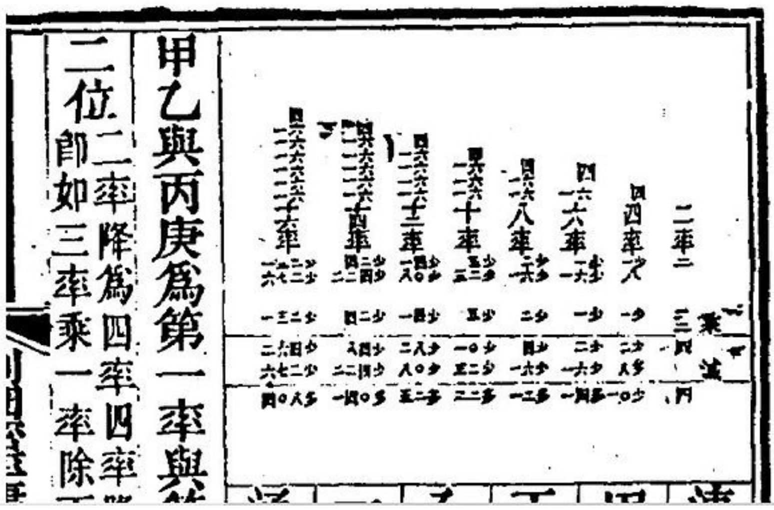
WIKIPEDIA

卡塔兰数

维基百科，自由的百科全书

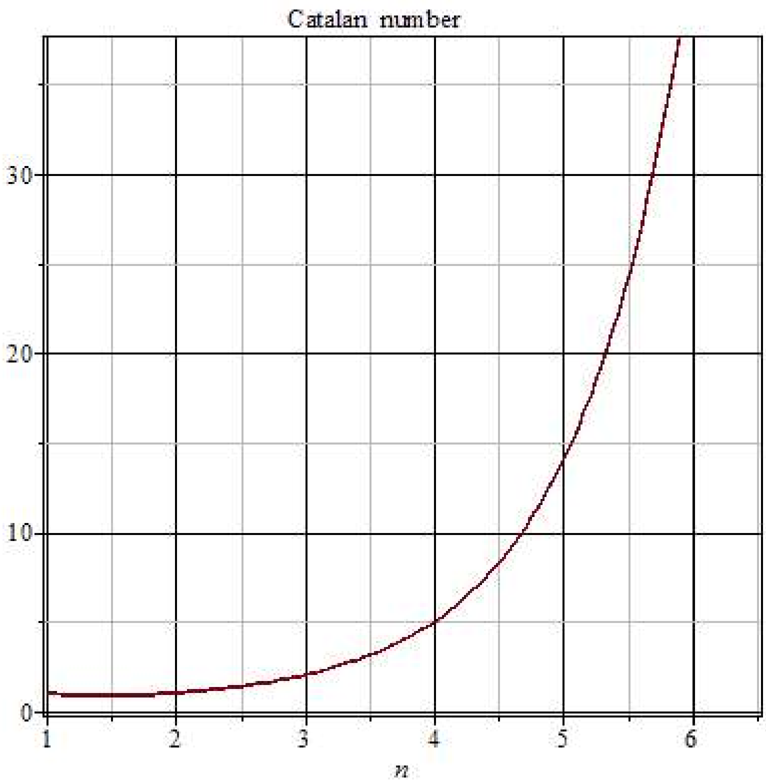
卡塔兰数是组合数学中一个常在各种计数问题中出现的数列。以比利时的数学家欧仁·查理·卡特兰（1814–1894）命名。历史上，清代数学家明安图(1692年－1763年)在其《割圜密率捷法》中最先发明这种计数方式，远远早于卡塔兰[1][2][3]。有中国学者建议将此数命名为“明安图数”或“明安图-卡塔兰数”[4]。



明安图《割圜密率捷法》卷三 “卡塔兰数”书影

卡塔兰数的一般项公式为 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

前20项为（OEIS中的数列A000108）：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190



卡塔兰数

目录

性质

C_n 的另一个表达形式为 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad \text{for } n \geq 1$ 所以，C_n是一个自然数；这一点在先前的通项公式中并不显而易见。这个表达形式也是André对前一公式证明的基础。（见下文的第二个证明。）

递推关系

$$C_0 = 1 \quad \text{and} \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i} \quad \text{for } n \geq 0.$$

它也满足

$$C_0 = 1 \quad \text{and} \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n,$$

这提供了一个更快速的方法来计算卡塔兰数。

卡塔兰数的渐近增长为

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

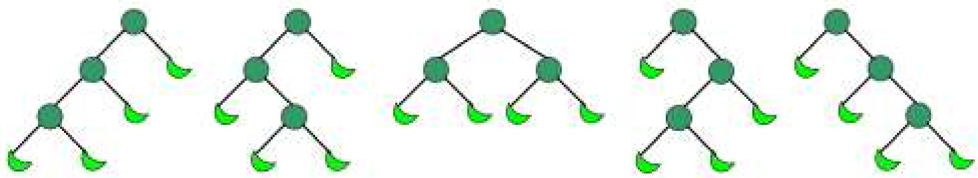
它的含义是当$n \to \infty$时，左式除以右式的商趋向于1。（这可以用$n!$的斯特灵公式来证明。）

所有的奇卡塔兰数C_n都满足$n = 2^k - 1$。所有其他的卡塔兰数都是偶数。

应用

组合数学中有非常多的组合结构可以用卡塔兰数来计数。在Richard P. Stanley的Enumerative Combinatorics: Volume 2一书的习题中包括了66个相异的可由卡塔兰数表达的组合结构。以下用n=3和n=4举若干例：

- C_n表示长度$2n$的dyck word的个数。Dyck word是一个有n个X和n个Y组成的字串，且所有的前缀字串皆满足X的个数大于等于Y的个数。以下为长度为6的dyck words:
  XXXYYY XYXXYY XYXYXY XXYYXY XXYXYY
- 将上例的X换成左括号，Y换成右括号，C_n表示所有包含n组括号的合法运算式的个数：
  ((())) ()(()) ()()() (())() (()())
- C_n表示有n个节点组成不同构二叉树的方案数。下图中，n等于3，圆形表示节点，月牙形表示什么都没有。
- C_n表示有$2n+1$个节点组成不同构满二叉树（full binary tree）的方案数。下图中，n等于3，圆形表示内部节点，月牙形表示外部节点。本质同上。



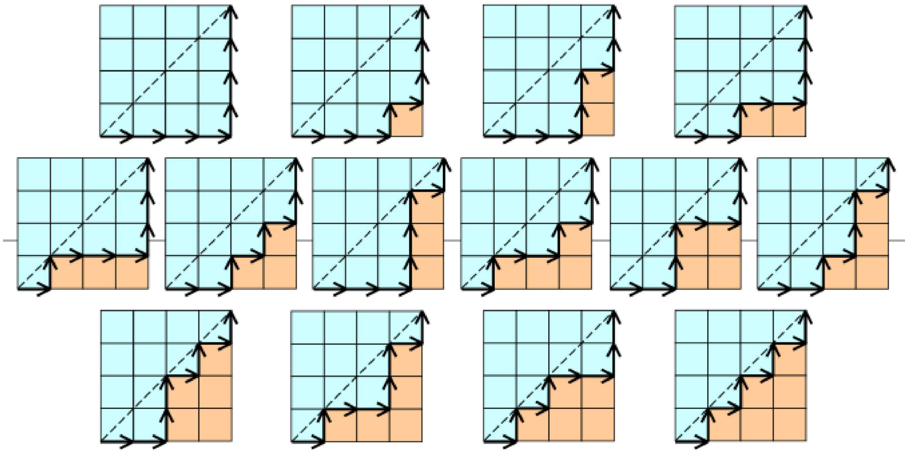
证明：

令1表示进栈，0表示出栈，则可转化为求一个$2n$位、含n个1、n个0的二进制数，满足从左往右扫描到任意一位时，经过的0数不多于1数。显然含n个1、n个0的$2n$位二进制数共有$\binom{2n}{n}$个，下面考虑不满足要求的数目。

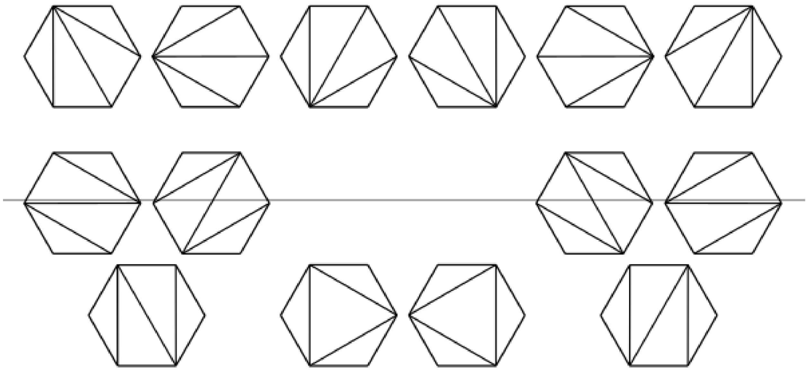
考虑一个含n个1、n个0的2n位二进制数，扫描到第$2m+1$位上时有$m+1$个0和m个1（容易证明一定存在这样的情况），则后面的0-1排列中必有$n-m$个1和$n-m-1$个0。将$2m+2$及其以后的部分0变成1、1变成0，则对应一个$n+1$个0和$n-1$个1的二进制数。反之亦然（相似的思路证明两者一一对应）。

从而$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。证毕。

- C_n表示所有在$n \times n$格点中不越过对角线的**单调路径**的个数。一个单调路径从格点左下角出发，在格点右上角结束，每一步均为向上或向右。计算这种路径的个数等价于计算Dyck word的个数：X代表“向右”，Y代表“向上”。下图为n = 4的情况：



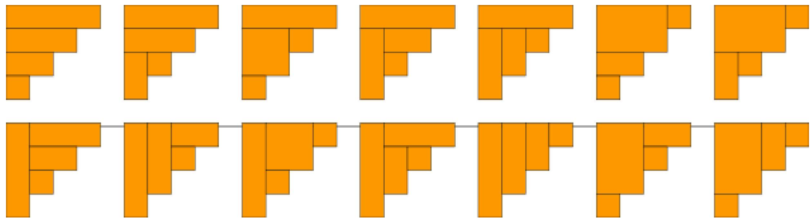
- C_n表示通过连结顶点而将n + 2边的凸多边形分成三角形的方法个数。下图中为n = 4的情况：



- C_n表示对{1, ..., n}依序进出栈的置换个数。一个置换w是依序进出栈的当$S(w)$ = (1, ..., n),其中S（w）递归定义如下：令w = unv，其中n为w的最大元素，u和v为更短的数列；再令$S(w)$ = $S(u)S(v)n$，其中S为所有含一个元素的数列的单位元。

- C_n表示集合{1, ..., n}的不交叉划分的个数.那么，C_n永远不大于第n项贝尔数. C_n也表示集合{1, ..., 2n}的不交叉划分的个数，其中每个段落的长度为2。综合这两个结论，可以用数学归纳法证明：在 魏格纳半圆分布定律 中度数大于2的情形下，所有 *自由的* 累积量s 为零。 该定律在 自由概率论 和 随机矩阵 理论中非常重要。

- C_n表示用n个长方形填充一个高度为n的阶梯状图形的方法个数。下图为n = 4的情况：



- C_n表示表为2×n的矩阵的标准杨氏矩阵的数量。 也就是说，它是数字 1, 2, ..., 2n 被放置在一个2×n的矩形中并保证每行每列的数字升序排列的方案数。同样的，该式可由勾长公式的一个特殊情形推导得出。

- C_n表示n个无标号物品的半序的个数。

汉克尔矩阵

无论n的取值为多少，n×n的汉克尔矩阵:$A_{i,j} = C_{i+j-2}$. 的行列式为1。例如，n = 4 时我们有

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 14\\ 2 & 5 & 14 & 42\\ 5 & 14 & 42 & 132\end{bmatrix} = 1。$$

进一步，无论n的取值为多少，如果矩阵被移动成$A_{i,j} = C_{i+j-1}$.，它的行列式仍然为1。 例如，n = 4 时我们有

$$\det\begin{bmatrix}1&2&5&14\\2&5&14&42\\5&14&42&132\\14&42&132&429\end{bmatrix}=1。$$

同时，这两种情形合在一起唯一定义了卡塔兰数。

参考文献

1. 吴文俊主编 《中国数学史大系》第7卷 474-475页
2. 明安图第发明卡塔兰数之第一人 (http://en.cnki.com.cn/Article_en/CJFDTOTAL-NMGX198802004.htm)
3. 中国人在18世纪发现卡塔兰数 (http://www.math.ucla.edu/~pak/lectures/Cat/Larcombe-The_18th_century_Chinese_discovery_of_the_Catalan_numbers.pdf)
4. 吴文俊主编 《中国数学史大系》 第七卷 476页