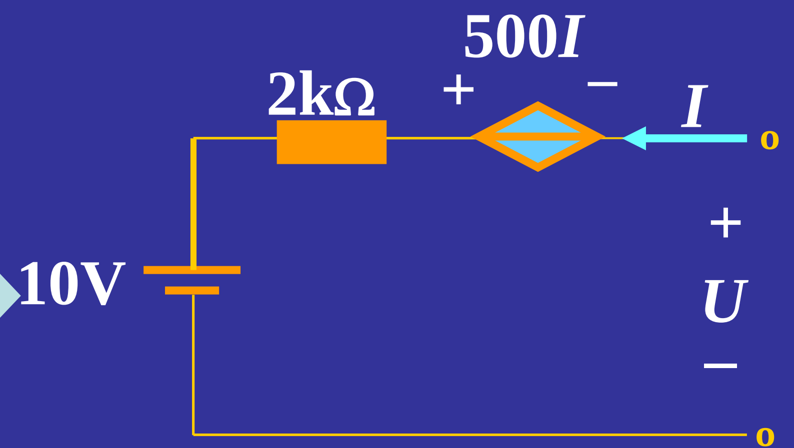
$$i_1 = \frac{U_S}{R + (R_2 // R_3) r / R_3}$$

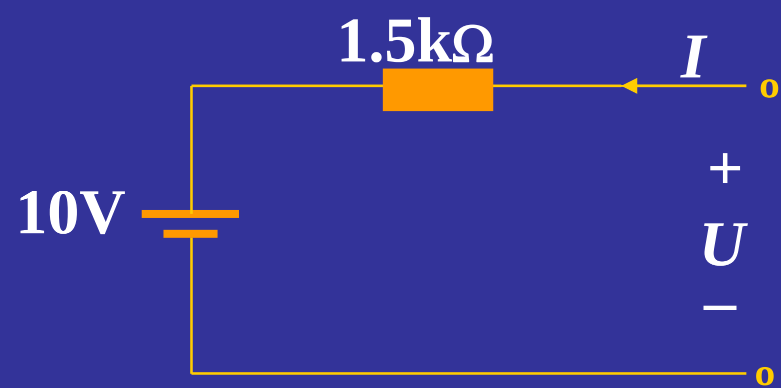
注:

受控源和独立源一样可以进行电源转换；转换过程中注意不要丢失控制量。

例6. 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串连。

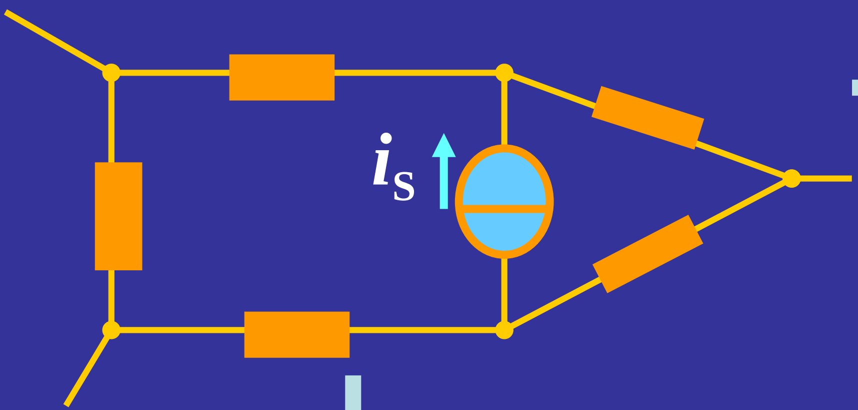


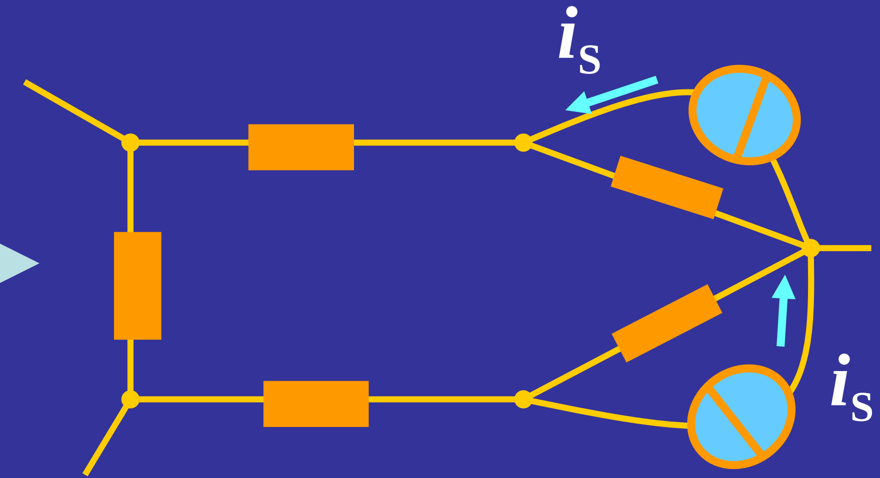


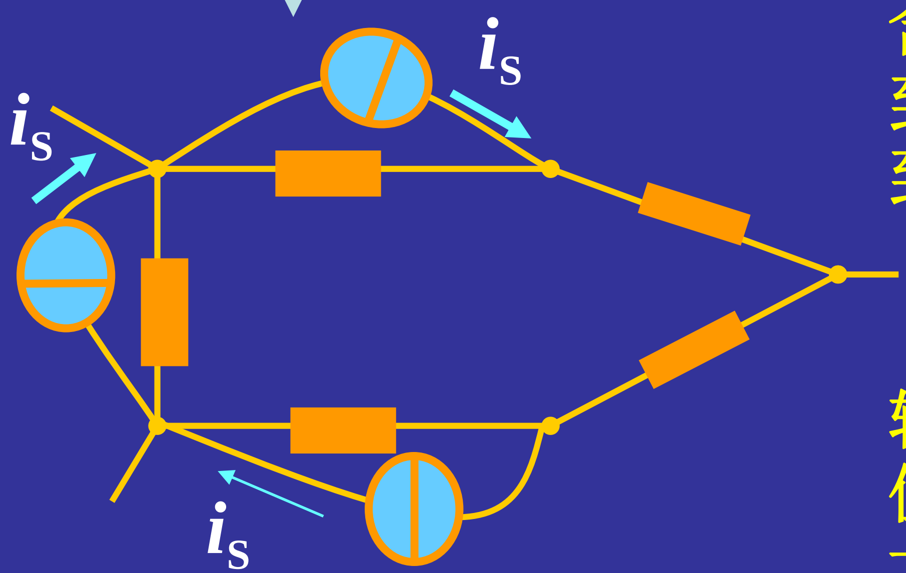


$$U = -500I + 2000I + 10$$
$$= 1500I + 10$$

理想电流源的转移



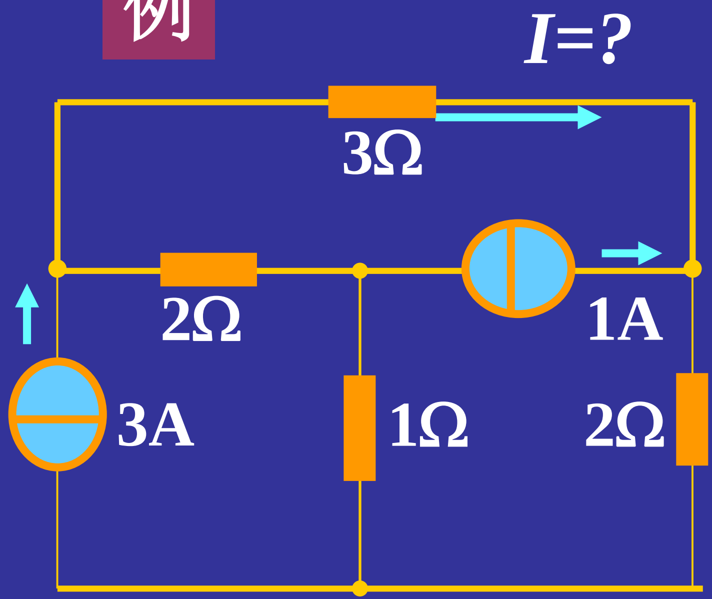


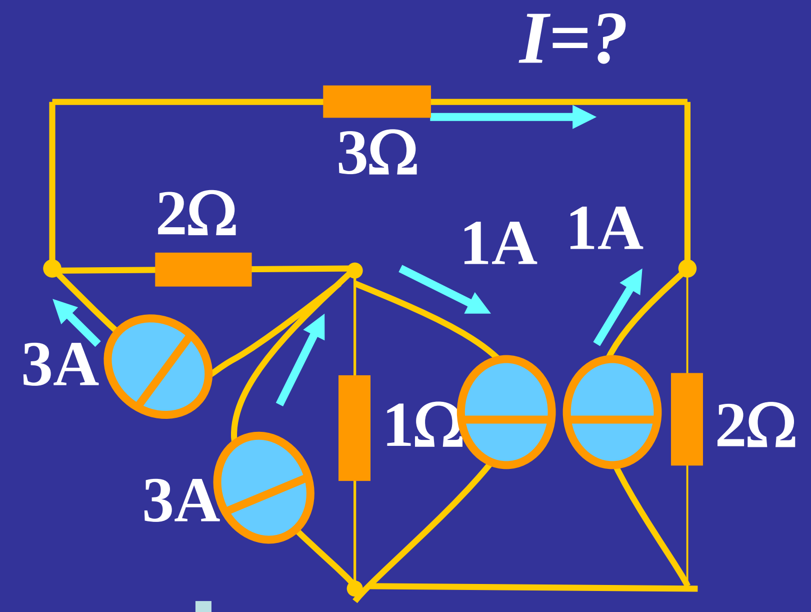


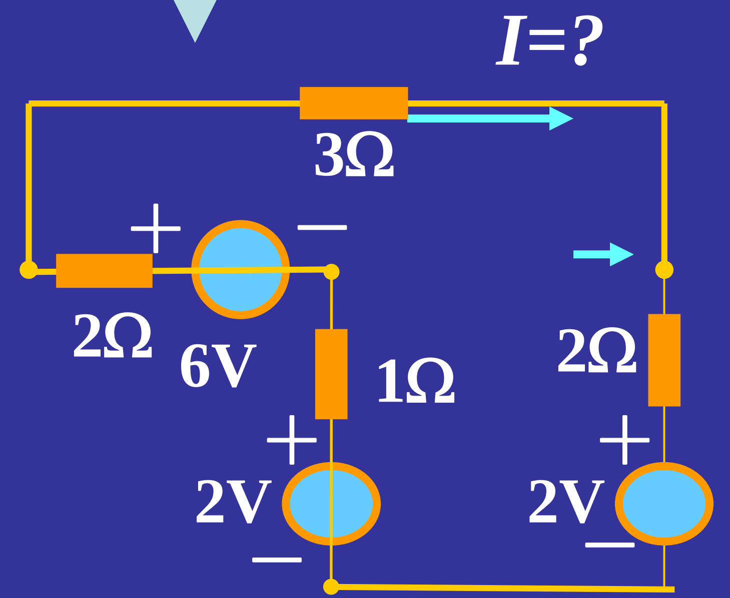
（1） 把理想电流源沿着包含它所在支路的任意回路转移到该回路的其他支路中去，得到电流源和电阻的并联结构。

（2） 原电流源支路去掉，转移电流源的值等于原电流源值，方向保证各结点的KCL方程不变。

例

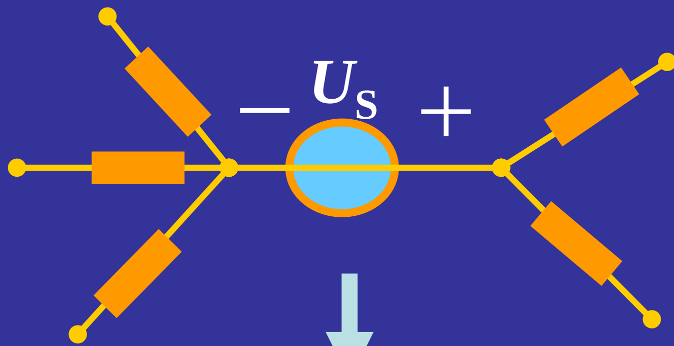


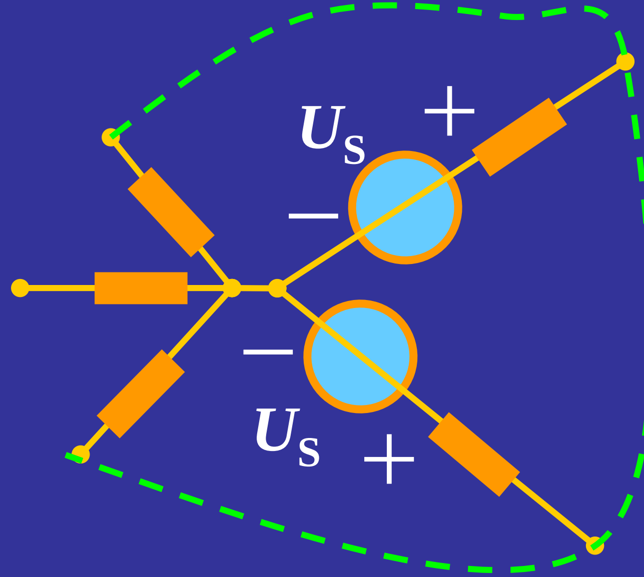


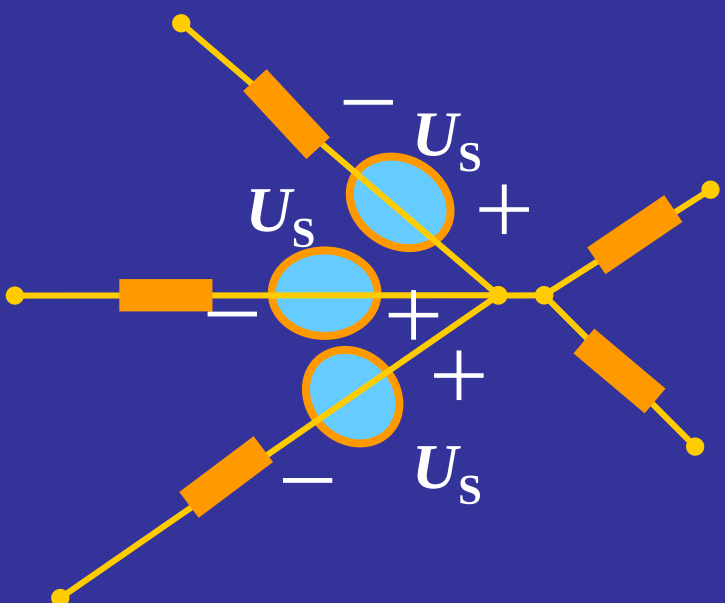


$I=6/8=0.75\text{A}$

理想电压源的转移



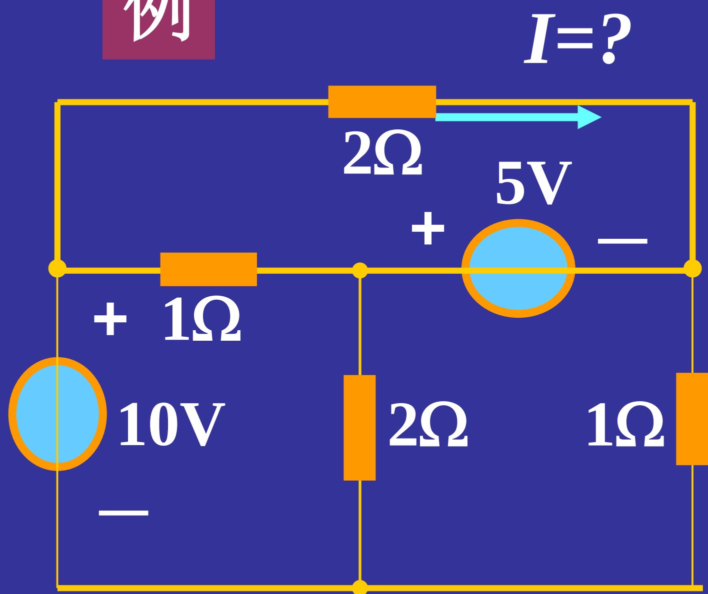


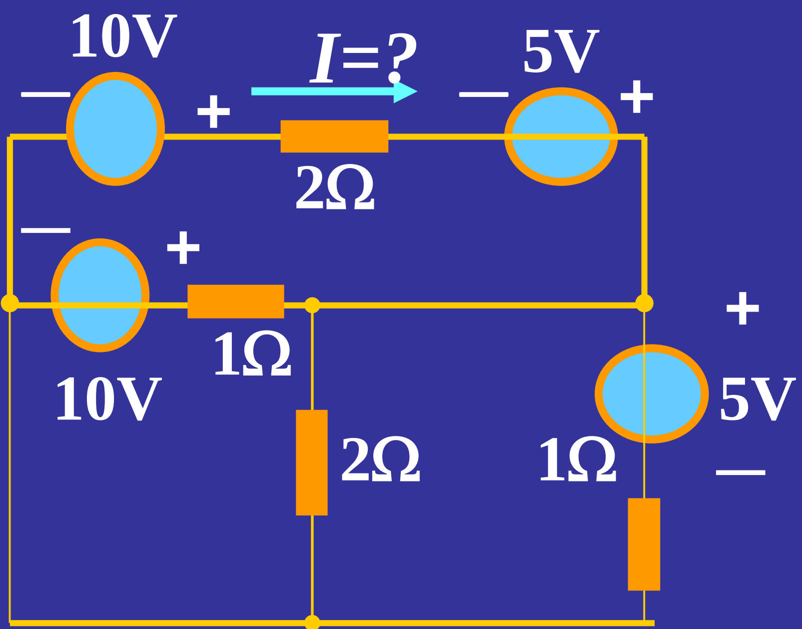


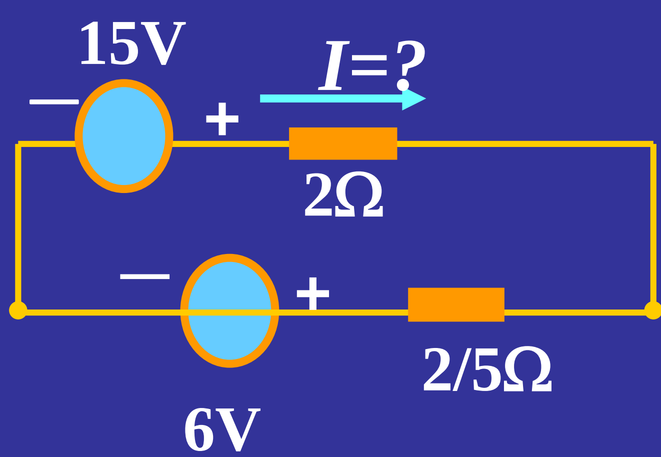
（1） 把理想电压源转移到邻近的支路，得到电压源和电阻的串联结构。

（2） 原电压源支路短接，转移电压源的值等于原电压源值，方向保证各回路的KVL方程不变。

例



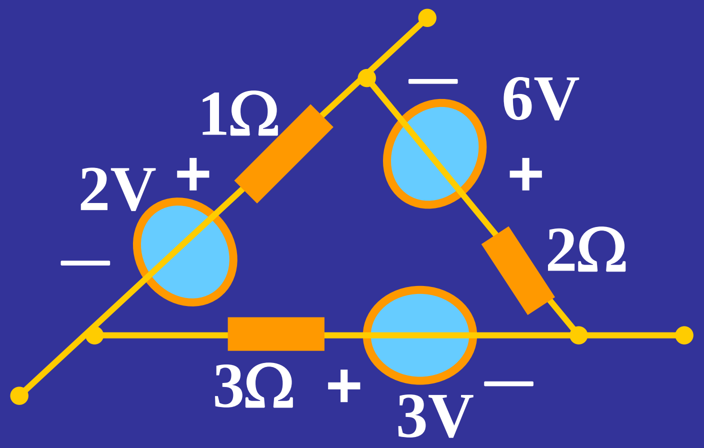


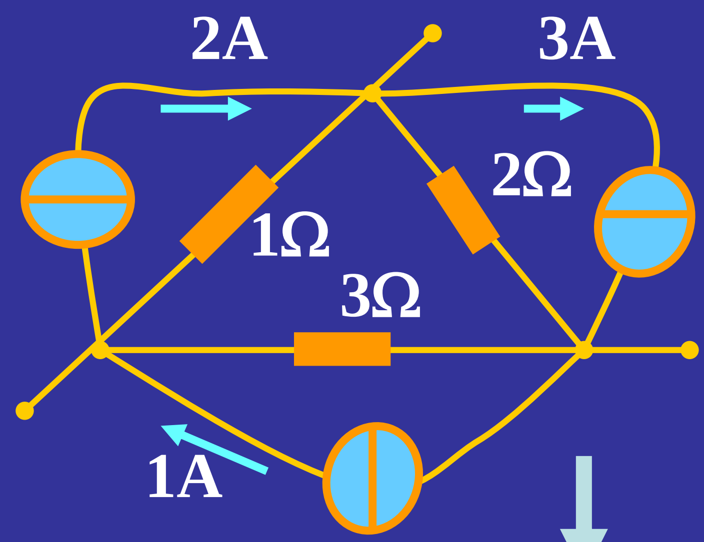


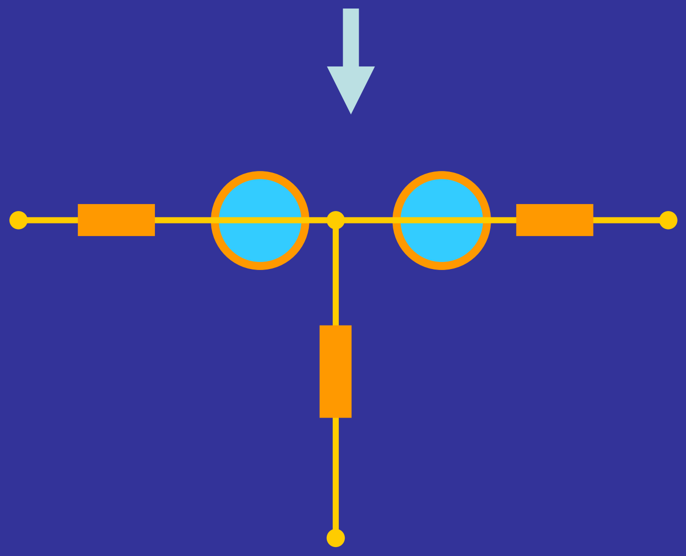
$$I=\frac{15-6}{2+0.4}=\frac{7.5}{2}=3.75A$$

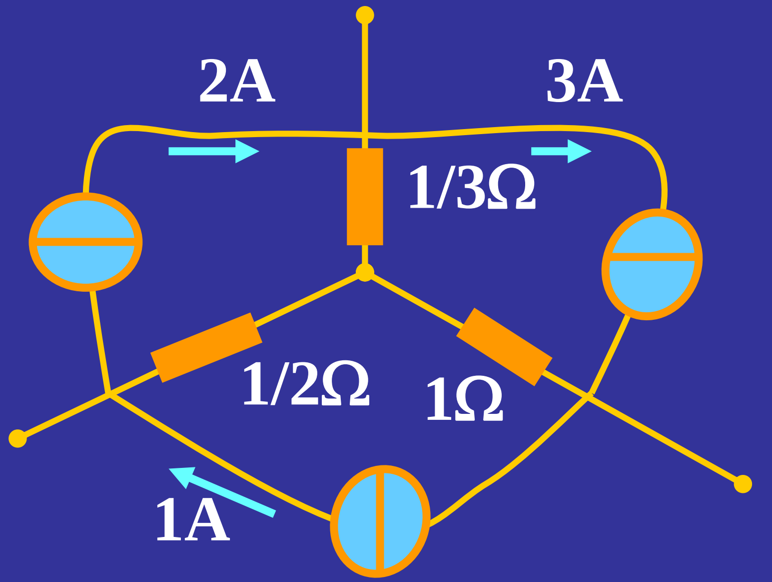
例

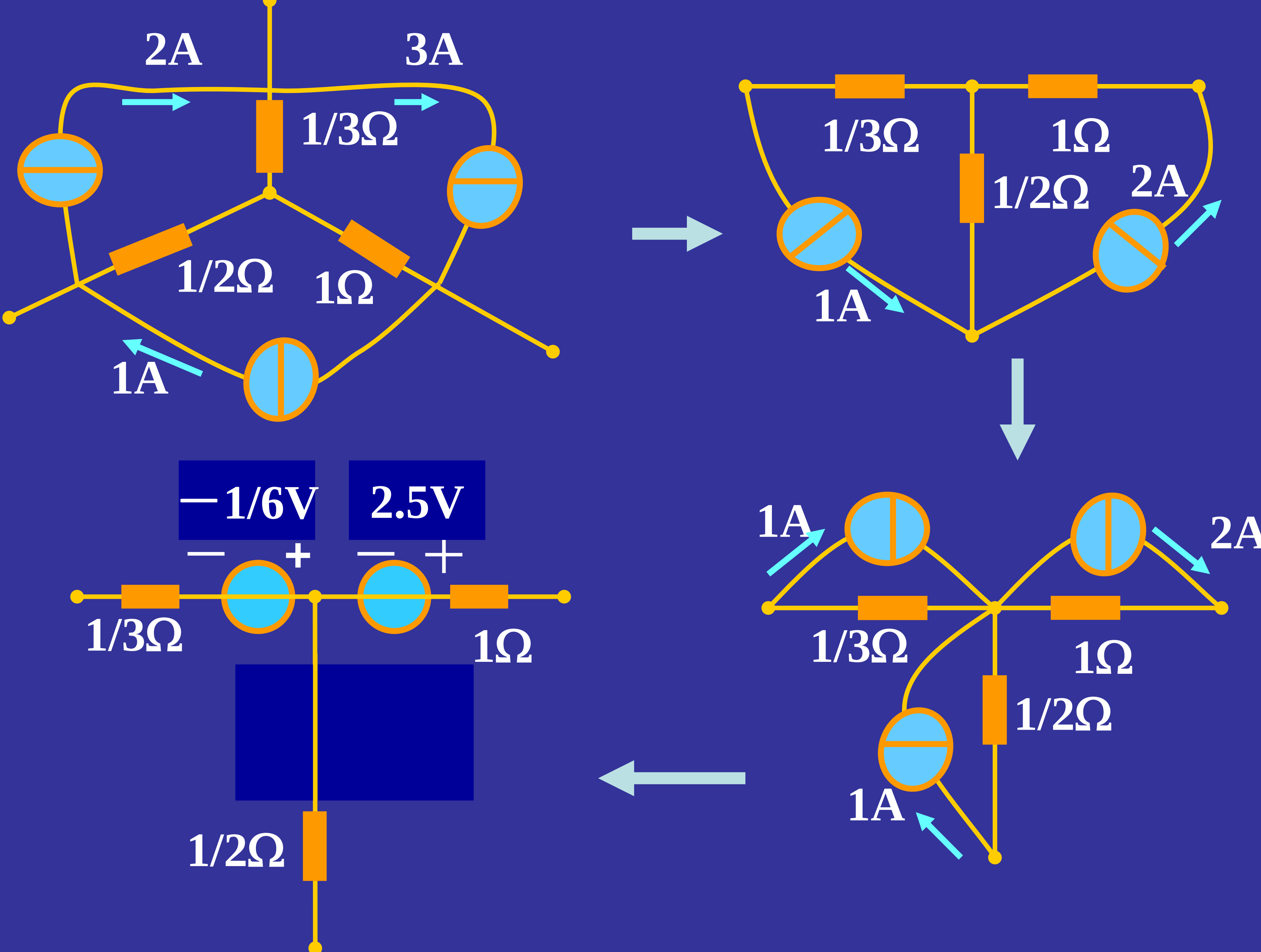
求图示△电路结构的等效Y型电路





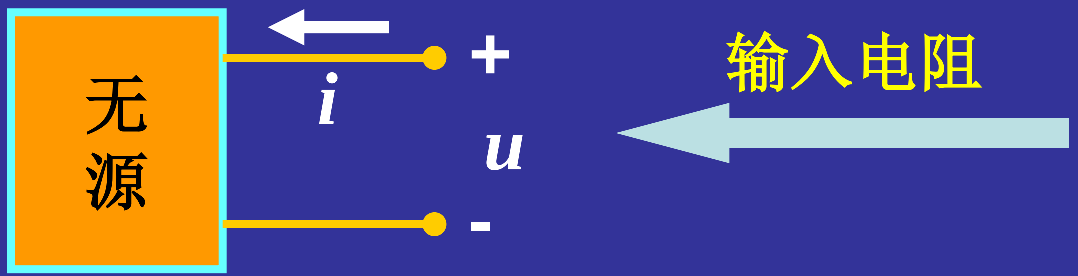





2A
3A
1/3Ω
1/2Ω
1Ω
1A
1/3Ω
1Ω
1/2Ω
2A
1A
1A
2A
1/3Ω
1Ω
1/2Ω
1A
—1/6V
2.5V
— +
— +
1/3Ω
1Ω
1/2Ω

2.6 输入电阻

1. 定义



$$R_{in} = \frac{u}{i}$$

2. 计算方法

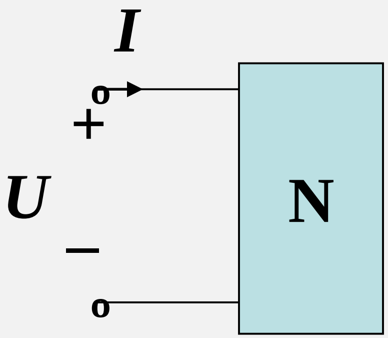
（1）如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、 并联和 Δ—Y变换等方法求它的等效电阻；

（2）对含有受控源和电阻的两端电路，用电压、电流法求输入电阻，即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

输入电阻

二端网络： 具有两个引出端子的网络

一端口网络



二端网络的输入（入端）电阻

$$R_{in} \stackrel{def}{=\!=} \frac{u}{i}$$

不含独立电源的一端口电阻网络的端电压与端电流之比

端口的输入电阻 R_{in} 等于端口的等效电阻 R_{eq}

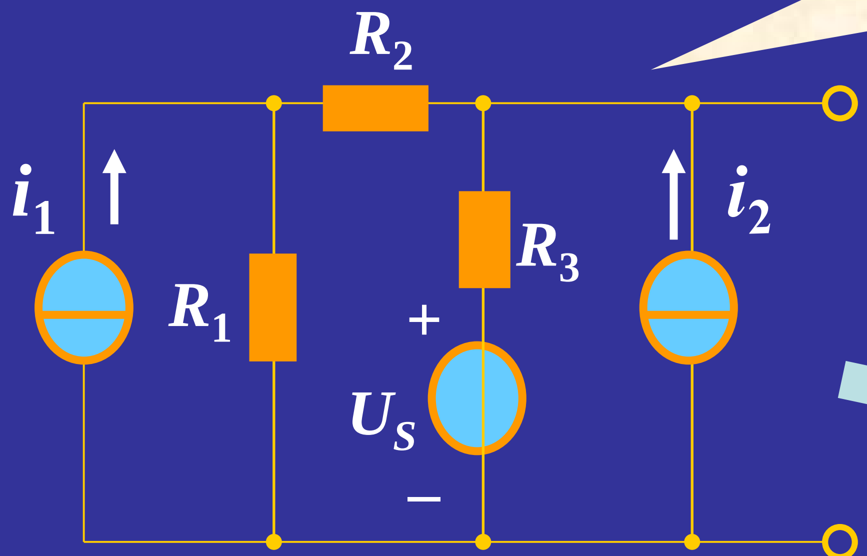
求输入电阻的电压、电流法

端口加一电压源 u_S，求出端口电流 i，则 $R_{in} = \frac{u_S}{i}$

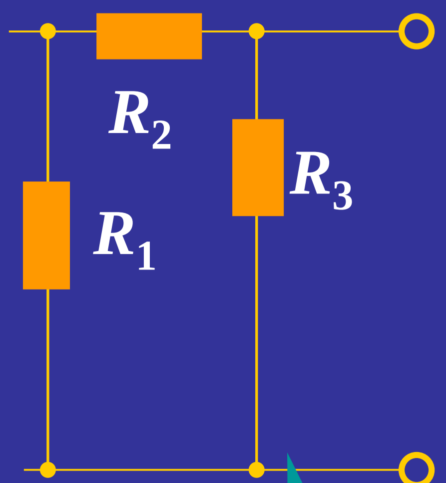
端口加一电流源 i_S，求出端口电压则 u ，则 $R_{in} = \frac{u}{i_S}$

计算下例一端口电路的输入电阻

例1.



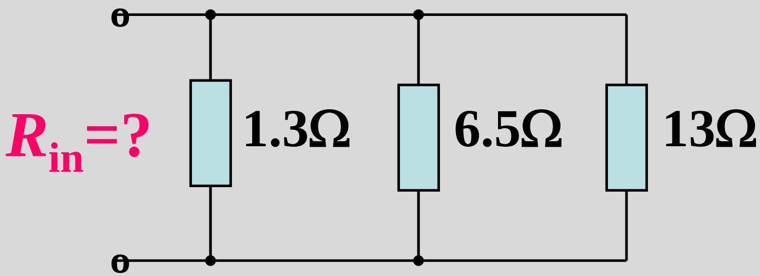
有源网络先把独立源置零：电压源短路；电流源断路，再求输入电阻



无源电阻网络

$$R_{in} = (R_1 + R_2) // R_3$$

例9.



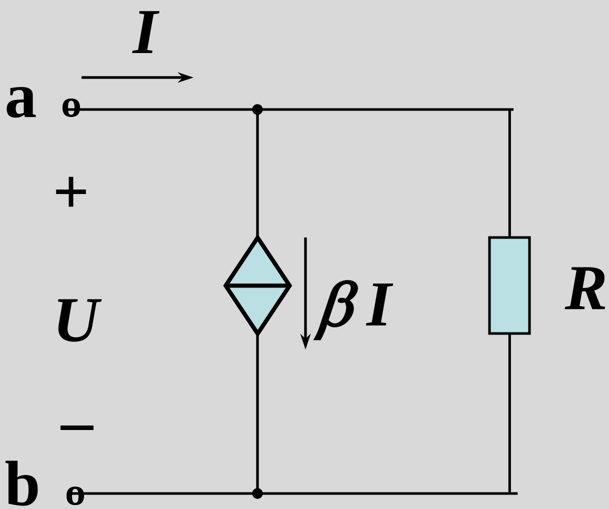
解

$$R_{in}=1.3\,//\,6.5\,//\,13$$

由 $G=1/1.3+1/6.5+1/13=1$

故 $R=1/G=1$

例 10. 求 a,b 两端的入端电阻 R_{ab} $(\beta\ \overline{1})$



解：下面用加流求压法求R_{ab}

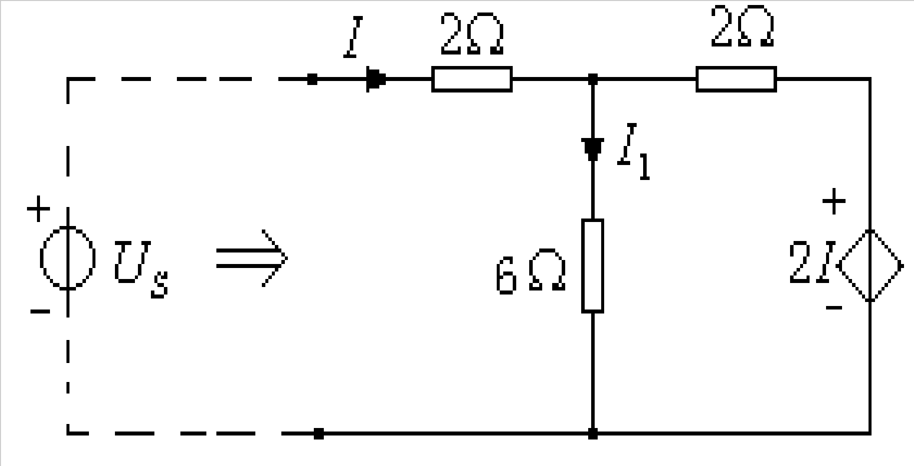
$$U=(I-\beta I)R=(1-\beta)IR$$

$$R_{ab}=U/I=(1-\beta)R$$

当$\beta<1$, $R_{ab}>0$，正电阻

当$\beta>1$, $R_{ab}<0$，负电阻

例12　求下图电路的输入电阻。

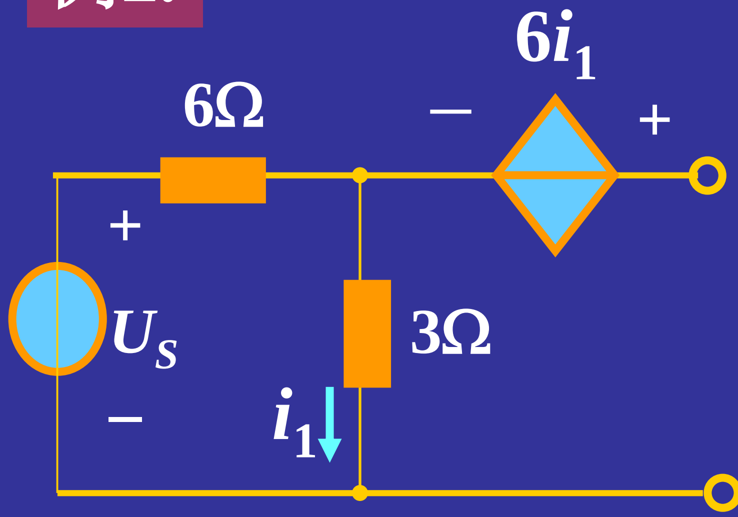


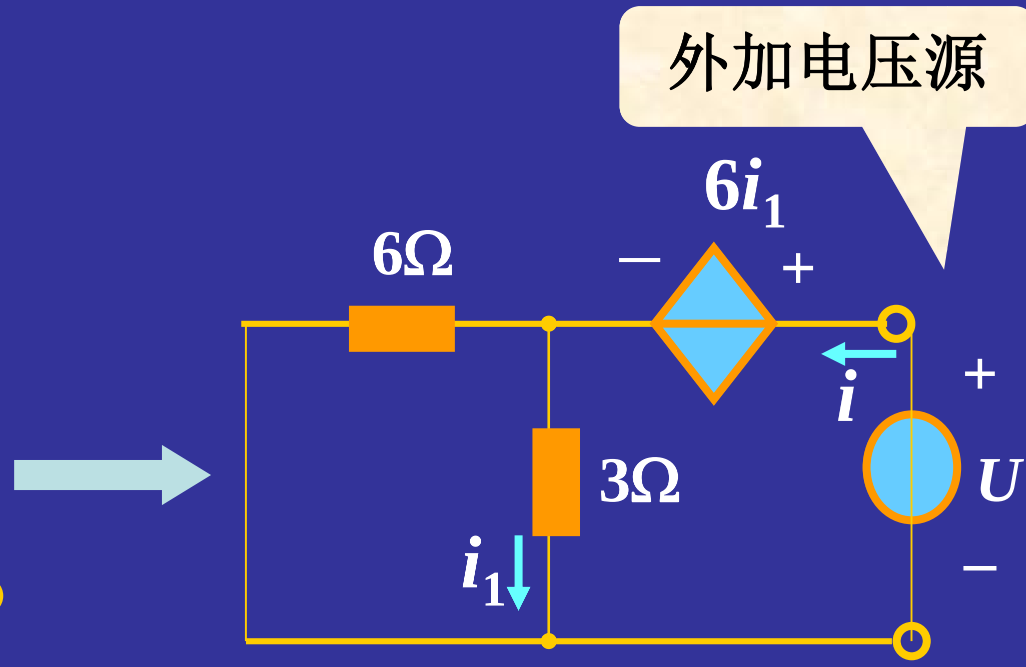
解

$$\begin{cases} 2I + 6I_1 = U_S \\ 2I + 2(I - I_1) + 2I = U_S \end{cases}$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{I}{2} \qquad\qquad R_{in} = \frac{U_S}{I} = \frac{6I - I}{I} = 5\ \Omega$$

例2.

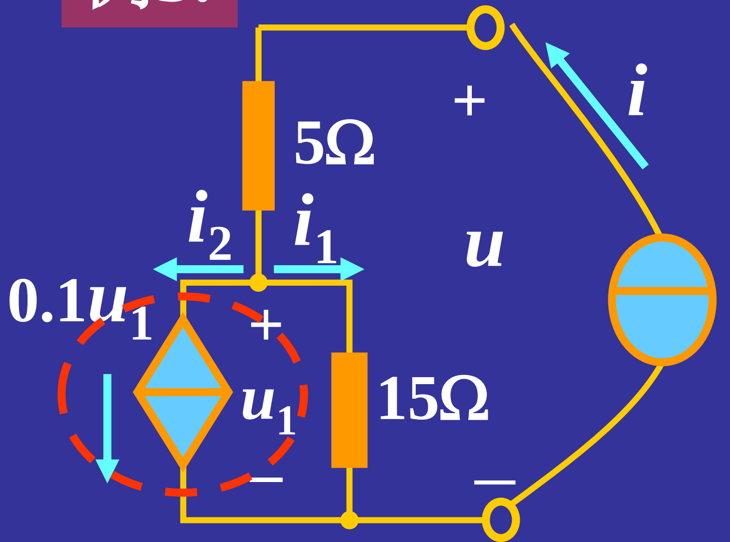




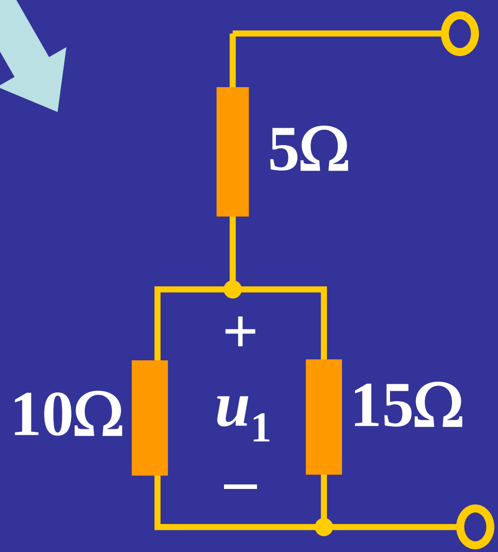
$$i = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1 \qquad U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_{in} = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

例3.



等效



$$u_1 = 15 i_1 \qquad i_2 = \frac{u_1}{10} = 1.5 i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5 i_1$$

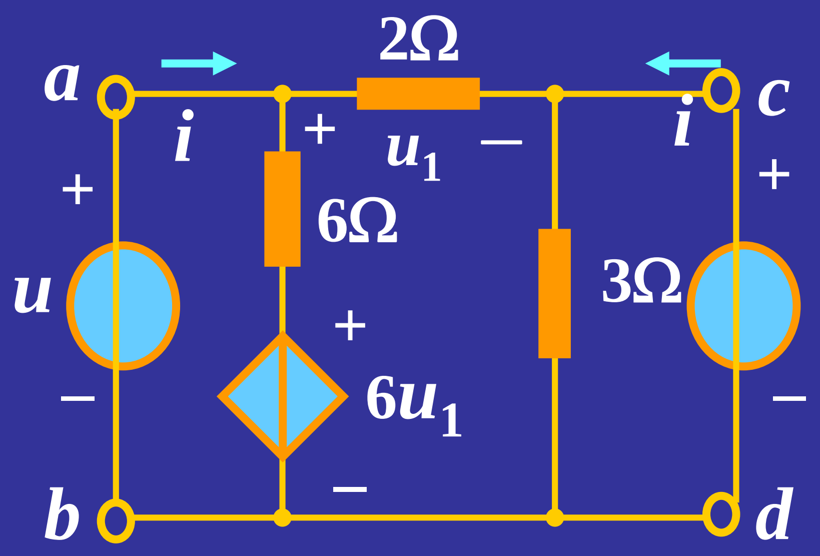
$$u = 5i + u_1 = 5 \times 2.5 i_1 + 15 i_1$$

$$= 27.5 i_1$$

$$R_{in} = \frac{u}{i} = \frac{27.5 i_1}{2.5 i_1} = 11\Omega$$

$$R_{in} = 5 + \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 11\Omega$$

例4. 求R_{ab}和R_{cd}



$$u_{ab}=u_1+3u_1/2=2.5u_1$$

$$u_1=u_{ab}/2.5=0.4u_{ab}$$

$$i=\frac{u_1}{2}+\frac{u_{ab}-6u_1}{6}=-u_{ab}/30$$

$$R_{ab}=u_{ab}/i=-30\Omega$$

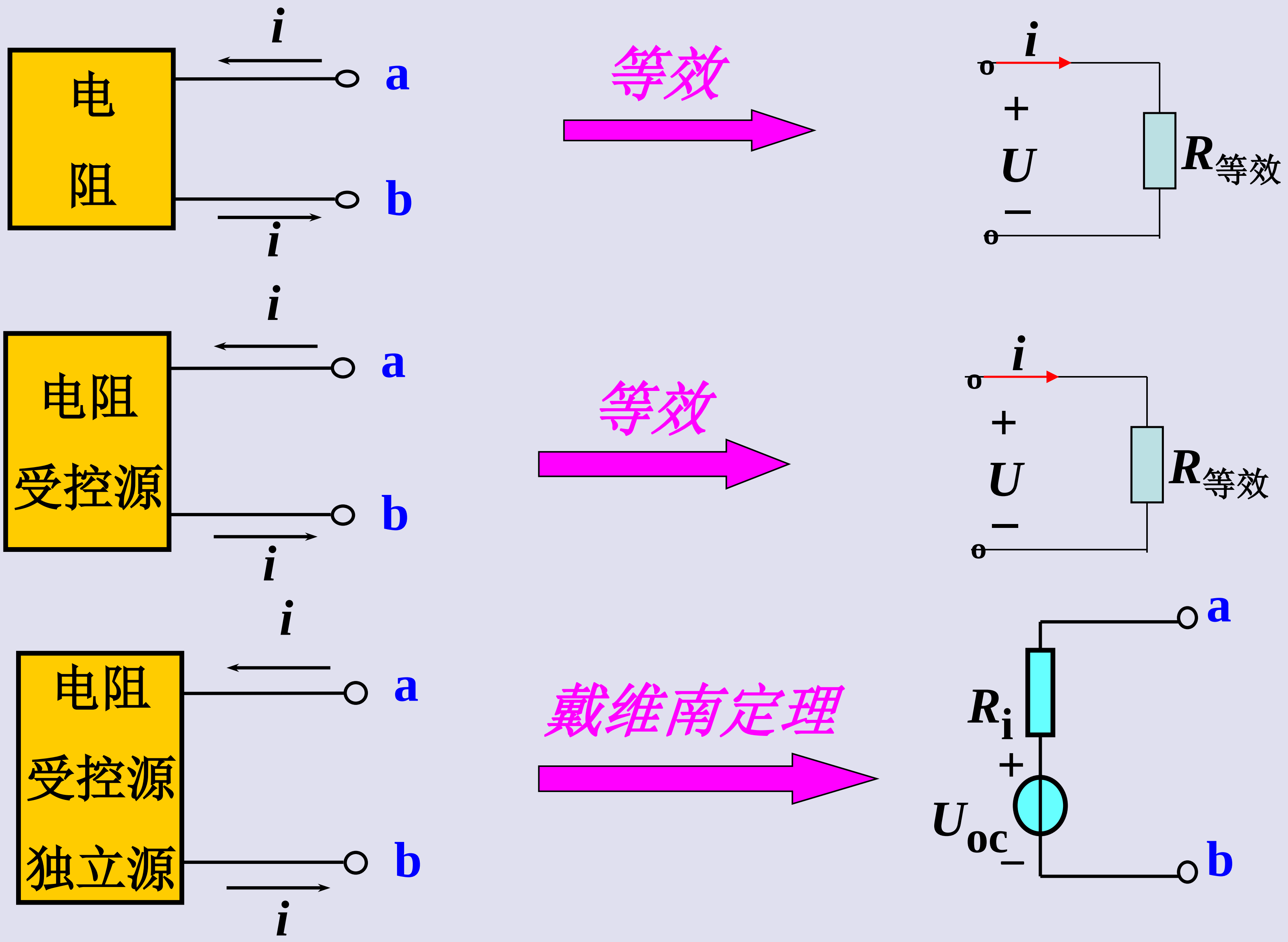
u

$$u_{cd}=-u_1+6u_1+\frac{6\times(-u_1)}{2}=2u_1$$

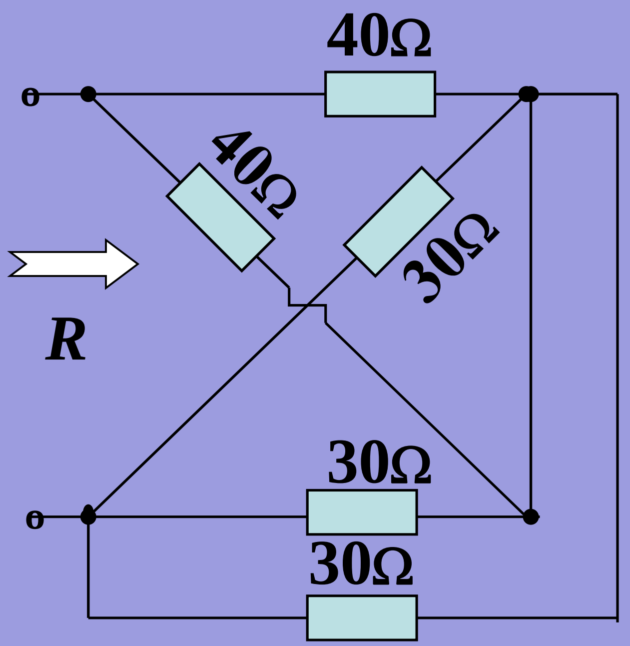
$$i=-u_1/2+u_{cd}/3=u_1/6$$

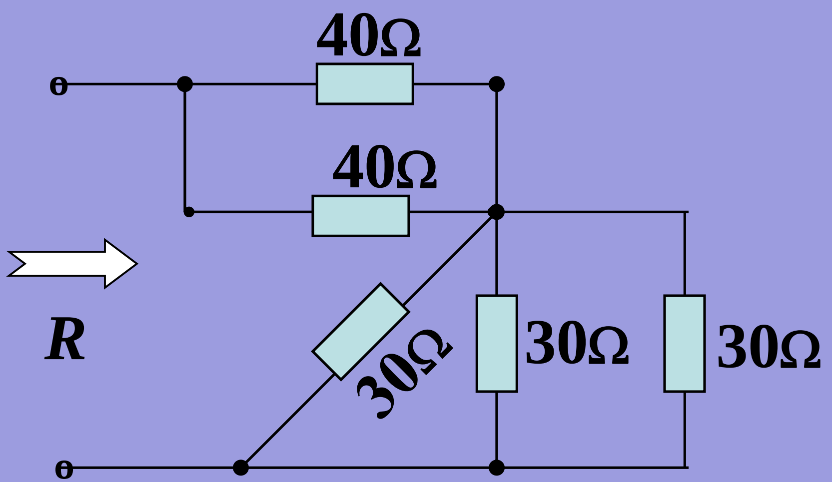
$$R_{cd}=u_{cd}/i=12\Omega$$

对外等效　两个网络可以具有完全不同的结构，但对任一外电路来说，它们却具有完全相同的影响。



例2.





$$R = (40 \,//\, 40 + 30 \,//\, 30 \,//\, 30) = 30\Omega$$

例5. 双 T 网络