

淡江大學電機工程學系博士班
博士論文

指導教授：翁慶昌 博士

機械手臂之關節空間與工作空間
的軌跡規劃

Trajectory Planning in Joint Space and
Work Space for Robot Manipulators

研究生：余家潤 撰

中華民國 104 年 6 月

誌謝

在實驗室的這些日子是精采又充實的，非常謝謝指導教授翁慶昌老師，碩博班的生活中，各方面都受到老師諸多的教導與照顧，無論研究或待人處事都給予耐心的提點，並提供非常良好的研究環境，在此學習是無比的幸運。此外，在完成這本論文的過程中，亦感謝電機系的老師：周永山老師、劉寅春老師、與李世安老師於所內口試時給予的建議與指導、感謝口試委員：陳博現老師、王文俊老師、李祖聖老師、蘇順豐老師、王偉彥老師與蔡奇謐老師對於學生的論文細心審閱，提出諸多寶貴的意見，使本論文更臻完善，於此獻上最誠摯的謝意。

在博士班求學期間，感謝蔡奇謐老師的協助與指導，在我研究的路上有很大的幫助、感謝許駿飛老師於實作上提供非常實用的經驗，精準的點出問題所在、感謝王安松總經理給予我各種增廣見聞與磨練實作的機會。亦感謝亦師亦友的學長姐們：感謝侯禕學長與世安學長你們讓我在軟體與硬體的路上紮下良好的基礎、感謝吉泰學長給予我個人或團隊上的各種建議、感謝學長姐楷翔、宏志、智誠、玉婷、翔閔、越陽、丞堯，沒過去你們的經驗傳承，沒有今日的我們。此外，謝謝孟宏、瀚升、恆銓、育昇、思豪、冠廷、翔麟、哲成，在研究的路上有你們，讓生活更精彩更有趣，謝謝宥澄、奕伸、仁杰、岳龍與湘筠在這次實驗上的協助，並謝謝所有參與過手臂組的夥伴們，因為大家的努力，才能讓我順利完成學業。

最後，謝謝我的女友怡君，在工作忙碌之餘，仍是貼心照料我的生活，更謝謝我的父母、老哥和老姐，讓我無憂無慮的完成學業，做自己喜欢的事情，你們的支持一直是我的動力。於此...

僅以此論文獻給所有愛我的人與我愛的人

余家潤 謹誌

民國 104 年 夏 于淡水

論文名稱：機械手臂之關節空間與工作空間的軌跡規劃 頁數：121

校系(所)組別：淡江大學 電機工程學系 博士班

畢業時間及提要別：103 學年度第 2 學期博士學位論文提要

研究生：余家潤

指導教授：翁慶昌 博士

論文提要內容：

本論文主要提出兩種機械手臂必要的軌跡規劃方法：(1) 關節空間的軌跡規劃以及(2) 工作空間的軌跡規劃。在關節空間的軌跡規劃上，本論文提出一套具有啟動與結束速度限制的多軸梯形速度曲線之同步與串聯方法，當機械手臂各軸馬達具有不同的最大速度與最大加速度之限制下，所提出的方法可以使各軸馬達達到速度與加速度的同步，減少末端點軌跡的移動範圍，降低末端點軌跡的不確定性。在多個路徑點的串聯上，則提出一套串聯梯形速度曲線的方法，使機械手臂可以不必在每個路徑點下停止，提升機械手臂通過連續路徑點的效率；在工作空間的軌跡規劃上，本論文提出一套在三維空間中基於參數式曲線的軌跡規劃方法，可使用三次 NURBS 曲線對輸入的路徑點進行軌跡插補，並依據路徑點的弦長將曲線重新參數化，使產生的軌跡具備位置、速度與加速度的連續性。最後再利用軌跡的切線與曲率強度進行分段式速度規劃，此方式可讓機械手臂有效率的在限制的移動速度與加速度下完成軌跡，並可避免泰勒展開插補方法所造成的近似誤差。在實驗結果方面，本論文利用自行開發的六軸機械手臂實現這兩種軌跡規劃方法，在模擬與實驗結果中皆可以看出，本論文提出的方法確實可以有效提升機械手臂於任務中的效率與精準度。

關鍵字：機械手臂、關節空間軌跡規劃、工作空間軌跡規劃、NURBS 曲線、B-Spline 曲線

Title of Thesis:

Total pages: 121

Trajectory Planning in Joint Space and Work Space for Robot Manipulators

Key words:

Robot Manipulator, Joint Space Trajectory Planning,
Work Space Trajectory Planning, NURBS Curve, B-Spline Curve

Name of Institute:

Department of Electrical Engineering, Tamkang University

Graduate date: June 2015

Degree conferred: Doctor of Philosophy

Name of student: Chia-Jun, Yu

Advisor: Dr. Wong, Ching-Chang

余家潤

翁慶昌 博士

Abstract:

In this dissertation, two trajectory planning methods in the joint space and the work space are proposed for robot manipulators. In the joint space trajectory planning, a multi-axis synchronized and series connection method is proposed based on trapezoidal velocity profiles with an initial velocity and a final velocity. The proposed method can let multi-axis synchronous work even each motor has different limit of a maximum velocity and a maximum acceleration and it can improve unpredictable situation of the end-effector when the robot manipulator is in the moving status. Moreover, the proposed method can promote the efficiency when the robot manipulator needs to pass through continuous via-point. In the work space trajectory planning, a three dimensional trajectory planning method based on a parametric curve is proposed. Three-degree NURBS curve is applied to interpolate a set of via-point and it can reparameterize by a chord length. According to the tangent and curvature strength, the proposed method can generate a trajectory which is continuous in the velocity and acceleration. Finally, in order to avoid the approximation error by using the Taylor series interpolation method and promote the performance under limited velocity and acceleration, a segmented velocity planning method is also implemented. In the experimental part, the proposed trajectory planning methods are implemented in a six-DOF robot manipulator which is own designed and development. From the experimental results, the proposed methods can effectively improve the efficiency and accuracy of the trajectory planning for the robot manipulator.

目錄

目錄	I
圖目錄	III
表目錄	VIII
參數對照表	IX
第 1 章 緒論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 論文架構	4
第 2 章 系統架構與軟體設備	5
2.1 機械手臂之機構連桿配置	6
2.2 機械手臂之硬體與系統規格	8
2.3 機械手臂之硬體控制架構	9
2.4 軟體開發平台與設備規格介紹	10
第 3 章 運動學模型與軌跡規劃基礎理論	20
3.1 機械手臂之運動學模型推導	20

3.2 梯形速度曲線.....	35
3.3 S 形速度曲線	44
3.4 參數式自由曲線.....	54
第 4 章 機械手臂之軌跡規劃	63
4.1 軌跡規劃的分類與架構	63
4.2 關節空間的軌跡規劃.....	67
4.3 工作空間的軌跡規劃.....	79
4.4 工作空間的軌跡速度限制與誤差修正	89
第 5 章 實驗結果與討論	97
5.1 關節空間的同步速度規劃之實現	97
5.2 連續多點的關節軌跡規劃之實測	100
5.3 工作空間的軌跡規劃之模擬與實作	102
第 6 章 結論與未來展望	111
6.1 結論	111
6.2 未來展望	112
參考文獻	113
研究著作	118
獲獎經歷	120

圖目錄

圖 2.1、六軸機械手臂實體之等視角示意圖	6
圖 2.2、機械手臂之詳細尺寸規格與配置示意圖	7
圖 2.3、機械手臂活動範圍之上視圖	7
圖 2.4、機械手臂活動範圍之側視圖	8
圖 2.5、機械手臂之硬體系統架構	10
圖 2.6、研華工業電腦 IPC-5120	11
圖 2.7、使用 VS2008 所開發的機械手臂人機介面	12
圖 2.8、運動控制卡 MC8881P	13
圖 2.9、IO 控制卡 LeapIO48	14
圖 2.10、機械手臂電控箱實體圖	14
圖 2.11、本論文所採用的 AC 伺服馬達	15
圖 2.12、本論文所採用的減速機	17
圖 2.13、兩指電動夾具之傳動機構實體圖	18
圖 2.14、兩指電動夾具之電路實體圖	19
圖 3.1、 z_{i-1} 與 z_i 無共平面示意圖	21
圖 3.2、 z_{i-1} 與 z_i 互相平行示意圖	22
圖 3.3、 z_{i-1} 與 z_i 相交示意圖之情況一	22
圖 3.4、 z_{i-1} 與 z_i 相交示意圖之情況二	23
圖 3.5、六軸機械手臂座標系配置	23
圖 3.6、機械手臂末端之兩指電動夾具的三個方位向量	26
圖 3.7、尤拉角 pitch-roll- yaw 的旋轉示意圖	27

圖 3.8、球型關節(spherical joint)	30
圖 3.9、運動學解耦合及手腕中心示意圖	31
圖 3.10、前三軸關節連桿的幾何關係圖	32
圖 3.11、梯形速度曲線的位置、速度及加速度示意圖	36
圖 3.12、未達最大速度之梯形速度曲線的位置、速度及加速度示意圖	38
圖 3.13、具有啟動與結束速度的梯形速度曲線示意圖	42
圖 3.14、具啟動與終點速度的 S 形速度曲線示意圖	45
圖 3.15、S 型速度曲線規劃流程	48
圖 3.16、成本函數的速度與誤差示意圖	53
圖 3.17、Bezier 曲線、B-Spline 曲線、與 NURBS 曲線之關係圖	54
圖 3.18、 $n+1$ 個控制點之 n 次 Bezier 曲線示意圖：(a) $n=2$, (b) $n=3$, (c) $n=4$, 及(d) $n=5$ 。	56
圖 3.19、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\}$ 之 1 次 ($p=1$) B-Spline 曲線	58
圖 3.20、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}$ 之 2 次($p=2$) B-Spline 曲線	59
圖 3.21、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$ 之 3 次($p=3$) B-Spline 曲線	59
圖 3.22、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2\}$ 之 4 次($p=4$) B-Spline 曲線	59
圖 3.23、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ 之 5 次($p=5$) B-Spline 曲線	60
圖 3.24、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ 之 2 次($p=2$) B-Spline 曲線	61
圖 3.25、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ 之 2 次($p=2$) B-Spline 曲線	61
圖 3.26、3 次 NURBS 曲線改變第 j 個($j=2$)控制點的權重值之曲線變化： (a) $w_2=1$ 、(b) $w_2=2$ 、(c) $w_2=5$ 、及(d) $w_2=10$	62

圖 4.1、機械手臂之軌跡規劃分類的示意圖.....	64
圖 4.2、在關節空間的軌跡規劃示意圖.....	64
圖 4.3、在工作空間的軌跡規劃示意圖.....	65
圖 4.4、機械手臂之軌跡規劃架構圖.....	66
圖 4.5、三軸非同步運轉之示意圖.....	68
圖 4.6、重新規劃從軸而導致移動距離不足之示意圖：主軸加速時間較短	69
圖 4.7、重新規劃從軸而導致移動距離不足之示意圖：主軸加速時間過長	70
圖 4.8、同時修正主軸及從軸的示意圖：在主軸加速時間較短的狀況下	71
圖 4.9、同時修正主軸及從軸的示意圖：在主軸加速時間較長的狀況下	72
圖 4.10、各軸同步修政流程圖.....	72
圖 4.11、三軸同步運轉梯形軌跡規劃示意圖.....	73
圖 4.12、有同步與無同步之機械手臂末端點軌跡示意圖.....	73
圖 4.13、經過三個路徑點時需減速停止的單軸速度軌跡示意圖.....	74
圖 4.14、經過路徑點時不需減速停止之單軸速度軌跡示意圖.....	74
圖 4.15、各軸計算各個區段所需要的最長移動時間.....	75
圖 4.16、第 k 個區段與第 $k+1$ 個區段的極限速度關係示意圖.....	76
圖 4.17、當 $v_{lim,k+1} \geq v_k$ 時，軌跡速度的串聯方式.....	77
圖 4.18、當 $v_{lim,k+1} < v_k$ 時，軌跡速度的串聯方式.....	78
圖 4.19、壓縮整體時間比較示意圖.....	78
圖 4.20、連續多點的位置軌跡示意圖.....	78
圖 4.21、分段式路徑之示意圖.....	80
圖 4.22、由三段 Bezier 曲線組成的幾何路徑：(a) 具幾何連續性但不具 參數連續性的路徑示意圖、(b) 一階導數中 x-y 軸的數值變化.....	81
圖 4.23、將圖 4.22 重新參數化之後的幾何路徑：(a) 重新參數化後可達 到 C^1 連續的的路徑示意圖、(b) 一階導數中 x-y 軸的數值變化.....	82
圖 4.24、測試軌跡 1.....	84

圖 4.25、軌跡規劃過程的參數增量過程.....	85
圖 4.26、利用二階泰勒展開插補法所規劃的軌跡.....	85
圖 4.27、整段軌跡的一階導數之強度.....	85
圖 4.28、整段軌跡的二階導數之強度(加速度).....	86
圖 4.29、徑向誤差與弦誤差之示意圖.....	87
圖 4.30、測試路徑 1 之弦誤差.....	87
圖 4.31、泰勒展開插補法的近似誤差.....	88
圖 4.32、使用式(4.44)與式(4.45)所規劃的軌跡之速度與加速度.....	94
圖 4.33、軌跡使用比例常數調整之後的速度與加速度.....	94
圖 4.34、透過預視的方法標記各轉彎處的最大速度與最大加速度.....	95
圖 4.35、利用分段式速度規劃的軌跡之速度與加速度示意圖.....	96
圖 4.36、有使用分段式速度規劃與無使用之參數增量比較圖.....	96
圖 5.1、多軸同步測試軌一跡之三種方法的等視角圖與三視圖.....	98
圖 5.2、多軸同步測試軌跡一之速度變化圖：(a) 未具有同步處理、(b) 速度同步但加速度不同步、及(c) 完全同步.....	98
圖 5.3、多軸同步測試軌跡二之三種方法的等視角圖與三視圖.....	99
圖 5.4、多軸同步測試軌跡二之速度變化圖：(a) 未具有同步處理、(b) 速度同步但加速度不同步、及(c) 完全同步.....	100
圖 5.5、連續多點的關節軌跡規劃之等視角圖與三視圖.....	101
圖 5.6、連續多點的關節軌跡規劃之關節回授資訊：(a) 角度、(b) 角速度、及(c) 角加速度.....	101
圖 5.7、測試軌跡一之路徑點、控制點與路徑示意圖.....	103
圖 5.8、測試軌跡二之路徑點、控制點與路徑示意圖.....	103
圖 5.9、測試軌跡一之模擬結果(速度、加速度、參數增量變化、弦誤差).....	105
圖 5.10、測試軌跡二之模擬結果(速度、加速度、參數增量變化、弦誤差).....	106
圖 5.11、測試軌跡二之模擬結果的放大圖.....	107

圖 5.12、實作測試軌跡二的連續畫圖示意圖	109
圖 5.13、測試軌跡二的繪製軌跡比較：(a) 等速二階泰勒展開插補法 50%、 (b) 具速度控制的二階泰勒展開插補法、及(c) 本論文提出的方法	109
圖 5.14、測試軌跡二的尖銳處放大比較：(a)與(c)為具速度控制的二階泰勒展開插補法、(b)與(d)為本論文所提出的方法	109
圖 5.15、測試軌跡二實作的末端點軌跡變化：(a) 速度變化、(b) 加速度變化、及(c) 弦誤差	110



表目錄

表 2.1、實驗室歷年所研製的機械手臂馬達比較表.....	5
表 2.2、機械手臂的硬體系統規格表.....	8
表 2.3、機械手臂各關節硬體規格表.....	9
表 2.4、工業電腦規格表.....	11
表 2.5、運動控制卡 MC8881P 規格表.....	13
表 2.6、各軸 AC 伺服馬達的型號規格表.....	15
表 2.7、各軸 AC 伺服馬達的驅動器.....	16
表 2.8、各軸 AC 伺服馬達的型號規格表.....	17
表 2.9、兩指電動夾具之硬體規格表.....	18
表 3.1、四種 D-H 參數及說明.....	24
表 3.2、六軸機械手臂之連桿參數表.....	24
表 3.3、梯形速度曲線的參數表.....	35
表 3.4、具啟動與終點速度的 S 形速度曲線的參數表.....	45
表 5.1、連續多點的軌跡規劃之輸入條件說明表.....	100
表 5.2、測試軌跡一之輸入條件說明表.....	102
表 5.3、測試軌跡二之輸入條件說明表.....	102
表 5.4、測試軌跡一之模擬數據表.....	104
表 5.5、測試軌跡二之模擬數據表.....	108
表 5.6、測試軌跡二的實作數據表.....	110

參數對照表

符號	說明
$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	第 i 軸的 D-H 轉換矩陣
a_i	D-H 參數表中連桿的長度， 沿著 x_i 軸，從 z_{i-1} 軸到 z_i 軸的距離，方向與 x_i 相反為負
α_i	D-H 參數表中連桿的扭角， 繞著 x_i 軸，方向由 z_{i-1} 軸到 z_i 軸之間的夾角，相反則為負(± 180)
α	Pitch 的角度
a_{lim}	在急衝度區間內，軌跡可到達的極限加速度
a_{max}	軌跡可使用的最大加速度
$\mathbf{b}(u)$	Bezier 曲線
$B_j^n(u)$	Bezier 曲線的第 j 個的 n 次基底函數
β	Roll 的角度
d_i	D-H 參數表中連桿的偏移距離， 沿著 z_{i-1} 軸，從原點 \mathbf{o}_{i-1} 到 x_i 軸的距離，方向與 z_{i-1} 相反為負
γ	Yaw 的角度
h	單一軸軌跡的總移動距離
j_{max}	軌跡可使用的最大急衝度
n	$n+1$ 為控制點的數量
n_{via}	$n_{\text{via}} + 1$ 為路徑點的數量
n_{knot}	$n_{\text{knot}} + 1$ 為節點向量的數量， $n_{\text{knot}} = p + n + 1$
$\mathbf{n}(u)$	NURBS 曲線
$N_j^p(u)$	B-spline 曲線或 NURBS 曲線的第 j 個的 p 次基底函數
$\mathbf{o}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$	機械手臂第 i 軸的 D-H 座標系原點
$\mathbf{o}_c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$	機械手臂的手腕中心點
$\mathbf{o}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$	機械手臂末端點的期望位置
$\mathbf{o}_6^0 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$	機械手臂末端點的位置矩陣
p	p 次 B-Spline 曲線或 p 次 NURBS 曲線

\mathbf{P}	由控制點組成的三對角矩陣
\mathbf{p}_j	B-spline 曲線或 NURBS 曲線的控制點， $j \in \{0, 1, \dots, n\}$
$\mathbf{p}(u)$	軌跡的幾何路徑，可以是 Bezier 曲線、B-spline 曲線或 NURBS 曲線
$\tilde{\mathbf{p}}(t)$	利用時間重新參數化之後的幾何路徑 $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(u) \circ u(t)$
$\bar{\mathbf{p}}(\bar{u})$	利用距離重新參數化之後的幾何路徑 $\bar{\mathbf{p}}(\bar{u}) = \mathbf{p}(u) \circ u(\bar{u})$
$\ \dot{\mathbf{p}}(u)\ _{\max}$	整段幾何路徑中，最大的 1 階導數的歐基里得範數值
$\ \ddot{\mathbf{p}}(u)\ _{\max}$	整段幾何路徑中，最大的 2 階導數的歐基里得範數值
$\ \dddot{\mathbf{p}}(u)\ _{\max}$	整段幾何路徑中，最大的 3 階導數的歐基里得範數值
\mathbf{q}_k	需要通過的連續路徑點， $k \in \{0, 1, \dots, n_{via}\}$
q_0	點到點軌跡規劃的起始位置
q_1	點到點軌跡規劃的終點位置
$q(t)$	位置軌跡方程式
$\dot{q}(t)$	速度軌跡方程式
$\ddot{q}(t)$	加速度軌跡方程式
$\dddot{q}(t)$	急衝度軌跡方程式
$\mathbf{R}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	機械手臂末端點的期望方位
$\mathbf{R}_6^0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	機械手臂末端點的方位矩陣
$\mathbf{R}_\alpha \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Pitch 的旋轉矩陣(x 軸)
$\mathbf{R}_\beta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Roll 的旋轉矩陣(y 軸)
$\mathbf{R}_\gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Yaw 的旋轉矩陣(z 軸)
$R_j^p(u)$	NURBS 曲線的第 j 個的 p 次有理基底函數， $j \in \{0, 1, \dots, n\}$
$\mathbf{s}(u)$	B-Spline 曲線
θ_i	D-H 參數表中連桿的關節角度， 繞著 z_{i-1} 軸，方向由 x_{i-1} 軸往 x_i 軸之間的夾角，相反則為負(± 180)
t_0	單一軸軌跡的起始時間
t_1	單一軸軌跡的終點時間
T	總移動時間
\tilde{T}	主軸的總移動時間
\tilde{T}_a	主軸的加速時間
T_s	取樣時間
T_a	加速時間
T_d	減速時間
T_j	急衝度時間

T_j^*	最小急衝度時間
\mathbf{t}_0	第 1 個路徑點往第 2 個路徑點的切線向量
$\mathbf{t}_{n_{via}}$	倒數第 2 個路徑點往最後 1 個路徑點的切線向量
\mathbf{t}_k	第 k 個路徑點往第 k+1 個路徑點的切線向量
\mathbf{u}	B-spline 曲線或 NURBS 曲線的節點向量 $\mathbf{u} = \{u_0, \dots, u_{n_{knot}}\}$
u_{\min}	節點向量中最小的元素
u_{\max}	節點向量中最大的元素
u_j	第 j 個節點向量的元素，節點向量的元素為遞增實數 $u_j \leq u_{j+1}$
u	描述參數式曲線的獨立變數 $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$
$u(t)$	連續時間下，時間與參數之間的映射函數
\bar{u}	利用距離重新參數化後的參數值
u_k	第 k 個取樣時間的參數值， $u(t_k) = u_k$
Δu_k	第 k 個取樣時間的參數增量值
u_{k+1}	第 k+1 個取樣時間的參數值， $u_{k+1} = u_k + \Delta u_k$
v_{\lim}	在加減速時間內可到達的限制速度
v_{\max}	軌跡可使用的最大速度
w_j	NURBS 曲線第 j 個控制點的權重值

第 1 章 緒論

1.1 研究動機與目的

機械手臂在現今工業製造的應用領域非常廣泛，因為機械手臂的精準度及耐久性可以大幅提升各種製造業的品質及效益，降低人為疏失所造成的各種危險及不可預知問題，且透過程式化的方式，機械手臂具有非常好的效率及可靠性來執行各種需要高精密度的重覆動作，例如拋光研磨、塗膠焊接、噴漆塗佈、加工切削、或包裝搬運等等。因此，如何使機械手臂快速且精準的完成任務對生產線而言是非常重要的目標，因為提升機械手臂的移動效率與精準度時，等於提升整體生產線的產能以及品質。為了達到上述的目的，良好的軌跡規劃(trajjectory planning)是主要方法之一。而在機械手臂的軌跡規劃中，一般可以分為兩類：(1) 關節空間(joint space)的軌跡規劃以及(2) 工作空間(work space)的軌跡規劃，而這兩類軌跡規劃方法所使用的況狀也有所不同。以搬運工作為例，大部分時間需要使用關節空間的軌跡規劃，因為對搬運而言，並不需要在意機械手臂末端點的軌跡，只需要在意有到達最後的位置即可。而以塗膠工作為例，則機械手臂末端點必須沿著特定軌跡移動。以另外的例子來說，國內上銀科技股份有限公司(HIWIN) 在每年的「國際自動化工業展及機器人展」中，都針對學術研究單位舉辦「上銀智慧機器手實作競賽」，此競賽規定必須使用自行設計開發的機械手臂，並於時間內完成指

定的四個項目：(1) 骨牌效應、(2) 機械揮毫、(3) 眼明手快、及(4) 疊疊樂，其中骨牌效應以及機械揮毫與產業中的搬運、噴塗或切割等應用非常相似，是一個非常適合驗證的實驗環境。在骨牌效應的項目中，必須於 5 分鐘內完成 50 個骨牌的擺放，相當於一個骨牌只能花費 6 秒鐘；而在機械揮毫的項目中，則必須在 7 分鐘內完成特定主題的繪圖，若要让機械手臂可以畫出不錯的線條，則必須降低機械手臂的移動速度來提高末端點的穩定度，但這樣的規劃在有限的時間內所能完成的內容不多。這些問題都可以藉由良好的軌跡規劃方法來改善，例如，在擺放骨牌的過程中，過去經常是一個動作一個動作執行，但如果透過動作跟動作之間的串聯，避免每次的動作都必須停止，如此將可提升整體的效率。同樣的，在畫圖的過程中，有許多筆畫必須使用較慢的速度來描繪，而有些則可以使用較快的速度來快速畫完，若這些設定都是由使用者來決定，將會非常耗時且沒有效率。因此，必須讓機械手臂在跟隨路徑的過程中自行判斷何時快何時慢，這樣才能在規定的時間內完成更多的繪圖內容。所以，本論文將針對這兩種軌跡規劃方法進行探討與設計。

1.2 文獻回顧

在關節空間的軌跡規劃上，三次多項式曲線(cubic spline) 過去經常被應用於關節空間的軌跡規劃中[1][2]，或者使用更高次的多項式曲線(higher order polynomials)來插補必須要通過的連續路徑點，並且討論如何限制致動器的速度與加速度[3][4][5]。然而，為了產生更平順的軌跡而利用高次多項式曲線的插補方法，在需要通過的路徑點數量增加時，將會導致運算提升，使得機械手臂運作的過程變的不即時，因此即有學者利用分段式多項式曲線改善這樣的問題，提升運算效率[6][7]。而近年

B-spline 曲線開始被應用於人形機器人或機械手臂的關節空間軌跡規劃[8][9]，主要在於 B-spline 曲線更適合用於產生速度與加速度連續的曲線。對機械手臂在軌跡規劃而言，需求有各式各樣，但如何在速度限制下提升整體移動效率，則一直是相當重要的研究議題[10][11][12]。

在工作空間的軌跡規劃上，過去較常利用單一的線性軌跡或者圓形路徑進行軌跡插補(interpolation)，而參數式曲線的插補近年來逐漸受到重視，藉由參數式曲線(parametric curve)取代大量的直線插補(linear interpolation)。在許多的研究中已證實，使用參數式曲線的插補法所表現出來的效果比直線插補法還要好[13][14]，而大致上利用參數式曲線進行插補的方法大致上可以分為三大類：(1) 等參數插補、(2) 等速度插補法、及(3) 有速度控制的插補法。等參數插補的方式，即設定 Δu 為一個固定值來進行插補，這是最簡單的插補方式，其弦長誤差(chord error)以及進給速度(feed rate)都沒有辦法控制。等速的插補法可以透過一階或二階泰勒展開式的近似方法，粗略的維持固定速度前進[15]。也因此有學者將泰勒展開插補法(Taylor approximation interpolation)提高到三階，可使進給速度可以較為準確，但此方法需要很大的運算量[16]。為了提升其運算即時性，許多論文提出相關的解決辦法[17][18][19]，也有一些利用預視(look-ahead)處理的方法來提前規劃軌跡，讓 CNC 機台在執行階段可以降低運算負擔，以達到更好的控制效果[20][21][22][23][24][25]。然而，為了可以得到更精準的控制，許多具有速度控制的方法則被提出[26][27][28]，同時也有學者是利用弦誤差作為軌跡速度規劃的依據[29][30]，而這些具有速度規劃或者藉由弦誤差來改變軌跡速度的方式確實可以得到更好的移動效果。但是在有些速度變化過於劇烈的情況下，反而會造成機台的速度或加速度超過可容許的範圍[31][32]。因此一些考

慮速度變化時，必須限制移動最大加速度或減速度條件的方法被提出，解決速度變化會超過可以負荷的問題[33]。最後，除了利用泰勒展開式完成軌跡的插補方法，目前也開始有學者利用參數式曲線本身的曲率特性進行軌跡規劃，而這些方式更能滿足需要高精度的軌跡規劃[34][35][36]。

目前已經有許多利用 Bezier 曲線、B-Spline 曲線或 NURBS 曲線的插補研究，但大部分文獻主要是針對 CNC 機台進行討論研究，較少對於機械手臂的應用來進行討論。所以，本論文將針對一些過去的概念，提出一個符合機械手臂的軌跡插補方法。

1.3 論文架構

本論文總共分為六章，第一章為緒論，主要敘述本篇論文的研究背景以及研究目的，並說明論文架構；第二章介紹本論文所使用的機械手臂系統架構與軟硬體規格之介紹；第三章說明本論文所會使用到的基礎數學理論，以便後面章節可以快速引用說明，如運動學、速度曲線與參數式曲線；第四章主要描述本論文在機械手臂所需要使用的兩種軌跡規劃方法，包含關節空間與工作空間的軌跡規劃，並針對現有問題提出改良方法；第五章則是根據所提出的方法進行模擬與實作，在實作方面則會利用本論文所提出的六軸機械手臂來測試；第六章為是全文的結論以及未來展望。

第 2 章 系統架構與軟硬體設備

本章之目的為本論文所使用的機械手臂系統架構與軟硬體規格之介紹。實驗室於 2008 年開始投入機械手臂的相關開發與製作，目前已經完成了五款的機械手臂，其各代機械手臂的比較如表 2.1 所示，前三代的機械手臂是使用 Robotis[37]的 AI 伺服馬達所組成的小型機械手臂，只能達到較差的控制精密度的與較小的工作範圍，第四代機械手臂則使用步進馬達完成第一台以工業用途為目標的五軸機械手臂，其大幅提升工作範圍，但在重現精度上有相當的問題，而本論文所使用的機械手臂平台為實驗室自行設計與開發的第五代機械手臂，其改良上述的主要問題，改成使用 AC 伺服馬達與行星式以及諧和式減速機來架構整體機械手臂，其足以提供精密且穩定的實驗開發平台[38]。

表 2.1、實驗室歷年所研製的機械手臂馬達比較表

機械手臂	第一~三代	第四代	第五代
馬達類型	AI 伺服馬達	步進馬達	AC 伺服馬達
優點	1. 控制簡單 2. 馬達體積小 3. 重量輕	1. 馬達步進角固定 2. 扭力大 3. 價格便宜	1. 閉迴路控制 2. 扭力大 3. 控制精準度高
缺點	1. 扭力小 2. 容易產生虛位 3. 價格貴	1. 馬達體積大 2. 容易失步 3. 閉迴路控制	1. 馬達體積大 2. 馬達驅動器體積大 3. 價格貴

本章的架構主要有四個小節：第一節機械手臂的連桿結構與關節配置之介紹；第二節為機械手臂整體的硬體規格之介紹；第三節則是機械手臂的軟硬體系統架構之介紹；第四節將會詳細說明本論文在機械手臂實驗平台所使用的硬體元件之規格參數與效能。

2.1 機械手臂之機構連桿配置

在機械手臂的機構連桿配置上，本論文的機械手臂是屬於垂直關節型(Articulated)的機械手臂，共有六個自由度，主要結構可以分為四個模組分別為基座、大臂、小臂、及球型手腕(spherical wrist)，如圖 2.1 所示。而機械手臂之正視圖與側視圖以及各連桿的長度與傳動說明如圖 2.2 所示，圖 2.3 與圖 2.4 分別為機械手臂的活動範圍上視與測試圖。

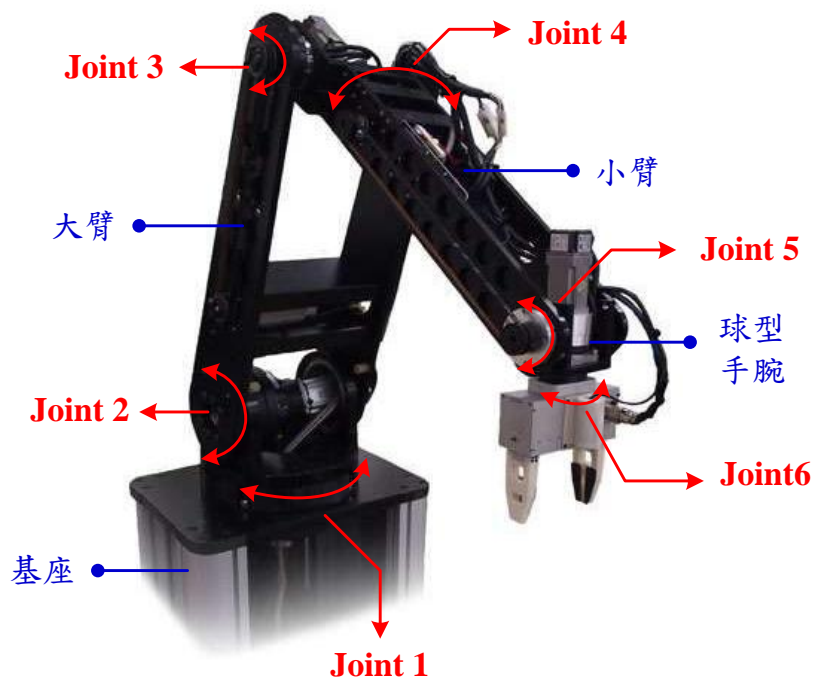


圖 2.1、六軸機械手臂實體之等視角示意圖

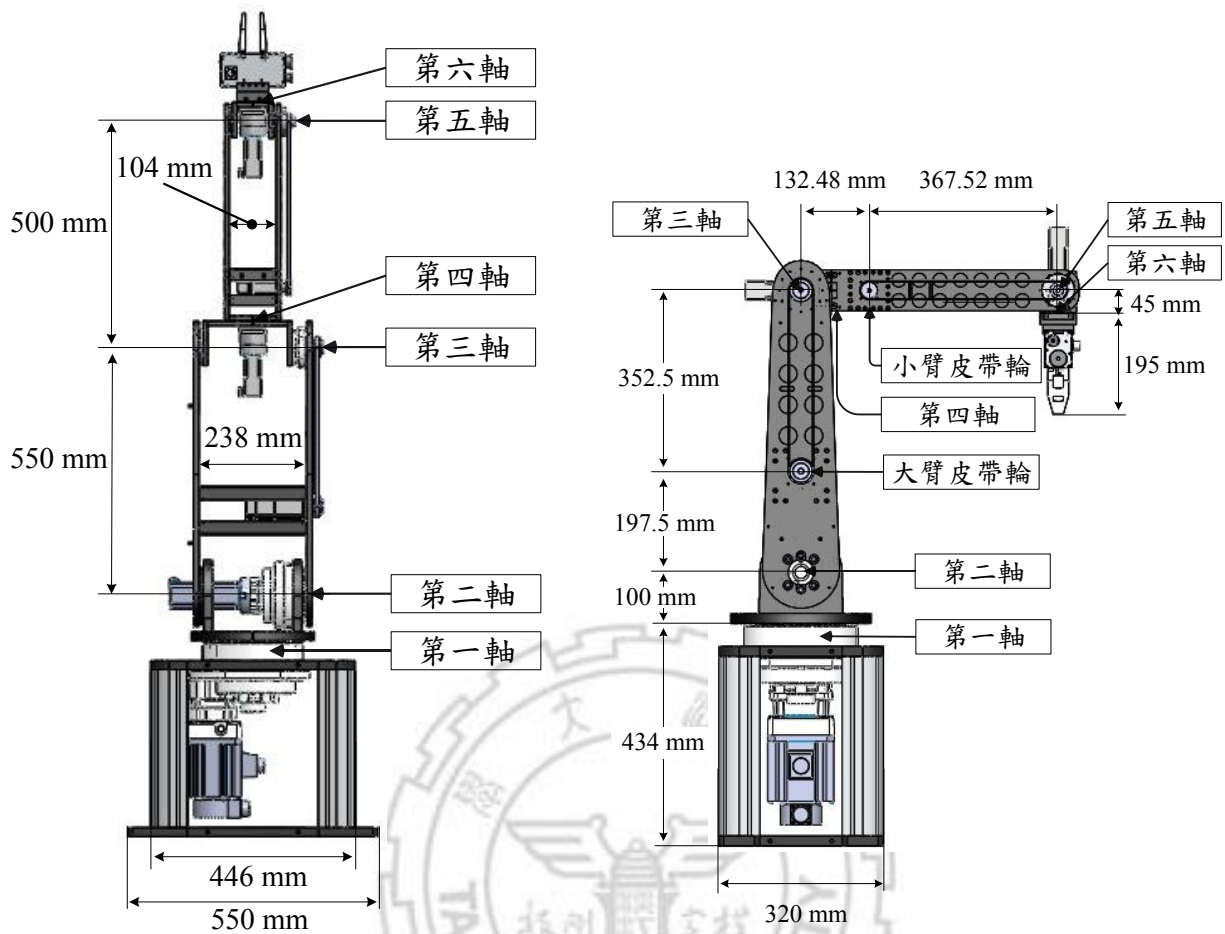


圖 2.2、機械手臂之詳細尺寸規格與配置示意圖

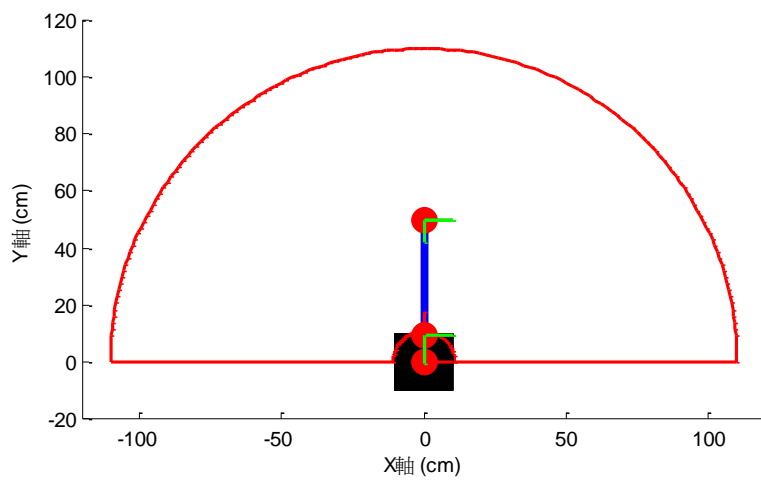


圖 2.3、機械手臂活動範圍之上視圖

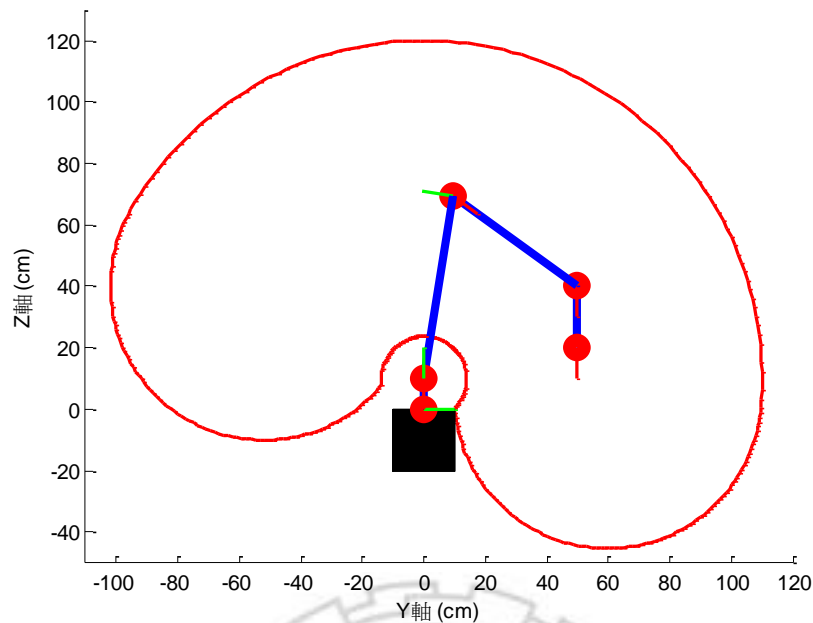


圖 2.4、機械手臂活動範圍之側視圖

2.2 機械手臂之硬體與系統規格

在機械手臂的整體硬體規格上，主要可分為各關節的硬體規格與機械手臂整體系統的規格，其分別如表 2.2 與表 2.3 所示。在機械手臂各關節硬體規格方面，本論文之機械手臂各軸馬達皆使用額定電壓為 AC 220 伏特的伺服馬達。

表 2.2、機械手臂的硬體系統規格表

規格	數值
手臂關節軸數	6 軸
手臂整體重量	70 kg
法蘭最大負載	5 kg
最大移動速度	50 cm/s
移動重複精度	0.5 mm
手臂活動直徑	100 cm
手臂平均功耗	350 watt
手臂最大功耗	700 watt

表 2.3、機械手臂各關節硬體規格表

	Joint1	Joint2	Joint3	Joint4	Joint5	Joint6
描述	基座	大臂連桿	小臂連桿	小臂旋轉	手腕連桿	手腕旋轉
額定電壓	220 V					
馬達功耗 (watt)	1 K	400	200	100		
馬達扭矩 (Nm)	4.80	1.30	0.64	0.32		
馬達轉速 (rpm)	2000	3000				
減速機	行星式		諧和式			
皮帶輪組	無	無	1:1	無	1:1	無
減速比	1:109	1:105	1:80	1:50		
關節扭矩 (Nm)	523.2	136.5	51.2	16		
關節轉速 (rpm)	18.35	28.57	37.5	60		
關節角度 (deg)	-180~180	-5~160	-170~170	-175~175	-150~150	-180~180
關節煞車	有			無		

2.3 機械手臂之硬體控制架構

在機械手臂的硬體控制架構上，如圖 2.5 所示，本論文主要是採用 PC-based 的控制架構，因此需要使用 PCI 介面的軸控卡與 IO 卡達成伺服馬達與 IO 元件的控制。透過軸控卡，電腦端可以即時將角度控制命令轉為 CW/CCW 的脈波訊號給伺服驅動器來控制伺服馬達；透過 IO 卡，電腦端則可直接傳送與接受硬體端的 IO 訊號，即時根據硬體端的需求改變控制狀態。

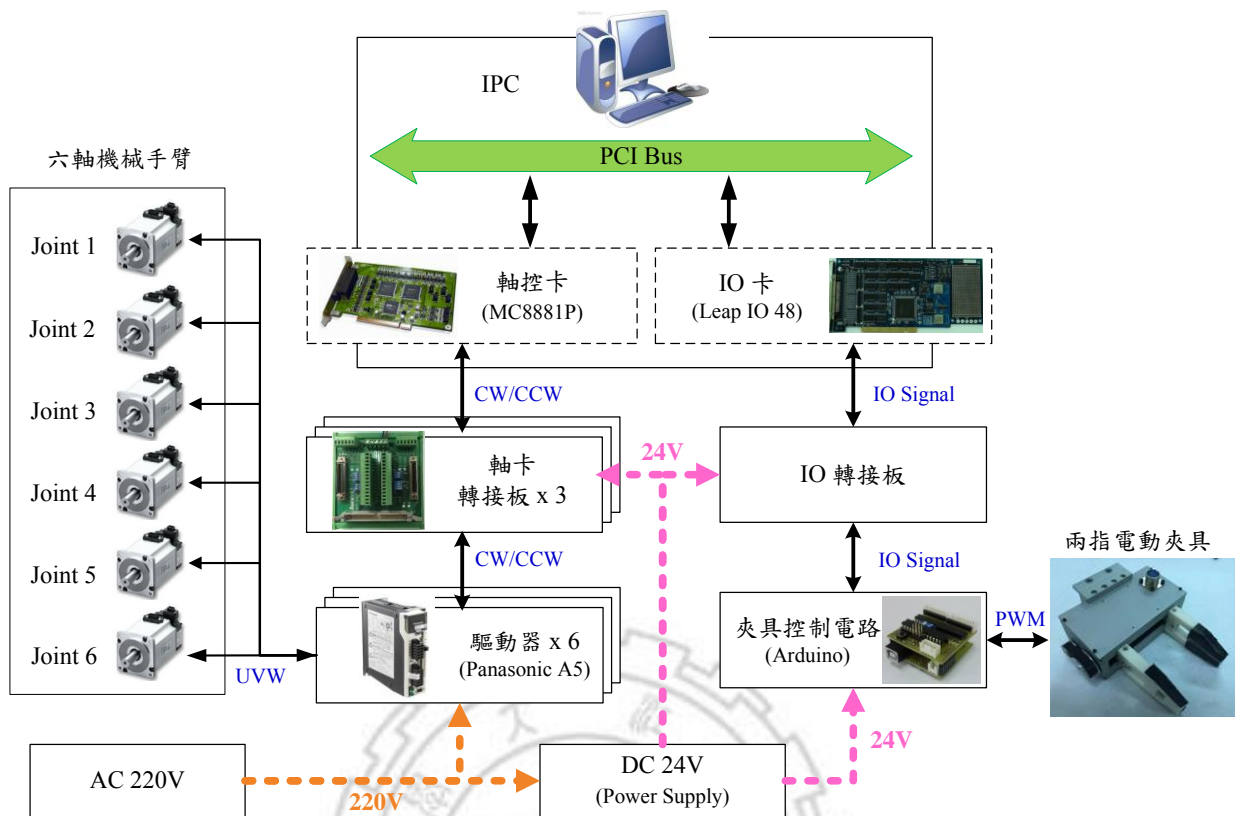


圖 2.5、機械手臂之硬體系統架構

2.4 軟硬體開發平台與設備規格介紹

在軟硬體開發平台與設備規格方面，主要將針對本論文在機械手臂的開發上使用到的開發環境與關鍵零組件，分別介紹其規格與效能，其主要可以分為四個部分：(1) 軟硬體開發平台、(2) 軸控卡與 IO 控制卡、(3) 硬體電路配置、(4) 伺服馬達與驅動器、(5) 減速機、及(6) 兩指電動夾具，其分別敘述如下：

2.4.1 軟硬體開發平台

在硬體開發平台方面，為了使機械手臂可以長期穩定的執行任務，本論文使用比一般電腦穩定性較佳的工業電腦作為機械手臂控制器的開發平台，其型號為研華的 IPC-5120 [39]，作業系統為 Windows XP，詳細規格如表 2.4 所示，外觀如圖 2.6 所示。在軟體開發平台方面，本論文選用 Visual studio 2008 做為控制器與人機介面的開發環境，完成的機械手臂主要介面與任務編輯介面如圖 2.7 (a)與圖 2.7 (b)所示。

表 2.4、工業電腦規格表

	參數	工作中	非工作中
可工作環境	溫度	0~40°C	-20~60°C
	濕度(非冷凝)	10 ~ 85% @ 40° C	10 ~ 95% @ 40° C
	振動(5~500Hz)	1Grms	2Grms
	可接受衝擊力	10G	30G
規格	外形尺寸	320 x 164 x 316.5 mm	
	重量	4.0 kg	

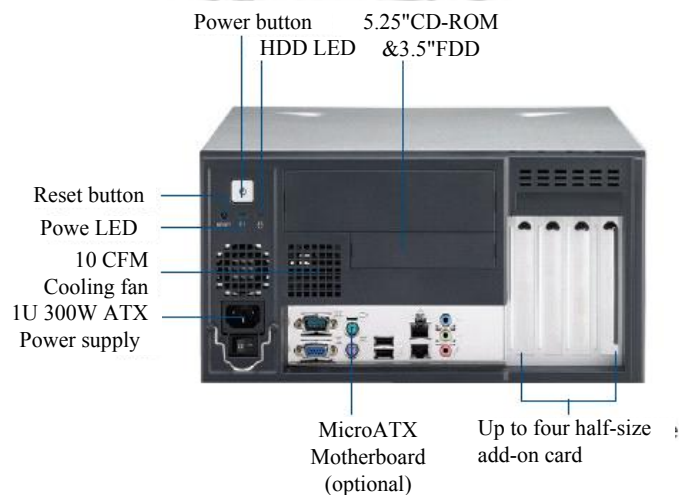
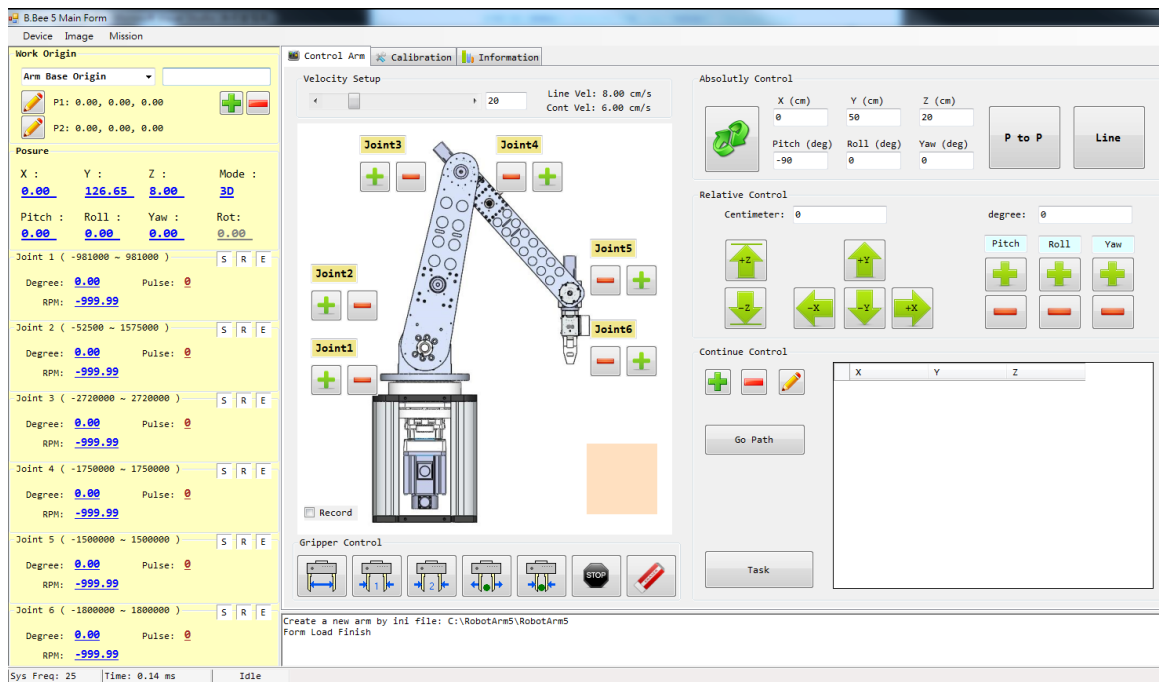
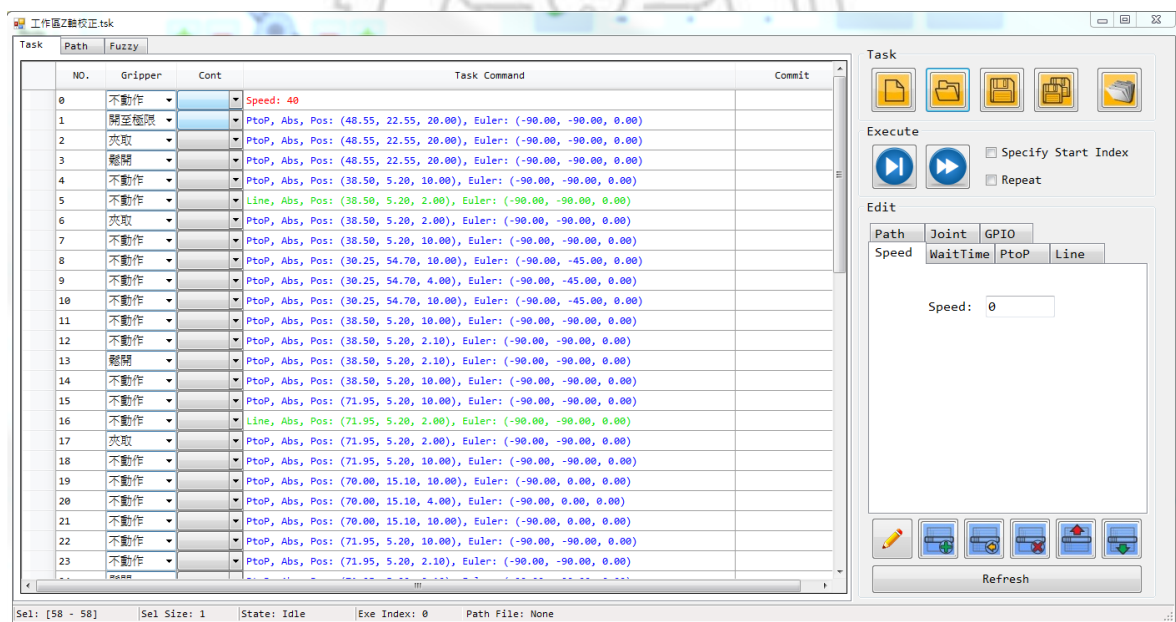


圖 2.6、研華工業電腦 IPC-5120



(a) 機械手臂之軟體主介面



(b) 任務與動作編輯介面

圖 2.7、使用 VS2008 所開發的機械手臂人機介面

2.4.2 軸控卡與 IO 控制卡規格

在軸控卡方面，本論文使用的軸控卡如圖 2.8 所示，其廠牌與型號為和椿科技 AUROTEK 的 MC8881P [40]，主要可以同時針對八軸送出控制脈波，詳細規格如表 2.5 所示；另外，在 IO 控制卡方面，本論文使用的 IO 控制卡如圖 2.9 所示，其廠牌與型號為力浦電子的 LeapIO48 [41]，此 IO 控制卡透過 IO 轉接板後，總共有 32 組輸入與 32 組輸出腳位可以使用。

表 2.5、運動控制卡 MC8881P 規格表

規格	參數
支援馬達種類	AC 伺服/步進馬達
最高軸數	8 軸
最高脈波輸出率	8 Mpps (4 Mpps when interpolation)
最高加速度	1024 Mpps ²
補間	2-8 軸直線，2 軸圓弧，連續補間
速度解析度	16 bits (1~65,536)
編碼計數器解析度	32 bits (最大 2,147,483,648)
編碼器回授	6 Mpps under 4 x AB phase
位置範圍	32bits ($\pm 2,147,483,648$)
I/O 介面訊號	外接電源 DC12~24V



圖 2.8、運動控制卡 MC8881P



圖 2.9、IO 控制卡 LeapIO48

2.4.3 硬體電路配置

在硬體電路配置方面，本論文主要根據電工法規自行設計電控箱，在此電控箱中將提供整個機械手臂系統所需要使用的電源電力，並分配各個馬達驅動器所需要的輸入電源與馬達接線，同時將 IO 控制卡的輸入輸出訊號連結至各個控制面板上，其整體外觀實體圖如圖 2.10 (a)所示，而圖 2.10 (b)是電控箱內部的實體照片。



(a) 電控箱外觀



(b) 電控箱內部

圖 2.10、機械手臂電控箱實體圖

2.4.4 伺服馬達與驅動器規格

在伺服馬達與驅動器的規格方面，本論文採用 Panasonic 的 AC 伺服馬達與 MINAS A5 系列的驅動器作為機械手臂的致動器與馬達控制器 [42]，如圖 2.11 所示，本馬達驅動器屬於脈衝型輸入控制，可由軸卡輸入脈波訊號來進行伺服馬達的位置控制。此外本論文所採用的驅動器都為絕對型編碼器，重新啟動時可透過 RS232 讀取存在驅動器中記錄的馬達位置，其各軸馬達及驅動器的詳細規格如表 2.6 及表 2.7 所示。



(a) 第 1 軸的 AC 伺服馬達



(b) 第 2 軸的 AC 伺服馬達



(c) 第 3 軸的 AC 伺服馬達



(d) 第 4 - 6 軸的 AC 伺服馬達

圖 2.11、本論文所採用的 AC 伺服馬達

表 2.6、各軸 AC 伺服馬達的型號規格表

廠牌	型號	用途	瓦數 (watt)	重量 (kg)	扭力 (Nm)
Panasonic AC 伺服馬達	MDMA102S1H	第 1 軸	1KW	8.70	4.80
	MHMD042S1T	第 2 軸	400W	1.80	1.30
	MHMD022S1V	第 3 軸	200W	1.40	0.64
	MSMD012S1S	第 4 - 6 軸	100W	0.47	0.32

表 2.7、各軸 AC 伺服馬達的驅動器

	型號	MDDHT3350(第一軸)	
	規格	Input	Output
	Voltage	200-240V	0-240V
	Phase	1 ϕ /3 ϕ	3 ϕ
	F.L.C	9.1A/5.2A	5.9A
	Freq.	50/60Hz	0 ~ 416Hz
	Power	-	1KW
	型號	MBDHT2510(第二軸)	
	規格	Input	Output
	Voltage	200-240V	0-240V
	Phase	1 ϕ / 3 ϕ	3 ϕ
	F.L.C	4.1A/2.4A	2.6A
	Freq.	50/60Hz	0~500Hz
	Power	-	400W
	型號	MADHT1507(第三軸)	
	規格	Input	Output
	Voltage	200-240V	0-240V
	Phase	1 ϕ / 3 ϕ	3 ϕ
	F.L.C	2.4A/1.3A	1.6A
	Freq.	50/60Hz	0~500Hz
	Power	-	200W
	型號	MADHT1505(第四~六軸)	
	規格	Input	Output
	Voltage	200-240V	0-240V
	Phase	1 ϕ / 3 ϕ	3 ϕ
	F.L.C	1.6A/0.9A	1.2A
	Freq.	50/60Hz	0~500Hz
	Power	-	100W

2.4.5 減速機規格

在減速機的規格方面，本論文共採用兩種不同的減速機來設計機械手臂，分別為日本 Nabtesco 的行星式減速機[43]與日本 Harmonic Drive 的諧和式減速機[44]，如圖 2.12 所示，其中行星式減速機負責第 1 軸與第 2 軸，而第 3 軸到第 6 軸則因需要降低機械手臂的重量負載，會採用較輕且體積小的諧和式減速機，其各軸減速機的詳細規格如表 2.8 所示。

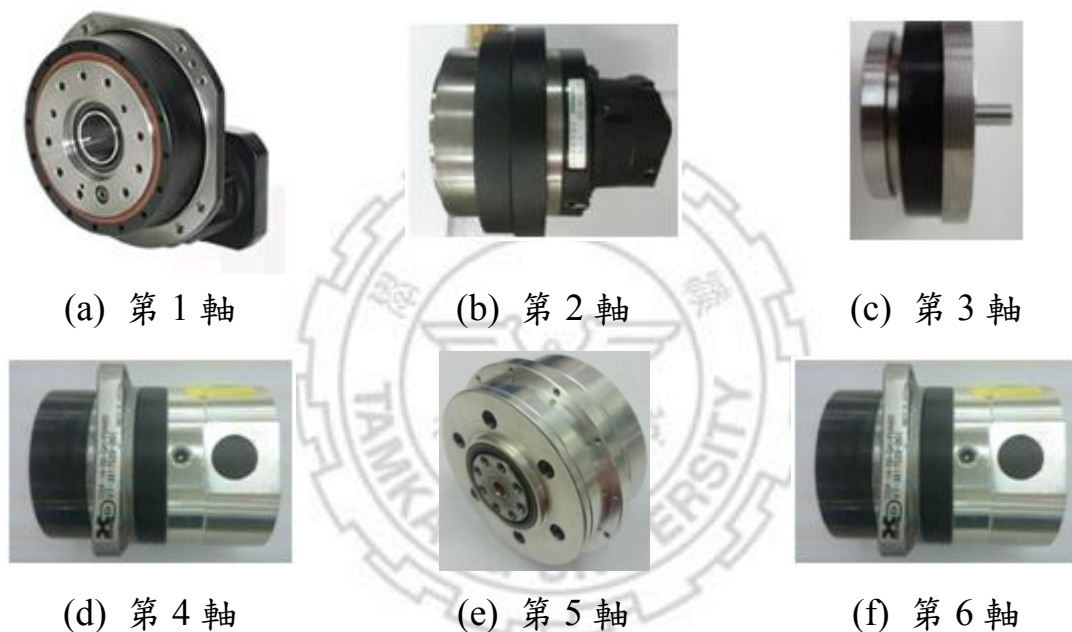


圖 2.12、本論文所採用的減速機

表 2.8、各軸 AC 伺服馬達的型號規格表

說明	型號	用途	減數比	重量 (kg)
Nabtesco 減速機	RDS050C-109-B2-CH-1F	第 1 軸	109	30
	RDS020E-105-B0-AC-ZZ	第 2 軸	105	6
自製 諧和式減速機	SHG-20-80-2UJ	第 3 軸	80	1.38
	CSD-14-50-2A-GR	第 5 軸	50	0.06
	CSF-14-50-GH-F0ABD	第 4、6 軸	50	0.5

2.4.6 兩指電動夾具

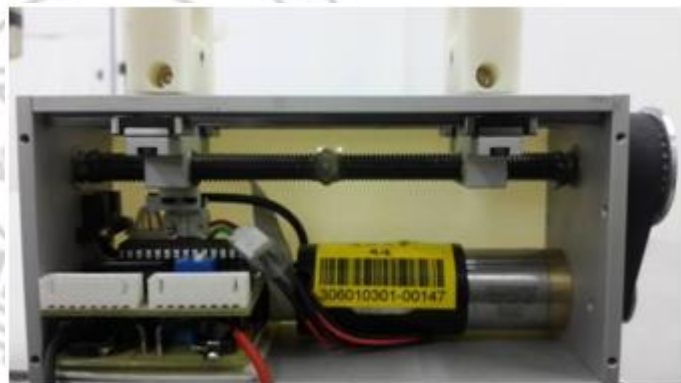
在兩指電動夾具設計方面，主要是自行開發的一套兩指電動夾具，主要可以分為三個部分：(a) 傳動機構、(b) 訊號控制板、及(c) 驅動電源板，其分別介紹如下。

(a) 傳動機構

在兩指電動夾具的傳動機構設計上，如圖 2.13 所示，主要是使用一個直流無刷馬達作為夾具的驅動馬達，在傳動方面是透過一組皮帶輪帶動螺桿及利用兩個支撐滑軌達到平行開合的夾取動作，其兩指電動夾具之規格表如表 2.9 所示。



(a) 夾具實體圖



(b) 夾具內部結構

圖 2.13、兩指電動夾具之傳動機構實體圖

表 2.9、兩指電動夾具之硬體規格表

規格	數值
尺寸	146mm(長)×68mm(寬)×75mm(高)
重量	600 g
開合行程	95 mm
開合速度	40 mm/s
控制晶片	ATmega328

(b) 訊號控制板

在兩指電動夾具的訊號控制板設計上，如圖 2.14 所示，其控制訊號主要由工業電腦的軟體端經 I/O 控制卡發送控制命令給訊號控制板，訊號控制板將根據不同命令使夾具做出對應的動作。而在控制晶片的選擇上，本論文選擇以 ATMEL 的 ATmega328 晶片及 TOSHIBA 的 ULN2803 晶片組成，如圖 2.14 (b)所示，在兩指電動夾具的控制上，ATmega328 晶片主要接收電腦端傳送來的命令來控制夾具的開合及接收感測器的回授來判斷夾具開合程度與是否有夾到東西。

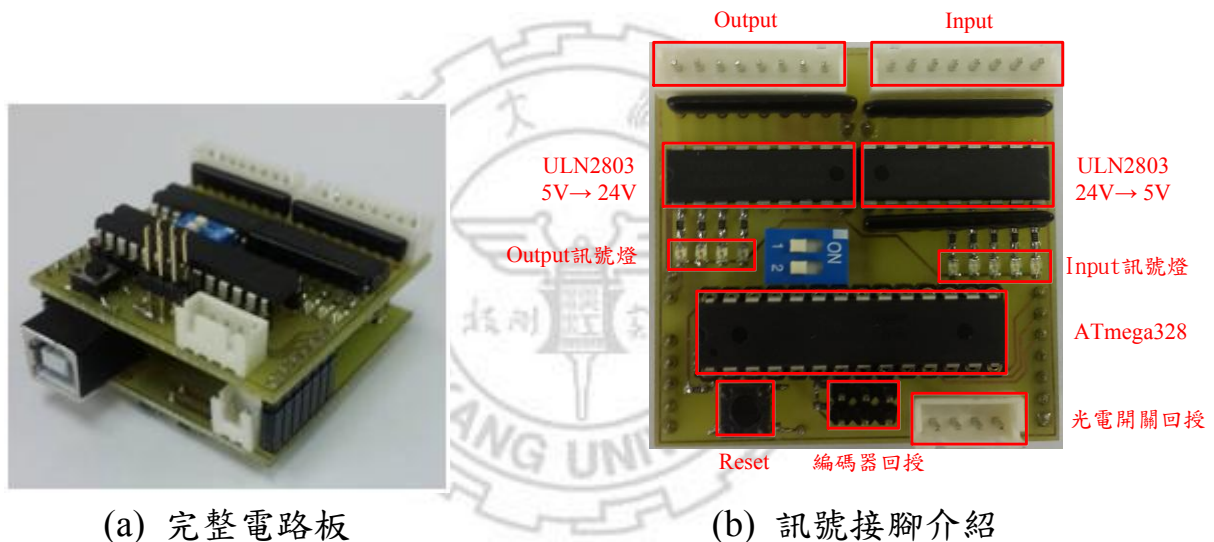


圖 2.14、兩指電動夾具之電路實體圖

(c) 馬達驅動電路

在兩指電動夾具的馬達驅動電路設計上，主要是接收 ATmega328 晶片輸出的脈波寬度(Pulse Width Modulation, PWM)與高低電位，來進行馬達的速度控制、正反轉控制，使得夾具能夠開合。馬達驅動電路所使用的晶片為 L298P。

第 3 章 運動學模型與軌跡規劃基礎理論

本章之主要目的在於介紹本論文所會使用到的基礎數學理論，以便後面章節可以快速引用說明。本章的架構主要包含四個小節，第一節為機械手臂的正逆運動學推導之介紹；第二節為軌跡規劃中容易實現的梯形速度曲線之介紹；第三節則是速度曲線中較為平順的雙 S 形速度曲線之介紹；第四節為軌跡規劃中常使用到的各種參數式自由曲線之介紹。

3.1 機械手臂之運動學模型推導

本節主要介紹如何建立本論文之機械手臂的正向運動學(forward kinematics)與逆向運動學(inverse kinematics)模型，在正向運動學方面，主要參考 Denavit-Hartenberg 模型建立六軸機械手臂各軸的座標系統(簡稱 D-H 連桿座標系)[45][46]，並根據機械手臂的連桿結構與連桿關係完成 D-H 參數表，最後，利用 D-H 轉換矩陣完成轉換關節角度到末端點姿態的正向運動學模型；在逆向運動學方面，則採用運動學解耦合(kinematic decoupling)的方式簡化機械手臂逆運動學的複雜度，將利用為位置逆運動學與方向逆運動學來分別求得轉換末端點姿態到各軸關節角度的逆向運動學模型。本節主要分為三個部分：(1) 建立 D-H 參數表、(2) 正向運動學推導、及(3) 逆向運動學，以下將詳細介紹說明。

3.1.1 機械手臂之 D-H 參數表

Denavit 及 Hartenberg 於 1955 年提出的 D-H 連桿座標系是表示機械手臂各關節座標系間相對位置與方向的關係式，根據 D-H 連桿座標系的定義，將各關節的旋轉軸定義為 z 軸後，各軸之間的關係主要可分為三種情形：(1) z_{i-1} 與 z_i 無共平面、(2) z_{i-1} 與 z_i 互相平行、及(3) z_{i-1} 與 z_i 相交，其分別敘述如下：

(1) z_{i-1} 與 z_i 無共平面

在 z_{i-1} 與 z_i 無共平面的情況下，會存在唯一一條連接 z_{i-1} 與 z_i 的最短線段，且此線段均與 z_{i-1} 及 z_i 相互垂直，如圖 3.1 (a)所示，此線段與 z_i 相交的點被定義為座標原點 \mathbf{o}_i ，而此線段被定義為 x_i 軸，並且選擇延伸方向做為 x_i 軸的正方向，最後由右手定則決定 y_i 軸，結果如圖 3.1 (b)所示。

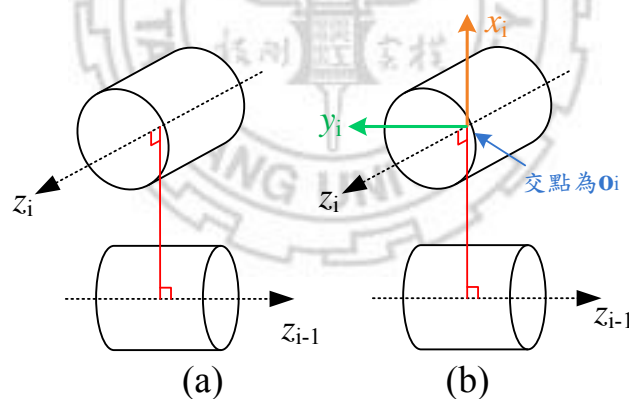


圖 3.1、 z_{i-1} 與 z_i 無共平面示意圖

(2) z_{i-1} 與 z_i 互相平行

在 z_{i-1} 與 z_i 互相平行的情況下，會存在無限多條連接 z_{i-1} 與 z_i 的垂直線段，如圖 3.2 (a)所示，此時可在 z_i 上選擇任意點作為座標原點 \mathbf{o}_i ，然而，一般而言會以同時通過 \mathbf{o}_{i-1} 的線段來定義座標原點 \mathbf{o}_i ，並以此線段定

義為 x_i 軸，同樣選擇延伸方向做為 x_i 軸的正方向，最後由右手定則決定 y_i 軸，其結果如圖 3.2(b)所示。

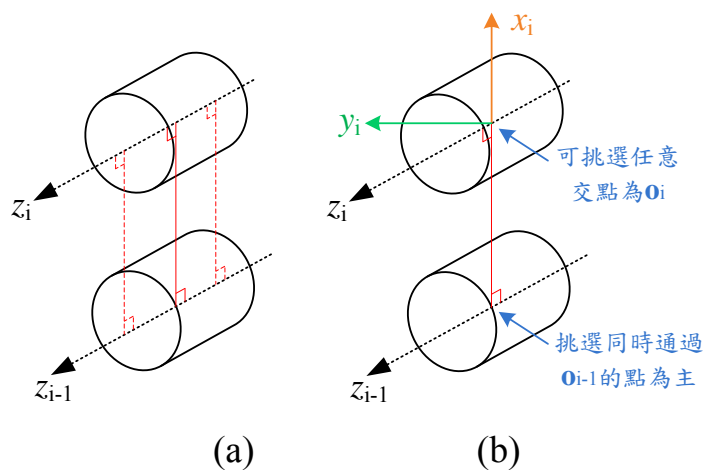


圖 3.2、 z_{i-1} 與 z_i 互相平行示意圖

(3) z_{i-1} 與 z_i 相交

在 z_{i-1} 與 z_i 相交的情況下，則定義 z_{i-1} 與 z_i 的相交點為座標原點 O_i ，一般而言可分為如圖 3.3 (a)及圖 3.4 (a)所示的兩種情況，此時以 z_{i-1} 與 z_i 所組成的平面法向量定義為 x_i 軸，至於 x_i 軸的正方向則隨意選擇，最後由右手定則決定 y_i 軸，其結果如圖 3.3 (b)及圖 3.4 (b)所示。

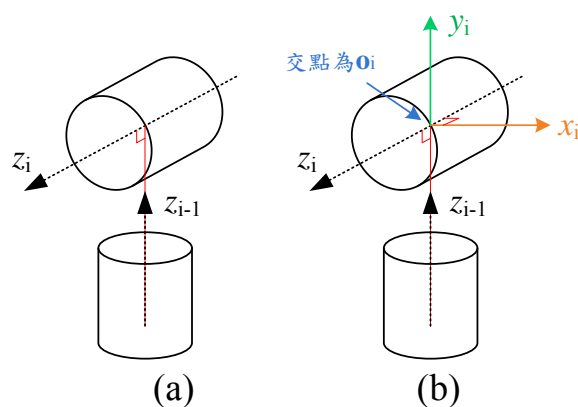
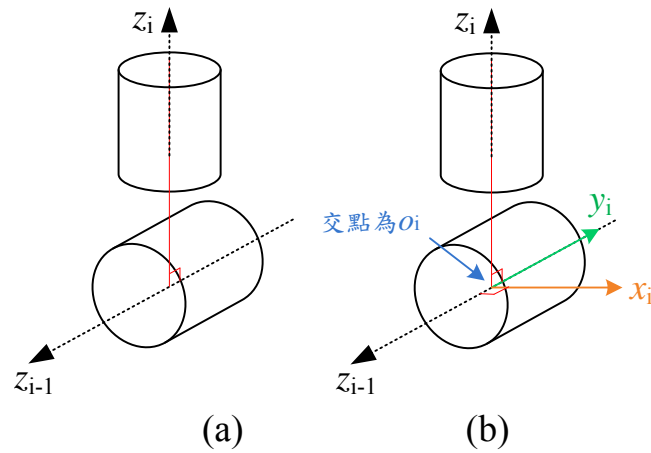


圖 3.3、 z_{i-1} 與 z_i 相交示意圖之情況一


 圖 3.4、 z_{i-1} 與 z_i 相交示意圖之情況二

因此，根據上述定義，本論文所使用之六軸機械手臂各關節之座標系即可標示如圖 3.5，接者再利用完成的關節座標系以及表 3.1 所定義的 4 種 D-H 參數，即可完成本論文之六軸機械手臂的 D-H 參數表，如表 3.2 所示。

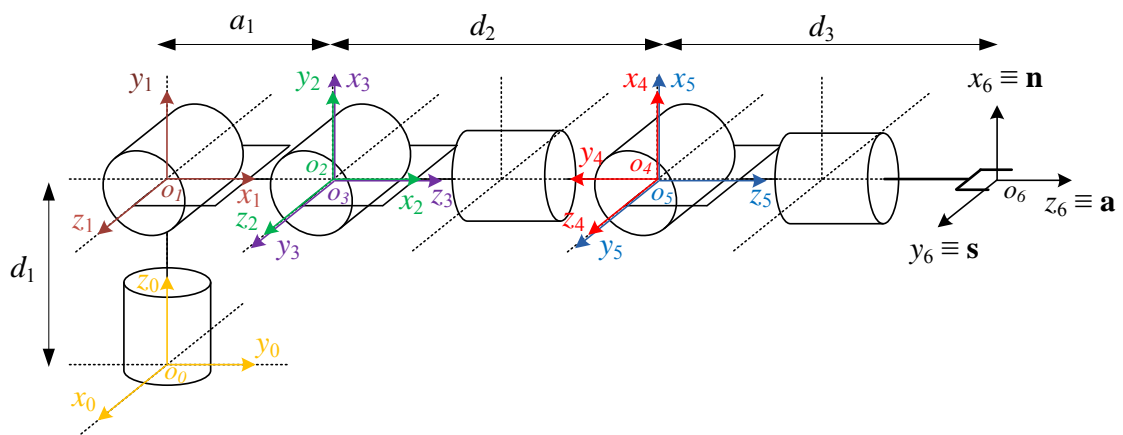


圖 3.5、六軸機械手臂座標系配置

表 3.1、四種 D-H 參數及說明

參數	說明
a_i	沿著 x_i 軸，從 z_{i-1} 軸到 z_i 軸的距離，方向與 x_i 相反為負。
α_i	繞著 x_i 軸，方向由 z_{i-1} 軸到 z_i 軸之間的夾角，相反則為負。 (± 180)
d_i	沿著 z_{i-1} 軸，從原點 \mathbf{o}_{i-1} 到 x_i 軸的距離，方向與 z_{i-1} 相反為負。
θ_i	繞著 z_{i-1} 軸，方向由 x_{i-1} 軸往 x_i 軸之間的夾角，相反則為負。 (± 180)

表 3.2、六軸機械手臂之連桿參數表

Link	a_i (mm)	α_i (deg)	d_i (mm)	θ_i (deg)
1	0	90°	80	90°
2	550	0°	0	0°
3	0	90°	0	90°
4	0	-90°	500	0°
5	0	90°	0	0°
6	0	0°	215	0°

3.1.2 正向運動學

正向運動學的主要目的是在於利用已知的關節角度(joint angle)來推算機械手臂末端點(end-effector)所在的位置(position)與方位(orientation)。因此，在機械手臂正向運動學的計算上，本論文同樣採用 Denavit 及 Hartenberg 所提出的方法，將已知的 D-H 參數表及關節角度代入 D-H 轉換矩陣(D-H transformation matrix)中，如下所示：

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中 $c \equiv \cos$ 與 $s \equiv \sin$ ， θ_i 為目前關節角度，因此，根據式(3.1)可得到本論文之六軸機械手臂的 D-H 轉換矩陣，其分別表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} c(\theta_1 + 90) & 0 & s(\theta_1 + 90) & 0 \\ s(\theta_1 + 90) & 0 & -c(\theta_1 + 90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_1 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} c(\theta_3 + 90) & 0 & s(\theta_3 + 90) & 0 \\ s(\theta_3 + 90) & 0 & -c(\theta_3 + 90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

若將各軸完成的 D-H 轉換矩陣連乘後，即可得到末端點的位置與方位矩陣，其計算方法如下所示：

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_6^0 & \mathbf{o}_6^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

其中 \mathbf{T}_6^0 可以得到兩個非常重要的資訊，分別為 $\mathbf{o}_6^0 \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ 與 $\mathbf{R}_6^0 \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ ，其中 \mathbf{o}_6^0 表示末端點的位置向量，而 \mathbf{R}_6^0 表示末端點的方位矩陣，其中包含三個方向向量 $[\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}]$ ， $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ 為靠近向量(approach vector)，其用來表示夾具靠近物體前進的移動向量； $\mathbf{s} \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ 為滑動向量(sliding vector)，若夾具為兩指式，則 \mathbf{s} 可用來表示夾具手指開合的方向向量； $\mathbf{n} \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ 為正交向量(normal vector)，是 \mathbf{a} 及 \mathbf{s} 的正交法向量。依本論文所示用的兩指電動夾具為例，其末端點的方位向量如圖 3.6 所示。

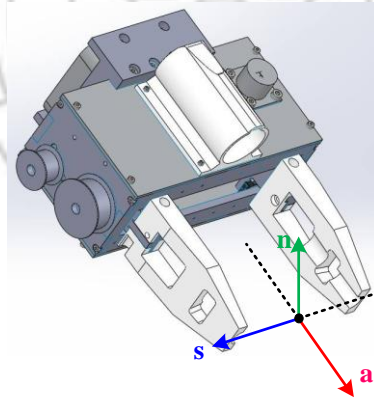


圖 3.6、機械手臂末端之兩指電動夾具的三個方位向量

此外，正運動學的方位角度計算上，本論文會採用尤拉角(Euler angle)的方式將末端點的方位向量轉換為方位角[46]，其尤拉角可以分為 pitch、roll 及 yaw。本論文定義 pitch 是對 x 軸旋轉；roll 是對 y 軸旋轉；yaw 是對 z 軸旋轉，如圖 3.7 所示。在計算尤拉角時，一般會使用 $\text{atan2}(x, y)$ 的反正切函數[47]，此反正切函數可以計算出反三角函數的角度所在的

正確象限，一般的反正切函數有時無法計算正確象限。本論文在尤拉角的旋轉上，採用 roll-pitch-yaw 的旋轉方式，如下表示：

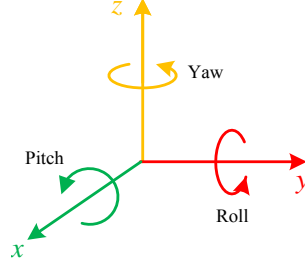


圖 3.7、尤拉角 pitch-roll- yaw 的旋轉示意圖

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{z,\gamma} \cdot \mathbf{R}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{R}_{y,\beta} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta - s_\gamma s_\alpha s_\beta & -s_\gamma c_\alpha & c_\gamma s_\beta + s_\gamma s_\alpha c_\beta \\ s_\gamma c_\beta + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\gamma c_\alpha & s_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 α 、 β 、 γ 分別表示 pitch、roll 及 yaw，而 $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ 、 $\mathbf{R}_{y,\beta}$ 及 $\mathbf{R}_{z,\gamma}$ 分別表示 pitch、roll 及 yaw 的旋轉矩陣。而根據式(3.4)得到的方位矩陣，可以對應得到如下式：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_6^0 &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\gamma s_\beta + s_\gamma s_\alpha c_\beta & c_\gamma c_\beta - s_\gamma s_\alpha s_\beta & -s_\gamma c_\alpha \\ s_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha c_\beta & s_\gamma c_\beta + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\gamma c_\alpha \\ c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & s_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，根據式(3.4)與式(3.5)結果，即可使用目前的方位矩陣推算出方位角度。而在求解的過程中，根據 pitch 的角度 α 會有下列兩種情況：(1)

α 不等於 $\pm 90^\circ$ 與 (2) α 等於 $\pm 90^\circ$ 。其分別介紹如下：

(1) α 不等於 $\pm 90^\circ$

若 α 不等於 $\pm 90^\circ$ (也就是 $c_\alpha \neq 0$)，則式(3.4)會整理成如下所示。

$$\mathbf{R}_6^0 = \begin{bmatrix} c_\gamma s_\beta + s_\gamma s_\alpha c_\beta & c_\gamma c_\beta - s_\gamma s_\alpha s_\beta & -s_\gamma c_\alpha \\ s_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha c_\beta & s_\gamma c_\beta + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\gamma c_\alpha \\ c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & s_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

由式(3.6)得知 $s_\alpha = r_{33}$ ，利用 $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$ 求得 $c_\alpha = \sqrt{1 - r_{33}^2}$ ，最後得到 α 的角度表示如下。

$$\alpha = \text{atan2}\left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \quad (3.7)$$

求得 α 的角度後，即可以由式(3.6)再分別得到如下的四個關係式：

$$c_\beta = \frac{r_{31}}{c_\alpha}, \quad s_\beta = -\frac{r_{32}}{c_\alpha}, \quad c_\gamma = \frac{r_{23}}{c_\alpha}, \quad s_\gamma = -\frac{r_{13}}{c_\alpha} \quad (3.8)$$

最後， γ 與 β 的角度可由式(3.8)的結果即可代式(3.6)其計算結果可表示如下：

$$\beta = \text{atan2}(s_\beta, c_\beta) \quad (3.9)$$

$$\gamma = \text{atan2}(s_\gamma, c_\gamma) \quad (3.10)$$

(2) α 等於 $\pm 90^\circ$

若 α 等於 $\pm 90^\circ$ (也就是 $c_\alpha = 0$ 且 $s_\alpha = \pm 1$)，則式(3.4)可整理成如下式：

$$\mathbf{R}_6^0 = \begin{bmatrix} c_\gamma s_\beta \pm s_\gamma c_\beta & c_\gamma c_\beta \pm s_\gamma s_\beta & 0 \\ s_\gamma s_\beta \pm c_\gamma c_\beta & s_\gamma c_\beta \pm c_\gamma s_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

這個狀況要求解 α 、 β 與 γ 的角度計算會比較複雜，因為無法像 α 不等

於 $\pm 90^\circ$ 那樣子求出解，必須從 r_{11} 、 r_{12} 、 r_{21} 及 r_{22} 中獲取其他可以求解的資訊。在 $r_{33}=1$ 的情況， α 等於 90° ，也就是 $s_\alpha=1$ ，因此 R_6^0 經過 $s_\alpha=1$ 代入化簡及使用三角函數和差公式轉換後即可得如下式：

$$\begin{bmatrix} c_\gamma s_\beta + s_\gamma c_\beta & c_\gamma c_\beta - s_\gamma s_\beta & 0 \\ s_\gamma s_\beta - c_\gamma c_\beta & s_\gamma c_\beta + c_\gamma s_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\gamma+\beta} & c_{\gamma+\beta} & 0 \\ -c_{\gamma+\beta} & s_{\gamma+\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

由式(3.12)可以發現，利用 r_{11} 、 r_{12} 、 r_{21} 及 r_{22} 只能求得 $\gamma+\beta$ 的角度，並無法完全推算出 γ 及 β 的角度，其表示如下：

$$\gamma + \beta = \text{atan2}(r_{22}, r_{12}) = \text{atan2}(r_{11}, -r_{21}) \quad (3.13)$$

而在 $r_{33}=-1$ 的情況， α 等於 -90° ，也就是 $s_\alpha=-1$ ，因此 R_6^0 經過 $s_\alpha=-1$ 代入化簡及使用三角函數和差公式轉換後即可得如下式：

$$\begin{bmatrix} c_\gamma s_\beta - s_\gamma c_\beta & c_\gamma c_\beta + s_\gamma s_\beta & 0 \\ s_\gamma s_\beta + c_\gamma c_\beta & s_\gamma c_\beta - c_\gamma s_\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{\gamma-\beta} & c_{\gamma-\beta} & 0 \\ c_{\gamma-\beta} & s_{\gamma-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

由式(3.14)同樣可以發現，利用 r_{11} 、 r_{12} 、 r_{21} 及 r_{22} 只能求得 $\gamma-\beta$ 的角度，並無法完全推算出 γ 及 β 的角度，其表示如下：

$$\gamma - \beta = \text{atan2}(r_{22}, r_{12}) = \text{atan2}(-r_{11}, r_{21}) \quad (3.15)$$

3.1.3 逆向運動學

逆向運動學的主要目的是在於利用已知的機械手臂末端點位置與方位來推算各關節的角度。因此，在機械手臂逆向運動學的計算上，本論文採用運動學解耦合(kinematic decoupling)的方法簡化六軸機械手臂逆向運動學的複雜度[46]，再利用位置逆運動學(inverse position kinematic)及方位逆運動學(inverse orientation kinematic)求得各關節的角度。由於本論文提出的六軸機械手臂在關節 4 到關節 6 符合球型關節(spherical joint)的特點，球型關節示意圖如圖 3.8 所示，因此可以利用此特點將機械手臂由手肘及手腕拆解為兩個部分進行求解，分別為：(1) 位置逆運動學以及(2) 方位逆運動學，其分別敘述如下：

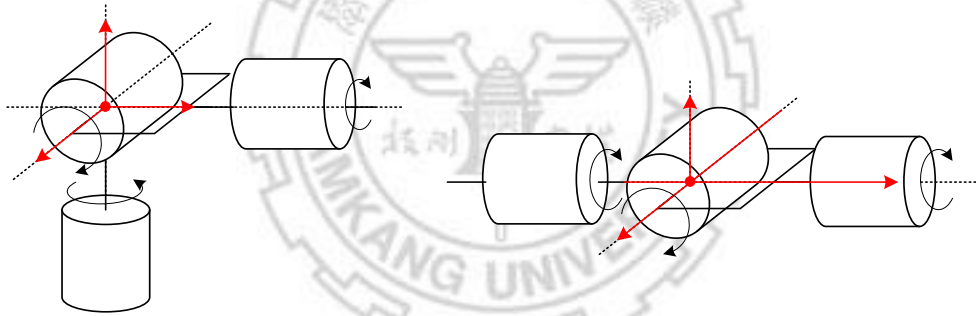


圖 3.8、球型關節(spherical joint)

(1) 位置逆運動學

在位置逆運動學方面，由於第 4、5 與 6 軸為球型關節的關係，這三軸的 z 軸會相交於第 5 軸的座標原點上，因此，可令此座標原點為手腕中心(wrist center) \mathbf{o}_c ，如圖 3.9 所示，在根據手腕中心將機械手臂分解為前三軸與後三軸。接著，因為期望的末端點位置矩陣與方位矩陣已知，因此手腕中心的位置可透過末端點位置與靠近向量 \mathbf{a} 求得，其表示如下：

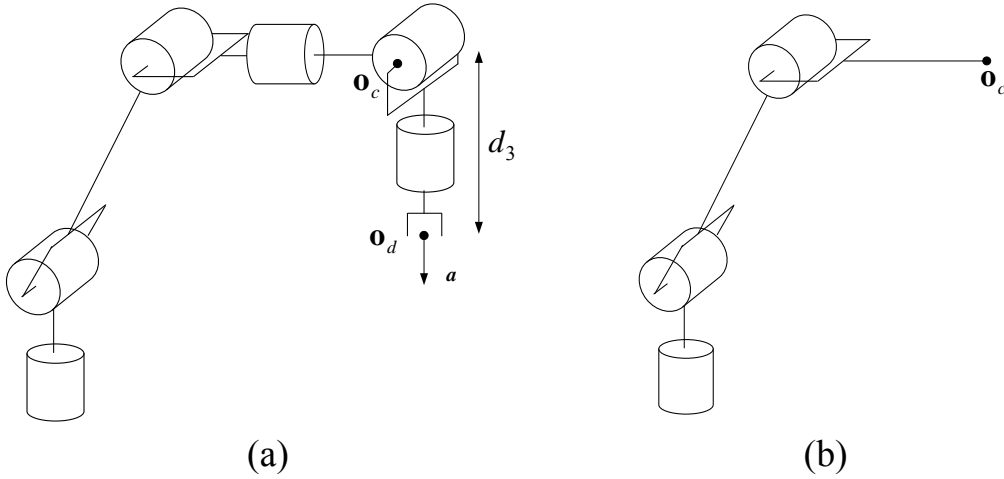


圖 3.9、運動學解耦合及手腕中心示意圖

$$\mathbf{o}_c = \mathbf{o}_d - d_3 \cdot \mathbf{R}_d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

其中 \mathbf{o}_d 與 \mathbf{R}_d 分別表示為期望的末端點位置與方位矩陣， d_3 則手腕中心到末端點的連桿長度，如圖 3.9 (a) 所示。所以，在得到手腕中心 \mathbf{o}_c 的位置之後，前三軸的可以被簡化為雙連桿的問題，如圖 3.9 (b) 所示。最後，根據機械手臂前三軸的連桿關係，如圖 3.10 所示，即可以透過三角幾何的方法求得前三軸的關節角度，其分別求解如下：

$$\theta_1 = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad (3.17)$$

$$\cos \theta_D = \frac{x_c^2 + y_c^2 + (z_c - L_1)^2 - (L_2^2 + L_3^2)}{2L_2L_3} \quad (3.18)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_D}, \cos \theta_D) \quad (3.19)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(z_c - L_1, \sqrt{x_c^2 + y_c^2}) - \text{atan2}(L_3 \sin \theta_3, L_2 + L_3 \cos \theta_3) \quad (3.20)$$

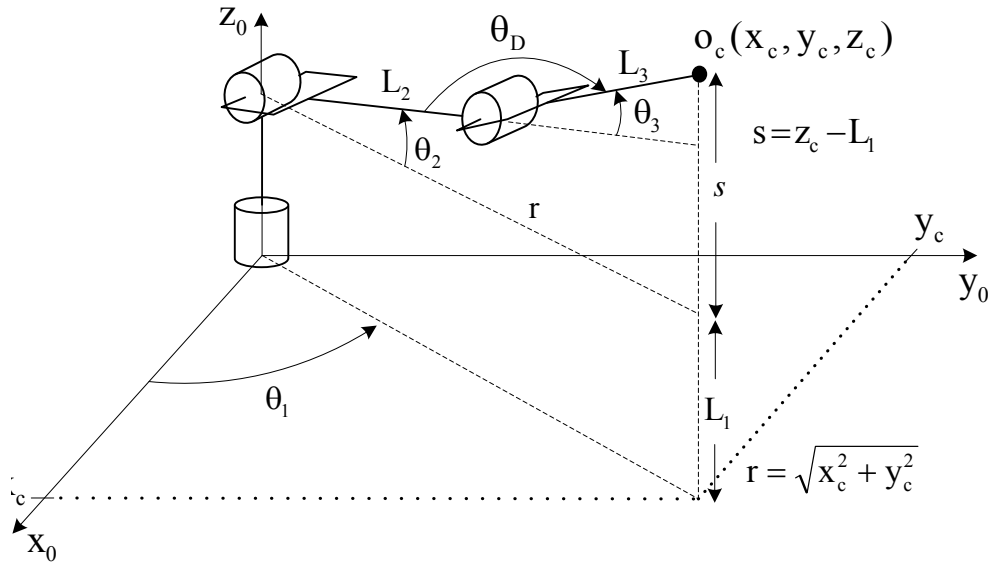


圖 3.10、前三軸關節連桿的幾何關係圖

(2) 方位逆運動學

在方位逆運動學方面，由於前三軸的關節角度 θ_1 、 θ_2 及 θ_3 已求得，因此可以得到第 1 軸關節到第 3 軸關節的旋轉矩陣，如下式所示：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_3^0 &= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & s_1 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_1 & s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & 0 & s_2 s_3 - c_2 c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

其中 \mathbf{R}_i 表示為第 i 個關節的旋轉矩陣，因此，由第 3 軸關節到第 6 軸關節的旋轉矩陣亦可以表示如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_6^3 &= \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_6 \\
&= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ s_4 & 0 & c_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

再來，根據期望的 \mathbf{R}_d 與 \mathbf{R}_3^0 也可以得到 \mathbf{R}_6^3 的關係式如下：

$$\mathbf{R}_6^3 = (\mathbf{R}_3^0)^{-1} \mathbf{R}_d = (\mathbf{R}_3^0)^T \mathbf{R}_d \tag{3.23}$$

整理後可以得到

$$\begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & s_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

因此，根據式(3.22)與式(3.24)的關係，即可計算出 θ_4 、 θ_5 與 θ_6 ，其分別表示如下：

$$\theta_4 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \tag{3.25}$$

其中

$$r_{23} = a_x \sin \theta_1 - a_y \cos \theta_1 \tag{3.26}$$

$$r_{13} = a_x \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_z \sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{3.27}$$

再來，關節 5 的角度可表示如下

$$\theta_5 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}) \tag{3.28}$$

其中

$$r_{33} = a_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_z \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (3.29)$$

再來，關節 6 的角度可表示如下：

$$\theta_6 = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \quad (3.30)$$

其中

$$r_{32} = s_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + s_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - s_z \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (3.31)$$

$$r_{31} = n_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + n_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - n_z \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (3.32)$$



3.2 梯形速度曲線

本節主要說明一般梯形速度曲線的產生方式，並針對硬體本身所需要的限制進行方程式的條件判斷與調整，在一般梯形速度曲線中，考慮加入速度與加速度的限制，並且為了滿足軌跡規劃需求，還可以考慮當起始速度不為零的狀況，因此，主要將分為三個部分：(1) 基本梯形速度曲線、(2) 具有速度與加速度的限制之梯形速度曲線、及(3) 具有啟動速度之梯形速度曲線，以下將詳細說明：

3.2.1 基本梯形速度曲線

基本梯形速度曲線是一種常見並且實用的速度規劃方法，其產生的位置軌跡混和了二次拋物線及線性線段，所規劃的位置(position)、速度(velocity)及加速度(acceleration)軌跡如圖 3.11 所示，表 3.3 則為梯形速度曲線的參數符號及定義。在基本梯形速度曲線的速度規劃中，會先假設起始與終點的速度與加速度為零，接著根據給定的起始與終點位置及時間來產生軌跡，所包含的參數資訊如所示，因此，根據基礎梯形速度曲線的定義，利用給定的 q_0 、 q_1 、 t_0 、 t_1 、 T_a 及 v_{\lim} (一般 $t_0 = 0$) 即可完成位置 $q(t)$ 、速度 $\dot{q}(t)$ 及加速度 $\ddot{q}(t)$ 的軌跡方程式，其分別表示如下：

表 3.3、梯形速度曲線的參數表

參數	說明
q_0 、 q_1	起始與終點位置(initial and final position)
t_0 、 t_1	起始與終點時間(initial and final time)
T_a	加速時間(acceleration time)
v_{\lim}	極限速度(limit velocity)
a_{\lim}	極限加速度(limit acceleration)， $a_{\lim} = v_{\lim}/T_a$

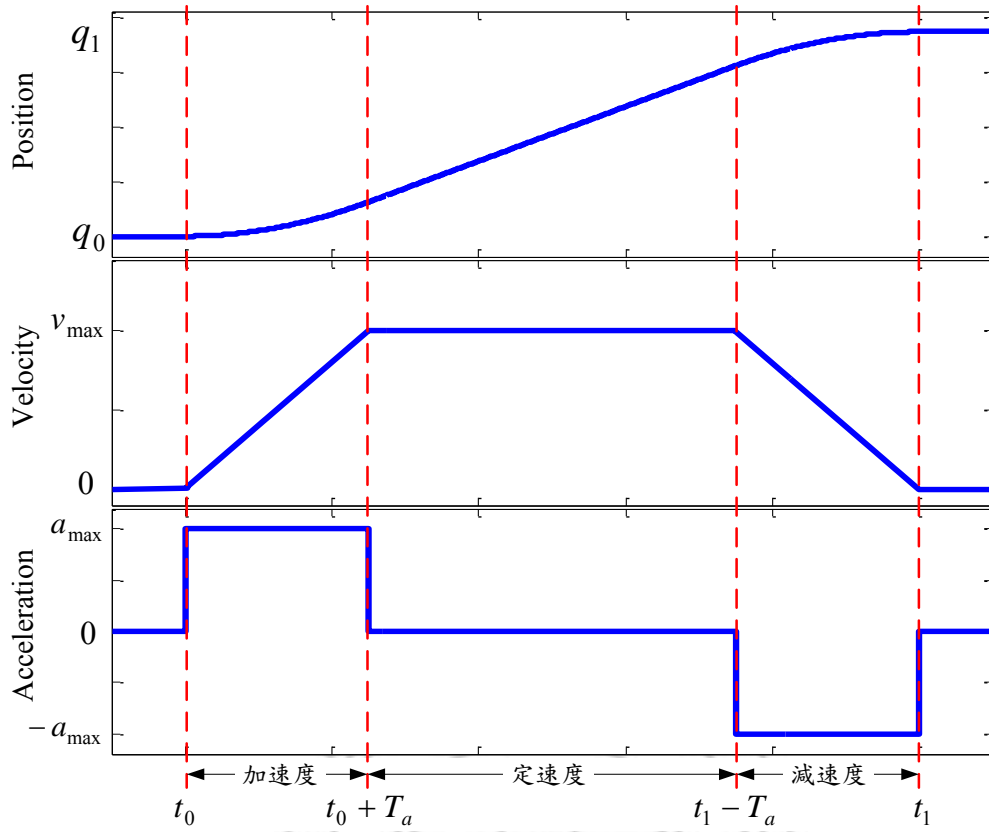


圖 3.11、梯形速度曲線的位置、速度及加速度示意圖

 加速區間： $t \in [t_0, T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + \frac{v_{\text{lim}}}{2T_a} (t - t_0)^2 \\ \dot{q}(t) = \frac{v_{\text{lim}}}{T_a} (t - t_0) \\ \ddot{q}(t) = \frac{v_{\text{lim}}}{T_a} \end{cases} \quad (3.33)$$

 等速區間： $t \in [t_0 + T_a, t_1 - T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_{\text{lim}}(t - t_0 - \frac{T_a}{2}) \\ \dot{q}(t) = v_{\text{lim}} \\ \ddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

減速區間： $t \in [t_1 - T_a, t_1]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - \frac{v_{\lim}}{2T_a} (t_1 - t)^2 \\ \dot{q}(t) = v_{\lim} - \frac{v_{\lim}}{T_a} (t - t_1 + T_a) \\ \ddot{q}(t) = -\frac{v_{\lim}}{T_a} \end{cases} \quad (3.35)$$

3.2.2 具有速度與加速度限制之梯形速度曲線

在基本梯形速度曲線的規劃中，是建立在 t_0 、 t_1 及 T_a 等時間參數已知的情況下，但是在一般馬達或機械手臂的控制系統中，並無法給定時間參數的命令，而且這些時間參數該如何給定亦是一個問題。若給定不當的時間參數，將造成馬達移動的時間過長或造成馬達轉動所需的加速度與速度超過可接受的範圍，因此為了避免上述的問題，本論文在使用梯形速度曲線規劃時，將會根據馬達或機械手臂的最大速度 v_{\max} 與最大加速度 a_{\max} 來計算適當的時間參數 t_1 與 T_a ，以下將詳細說明。為了方便後續的方程式推導，本論文先定義加速度與時間及速度的關係如下：

$$a = \frac{v}{T_a} \quad (3.36)$$

以及總移動量 $h = |q_1 - q_0|$ 與總移動時間 $T = t_1 - t_0$ 。除此之外，在梯形曲線規劃開始前，必須確認總移動時間滿足下列條件：

$$T \geq 2T_a \quad (3.37)$$

接著，在最大速度($v_{\lim} = v_{\max}$)及最大加速度($a_{\lim} = a_{\max}$)的限制下，由梯形面積等於總移動量的關係，可以得到下列關係式：

$$\frac{v_{\max}(T + T - 2T_a)}{2} = v_{\max}(T - T_a) = h \quad (3.38)$$

其中， T_a 可根據式(3.36)得到

$$T_a = \frac{v_{\max}}{a_{\max}} \quad (3.39)$$

再將式(3.38)移項整理，則總移動時間可表示如下

$$T = \frac{h}{v_{\max}} + T_a = \frac{ha_{\max} + v_{\max}^2}{a_{\max} v_{\max}} \quad (3.40)$$

此時，若發生 $T < 2T_a$ ，則表示總移動距離無法滿足加速所需的距離，其規劃的軌跡將如圖 3.12 所示。

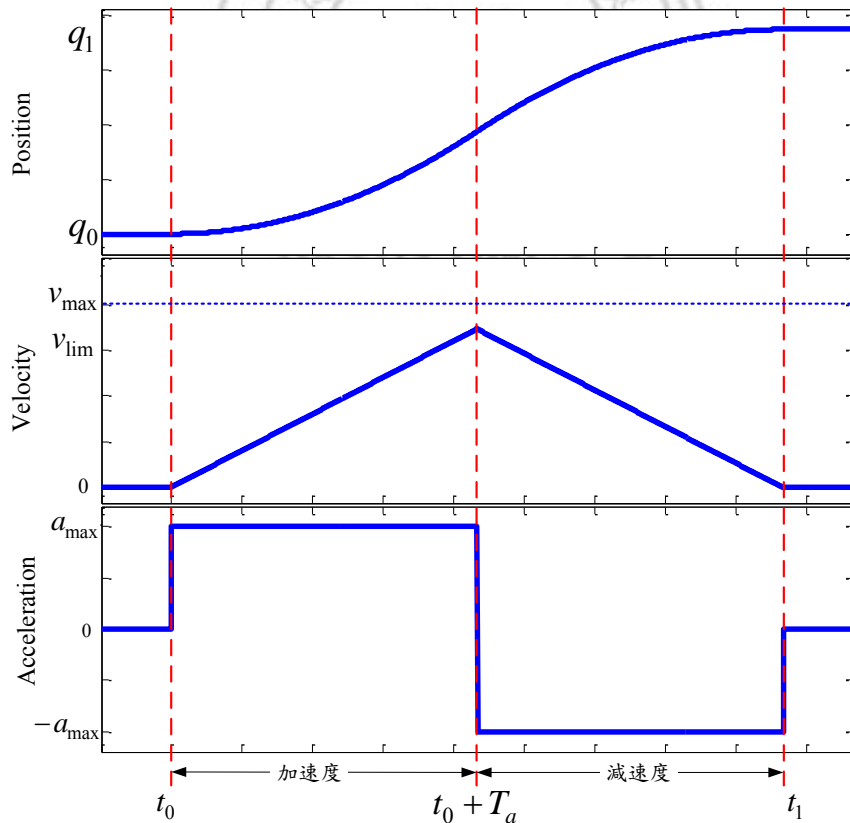


圖 3.12、未達最大速度之梯形速度曲線的位置、速度及加速度示意圖

然而，為了快速確認計算出來的 T 與 T_a 可以滿足式(3.36)可以將式(3.36)與式(3.38)稍做整理後得到新的條件，其表示如下：

$$h \geq \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} \quad (3.41)$$

所以，若滿足式(3.41)，則 T 與 T_a 可使用式(3.39)與式(3.40)的結果，否則總移動時間 T 將會等於兩倍的加速時間，其表示如下：

$$T = 2T_a \quad (3.42)$$

其中， T_a 可利用三角形面積公式與式(3.39)的關係得到：

$$T_a = \sqrt{\frac{h}{a_{\max}}} \quad (3.43)$$

而速度則因加速時間不夠而無法達到最大速度($v_{\lim} < v_{\max}$)，因此重新計算速度極限，其表示如下：

$$v_{\lim} = a_{\max} T_a = \sqrt{a_{\max} h} = \frac{h}{T_a} \leq v_{\max} \quad (3.44)$$

因此，根據上述計算的時間參數 T 與 T_a ，即可求得終點的時間 $t_1 = t_0 + T$ 。根據式(3.41)的不同，式(3.33)到式(3.35)的分別修改如下：

當條件式(3.41)成立時，梯形速度曲線可以表示如下：

加速區間： $t \in [t_0, T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + \frac{1}{2} a_{\max} (t - t_0)^2 \\ \dot{q}(t) = a_{\max} (t - t_0) \\ \ddot{q}(t) = a_{\max} \end{cases} \quad (3.45)$$

等速區間： $t \in [t_0 + T_a, t_1 - T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_{\max} \left(t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right) \\ \dot{q}(t) = v_{\max} \\ \ddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

減速區間： $t \in [t_1 - T_a, t_1]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - \frac{1}{2} a_{\max} (t_1 - t)^2 \\ \dot{q}(t) = v_{\max} - a_{\max} (t - t_1 + T_a) \\ \ddot{q}(t) = -a_{\max} \end{cases} \quad (3.47)$$

當條件式(3.41)不成立時，梯形速度曲線可以表示如下：

加速區間： $t \in [t_0, T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + \frac{1}{2} a_{\max} (t - t_0)^2 \\ \dot{q}(t) = a_{\max} (t - t_0) \\ \ddot{q}(t) = a_{\max} \end{cases} \quad (3.48)$$

減速區間： $t \in [t_1 - T_a, t_1]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - \frac{1}{2} a_{\max} (t_1 - t)^2 \\ \dot{q}(t) = v_{\lim} - a_{\max} (t - t_1 + T_a) \\ \ddot{q}(t) = -a_{\max} \end{cases} \quad (3.49)$$

3.2.3 具有啟動速度之梯形速度曲線

在連續的軌跡規劃的過程，經常需要串連許多路徑點(via-point)，而為了保持軌跡移動的連續性，在速度的規劃上將可能不會由靜止的狀況開始規劃，因此，在梯形速度曲線的規劃上，本論文將會應用到具有啟動與結束速度的梯形速度曲線，如圖 3.13 所示。然而，因為具有啟動與結束速度的緣故，梯形速度曲線將可能因移動距離過短而導致無法形成，因此計算時必須先確認曲線是否存在，其條件如下：

$$h \geq a_{\max} \frac{|v_0^2 - v_1^2|}{2} \quad (3.50)$$

其中 v_0 與 v_1 分別表示啟動與結束速度。若條件式(3.50)不成立，則表示移動距離過短，而無法產生對應的梯形速度曲線，反之，則曲線存在，並且同樣可將曲線分為兩種狀況：(1) 可到達最大速度以及(2) 無法到達最大速度，其條件表示如下：

$$ha_{\max} \geq v_{\max}^2 - \frac{v_0^2 + v_1^2}{2} \quad (3.51)$$

若條件式(3.51)成立，則表示距離足夠加速至最大速度，否則無法到達最大速度，因此本論文將分為兩種情形進行討論：

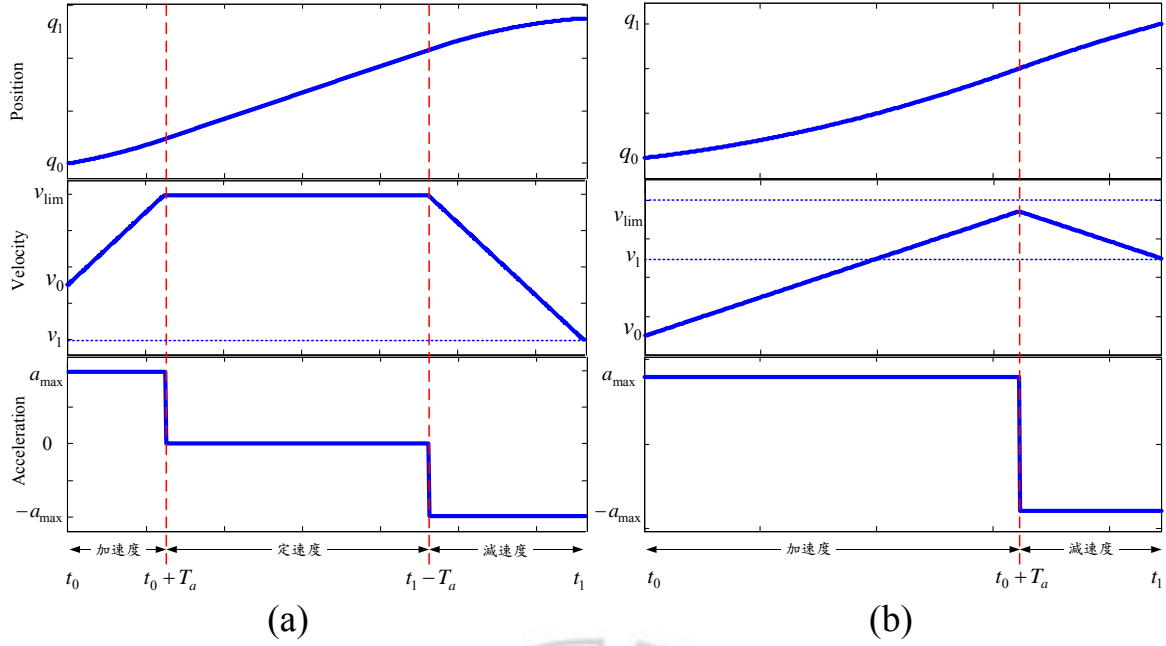


圖 3.13、具有啟動與結束速度的梯形速度曲線示意圖

(1) 可到達最大速度 $v_{\lim} = v_{\max}$

在速度可以到達最大速度的情況下，圖 3.13 (a) 所示，其包含完整的加速區間、定速區間及減速區間，因此加減速時間與總移動時間則可表示如下：

$$T_a = \frac{v_{\max} - v_0}{a_{\max}}, \quad T_d = \frac{v_{\max} - v_1}{a_{\max}}, \quad (3.52)$$

$$T = \frac{h}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{2a_{\max}} \left(1 - \frac{v_0}{v_{\max}}\right)^2 + \frac{v_{\max}}{2a_{\max}} \left(1 - \frac{v_1}{v_{\max}}\right)^2 \quad (3.53)$$

(2) 無法到達最大速度 $v_{\lim} < v_{\max}$

在速度無法到達最大速度的情況下，圖 3.13 (b) 所示，將不會有定速區間，只會有加速區間及減速區間。此外，因為距離不足而所能到達的極限速度可計算如下：

$$v_{\lim} = \sqrt{ha_{\max} + \frac{v_0^2 + v_1^2}{2}} \quad (3.54)$$

接著，根據極限速度，加減速時間與總移動時間則可表示如下：

$$T_a = \frac{v_{\lim} - v_0}{a_{\max}}, \quad T_d = \frac{v_{\lim} - v_1}{a_{\max}}, \quad (3.55)$$

$$T = T_a + T_d \quad (3.56)$$

最後，根據上述的移動時間計算，具有啟動與結束速度的梯形速度曲線其公式可以表示如下：

加速區間： $t \in [t_0, T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_0(t - t_0) + \frac{v_{\lim} - v_0}{2T_a}(t - t_0)^2 \\ \dot{q}(t) = v_0 + \frac{v_{\lim} - v_0}{T_a}(t - t_0) \\ \ddot{q}(t) = \frac{v_{\lim} - v_0}{T_a} = a_{\max} \end{cases} \quad (3.57)$$

等速區間： $t \in [t_0 + T_a, t_1 - T_d]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_0 \frac{T_a}{2} + v_{\lim}(t - t_0 - \frac{T_a}{2}) \\ \dot{q}(t) = v_{\lim} \\ \ddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

減速區間： $t \in [t_1 - T_d, t_1]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - v_1(t_1 - t) - \frac{v_{\lim} - v_1}{2T_d}(t_1 - t)^2 \\ \dot{q}(t) = v_1 + \frac{v_{\lim} - v_1}{T_d}(t_1 - t) \\ \ddot{q}(t) = -\frac{v_{\lim} - v_1}{T_d} = -a_{\max} \end{cases} \quad (3.59)$$

3.3 S 形速度曲線

本節將說明 S 形速度曲線的產生方式，由於前面章節已經介紹過梯形速度曲線，因此在本節將直接針對具有啟動與終點速度的 S 形曲線曲線進行說明，主要將分為兩個部分：(1) 具啟動與終點速度的 S 形速度曲線之介紹以及(2) 具有速度、加速度與急衝度限制的 S 形速度曲線之時間參數計算介紹，以下將詳細說明：

3.3.1 具啟動與終點速度的 S 形速度曲線

S 形速度曲線主要改善梯形速度曲線在加速度上不連續的問題 [48][49]，在梯形速度曲線的基礎下，加入急衝度(jerk)的條件，使規劃的軌跡在速度與加速度上都可以保持連續，而具連續性的加速度可以使軌跡更加平順，其規劃出來的位置、速度、加速度與急衝度軌跡如圖 3.14 所示。一般而言，S 形速度曲線與梯形速度曲線一樣有三個主要的區間 (1) 加速區間、(2) 等速區間、及(3) 減速區間，但因為 S 形速度曲線在規劃中加入了急衝度的條件，而急衝度是一個常數的步階命令(step profile)，急衝度與加速度的關係可以表示如下：

$$j = \frac{a}{T_j} \quad (3.60)$$

其中 a 與 j 分別表示期望的加速度與急衝度，而 T_j 則是急衝度的時間，因此在加速區間與減速區間中，速度、加速度與急衝度的關係就如同梯形速度曲線一般，可分為加加速度、等加速度與減加速度三個區間，所以整段 S 形速度曲線共可以分為七個區間，也因此 S 形速度曲線亦可稱作七段式曲線(seven segment trajectory) [50]，在通用的 S 形速度曲線規劃中，所需要使用的參數如表 3.4 所示。

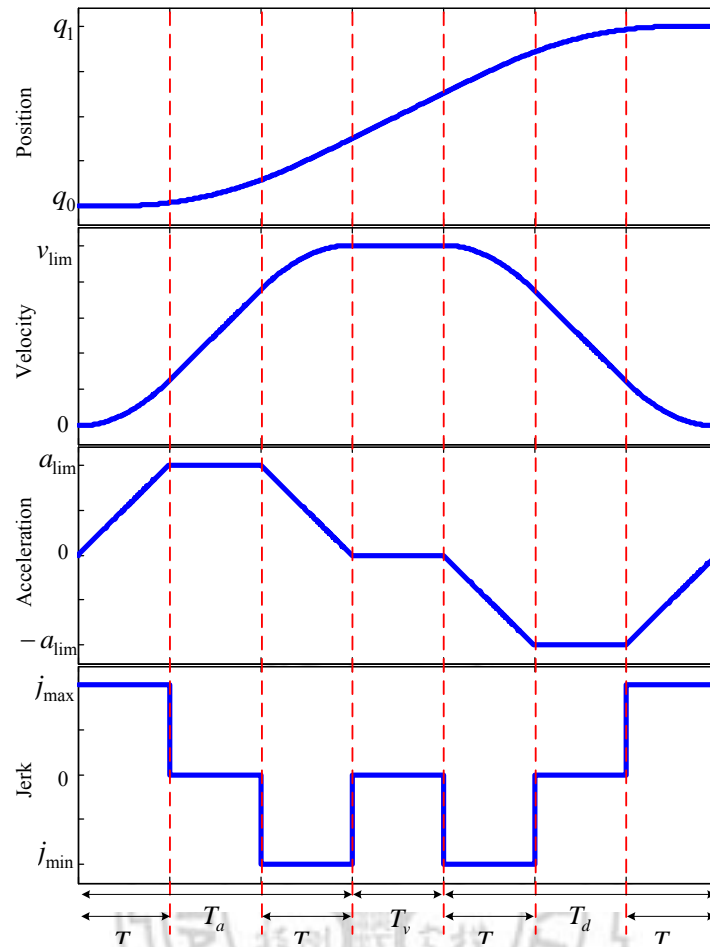


圖 3.14、具啟動與終點速度的 S 形速度曲線示意圖

表 3.4、具啟動與終點速度的 S 形速度曲線的參數表

參數	說明
q_0 、 q_1	起始與終點位置(initial and final position)
v_0 、 v_1	起始與終點速度(initial and final velocity)
t_0 、 t_1	起始與終點時間(initial and final time)
T_{j1} 、 T_{j2}	加速與減速區間中的急衝度區間(jerk period)
T_a	加速區間(acceleration period)
T_v	等速區間(constant velocity period)
T_d	減速區間(acceleration period)
T	總移動時間(total period) $T = T_a + T_v + T_d$
v_{lim} 、 v_{max}	極限速度(limit velocity)、最大速度(maximum velocity)
a_{lim} 、 a_{max}	極限加速度(limit acceleration)、 最大加速度(maximum acceleration)
j_{max}	最大急衝度(maximum jerk)

因此，根據 S 形速度曲線的定義，其曲線方程式可表示如下：

加速區間 1： $t \in [t_0, T_{j1}]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_0 t + \frac{1}{6} j_{\max} t^3 \\ \dot{q}(t) = v_0 + \frac{1}{2} j_{\max} t^2 \\ \ddot{q}(t) = j_{\max} t \\ \dddot{q}(t) = j_{\max} \end{cases} \quad (3.61)$$

加速區間 2： $t \in [T_{j1}, T_a - T_{j1}]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + v_0 t + \frac{1}{6} a_{\lim} (3t^2 - 3T_{j1}t + T_{j1}^3) \\ \dot{q}(t) = v_0 + a_{\lim} (t - \frac{1}{2} T_{j1}) \\ \ddot{q}(t) = j_{\max} T_{j1} = a_{\lim} \\ \dddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

加速區間 3： $t \in [T_a - T_{j1}, T_a]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + \frac{1}{2} (v_{\lim} + v_0) T_a - v_{\lim} (T_a - t) - \frac{1}{6} j_{\min} (T_a - t)^3 \\ \dot{q}(t) = v_{\lim} + \frac{1}{2} j_{\min} (T_a - t)^2 \\ \ddot{q}(t) = j_{\min} (T_a - t) \\ \dddot{q}(t) = j_{\min} = -j_{\max} \end{cases} \quad (3.63)$$

等速區間： $t \in [T_a, T_a + T_v]$

$$\begin{cases} q(t) = q_0 + \frac{1}{2} (v_{\lim} + v_0) T_a + v_{\lim} (t - T_a) \\ \dot{q}(t) = v_{\lim} \\ \ddot{q}(t) = 0 \\ \dddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

減速區間 1 : $t \in [T - T_d, T - T_d + T_{j2}]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - \frac{1}{2}(v_{\text{lim}} + v_1)T_d + v_{\text{lim}}(t - T + T_d) - \frac{1}{6}j_{\text{max}}(t - T + T_d)^3 \\ \dot{q}(t) = v_{\text{lim}} - \frac{1}{2}j_{\text{max}}(t - T + T_d)^2 \\ \ddot{q}(t) = -j_{\text{max}}(t - T + T_d) \\ \ddot{q}(t) = j_{\text{min}} = -j_{\text{max}} \end{cases} \quad (3.65)$$

減速區間 2 : $t \in [T - T_d + T_{j2}, T - T_{j2}]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 - \frac{1}{2}(v_{\text{lim}} + v_1)T_d + v_{\text{lim}}(t - T + T_d) \\ \quad + \frac{1}{6}a_{\text{lim}}(3(t - T + T_d)^2 - 3T_{j2}(t - T + T_d) + T_{j2}^2) \\ \dot{q}(t) = v_{\text{lim}} + a_{\text{lim}}(t - T + T_d - \frac{1}{2}T_{j2}) \\ \ddot{q}(t) = -j_{\text{max}}T_{j2} = a_{\text{lim}} \\ \ddot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

減速區間 3 : $t \in [T - T_{j2}, T]$

$$\begin{cases} q(t) = q_1 + v_0(T - t) - \frac{1}{6}j_{\text{max}}(T - t)^3 \\ \dot{q}(t) = v_1 - \frac{1}{2}j_{\text{max}}(T - t)^2 \\ \ddot{q}(t) = -j_{\text{max}}(T - t) \\ \ddot{q}(t) = j_{\text{max}} \end{cases} \quad (3.67)$$

3.3.2 具有速度條件限制的 S 形速度曲線之時間參數計算

在具有速度條件限制的 S 形速度曲線規劃上，如同梯形速度曲線一般，必須根據輸入的速度條件限制(速度、加速度及急衝度)來產生適當的時間參數，而 S 形速度曲線又比梯形速度曲線更為複雜，除了可能發生最大速度無法到達的狀況之外，還要考慮最大加速度無法到達的狀況。因此在本論文中，計算 S 形速度曲線的判斷流程將如圖 3.15 所示，主要會分為四個狀況，(1) 軌跡形成判斷條件、(2) 最大速度可到達、(3) 最大速度無法到達但最大加速度可到達、及(4) 最大速度與最大加速度都無法到達，以下將詳細說明。

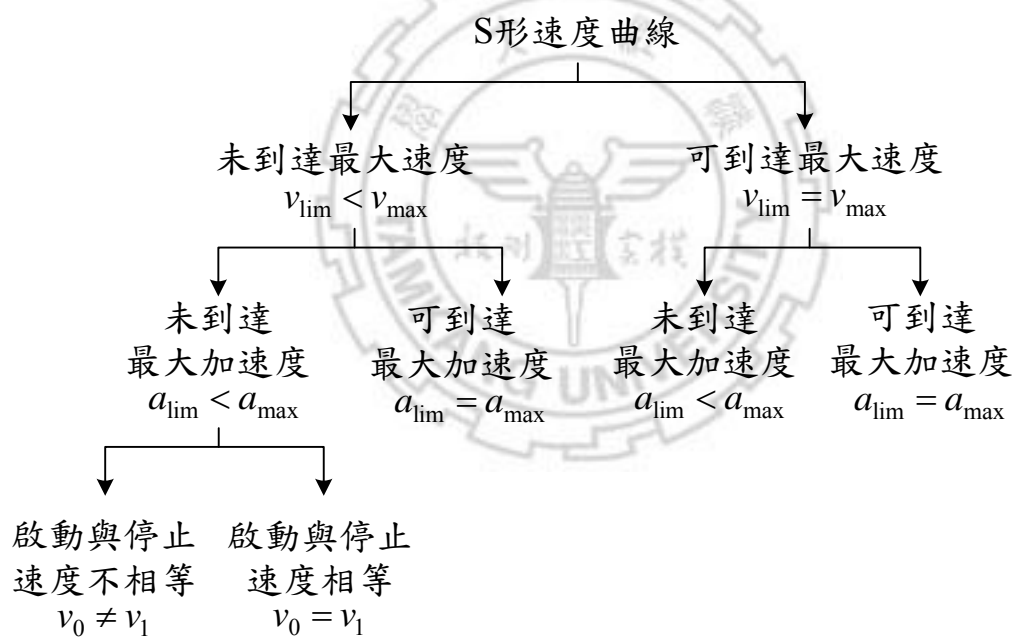


圖 3.15、S 型速度曲線規劃流程

(1) 軌跡形成判斷條件

在具有起始與終點速度的 S 形速度曲線中，若起始速度與終點速度不一致，就有可能發生移動距離不足以形成速度曲線的問題，因此，在輸入總移動距離與速度條件之後，若給定的起始速度與終點速度不一致，

則必須確認總移動距離是否足夠由起始速度改變到終點速度所需要的最短移動距離。因此，首先將根據速度變化比較所需較小的急衝度時間：

$$T_j^* = \min \left\{ \sqrt{\frac{|v_1 - v_0|}{j_{\max}}}, \frac{a_{\max}}{j_{\max}} \right\} \quad (3.68)$$

若 $T_j^* = a_{\max} / j_{\max}$ 則表示起始與終點速度的變化量足夠加速度到達最大值，反之則無法。接著，根據式(3.60)及 T_j^* 的比較結果，判斷總移動距離是否足夠由起始速度改變至終點速度，其判斷式可表示如下：

$$h > \begin{cases} T_j^*(v_0 + v_1), & \text{if } T_j^* < \frac{a_{\max}}{j_{\max}} \\ \frac{1}{2}(v_0 + v_1) \left[T_j^* + \frac{|v_1 - v_0|}{a_{\max}} \right], & \text{if } T_j^* = \frac{a_{\max}}{j_{\max}} \end{cases} \quad (3.69)$$

若條件式(3.69)不成立，則表示此距離不足形成 S 形速度曲線，反之，則表示總移動距離足夠由起始速度改變到終點速度，接下來可以根據狀況一到狀況三計算適當的時間參數。

(2) 狀況一： $v_{\lim} = v_{\max}$

假設可到達最大速度的情況下，其加速區間或減速區間能否到達最大加速度的條件判斷式可表示如下：

$$(v_{\max} - v_0)j_{\max} \geq a_{\max}^2 \quad (3.70)$$

$$(v_{\max} - v_1)j_{\max} \geq a_{\max}^2 \quad (3.71)$$

其中條件式(3.70)與式(3.71)分別表示加速區間與減速區間的狀況，若條件式(3.70)成立，則表示在加速區間可到達加速度的最大值，而條件式(3.71)成立，則表示減速區間可到達加速度的最大值，反之則無法。所以

根據條件式(3.70)與式(3.71)的判斷，加速區間與減速區間的時間計算方式也有所不同，其分別表示如下：

在加速區間中，若條件式(3.70)成立，則

$$T_a = \frac{|v_{\text{lim}} - v_0|}{a_{\text{max}}} + T_{j1}, \quad T_{j1} = \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \quad (3.72)$$

在加速區間中，若條件式(3.70)不成立，則

$$T_a = 2T_{j1}, \quad T_{j1} = \sqrt{\frac{|v_{\text{lim}} - v_0|}{j_{\text{max}}}} \quad (3.73)$$

在減速區間中，若條件式(3.71)成立，則

$$T_d = \frac{|v_{\text{lim}} - v_1|}{a_{\text{max}}} + T_{j2}, \quad T_{j2} = \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \quad (3.74)$$

在減速區間中，若條件式(3.71)不成立，則

$$T_d = 2T_{j2}, \quad T_{j2} = \sqrt{\frac{|v_{\text{lim}} - v_1|}{j_{\text{max}}}} \quad (3.75)$$

最後，在最大速度可到達的情況下，將會存在等速區間，而等速區間的時間計算方式可表示如下：

$$T_v = \frac{h}{v_{\text{lim}}} - \frac{T_a}{2} \left(1 + \frac{v_0}{v_{\text{lim}}}\right) - \frac{T_d}{2} \left(1 + \frac{v_1}{v_{\text{lim}}}\right) \quad (3.76)$$

然而，若計算出來的 $T_v < 0$ 則表示等速區間不存在，且速度無法到達最大速度，必須採用最大速度無法到達的其他狀況來計算；反之，則表示等速區間存在，並且可到達最大速度，可以透過式(3.72)到式(3.76)計算的時間參數執行 S 形速度曲線。

(3) 狀況二： $v_{\lim} < v_{\max}$ 、 $a_{\lim} = a_{\max}$

假設最大速度無法到達但最大加速度可到達的狀況下，急衝度區間的時間可以假設如下：

$$T_{j1} = T_{j2} = T_j = \frac{a_{\max}}{j_{\max}} \quad (3.77)$$

而因為最大速度無法到達，加速與減速區間的時間無法利用起始與終點速度到達最大速度的變化量取得，因此，必須改從總移動距離與速度及時間的關係得到可到達的速度極限，其關係式可表示如下：

$$h = (v_{\lim} + v_0) \frac{T_a}{2} + (v_{\lim} + v_1) \frac{T_d}{2} \quad (3.78)$$

其中 T_a 與 T_d 可使用式(3.72)與式(3.74)代入。經過移項整理後，可以得到速度極限的方程式如下：

$$v_{\lim}^2 + \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}} v_{\lim} - a_{\max} h - \frac{1}{2} (v_0^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}} (v_0 + v_1) = 0 \quad (3.79)$$

最後，求解一元二次方程式後，正實數根即為速度極限 v_{\lim} ，再代回式(3.72)與式(3.74)後即可得到：

$$T_a = \frac{\frac{a_{\max}^2}{j_{\max}} - 2v_0 + \sqrt{\Delta}}{2a_{\max}} \quad (3.80)$$

$$T_b = \frac{\frac{a_{\max}^2}{j_{\max}} - 2v_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_{\max}} \quad (3.81)$$

其中

$$\Delta = \frac{a_{\max}^4}{j_{\max}^2} + 4a_{\max} h + 2(v_0^2 + v_1^2) - 2 \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}} (v_0 + v_1) \quad (3.82)$$

然而，若得到的 $T_a < 2T_j$ 或 $T_d < 2T_j$ 表示在加速區間或減速區間有至少一個區間無法達到最大加速度，必須採用狀況三的方式來計算；反之，則表示加速與減速區間都到達最大加速度，可以透過式(3.80)到式(3.82)計算的時間參數執行 S 形速度曲線。

(4) 狀況三： $v_{\lim} < v_{\max}$ 、 $a_{\lim} < a_{\max}$

假設在最大速度與最大加速度都無法達到的狀況下，問題將會較於複雜，在文獻[48][50]會直接採用二元搜尋法(binary search method)來尋找適當的極限速度 v_{\lim} ，而本論文則會先根據起始與終點速度是否相同來分別處理，因為在起始與終點速度相同的情況下，問題可以先被簡化，再透過求解一元三次方程式的根即可得到極限速度 v_{\lim} ，因此，在狀況三的處理上，將會再分為兩個部分：(a) 起始與終點速度相同以及(b) 起始與終點速度不相同，其分別敘述如下：

(a) 起始與終點速度相同

在起始與終點速度相同的情況下，將採用狀況二的處理方式，根據總移動距離與速度及時間的關係，式(3.77)可重新修改如下：

$$h = (v_{\lim} + v_0)T_a \quad (3.83)$$

其中，因為 $v_0 = v_1$ ，所以式(3.83)中的 v_0 也可代換成 v_1 。此時的 T_a 將代入式(3.73)的情況，經過移項整理後可以得到：

$$v_{\lim}^3 + v_0 v_{\lim}^2 - v_0^2 v_{\lim} - v_0^3 - \frac{j_{\max} h^2}{4} = 0 \quad (3.84)$$

最後，求解一元三次方程式，而正實數根即為 v_{\lim} ，同樣代回式(3.72)到式(3.76)後即可得到 T_{j1} 、 T_{j2} 、 T_a 與 T_d 。

(b) 起始與終點速度不相同

在起始與終點速度不相同的情況下，因為可以確定在搜尋範圍內只會有一個極限速度的最佳解，因此將採用黃金比例搜尋的方式(golden section search)[51]來尋找最佳的極限速度，其搜尋函數將定義如下：

$$v_{\lim} = \arg \min_{v \in [v_{\min}, v_{\max}]} f(v) \quad (3.85)$$

其中 v 是搜尋的速度值， v_{\min} 與 v_{\max} 是搜尋的範圍， v_{\min} 可表示如下：

$$v_{\min} = \begin{cases} v_0 & \text{if } v_0 > v_1 \\ v_1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.86)$$

而 $f(v)$ 則是根據總移動距離與速度定義的成本函數(cost function)，其可定義如下：

$$f(v) = h - \frac{v + v_0}{2} T_a - \frac{v + v_1}{2} T_d \quad (3.87)$$

其中的 T_a 與 T_d 使用先節章節所提的式(3.72)到式(3.75)來計算，圖 3.16 則是利用 $h=10$ 、 $a_{\max}=10$ 、 $j_{\max}=30$ 、 $v_0=0$ 、 $v_1=7$ 以及 $v_{\max}=10$ 所繪製成本函數示意圖，在誤差最小的地方則是最佳的極限速度。

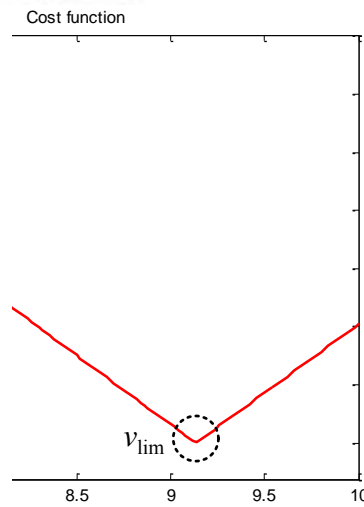


圖 3.16、成本函數的速度與誤差示意圖

3.4 參數式自由曲線

本節主要說明三種常被應用於軌跡規劃的參數式自由曲線：(1) Bezier 曲線、(2) B-Spline 曲線、及(3) NURBS 曲線，其中 Bezier 曲線是最早被提出來的，透過控制點的方式解決 Cubic 多項式曲線輪廓較無法預測的問題；B-Spline 曲線則解決 Bezier 曲線在提高曲線次數時必須增加控制點的問題，並且降低單一控制點對整條曲線的影響；NURBS 曲線則是透過節點權重的方式讓曲線更具有可控制性，且可以達到最佳的連續性。整體而言，Bezier 曲線屬於 B-Spline 曲線的一個特例，而 B-Spline 曲線又是 NURBS 曲線的一個特例，其三者的關係如圖 3.17 所示，以下將詳細說明。

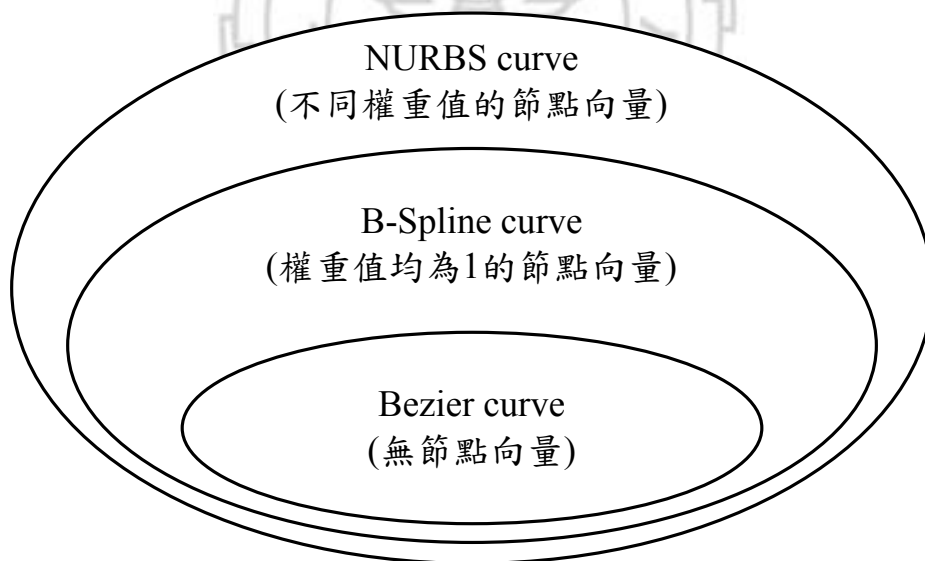


圖 3.17、Bezier 曲線、B-Spline 曲線、與 NURBS 曲線之關係圖

3.4.1 Bezier 曲線

Bezier 曲線是以參數式多項式曲線所定義的曲線，可利用 $n+1$ 個控制點(control point)產生的控制多邊形(control polygon)來描述一條 n 次多項式曲線(n -degree polynomial curve)，多邊形的頂點即為控制點，且產生的曲線僅會經過頭尾兩端的控制點，圖 3.18 為各次 Bezier 曲線的示意圖。因此，一條 n 次 Bezier 曲線可定義如下：

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{j=0}^n B_j^n(u) \cdot \mathbf{p}_j, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.88)$$

其中 \mathbf{p}_j 為 Bezier 曲線的控制點， $\{B_j^n(u)\}$ 為 Bezier 曲線的基底函數(basis function)，共有 $n+1$ 個，其可表示如下：

$$B_j^n(u) = \binom{n}{j} \cdot u^j \cdot (1-u)^{n-j} \quad (3.89)$$

其中

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (3.90)$$

由式(3.89)可以看出 $B_j^n(u)$ 也可稱為 n 次 Bernstein 多項式[52]，因此當增加控制點的數目時，則強迫提升 Bezier 曲線的次數，同時將增加 Bernstein 多項式計算的複雜度，此為 Bezier 曲線的一大缺點。另一方面，同樣由式(3.89)可以發現，Bezier 曲線上的每一個控制點都對整段曲線具有影響力，這表示改變任何一個控制點的位置都會造成 Bezier 曲線整體的變化，使得 Bezier 曲線的局部控制(local control)能力較差，此為 Bezier 另一個缺點。

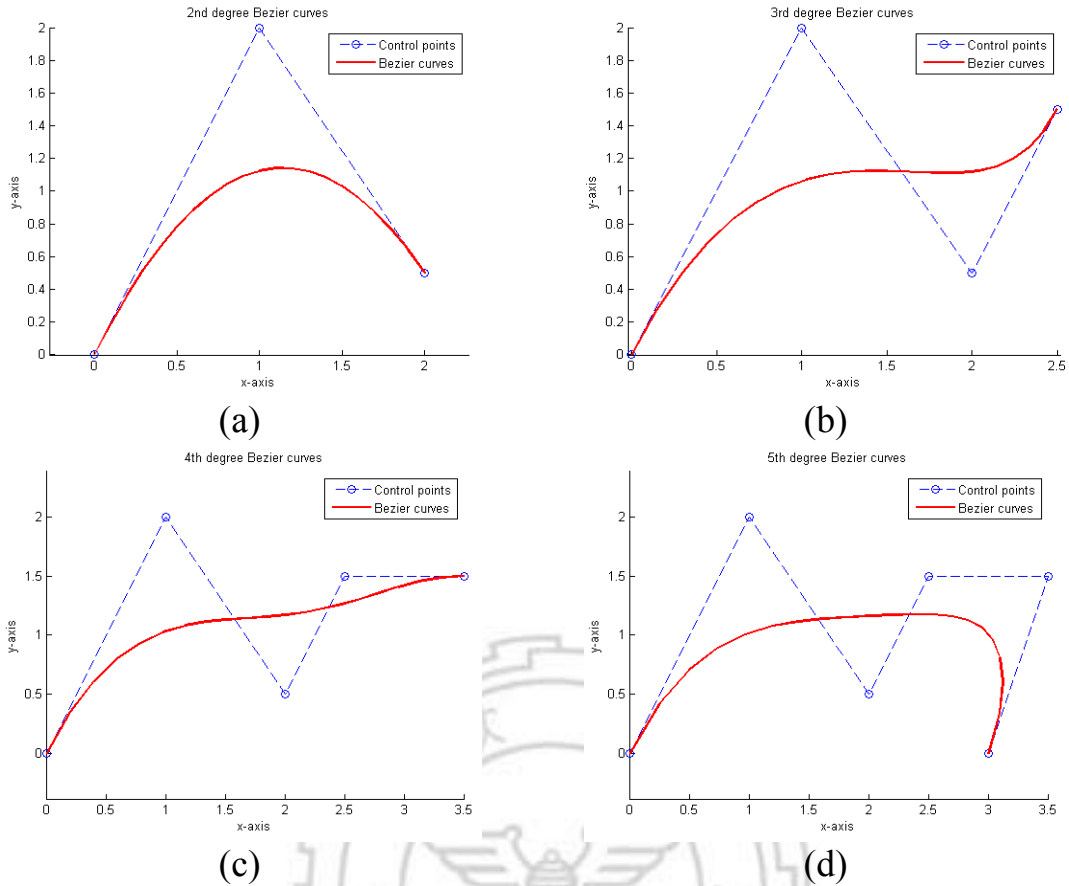


圖 3.18、 $n+1$ 個控制點之 n 次 Bezier 曲線示意圖：(a) $n=2$, (b) $n=3$, (c) $n=4$, 及 (d) $n=5$ 。

總結來說，當曲線的變化或長度需要使用 6 個以上的控制點來描述時，本論文將會採用後面章節所介紹的 B-Spline 曲線或 NURBS 曲線，避免 Bezier 曲線在上述提到的兩個缺點。最後，在五次以下的 Bezier 曲線，可根據文獻[50]所提出的方式提升 Bezier 曲線的計算效率，其可表示如下：

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \cdot u^i \quad (3.91)$$

其中係數 \mathbf{a}_i 在次數為 3、4 與 5 時，可分別表示如下：

$$\text{for } n=3 \begin{cases} a_0 = \mathbf{p}_0 \\ a_1 = -3\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 \\ a_2 = 3\mathbf{p}_0 - 6\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2 \\ a_3 = -\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \end{cases} \quad (3.92)$$

$$\text{for } n=4 \begin{cases} a_0 = \mathbf{p}_0 \\ a_1 = -4\mathbf{p}_0 + 4\mathbf{p}_1 \\ a_2 = 6\mathbf{p}_0 - 12\mathbf{p}_1 + 6\mathbf{p}_2 \\ a_3 = -4\mathbf{p}_0 + 12\mathbf{p}_1 - 12\mathbf{p}_2 + 4\mathbf{p}_3 \\ a_4 = \mathbf{p}_0 - 4\mathbf{p}_1 + 6\mathbf{p}_2 - 4\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \end{cases} \quad (3.93)$$

$$\text{for } n=5 \begin{cases} a_0 = \mathbf{p}_0 \\ a_1 = -5\mathbf{p}_0 + 5\mathbf{p}_1 \\ a_2 = 10\mathbf{p}_0 - 20\mathbf{p}_1 + 10\mathbf{p}_2 \\ a_3 = -10\mathbf{p}_0 + 30\mathbf{p}_1 - 30\mathbf{p}_2 + 10\mathbf{p}_3 \\ a_4 = 5\mathbf{p}_0 - 20\mathbf{p}_1 + 30\mathbf{p}_2 - 20\mathbf{p}_3 + 5\mathbf{p}_4 \\ a_5 = -\mathbf{p}_0 + 5\mathbf{p}_1 - 10\mathbf{p}_2 + 10\mathbf{p}_3 - 5\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 \end{cases} \quad (3.94)$$

3.4.2 B-Spline 曲線

B-Spline 曲線保留了 Bezier 曲線的優點，也克服了 Bezier 曲線的兩大缺點[53][54]，其一為 B-Spline 曲線採用不同的基底函數，使 B-Spline 曲線可以在不增加曲線次數的情況下增加曲線的控制點；其二為 B-Spline 曲線加入節點向量(knot vector)，使 B-Spline 曲線具有較佳的局部控制能力。因此，一條 p 次 B-Spline 曲線可以定義如下：

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^n N_j^p(u) \mathbf{p}_j, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.95)$$

其中 \mathbf{p}_j 為 B-Spline 曲線的第 j 個控制點，共有 $n+1$ 個控制點，而 $\{N_j^p(u)\}$ 是利用節點向量所定義的 p 次 B-Spline 基底函數，其可表示如下：

$$N_j^0(u) = \begin{cases} 1, & \text{if } u_j \leq u < u_{j+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.96)$$

$$N_j^p(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+p} - u_j} N_j^{p-1}(u) + \frac{u_{j+p+1} - u}{u_{j+p+1} - u_{j+1}} N_{j+1}^{p-1}(u), \quad p > 0, \quad (3.97)$$

$$\text{define: } \frac{0}{0} = 0$$

其中 $N_j^0(u)$ 是一個步階函數，在 $u \in [u_j, u_{j+1})$ 之間為 1，範圍外皆為 0，而 $N_j^p(u)$ 則是基於步階函數的遞迴式基底函數，且根據不同的節點向量而改變，根據文獻[55]節點向量可以定義如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u_0, \dots, u_{n_{knot}}\} \\ &= \underbrace{\{u_{\min}, \dots, u_{\min}\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_n, \underbrace{\{u_{\max}, \dots, u_{\max}\}}_{p+1} \end{aligned} \quad (3.98)$$

其中 $n_{knot} = n + p + 1$ ， u_{\min} 與 u_{\max} 為節點向量的最大與最小元素(亦稱為節點(knot))，會在節點向量的起始與結束兩端各重複 $p+1$ 次，而中間的節點皆滿足 $u_j \leq u_{j+1}$ ，所以，若 u_{\min} 與 u_{\max} 之間的節點呈等距分佈，則稱為均勻節點向量(uniform knot vector)[56]，如圖 3.19 到圖 3.23 所示：

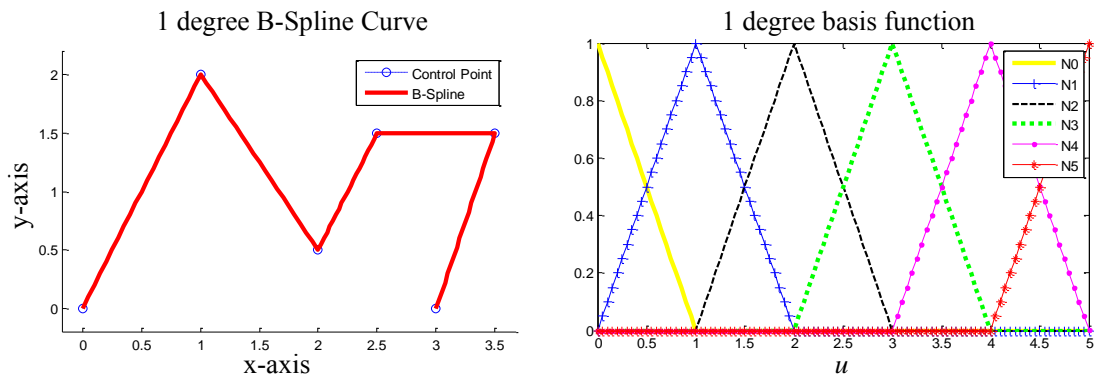


圖 3.19、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $u=\{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\}$ 之 1 次 ($p=1$) B-Spline 曲線

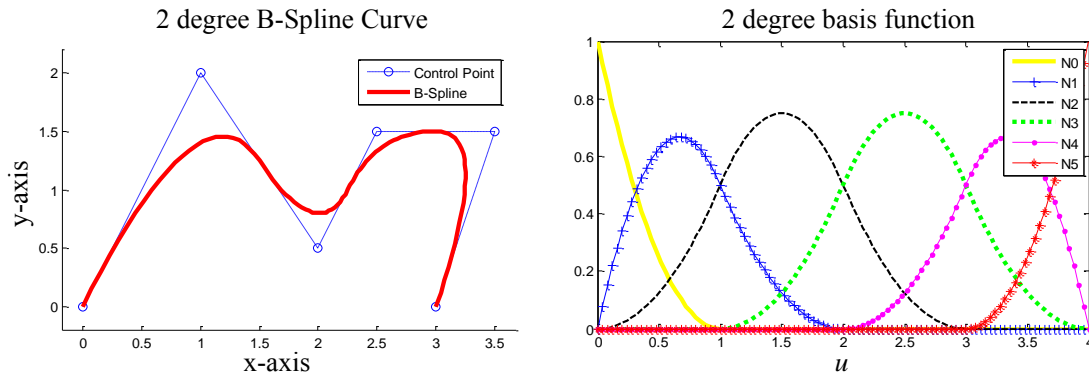


圖 3.20、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}$ 之 2 次($p=2$) B-Spline 曲線

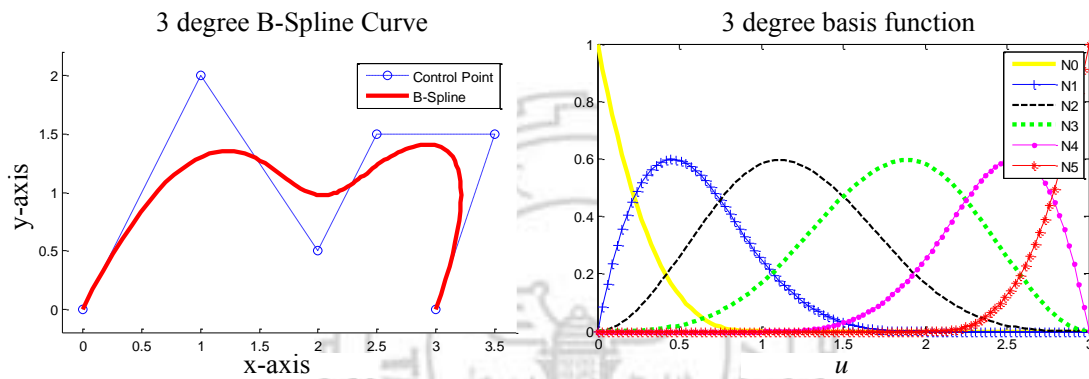


圖 3.21、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$ 之 3 次($p=3$) B-Spline 曲線

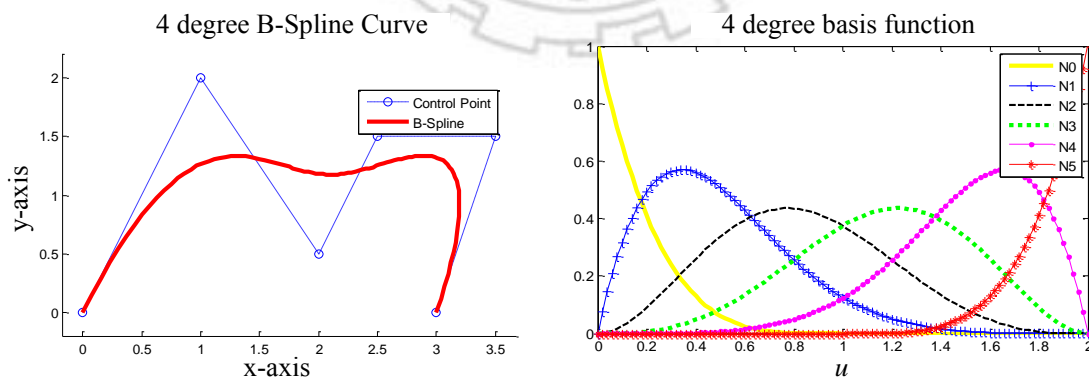


圖 3.22、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2\}$ 之 4 次($p=4$) B-Spline 曲線

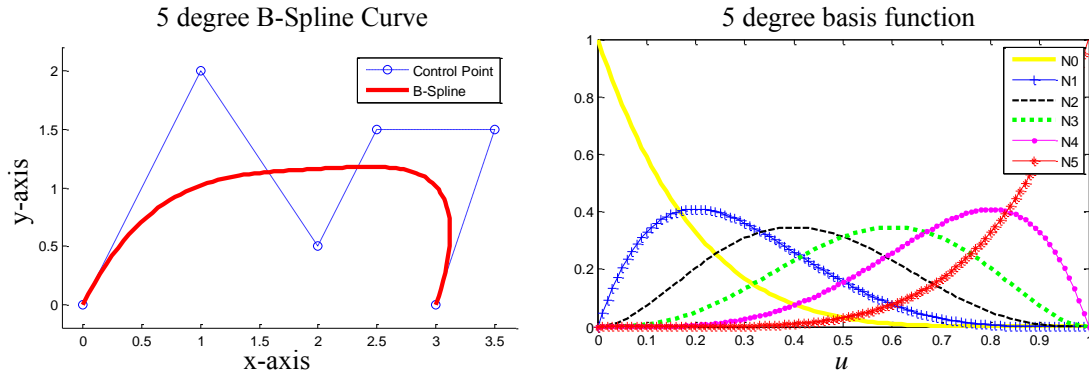


圖 3.23、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ 之 5 次($p=5$)B-Spline 曲線

其中，圖 3.19 到圖 3.23 皆使用與圖 3.18 (d)相同的控制點，而由結果可以看出，B-Spline 曲線確實可以在不改變控制點數量的情況下調整曲線的次數。然而，若 u_{\min} 與 u_{\max} 之間的節點不是等距分佈或者有重複，則稱為非均勻節點向量(non-uniform knot vector)，如圖 3.24 與圖 3.25 所示，圖中使用相同的控制點與 2 次 B-Spline 曲線，但藉由改變節點向量即可達到曲線局部的改變，本論文在軌跡規劃的實現上會採用非均勻節點向量，以便滿足軌跡插補的需求。最後，B-Spline 曲線在實際計算上，根據曲線的次數，只會有 $p+1$ 個基底函數為非 0 值。根據文獻[55]，B-Spline 曲線可以將式(3.95)改寫為下列形式：

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^p N_{i-p+j}^p(u) \mathbf{p}_{i-p+j} \quad (3.99)$$

其中 i 是依據輸入的參數 u 所在的節點向量區間。

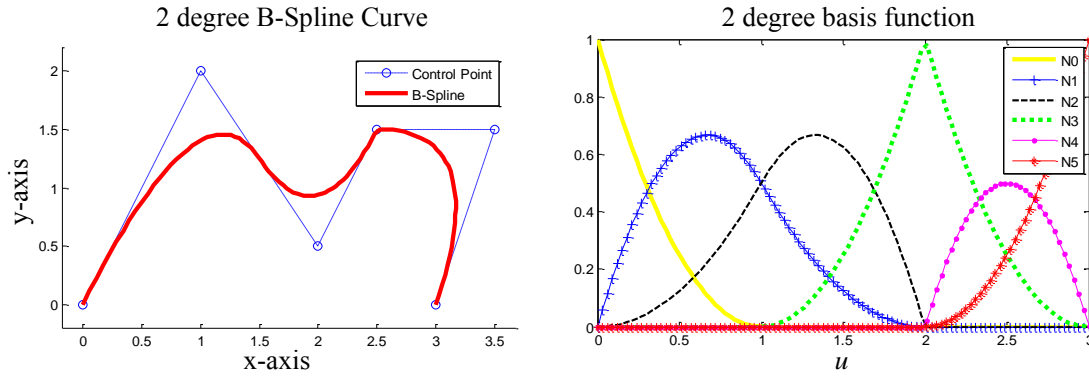


圖 3.24、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ 之 2 次($p=2$)B-Spline 曲線

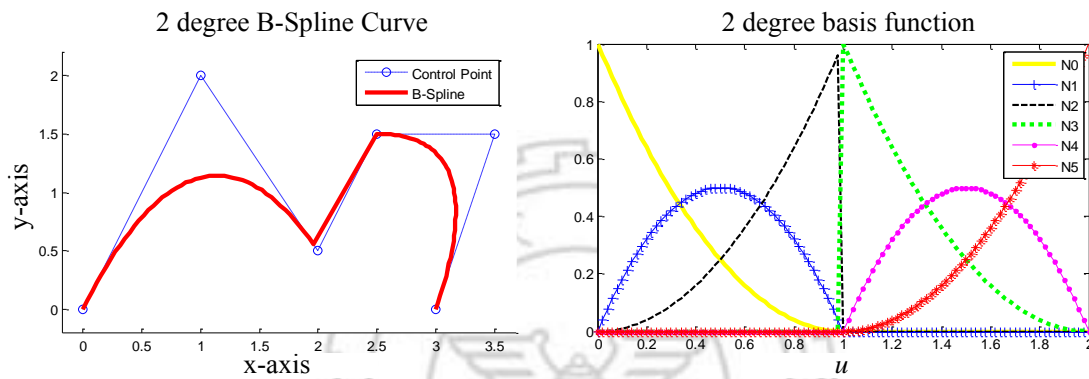


圖 3.25、 $n+1$ 個($n=5$)控制點與節點向量為 $\mathbf{u}=\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ 之 2 次($p=2$)B-Spline 曲線

3.4.3 NURBS 曲線

非均勻有理 B-Spline 曲線(Non-Uniform Rational B-Spline, NURBS)，是由有理多項式(rational polynomial)與 B-Spline 曲線的基礎所發展出來的，同樣具有控制點與節點向量，並且加入了控制點的權重值，使 NURBS 曲線相較 B-Spline 曲線與 Bezier 曲線更具有控制性，也更能夠精確的描述各種曲線或曲面[57]，圖 3.26 為透過各種權重控制曲線的示意圖。一般 NURBS 曲線的定義可以表示如下：

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\sum_{j=0}^n N_j^p(u) w_j \mathbf{p}_j}{\sum_{j=0}^n N_j^p(u) w_j} = \sum_{j=0}^n R_j^p(u) \mathbf{p}_j, \quad (3.100)$$

其中 $N_j^p(u)$ 與 \mathbf{p}_j 分別是跟 B-Spline 曲線一樣的基底函數與控制點， w_j 為控制點的權重值(weight)， $R_j^p(u)$ 則是將基底函數與控制點的權重值整理後得到的有理基底函數(rational basis function)，其可表示如下：

$$R_j^p(u) = \frac{N_j^p(u)w_j}{\sum_{j=0}^n N_j^p(u)w_j}, \quad (3.101)$$

而當 $R_j^p(u)$ 的權重值 w_j 為 1 時，則 NURBS 曲線會變回一般的 B-Spline 曲線，如圖 3.26 (a)所示，當權重值為 1 時，其曲線就如同圖 3.21 一樣，是一般的 3 次 B-Spline 曲線。

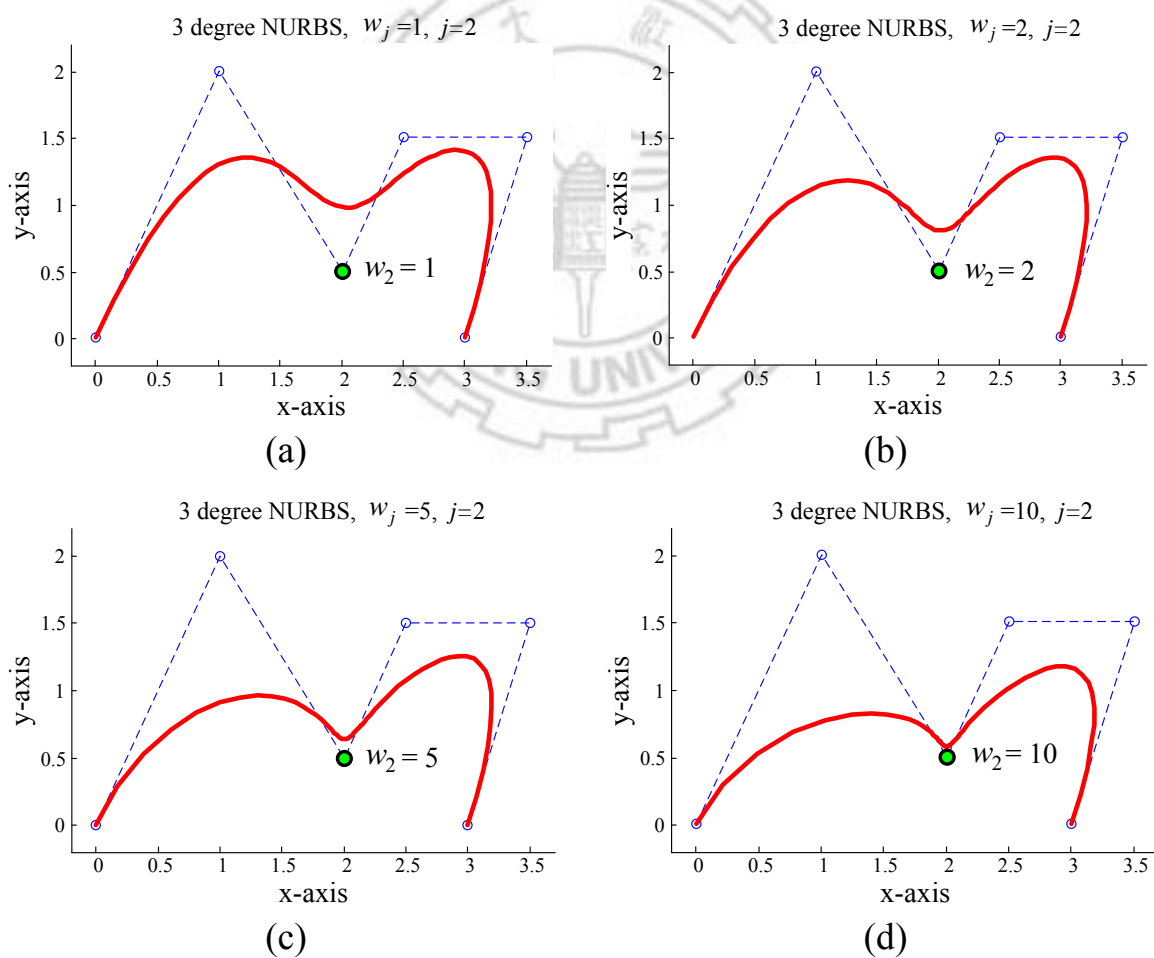


圖 3.26、3 次 NURBS 曲線改變第 j 個($j=2$)控制點的權重值之曲線變化：
(a) $w_2=1$ 、(b) $w_2=2$ 、(c) $w_2=5$ 、及(d) $w_2=10$

第 4 章 機械手臂之軌跡規劃

本章之主要目的在於說明機械手臂所需要使用的軌跡規劃 (trajectory planning) 方法，並針對各種狀況進行研究探討，使機械手臂能夠根據不同的情況使用對應的軌跡規劃方法，使提升整體工作效率與效能。本章的架構主要包含三個小節，第一節為目前機械手臂在軌跡規劃上的分類介紹以及本論文所採用的架構；第二節將探討如何在關節空間中進行單點與多點的軌跡規劃；第三節則針對如何讓機械手臂可以在工作空間中順利的跟隨特定路徑並維持平穩的移動。

4.1 軌跡規劃的分類與架構

本節主要介紹目前本論文採用的軌跡規劃方法與架構。由於機械手臂需要面對的環境與任務相當多樣，根據不同的情況使用正確的軌跡規劃方法才能有效發揮機械手臂的最大效能，例如，在一個寬敞的環境中移動到指定位置，直觀而言，直線移動是最有效率的方式，但對於機械手臂而言，為了跟隨直線路徑，可能降低某些馬達的轉速，反而犧牲了整體的移動速度，因此，在這樣的情況下，讓各軸馬達可以發揮最大效能且同時穩定的到位反而是較好的選擇，反之，若需要塗膠或切割，則必須根據空間的路徑來計算各軸馬達的速度。

4.1.1 機械手臂之軌跡規劃的分類

在機械手臂之軌跡規劃的分類方面，一般而言可以分為兩大類：(1) 關節空間(joint space)的軌跡規劃以及(2) 工作空間(work space)的軌跡規劃，而這兩類軌跡規劃又可以分為點到點(point-to-point)與連續多點(multipoint)軌跡兩種，整體分類如圖 4.1 所示。在關節空間的軌跡規劃上，如圖 4.2 所示，主要是直接依照目前的關節角度與到達目標位置後的關節角度來規劃關節轉動速度，因此無法預測機械手臂末端點的移動軌跡；在工作空間的軌跡規劃上，如圖 4.3 所示，則是必須產生一條工作環境下的移動路徑，而機械手臂各軸的馬達則根據末端點的移動速度來改變關節轉動速度，使其達到跟隨路徑的目標。



圖 4.1、機械手臂之軌跡規劃分類的示意圖

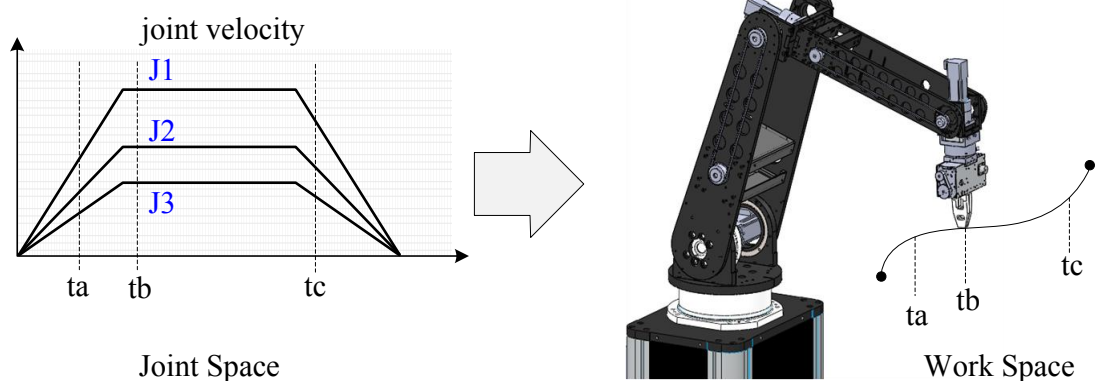


圖 4.2、在關節空間的軌跡規劃示意圖

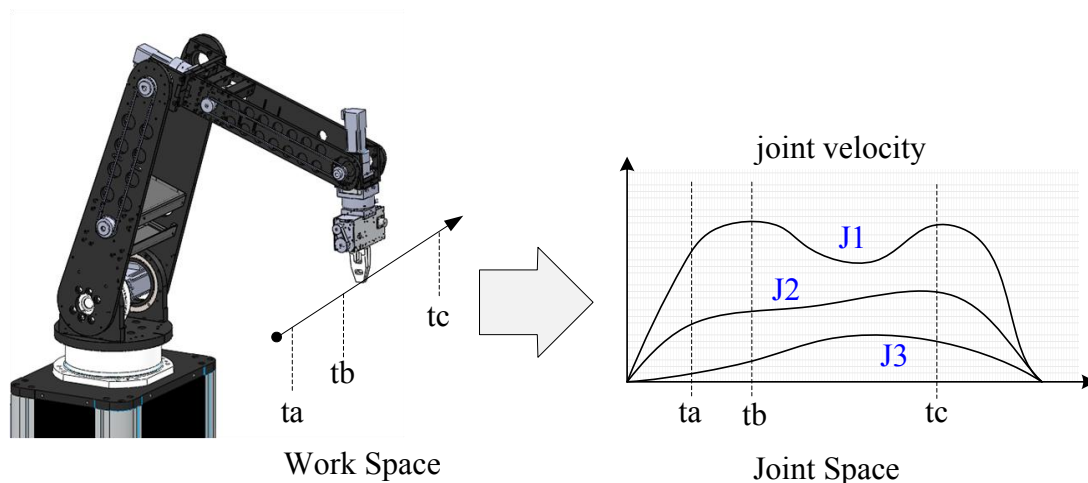


圖 4.3、在工作空間的軌跡規劃示意圖

4.1.2 兩類軌跡規劃的特性

這兩種軌跡規劃方法有各自的優缺點，可根據不同的需求選擇不同的軌跡規劃方式，使執行任務時可以達到最高的效益，以下是兩種軌跡規劃方法各自的特性：

在關節空間的軌跡規劃方面，主要具有下列的特性：

- (1) 軌跡規劃的過程比較不複雜
- (2) 直接對關節馬達計算，可以限制關節馬達的速度與加速度
- (3) 不必即時計算機械手臂的運動學，可避免奇異點問題
- (4) 無法預測末端點的移動軌跡

在工作空間的軌跡規劃方面，主要具有下列的特性：

- (1) 軌跡規劃的過程較為複雜
- (2) 必須同時考慮末端點與關節的速度與加速度
- (3) 必須即時計算每個時刻的運動學，無法避免奇異點的問題
- (4) 可以指定末端點的移動軌跡

4.1.3 機械手臂之軌跡規劃架構

本論文機械手臂的軌跡規劃架構圖如圖 4.4 所示，主要根據任務規劃模組所輸出的動作命令來決定所需要執行的軌跡規劃方法。一般而言，任務規劃模組所輸出的命令都是空間中的位置與方位，但是會根據不同需求而選擇不同的規劃模式。因此，若任務規劃模組的命令不需要跟隨空間中特定的路徑，則直接將空間中的位置與方位命令透過逆運動學轉換成各軸的角度命令，並在關節空間中規劃軌跡；反之，若任務規劃模組有指定路徑，則會根據指定路徑在工作空間中規劃軌跡。而無論選擇何種方式，最後都根據規劃的軌跡位置輸出對應的關節角度、速度與加速度命令給軸控卡來控制機械手臂的各軸馬達。

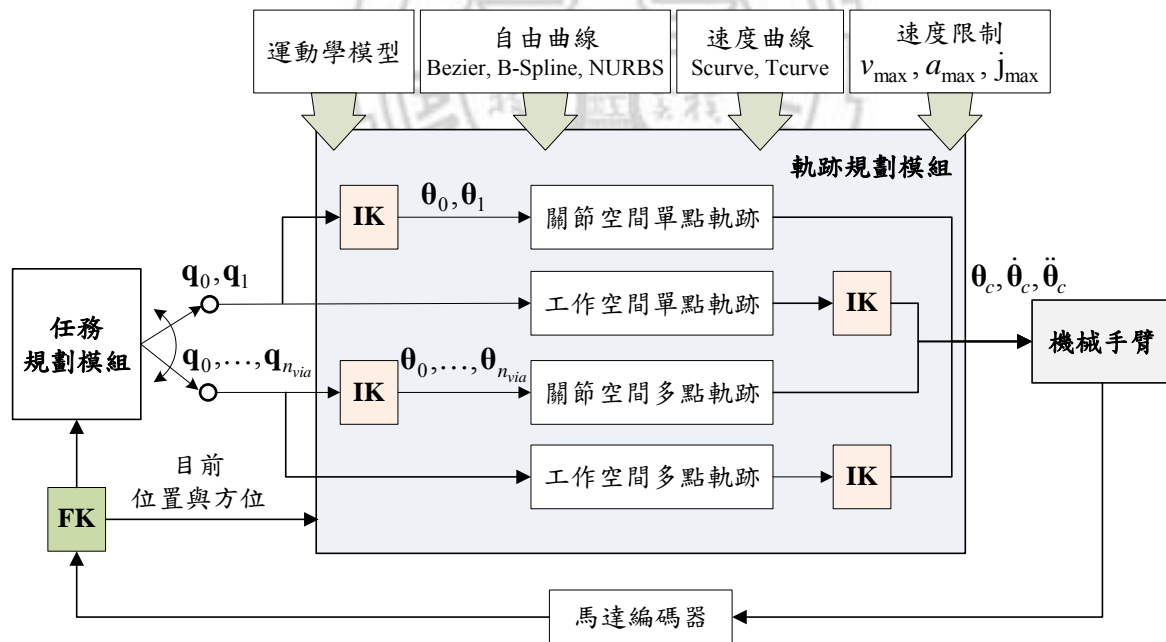


圖 4.4、機械手臂之軌跡規劃架構圖

4.2 關節空間的軌跡規劃

本節主要討論在關節空間中，計算軌跡時必須克服的一些問題，例如如何使機械手臂各軸可以達到同步的控制，以及當需要經過連續多點的目標位置時，該如何有效率的作連續多點的規劃軌跡。因此本節主要有三個部分：(1) 非多軸同步的關節軌跡規劃、(2) 多軸同步的關節軌跡規劃、及(3) 連續多點的關節軌跡規劃，其分別敘述如下：

4.2.1 非多軸同步的關節軌跡規劃

在關節空間中計算點到點的軌跡規劃時，本論文將根據 3.2 節中所介紹的梯形速度曲線來規劃各軸軌跡，而且必須考慮多軸同步的問題，因為當機械手臂由三維空間(three-dimensional space)的起點移動至終點時，各軸所需的旋轉角度大部分皆不相同，且在各軸有各自最大速度與最大加速度的限制之下，各軸將無法同時到達定位，圖 4.5 為三軸非同步運作的示意圖，如此將造成機械手臂在運動的過程中移動的軌跡較無法預測。因此，為了使各軸可以同步的啟動與結束，各軸之間必須互相配合，選擇最適當的總移動時間與加速時間，在文獻[50]中是根據各軸中總移動時間最長的軸作為主軸(master joint)，其他軸則均稱為從軸(slave joint)，再配合主軸的總移動時間與加速時間，重新計算每一個從軸各自所需的時間與速度，以達成同步運作的效果，但文獻[50]的方法是建立在各軸最大速度與加速度皆相同的情況，對於本論文所使用的機械手臂並不適合，因為機械手臂中各軸的最大速度與最大加速度不一定相同，因此本論文將根據文獻[50]所提出的方式再做修改。

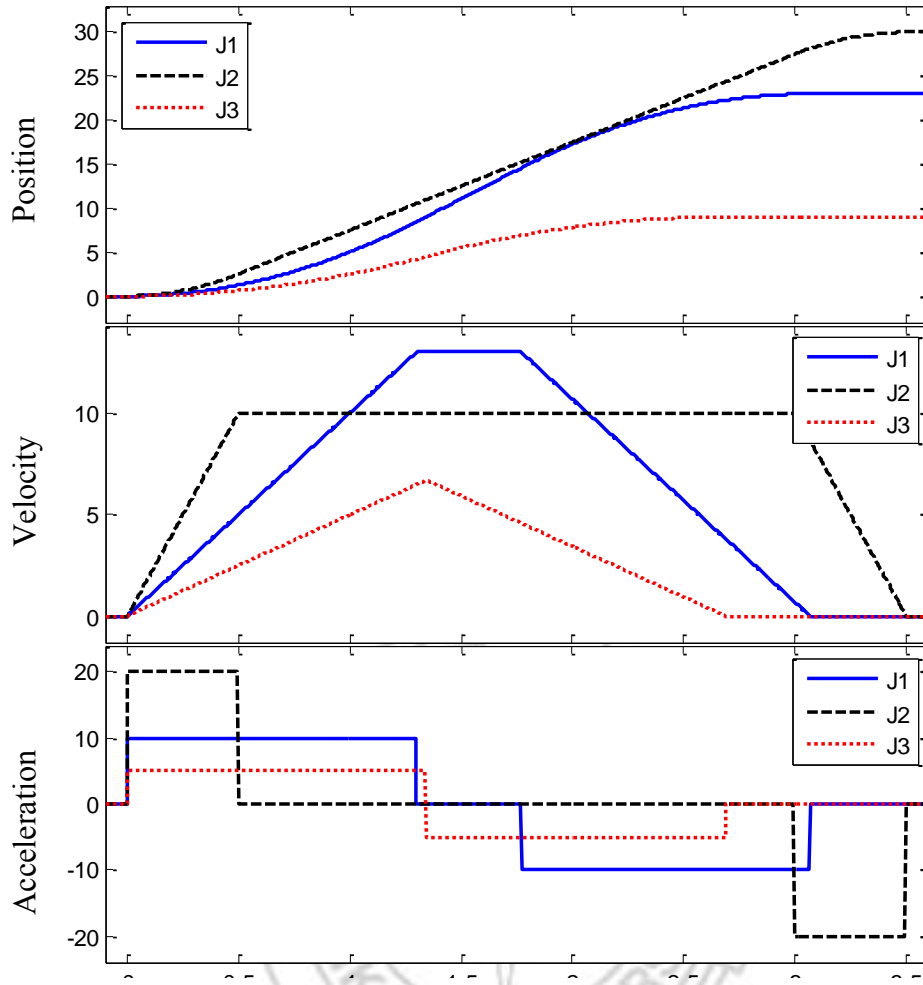


圖 4.5、三軸非同步運轉之示意圖

4.2.2 多軸同步的關節軌跡規劃

首先，本論文將使用第三章提出的式(3.52)到式(3.56)來計算各軸的總移動時間與加速時間，再選出總移動時間最長的軸作為主軸，其表示如下：

$$i^* = \arg \max_{i \in \{1, 2, \dots, 6\}} \{T_i\} \quad (4.1)$$

然後，從軸將必須根據主軸的總移動時間與加速時間，重新計算從軸適當的極限速度與極限加速度，其分別表示如下

$$v_{\lim,i} = \frac{h_i}{(\hat{T} - \hat{T}_a)} \quad (4.2)$$

和

$$a_{\lim,i} = \frac{h_i}{(\hat{T} - \hat{T}_a)\hat{T}_a} \quad (4.3)$$

其中 h_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ 為各軸所需的總移動量, $\hat{T} \equiv T_{i^*}$ 和 $\hat{T}_a \equiv T_{a,i^*}$ 分別表示為主軸的總移動時間與加速時間, 而此時主軸的速度與加速度也會等於自身的最大速度與最大加速度。然而, 若從軸使用式(4.2)與式(4.3)所計算的速度與加速度, 得到的結果將可能會超過各自的最高速度或最高加速度, 但若將其速度與加速度限制在極限內, 則會因速度不足而無法在指定時間內到達終點位置, 其狀況如圖 4.6 與圖 4.7 所示。因此, 當某一從軸發生超過最高速度或最高加速度的錯誤時, 將必須針對主軸與發生錯誤的從軸重新規劃新的總移動時間與加速時間, 而其錯誤狀況主要可分為兩種情形敘述: (1) 主軸加速時間較短與 (2) 主軸加速時間較長, 其分別敘述如下。

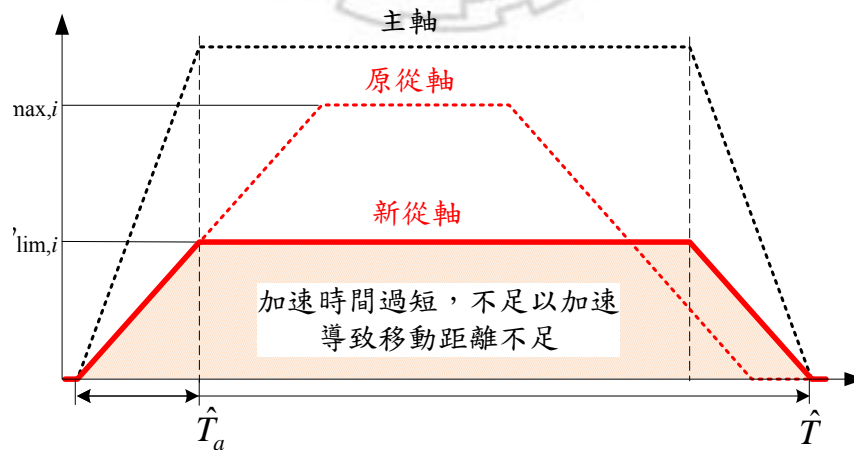


圖 4.6、重新規劃從軸而導致移動距離不足之示意圖：主軸加速時間較短

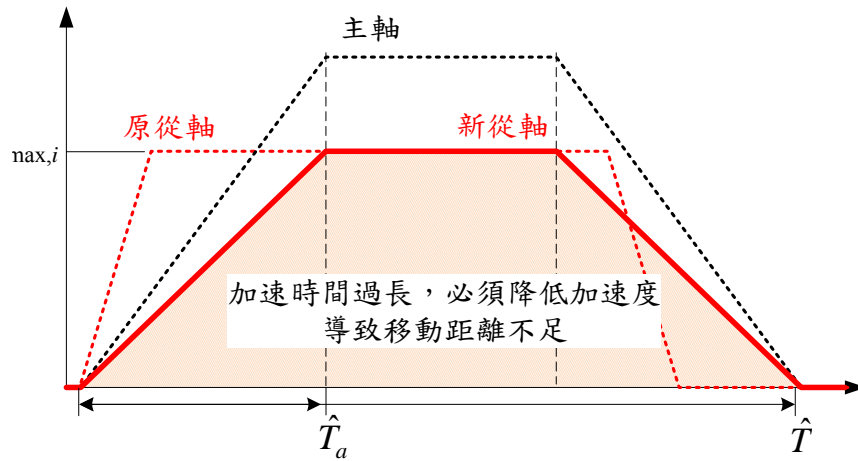


圖 4.7、重新規劃從軸而導致移動距離不足之示意圖：主軸加速時間過長

(1) 主軸加速時間較短

根據式(4.3)的關係，在從軸必須使用主軸的加速時間時，若主軸的 $(\hat{T} - \hat{T}_a)\hat{T}_a$ 小於原本從軸的 $(T_i - T_{a,i})T_{a,i}$ 時，將導致從軸之修正後的總移動距離會小於原本的總移動距離，如圖 4.6 所示，然而，此時若延長加速時間，也會導致主軸因降低加速度而造成總移動量不足。因此，在必須同時兼顧主軸與從軸的情況下，本論文將利用式(4.2)與式(4.3)的關係列出兩個方程式，求解可以同時滿足主軸最大速度與從軸最大加速度的總移動時間與加速時間，其方程式可分別表示如下

$$\tilde{T} - \tilde{T}_a = \frac{\hat{h}}{\hat{v}_{\max}} \quad (4.4)$$

$$\tilde{T}_a(\tilde{T} - \tilde{T}_a) = \frac{h_i}{a_{\max,i}} \quad (4.5)$$

其中， \hat{h} 與 \hat{v}_{\max} 分別為主軸的總移動距離與最大速度，而 \tilde{T} 與 \tilde{T}_a 分別為重新分配後的總移動時間與加速時間，接著，將式(4.4)代入式(4.5)後即可求得新的加速時間，其表示如下

$$\tilde{T}_a = \frac{\hat{v}_{\max} h_i}{a_{\max,i} \hat{h}} \quad (4.6)$$

最後，將式(4.6)之結果代回式(4.4)即可得到新的總移動時間，其修正後的總移動時間與加速時間示意圖如圖 4.8 所示。

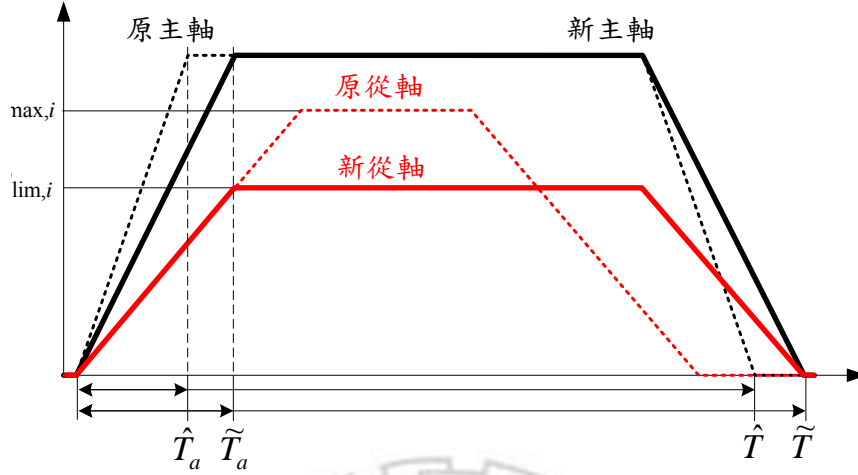


圖 4.8、同時修正主軸及從軸的示意圖：在主軸加速時間較短的狀況下

(2) 主軸加速時間較長

根據式(4.2)的關係，在從軸必須使用主軸的加速時間時，若主軸的 $(\hat{T} - \hat{T}_a)$ 小於原本從軸的 $(T_i - T_{a,i})$ 時，將導致從軸之修正後的總移動距離會小於預期的總移動距離，如圖 4.7 所示，然而，此時若縮短主軸的加速時間，將會導致主軸的加速度超過最大加速度。因此，在必須同時兼顧主軸與從軸的情況下，本論文將利用式(4.2)與式(4.3)的關係列出兩個方程式，求解可以同時滿足主軸最大加速度與從軸最大速度的總移動時間與加速時間，其方程式可分別表示如下

$$\tilde{T}_a(\tilde{T} - \tilde{T}_a) = \frac{\hat{h}}{\hat{a}_{\max}} \quad (4.7)$$

$$\tilde{T} - \tilde{T}_a = \frac{h_i}{v_{\max, i}} \quad (4.8)$$

接著，將式(4.8)代入式(4.7)後即可求得新的加速時間，其表示如下

$$\tilde{T}_a = \frac{v_{\max,i} \hat{h}}{\hat{a}_{\max} h_i} \quad (4.9)$$

最後，將式(4.9)之結果代回式(4.8)即可得到新的總移動時間，其修正後的總移動時間與加速時間示意圖如圖 4.9 所示。

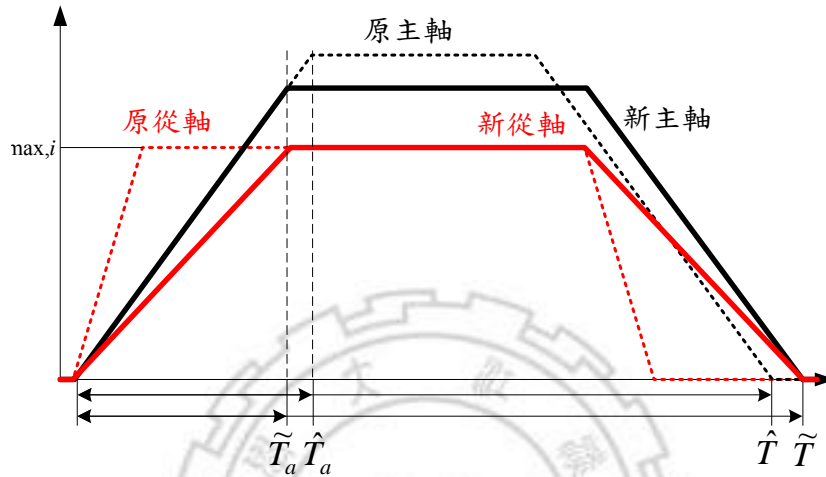


圖 4.9、同時修正主軸及從軸的示意圖：在主軸加速時間較長的狀況下

藉由上述計算的方式，並將修正後的總移動時間與加速時間作為新的主軸，再重複執行，直到所有從軸與主軸都完成修正，其流程如圖 4.10 所示，最後，圖 4.11 為三軸修正後的同步執行示意圖，圖 4.12 則是修正前後的末端點軌跡示意圖。

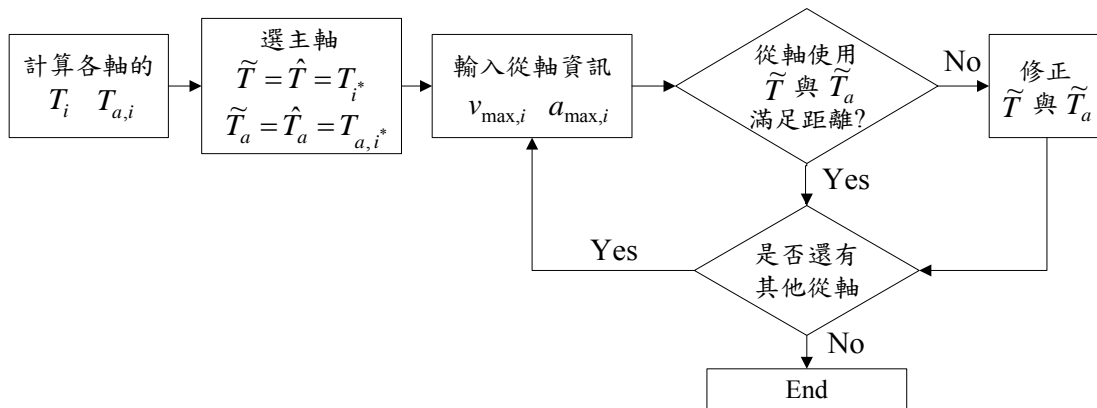


圖 4.10、各軸同步修政流程圖

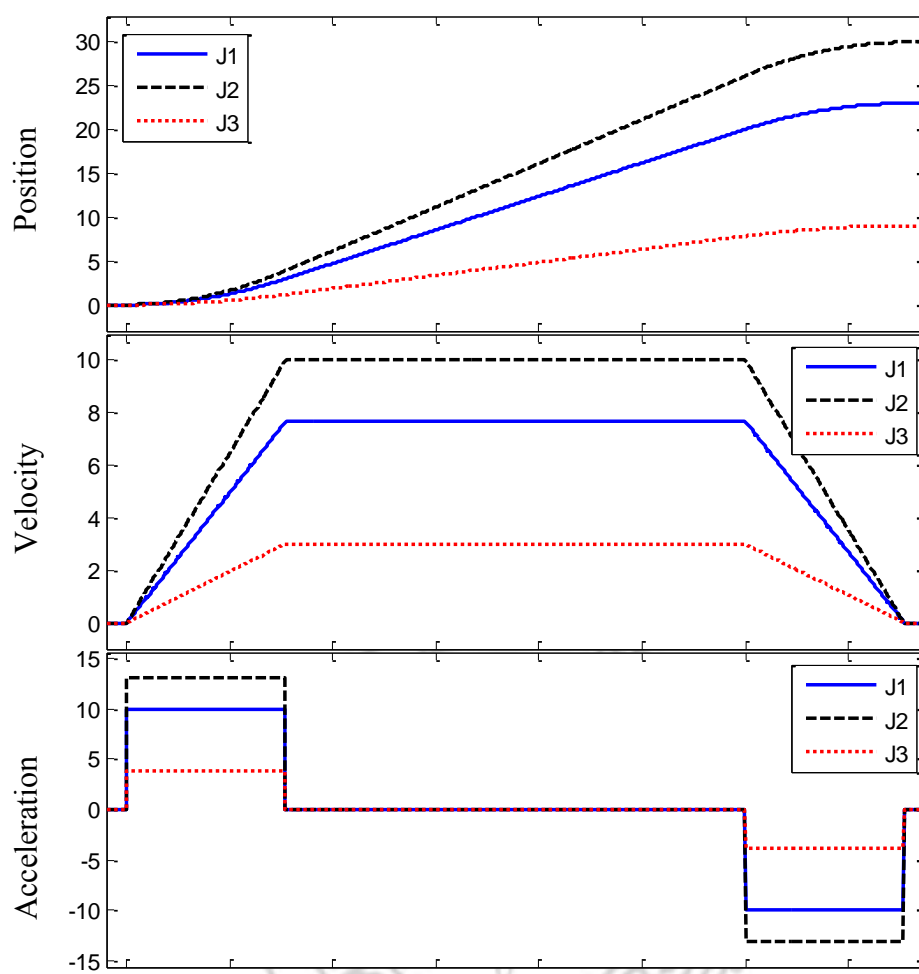
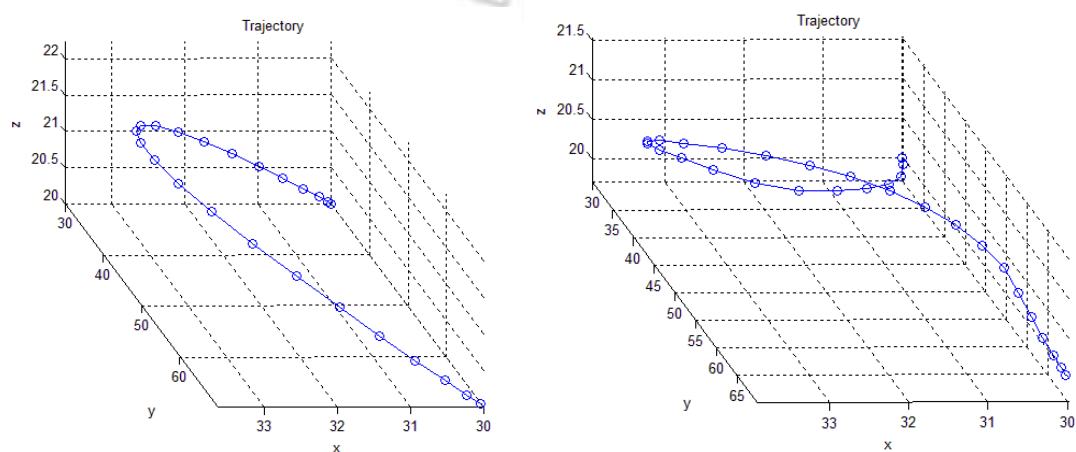


圖 4.11、三軸同步運轉梯形軌跡規劃示意圖



(a) 有同步

(b) 無同步

圖 4.12、有同步與無同步之機械手臂末端點軌跡示意圖

4.2.3 連續多點的關節軌跡規劃

在關節空間之連續多點的軌跡規劃方面，為了讓機械手臂在執行工作的過程中可以避開環境裡的障礙物，有大部分的路徑點(via-point)都只是需要經過而已，並不需要使機械手臂停止，因此當每個路徑點都必須減速停止然後再加速啟動的規劃將會非常沒有效率。圖 4.13 為機械手臂經過三個路徑點時需要減速停止之其中單一軸的速度軌跡。因此，在關節空間的連續多點軌跡規劃中，必須使速度軌跡可以串聯在一起，同時讓機械手臂可以準確經過路徑點，且不用減速停止，其中單一軸的速度軌跡如圖 4.14 所示。然而，因為經過各個路徑點所需要的角度變化量不同，所以也必須要解決同步的問題，因此，在連續多點的關節軌跡規劃上本論文主要有四個步驟：(1) 計算各區段的最長時間、(2) 產生初始速度、(3) 計算區段速度、及(4) 縮短整體移動時間。其分別敘述如下：

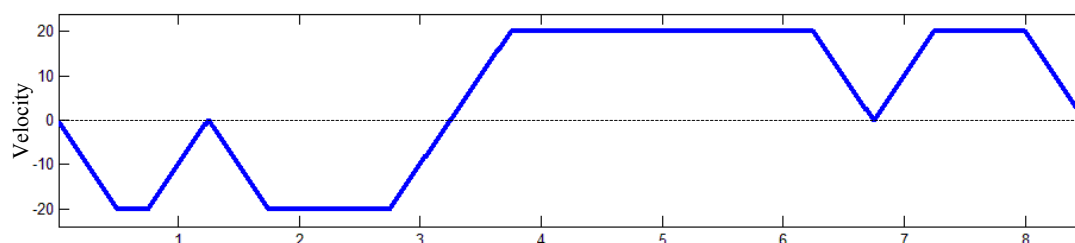


圖 4.13、經過三個路徑點時需減速停止的單軸速度軌跡示意圖

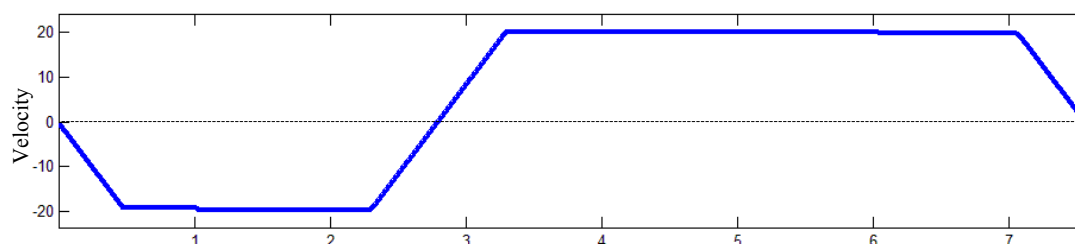


圖 4.14、經過路徑點時不需減速停止之單軸速度軌跡示意圖

(1) 計算各區段的最長時間

在計算各區段的最長時間方面，本論文先假設六軸需要經過之 n_{via} 路徑點的連續角度位置為 $\mathbf{q}_i \in \{q_0, q_1, \dots, q_{n_{via}}\}$ ，其中 $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ，接著利用 3.2 節中介紹的具有速度及加速度限制的梯形速度曲線計算出整段軌跡以及經過各區段所需花費的最長移動時間，其可表示如下：

$$T_k^* = \max \{T_k^1, T_k^2, \dots, T_k^6\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n_{via}\} \quad (4.10)$$

其中 T_k^i 為第 i 軸通過第 k 個區段所需要花費的移動時間，而 T_k^* 則是所有六軸通過第 k 個區段所要花費之最長移動時間，如圖 4.15 所示。

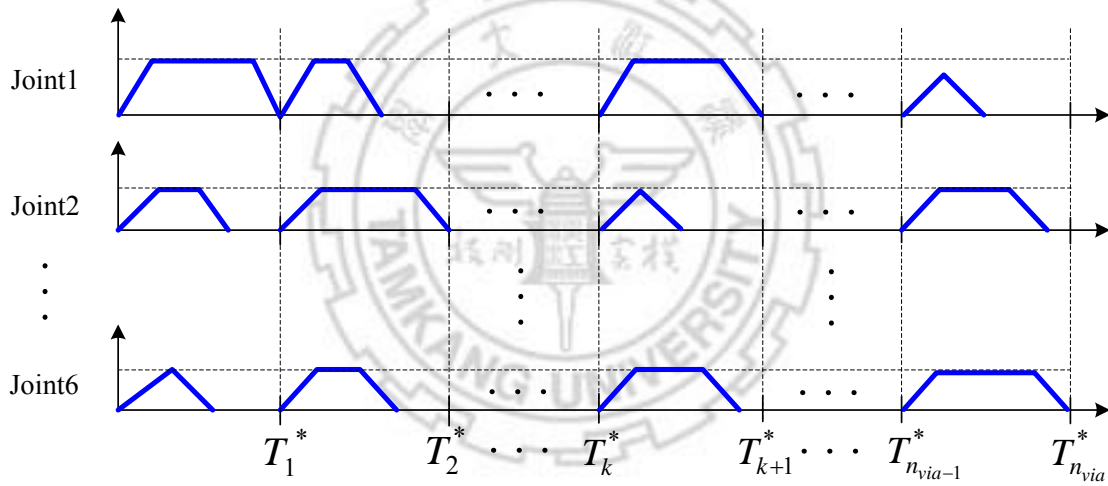


圖 4.15、各軸計算各個區段所需要的最長移動時間

(2) 產生初始速度

在產生初始速度方面，各軸都會使用已完成的最長移動時間 T_k^* 來計算，各軸的作法皆相同，因此在討論上會視為單軸作分析。首先，在第一個區段的速度規劃上，將會直接使用可以接受的最大極限速度作為通過第 1 個區段的終點速度，因此，根據第 3.3 節具有起始與終點速度之梯形速度曲線的式(3.54)到式(3.56)可以得到極限速度與初始速度的關係式如下：

$$v_{\lim,1} = v_1 = a_{\max} T_{a,1} \quad (4.11)$$

其中 $v_{\lim,1}$ 與 v_1 分別表示第一個區段的極限速度與終點速度、 $T_{a,1}$ 則為第一個區段由初始速度(因第 1 個區段剛啟動所以 $v_0 = 0$)到達極限速度所經過的加速時間，根據梯形速度曲線與位置的關係， $T_{a,1}$ 可以整理得到如下：

$$T_{a,1} = \frac{2T_1^* + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (2T_1^*)^2 - \frac{8h_1}{a_{\max}} \quad (4.12)$$

其中 h_1 表示第 1 個區段的總移動量，所以將 $T_{a,1}$ 代回式(4.11)後即可求得通過第一個區段的極限速度與終點速度。

(3) 計算區段速度

在計算區段速度方面，當完成第 k 個區段的速度規劃後，第 $k+1$ 個區段的速度會直接利用 T_{k+1}^* 與 h_{k+1} 來計算一個等速的極限速度，其可表示如下：

$$v_{\lim,k+1} = \frac{h_{k+1}}{T_{k+1}^*} \quad (4.13)$$

因此，第 k 個區段與第 $k+1$ 個區段的極限速度關係可分為兩種情況(a) $v_{\lim,k+1} \geq v_k$ 以及(b) $v_{\lim,k+1} < v_k$ ，如圖 4.16 所示。

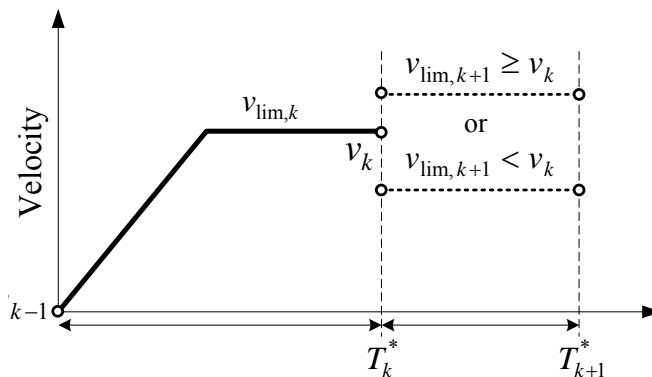


圖 4.16、第 k 個區段與第 $k+1$ 個區段的極限速度關係示意圖

在 $v_{\lim,k+1} \geq v_k$ 的情況下，表示下一個區段的速度可以使用更快的極

限速度去串聯，其計算概念如同計算第一個區段一樣，如圖 4.17 所示，所以，在第 $k+1$ 個區段之極限速度計算上，將根據給定的起始速度(等於上一個區段的終點速度)、終點速度與總移動時間即可求出第 $k+1$ 個區段的極限速度，其可表示如下：

$$v_{\text{lim},k+1} = v_k + a_{\text{max}} \frac{2T_{k+1}^* + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (4.14)$$

$$\Delta = (2T_{k+1}^*)^2 - \frac{8(h_{k+1} - v_k T_{k+1}^*)}{a_{\text{max}}}$$

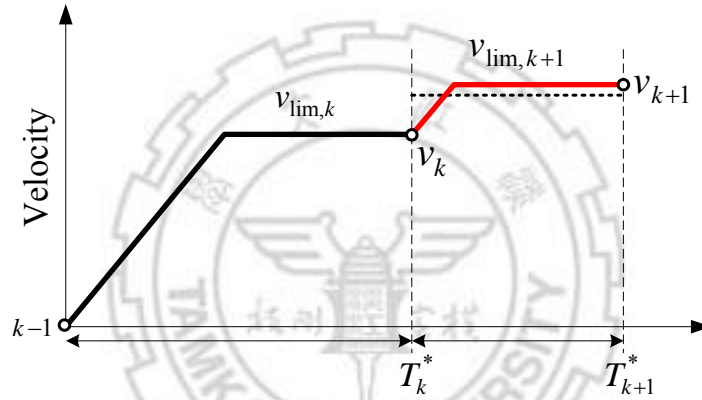


圖 4.17、當 $v_{\text{lim},k+1} \geq v_k$ 時，軌跡速度的串聯方式

在 $v_{\text{lim},k+1} < v_k$ 的情況下，表示第 $k+1$ 個區段的速度已達最快極限速度，無法與第 k 個區段的終點速度串聯，因此必須重新修正第 k 個區段的終點速度，如圖 4.18 所示。所以，在第 k 個區段之速度的重新修正上，將根據給定的起始速度、終點速度(等於第 $k+1$ 個區段的極限速度)與總移動時間來重新計算第 k 個區段的極限速度，其可表示如下：

$$v_{\text{lim},k} = \frac{v_{k-1} + v_k + a_{\text{max}} T_k^* + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (4.15)$$

$$\Delta = (v_{k-1} + v_k + a_{\text{max}} T_k^*)^2 - 2(v_{k-1}^2 + v_k^2) + 4a_{\text{max}} h_k$$

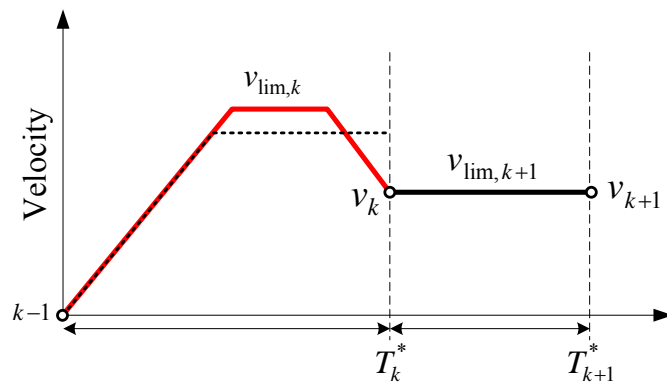


圖 4.18、當 $v_{lim,k+1} < v_k$ 時，軌跡速度的串聯方式

(4) 縮短整體移動時間

在縮短整體移動時間方面，當各軸都完成軌跡速度的串聯之後，將會比較各個區段中各軸的極限速度是否有達到最大速度，若沒有將會用最大速度來重新規劃需要花費最多時間的軸，使各段軌跡可以降低總移動時間，其壓縮後的軌跡速度與位置如圖 4.19 與圖 4.20 所示。

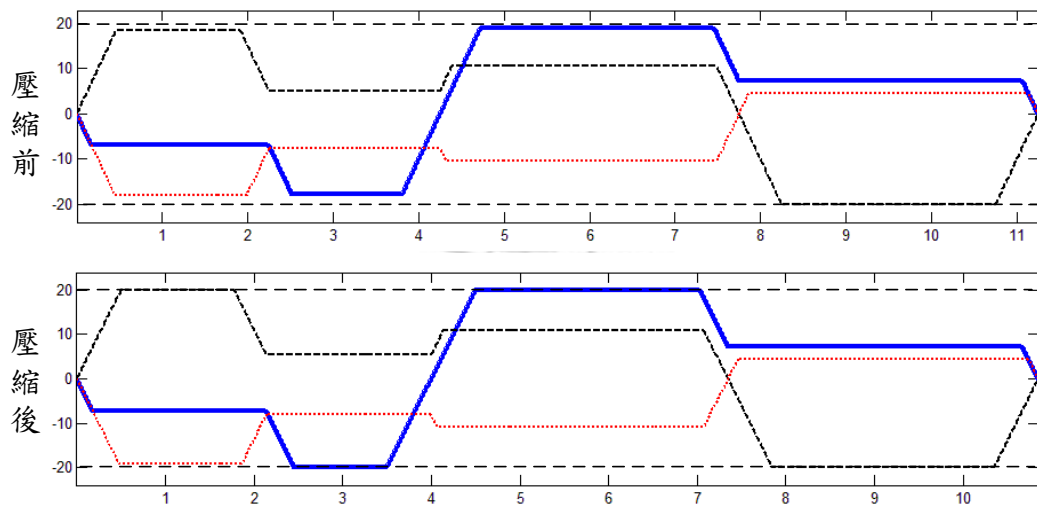


圖 4.19、壓縮整體時間比較示意圖

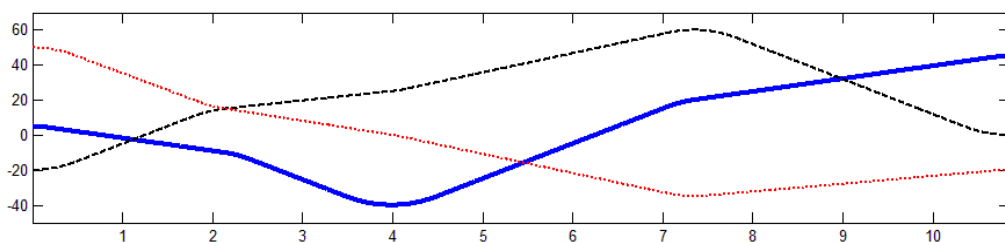


圖 4.20、連續多點的位置軌跡示意圖

4.3 工作空間的軌跡規劃

在工作空間的軌跡規劃上，本論文主要是探討在三維空間中，一般亦稱為卡式座標系(Cartesian coordinate system)，如何讓機械手臂的末端點(end-effector)可以跟隨特定的移動路徑(path)或者經過路徑點(via-point)，一般而言，工作空間的軌跡規劃相較基於關節空間的軌跡規劃複雜許多，因為在軌跡的規劃上，必須先確保產生的路徑具備連續性，因不連續的路徑會造成機械手臂關節致動器(馬達)在速度與加速度上突然的變化，進而造成機械結構的震動，使機械手臂或馬達損耗。除此之外，在移動的過程中還必須滿足限定的移動速度與移動加速度，避免超過關節致動器本身的速度極限。在達成上述的條件之後，才能夠將產生的軌跡點透過機械手臂的逆運動學模型轉換成關節致動器的控制命令來控制機械手臂。因此，機械手臂在工作空間的軌跡規劃上，主要可以分為三個部分：(1) 軌跡的幾何路徑(geometry path)、(2) 軌跡的移動規則(motion law)、以及(3) 軌跡的誤差計算。其分別敘述如下：

4.3.1 軌跡的幾何路徑

在軌跡的幾何路徑方面，主要是根據指定的路徑形式(例如直線、圓形、曲線等)或路徑點來產生幾何路徑，因此一條幾何路徑可以利用多個參數式曲線(parametric curve)串聯 n_{via} 個路徑點，通常也稱為分段多項式曲線(piecewise polynomial curve)，如圖 4.21 所示，所以，一條 $n_{via}-1$ 個區段的分段多項式曲線將可表示如下：

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_k(u) \quad (4.16)$$

其中 $\mathbf{p}_k(u)$ ， $k \in \{0, 1, \dots, n_{via}-1\}$ ，為第 k 個分段曲線，而 $u \in [0, 1]$ 為描述

各個分段曲線的獨立變數(independent variable)，透過參數 u 即可計算各分段曲線所在的位置。

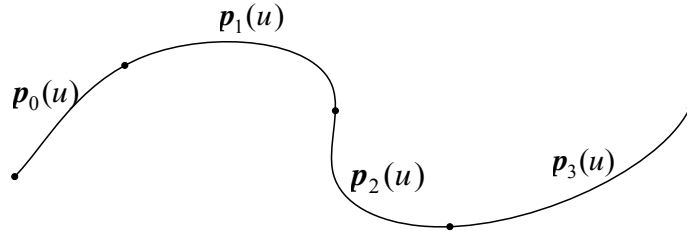


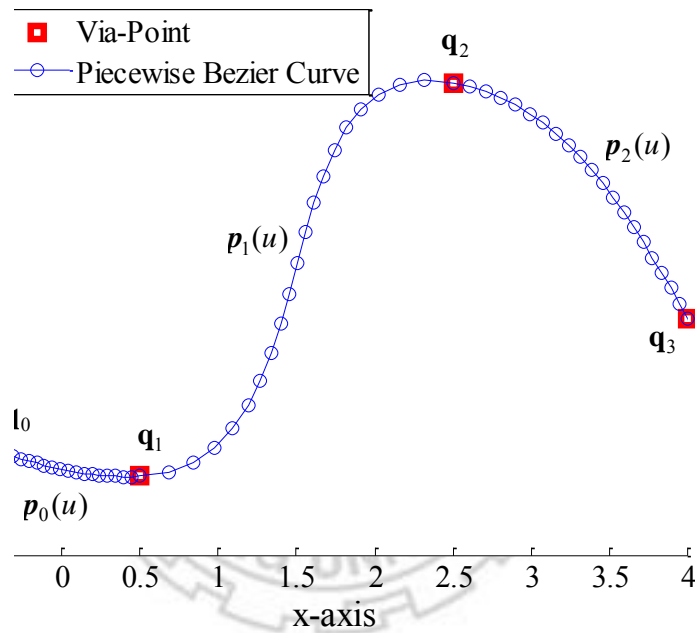
圖 4.21、分段式路徑之示意圖

然而，使用分段多項式曲線來描述幾何路徑必須注意其連續性(continuity)的問題，其中有兩個重要的特性，分別為幾何連續性(geometric continuity)以及參數連續性(parametric continuity)。在幾何連續性方面，一般與曲線本身的形狀(shape)有直接的關係，只要兩段曲線在連接處的位置相同，即稱為位置連續(G^0 連續)；若連接處的單位切線向量(unit tangent vector)相等，則稱為切線連續(G^1 連續)；而當連接處的單位切線向量與單位曲率向量(unit curvature vector)皆相等時，則可稱為曲率連續(G^2 連續)。而在參數連續性方面，則是用來確認在曲線連接處對於參數 u 的一階導數(first-order derivatives) $d\mathbf{p}(u)/du$ 與二階導數(second-order derivatives) $d^2\mathbf{p}(u)/du^2$ 是否相同，也相當於判斷連接處之速度或加速度的連續性。當一階導數相同時，稱為速度連續(C^1 連續)；若一階與二階導數皆相同時，則可稱為加速度連續(C^2 連續)。然而，如圖 4.22 所示，一條分段多項式曲線即使具備幾何連續性(G^0 與 G^1 連續)也無法保證在連接處具有參數連續性，其原因在於每一段的曲線長度都不一定相同，但卻使用相同範圍的參數 u 來描述，不過，一般具備幾何連續性的分段多項式曲線都可以透過重新參數化(Re-parameterization)的方法

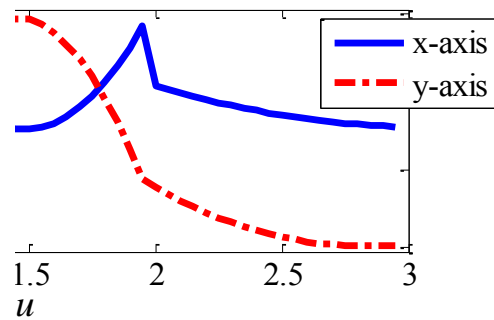
重新找到一組參數與曲線的關係，其可表示如下：

$$\bar{p}(\bar{u}) = p(f(\bar{u})) = p(u) \quad (4.17)$$

其中 $f: [\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}] \mapsto [u_{\min}, u_{\max}]$ ，而 $\bar{p}(\bar{u})$ 及 \bar{u} 分別表示重新參數化之後的曲線與參數，一般可以利用路徑點的距離來重新參數化，圖 4.23 是將圖 4.22 的路徑重新參數化後得到的結果。最後是一條同時具備幾何連續性及參數連續性的曲線，也是一條會較適合作為軌跡的幾何路徑。



(a)



(b)

圖 4.22、由三段 Bezier 曲線組成的幾何路徑：(a) 具幾何連續性但不具參數連續性的路徑示意圖、(b) 一階導數中 x-y 軸的數值變化

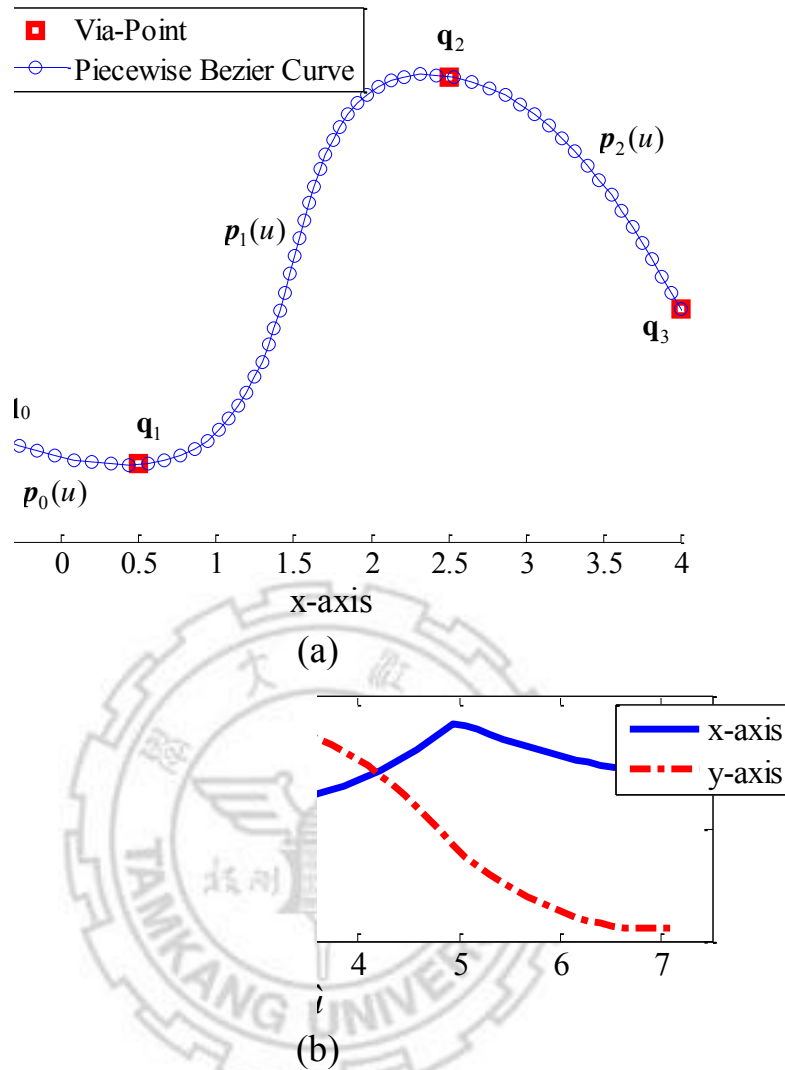


圖 4.23、將圖 4.22 重新參數化之後的幾何路徑：(a) 重新參數化後可達到 C^1 連續的路徑示意圖、(b) 一階導數中 x-y 軸的數值變化

4.3.2 軌跡的移動規則

在軌跡的移動規則方面，主要是根據給定的幾何路徑找到時間與參數 u 的關係，一般可表示如下：

$$\tilde{p}(t) = p(u) \circ u(t) \quad (4.18)$$

其中 \circ 為合成運算子，而函數 $u(t)$ 與第 4.3.1 節中提到的重新參數化是同

樣的概念，只是在一般使用電腦作為控制器的情況下，其函數 $u(t)$ 可根據每次的取樣時間 T_s 改表示為 $u(t_k)=u_k$ ，其中 $t_k=kT_s$ ，因此在軌跡的移動規則上，主要可以得到下列的關係式

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k \quad (4.19)$$

其中 Δu_k 是第 $k+1$ 個取樣時間的參數增量值，直接關係到曲線上的移動速度與加速度。所以根據[15]與[17]所提出的方法，在一般 CNC 機台使用等速進給率(constant feed rate)作為刀具前進的速度時，為了保持固定的移動速度，可以透過泰勒展開式(Taylor's expansion)取得速度與參數 u 的關係，其可表示如下：

$$u_{k+1} = u_k + T_s \dot{u}_k + \frac{T_s^2}{2} \ddot{u}_k + \text{H.O.T}, \quad k=0,1,\dots \quad (4.20)$$

其中 H.O.T 是指高次項(higher-order term)， \dot{u}_k 與 \ddot{u}_k 可以利用速度與距離的微分關係得到如下式：

$$\dot{u}_k = \frac{v_c}{\left\| \frac{dp(u)}{du} \right\|} \quad (4.21)$$

$$\ddot{u}_k = -v_c^2 \frac{\frac{dp(u)^T}{du} \frac{d^2 p(u)}{du^2}}{\left\| \frac{dp(u)}{du} \right\|^4} \quad (4.22)$$

其中 $\|\cdot\|$ 定義為向量的歐幾里得範數(Euclidean norm)， v_c 是進給速度，為一個常數值。所以將式(4.21)與式(4.22)代回式(4.20)後即可根據給定的進給速度得到下一個取樣時間的參數增量，其可表示如下：

$$u_{k+1} = u_k + \frac{v_c T_s}{\left\| \frac{d\mathbf{p}(u)}{du} \right\|_{u=u_k}} - \frac{(v_c T_s)^2}{2} \left[\frac{\frac{d\mathbf{p}(u)^T}{du} \cdot \frac{d^2 \mathbf{p}(u)}{du^2}}{\left\| \frac{d\mathbf{p}(u)}{du} \right\|^4} \right]_{u=u_k} \quad (4.23)$$

然而，為了使軌跡在啟動與到達終點位置時也可以保持速度與加速度的連續性，可以使用先前章節介紹的梯形速度曲線或 S 形速度曲線 $v(t_k) = v_k$ 來取代固定的進給速度 v_c ，使機械手臂在啟動與停止的過程也可以保持穩定。最後，只要將完成的軌跡命令轉換為機械手臂的關節角度與角速度命令即可完成基本的機械手臂軌跡規劃。圖 4.24 為本論文的測試路徑之一，是利用 3 次 B-Spline 曲線所產生的幾何路徑，其具備 G^2 連續性，因此，利用式(4.23)與結合 S 形速度曲線規劃後，所產生的參數增量變化如圖 4.25 所示，規劃的軌跡如圖 4.26 所示，而整段軌跡的一階導數 $\|\mathbf{p}^{(1)}(u)\|$ 與二階導數 $\|\mathbf{p}^{(2)}(u)\|$ 的強度(magnitude)將分別如圖 4.27 與圖 4.28 所示。

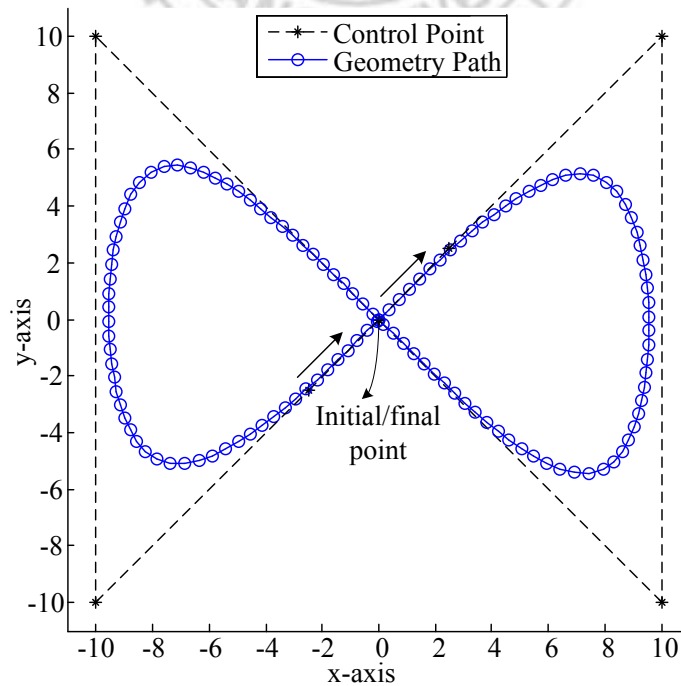


圖 4.24、測試軌跡 1

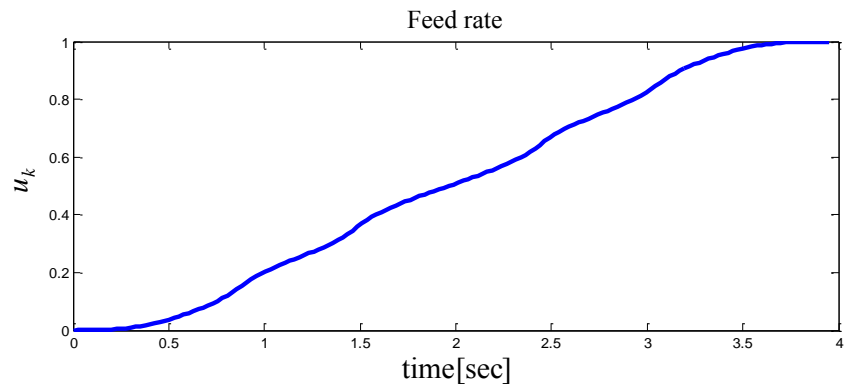


圖 4.25、軌跡規劃過程的參數增量過程

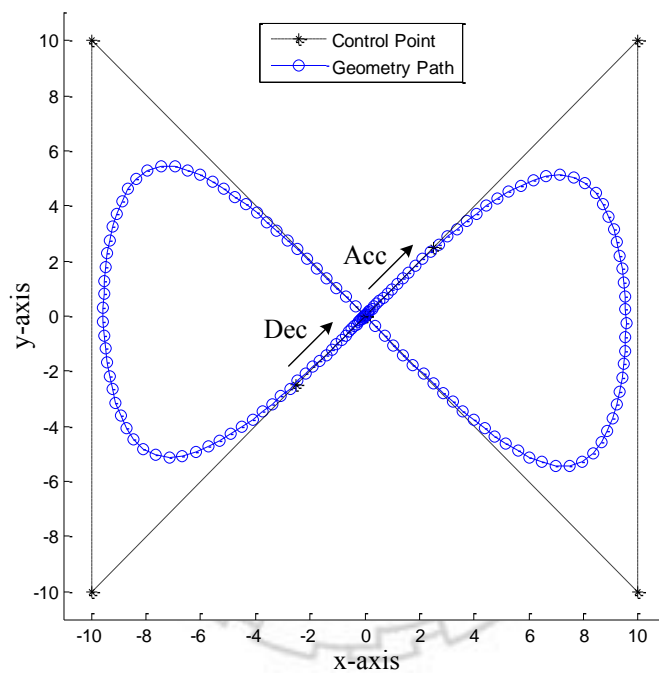


圖 4.26、利用二階泰勒展開插補法所規劃的軌跡

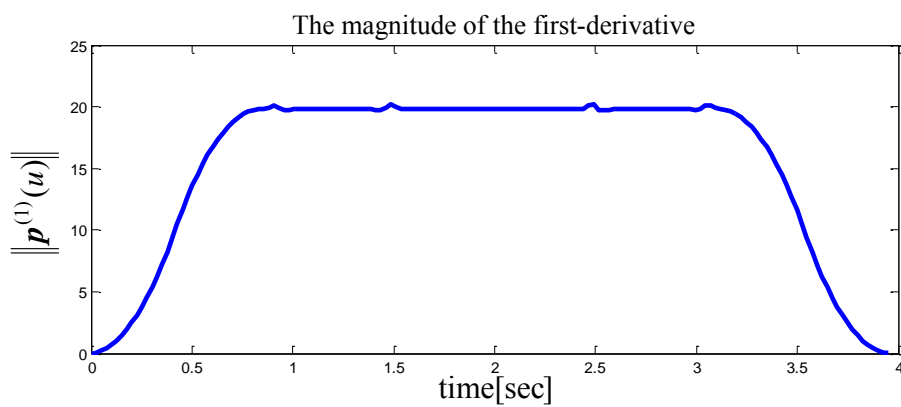


圖 4.27、整段軌跡的一階導數之強度

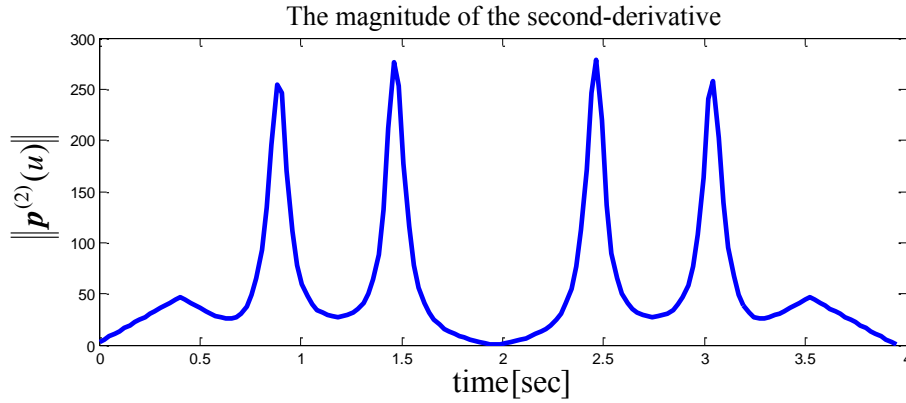


圖 4.28、整段軌跡的二階導數之強度(加速度)

4.3.3 軌跡的誤差計算

在軌跡的誤差方面，根據文獻[58][59][60]所提出的概念，一般軌跡的誤差可以分為兩種：(1) 徑向誤差(radial error)以及(2) 弦誤差(chord error)，如圖 4.29 所示。徑向誤差是指插補點(interpolated point)與曲線的垂直距離，一般是因為數值計算時的誤差所造成，而近年電腦的運算能力已大幅提升，因此徑向誤差基本上並不會造成太大問題；而弦誤差則是指 $\overline{p(u_k)p(u_{k+1})}$ 線段與曲線的垂直距離，弦誤差會因為插補的距離而造成不同的結果，因此這對於軌跡的精準度而言有較大的影響。根據文獻[58]提出的計算方法，弦誤差可以表示如下：

$$ER_k = \rho_k - \sqrt{\rho_k^2 - \left(\frac{L_k}{2}\right)^2} \quad (4.24)$$

其中 $\rho_k = 1/K_k$ ，而 K_k 則是曲線的曲率，可以表示如下：

$$K_k = \frac{\left\| \frac{dp(u)}{du} \times \frac{dp^2(u)}{du^2} \right\|}{\left\| \frac{dp(u)}{du} \right\|^3} \bigg|_{u=u_k} \quad (4.25)$$

而 $L_k = \|p(u_{k+1}) - p(u_k)\|$ 是 $\overline{p(u_k)p(u_{k+1})}$ 線段的歐基里德距離(Euclidean distance)。

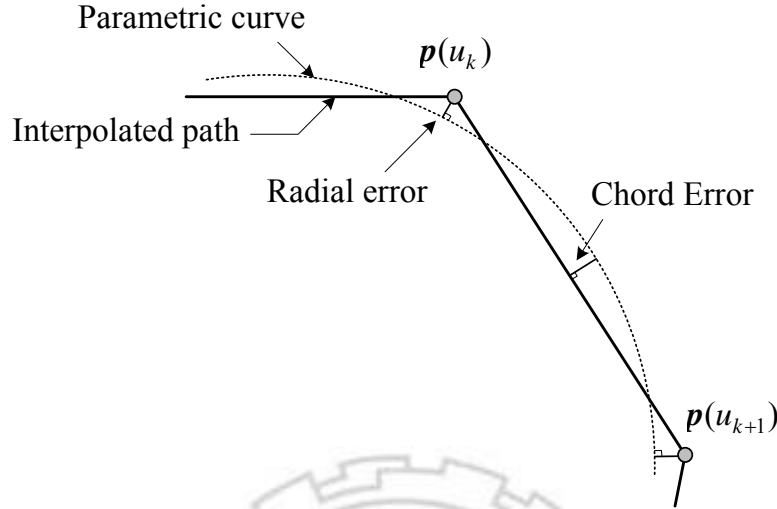


圖 4.29、徑向誤差與弦誤差之示意圖

因此，根據弦誤差的定義，第 4.3.2 節中測試路徑 1 的弦誤差將如圖 4.30 所示，由圖 4.30 可以發現有四個位置的弦誤差特別嚴重，主要是因為使用泰勒展開插補法所得到的參數增量與理想速度是有些許誤差的，如圖 4.31 所示，其原因在於忽略了泰勒展開的高階項的關係，在文獻[14]中，將泰勒展開插補法提升至三階近似的情況下，確實可以減少部分誤差，但也因此必須付出更高的運算代價。

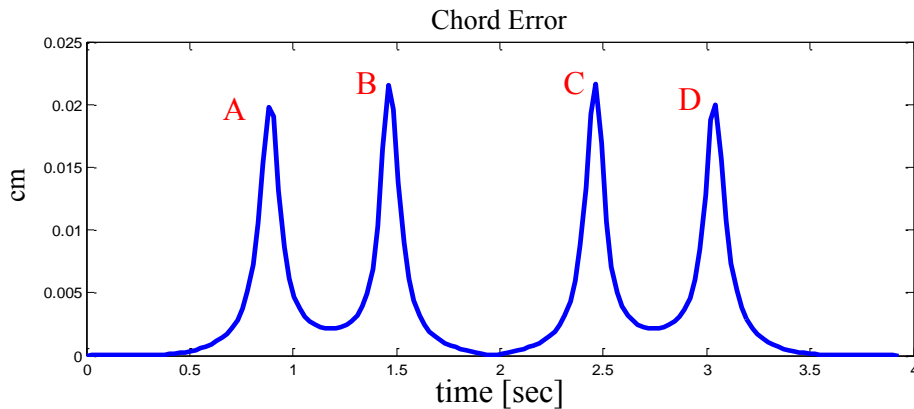


圖 4.30、測試路徑 1 之弦誤差

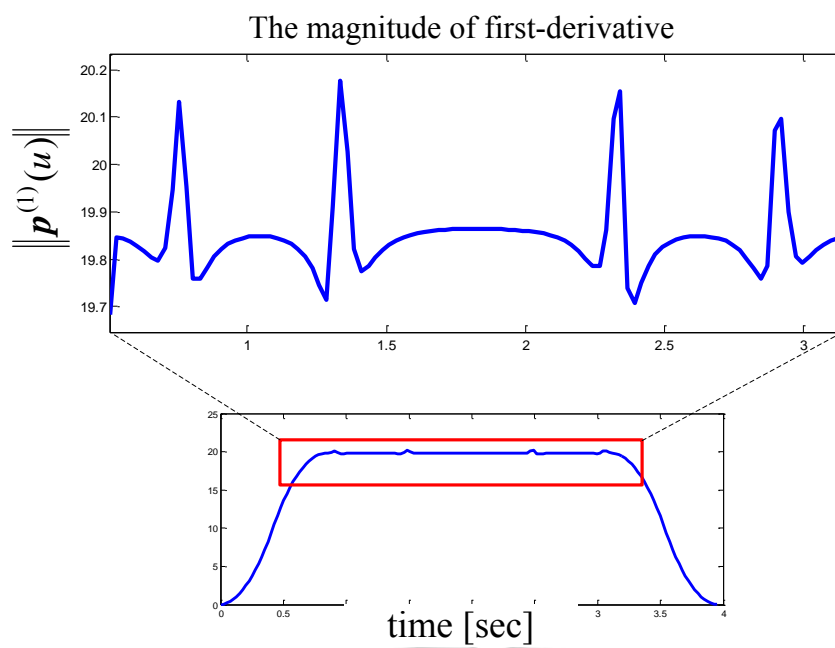


圖 4.31、泰勒展開插補法的近似誤差



4.4 工作空間的軌跡速度限制與誤差修正

本節主要提出一套以參數式曲線之切線與曲率變化為基礎的軌跡規劃方法，其可避免使用泰勒展開插補法得到速度與參數增量的關係，並利用分段式速度規劃的方式降低軌跡加速度過大的問題，可以大幅提升計算的效率與降低軌跡的弦誤差，最後根據取樣時間提出一套修正速度精確度的方法，可以提高軌跡在速度串連時的準確性。因此，在工作空間的軌跡速度限制與誤差修正上，主要可以分為三個部分：(1) 參數式曲線插補、(2) 分段式速度規劃、以及(3) 速度誤差修正。其分別敘述如下：

4.4.1 參數式曲線插補

在參數式曲線插補(interpolation)方面，是為了產生一條可通過連續路徑點 \mathbf{q}_k , $k \in \{0, 1, \dots, n_{via}\}$ 的曲線，而根據文獻[55]所提出的概念，可以使用 3 次 NURBS 曲線來實現軌跡插補($p=3$)，並且根據 $n_{via}+1$ 個路徑點計算出適合的控制點及節點向量。由於 3 次 NURBS 曲線足以產生 C^2 連續的路徑，所以在 NURBS 曲線上的控制點，雖然可以設定權重值，但為了計算方便，可將未知控制點的權重值皆設定為 1，視為使用 3 次 B-Spline 曲線進行軌跡插補。整體而言，軌跡插補的過程可以分為三個主要步驟：(a) 基於路徑點弦長之重新參數化、(b) 產生節點向量、及(c) 產生控制點，以下將詳細說明。

在基於路徑點弦長之重新參數化方面，根據式(3.95)的定義，路徑點與 B-Spline 曲線的關係可以假設如下：

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{p}(\bar{u}_k) = \sum_{j=0}^n N_j^p(\bar{u}_k) \mathbf{p}_j \quad (4.26)$$

展開後得到以下關係：

$$\mathbf{q}_k^T = [N_0^P(\bar{u}_k), N_1^P(\bar{u}_k), \dots, N_{n-1}^P(\bar{u}_k), N_n^P(\bar{u}_k)] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^T \\ \mathbf{p}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1}^T \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

其中 \bar{u}_k , $k \in \{0, 1, \dots, n_{via}\}$ 是為了讓幾何路徑保持參數連續性，而根據各路徑點的弦長(chord length)重新參數化之參數集合，一般會將重新參數化的範圍限制在 $[0, 1]$ 之間，其可表示如下：

$$\bar{u}_0 = 0, \bar{u}_{n_{via}} = 1 \quad (4.28)$$

而中間的參數值，則可根據弦長定義來產生，其可表示如下：

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}\|_2}{d}, \quad k = 1, \dots, n_{via} - 1 \quad (4.29)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 定義為歐基里德距離(Euclidean distance)， d 則是路徑點的總弦長，其可表示如下：

$$d = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}\|_2 \quad (4.30)$$

接著，在產生節點向量方面，當完成重新參數化之後，參數集合 $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n_{via}}\}$ 可以用來決定 3 次 B-Spline 曲線的節點向量。為了滿足 3 次 B-Spline 曲線，節點向量的前 4 個與後 4 個節點分別設定為 0 與 1，其可表示如下：

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = \bar{u}_0, \quad (4.31)$$

$$u_{n_{via}+3} = u_{n_{via}+4} = u_{n_{via}+5} = u_{n_{via}+6} = \bar{u}_{n_{via}} \quad (4.32)$$

中間的節點向量則可表示如下：

$$u_{j+3} = \bar{u}_j, \quad j = 1, \dots, n_{via} - 1 \quad (4.33)$$

所以由式(4.31)~(4.33)可以得知，節點向量的 $n_{knot} = n_{via} + 6$ 。

最後，在產生控制點方面，根據 B-Spline 曲線中控制點與節點向量的數目關係，可得到 $n = n_{via} + 2$ ，控制點的數量則為 $n + 1$ 。所以當要利用先前假設的式(4.27)來求解控制點時，控制點的數目必須比路徑點多兩個，才能保證方程式得到唯一解[55]。本論文將利用曲線前面兩個與後面兩個路徑點的切線向量產生額外的兩個控制點，其可表示如下：

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{\bar{u}_4}{3} \mathbf{t}_0 \quad (4.34)$$

$$\mathbf{p}_{n_{via}+1} = \mathbf{p}_{n_{via}+2} - \frac{1 - \bar{u}_{n_{via}+3}}{3} \mathbf{t}_{n_{via}} \quad (4.35)$$

其中 B-Spline 曲線的第一個與最後一個的控制點會等於起始與結束的路徑點 所以 $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$ 與 $\mathbf{p}_{n_{via}+2} = \mathbf{q}_{n_{via}}$ ，而 \mathbf{t}_0 與 $\mathbf{t}_{n_{via}}$ 分別是在曲線頭尾的切線向量，其可表示如下：

$$\mathbf{t}_0 = \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0}{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{t}_{n_{via}} = \frac{\mathbf{q}_{n_{via}} - \mathbf{q}_{n_{via}-1}}{\bar{u}_{n_{via}} - \bar{u}_{n_{via}-1}}, \quad (4.37)$$

接著，剩餘的控制點將會依據式(4.27)來求解，但由於在 3 次 B-Spline 曲線中，一段分段曲線實際接觸的非 0 基底函數只有 3 個，因此，路徑點與控制點的關係可再簡化，其可表示如下：

$$\mathbf{q}_k = N_k^3(\bar{u}_k)\mathbf{p}_k + N_{k+1}^3(\bar{u}_{k+1})\mathbf{p}_{k+1} + N_{k+2}^3(\bar{u}_{k+2})\mathbf{p}_{k+2} \quad (4.38)$$

依據式(4.38)，剩下的所有路徑點與控制點可整理為一個三對角矩陣 (tridiagonal matrix)，其可表示如下：

$$\mathbf{NP} = \mathbf{R} \quad (4.39)$$

其中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_2^3(\bar{u}_1) & N_3^3(\bar{u}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ N_2^3(\bar{u}_2) & N_3^3(\bar{u}_2) & N_4^3(\bar{u}_2) & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & N_{n_{via}-2}^3(\bar{u}_{n_{via}-2}) & N_{n_{via}-1}^3(\bar{u}_{n_{via}-2}) & N_{n_{via}}^3(\bar{u}_{n_{via}-2}) \\ 0 & \cdots & & 0 & N_{n_{via}-1}^3(\bar{u}_{n_{via}-1}) & N_{n_{via}}^3(\bar{u}_{n_{via}-1}) \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_{via}-1}^T \\ \mathbf{p}_{n_{via}}^T \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T - N_1^3(\bar{u}_1)\mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n_{via}-2}^T \\ \mathbf{q}_{n_{via}-1}^T - N_{n_{via}+1}^3(\bar{u}_{n_{via}-1})\mathbf{p}_{n_{via}+1}^T \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

最後，利用反矩陣求解式(4.39)，其可表示如下：

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R} \quad (4.43)$$

即可獲得剩下的控制點 \mathbf{p}_j ， $j = 2, \dots, n_{via}$ 。

4.4.2 分段式速度規劃

在分段速度曲線規劃方面，本論文會依據前一節使用經過重新參數化之後的 3 次 NURBS 曲線插補軌跡來規劃機械手臂的移動速度，所以在參數增量的計算方面，由於經過重新參數化，本論文將可以直接給定移動速度來產生新的參數增量，避免泰勒展開插補法所造成的誤差，其參數增量的計算可表示如下：

$$d_{k+1} = d_k + \lambda v_k T_s \quad (4.44)$$

$$u_{k+1} = u_k + \frac{d_{k+1}}{l} \quad (4.45)$$

其中 λ 是用來調整移動速度與參數增量的比例常數， v_k 是使用 S 形速度曲線或梯形速度曲線產生的移動速度， T_s 是取樣時間， d_k 與 d_{k+1} 分別為目前與下一刻的移動距離， l 則是整段軌跡的總移動距離，本論文在總移動距離的計算上，將採用 Simpson 法(Simpson's rule)[61][62][63]，其在曲線的長度計算上可以比一般梯形法(trapezoidal rule)得到更為精準的結果，如此可以降低軌跡移動時的誤差。圖 4.32 是依據式(4.44)與式(4.45)以及 S 形速度曲線所規劃的移動軌跡之速度與加速度，其輸入的 λ 為 1、速度為 30 cm/s、加速度為 100 cm/s² 與急衝度為 240 cm/s³，而由圖 4.32 可以發現，規劃的軌跡其速度與加速度會超過限制的範圍，因此，可以透過比例常數 λ 來調整，而根據文獻[50]，比例常數 λ 與速度、加速度與急衝度的關係可以整理如下：

$$\lambda = \min \left\{ \frac{v_{\max}}{\|p^{(1)}(u)\|_{\max}}, \sqrt{\frac{a_{\max}}{\|p^{(2)}(u)\|_{\max}}}, \sqrt[3]{\frac{j_{\max}}{\|p^{(3)}(u)\|_{\max}}}, \dots \right\} \quad (4.46)$$

其中 $\|p^{(1)}(u)\|_{\max}$ 、 $\|p^{(2)}(u)\|_{\max}$ 與 $\|p^{(3)}(u)\|_{\max}$ 分別為整段軌跡中的最大速度、

最大加速度與最大急衝度。所以，由根據式(4.46)可以找到一個新的比例常數 λ 為 0.7267，因此使用新的比例常數後可以得到軌跡結果如圖 4.33 所示，其最大速度與最大加速度皆可滿足輸入的條件限制。

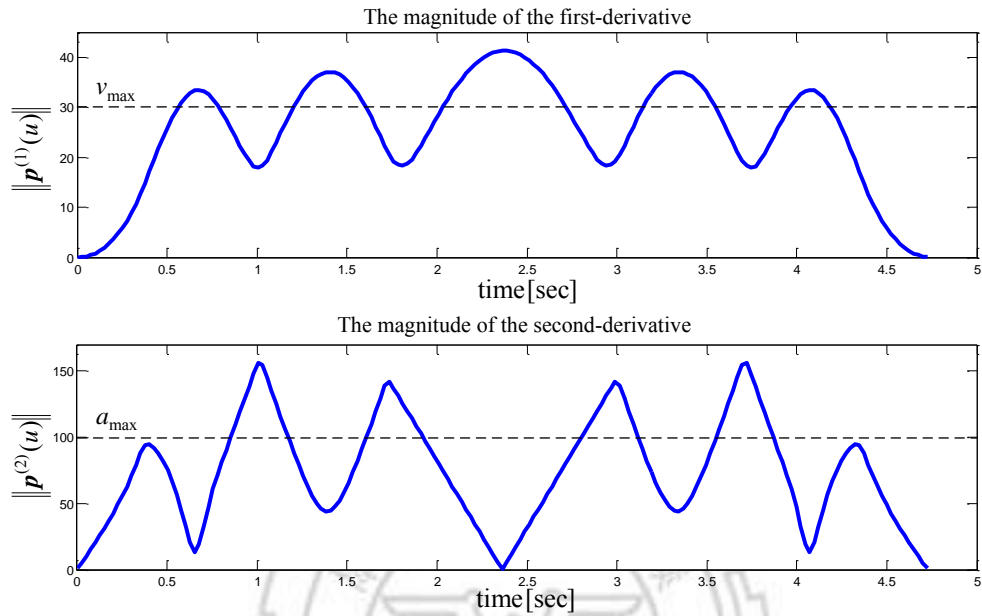


圖 4.32、使用式(4.44)與式(4.45)所規劃的軌跡之速度與加速度

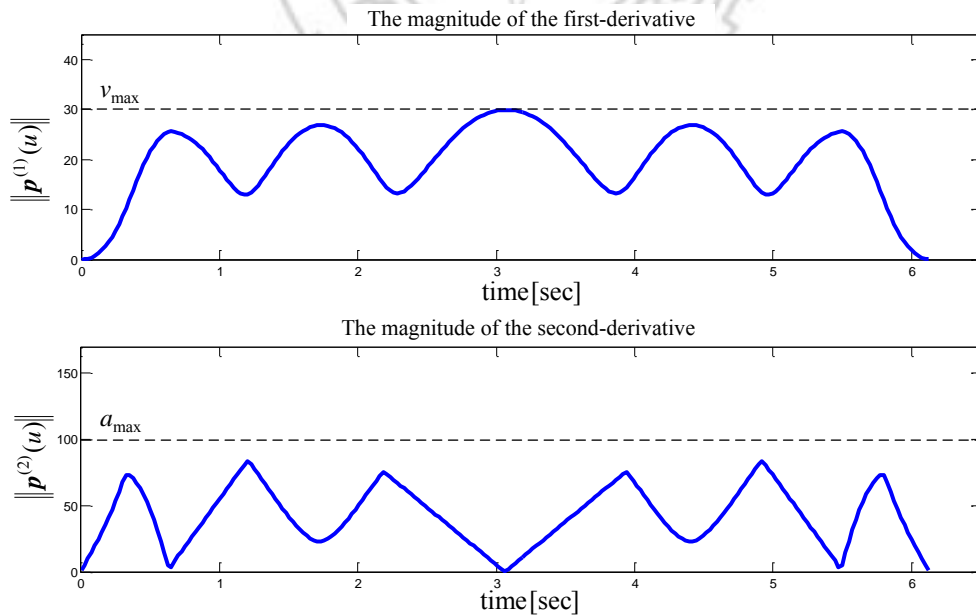


圖 4.33、軌跡使用比例常數調整之後的速度與加速度

然而，單是使用比例常數所規劃的軌跡將會非常沒有效率，因此，本論文將利用分段式速度規劃的方式提高軌跡的移動效率，使軌跡在限制的範圍內提高移動效率。首先，將會採用預視(look-ahead)的方法搜尋整段軌跡，將軌跡各處超過限制的速度極值與加速度極值標記下來，其標記的結果如圖 4.34 所示。接著，因為加速度極值一般會發生在軌跡的轉彎處，因此本論文將依據標記的加速度極值將軌跡分為 $n_{seg} + 1$ 個區段，其各軌跡分段的結果同樣如圖 4.34 所示。最後，根據軌跡分段的結果，可以將式(4.44)修改如下：

$$d_{k+1} = d_k + \lambda_m v_k T_s, \quad (4.47)$$

其中 λ_m , $m \in \{0, 1, \dots, n_{seg}\}$ 為各個分段軌跡的比例常數，是依據各個分段軌跡的最大速度與最大加速度所得到的，因此，各個分段軌跡的速度將會依據 λ_m 而改變，而各個分段軌跡之間即可根據 3.3 節中具有啟動與終點速度的 S 形速度曲線串聯，其經過分段速度規劃的軌跡如圖 4.35 所示，此外，圖 4.36 為使用分段式速度規劃之後的參數增量比較圖。

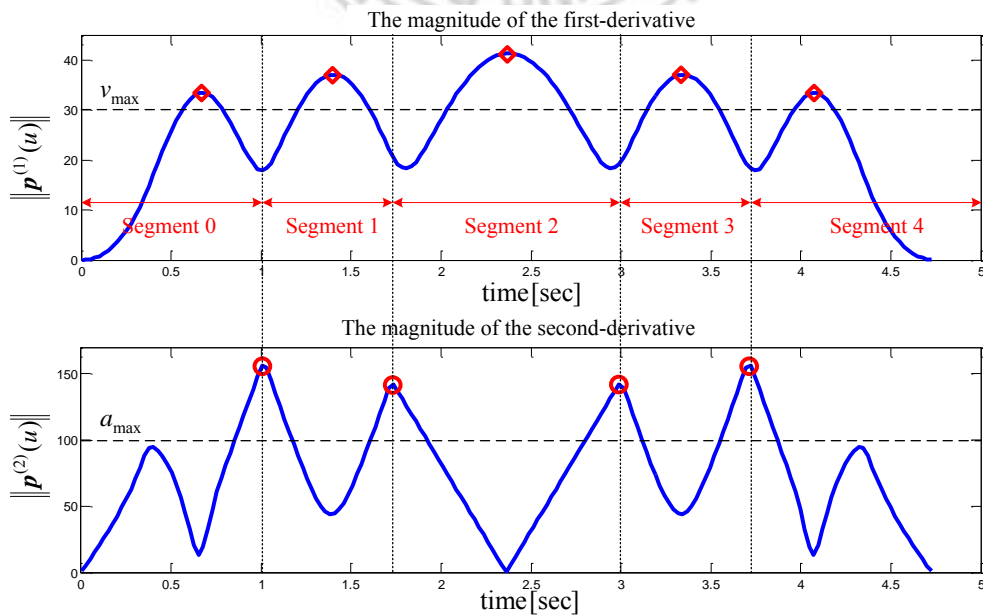


圖 4.34、透過預視的方法標記各轉彎處的最大速度與最大加速度

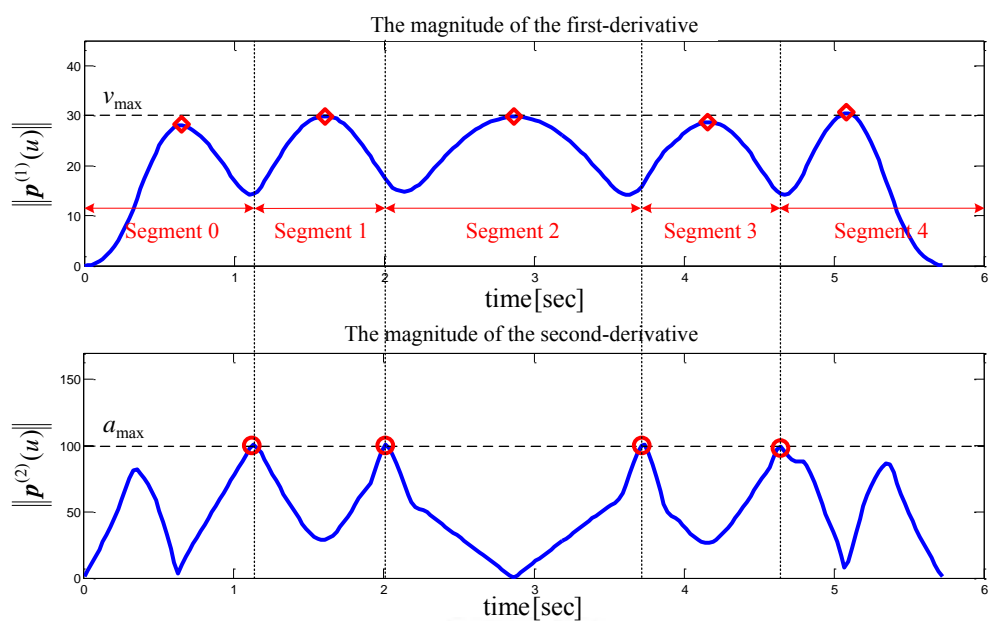


圖 4.35、利用分段式速度規劃的軌跡之速度與加速度示意圖

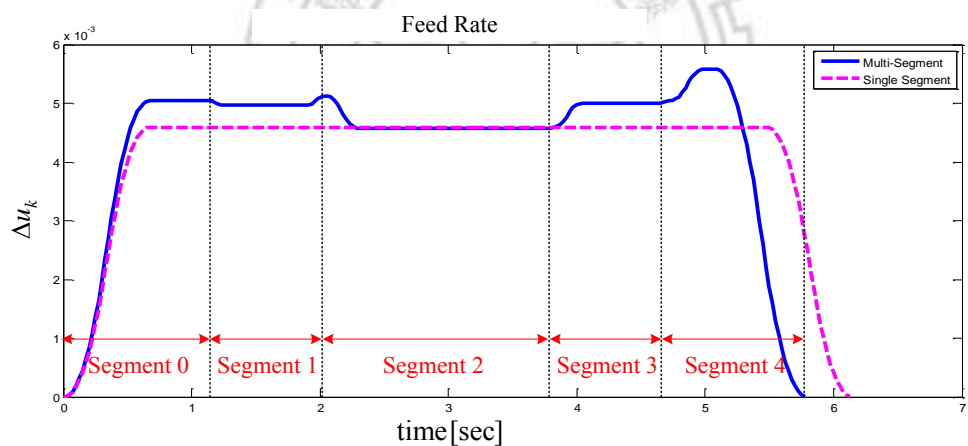


圖 4.36、有使用分段式速度規劃與無使用之參數增量比較圖

第 5 章 實驗結果與討論

本章之目的主要將使用自行開發的第五代機械手臂實作先前章節所提到的軌跡規劃方法，在實驗數據的擷取方面會使用軸控卡接收 AC 伺服馬達的回授訊號，根據回授訊號與送出的軌跡命令進行分析比較，而機械手臂的末端點位置資訊則會利用馬達的回授推算得到。本章主要進行三項實驗：(1) 關節空間的同步速度規劃測試、(2) 連續多點之關節軌跡規劃測試、(3) 工作空間的軌跡規劃測試，以下將詳細說明。

5.1 關節空間的同步速度規劃之實現

本節主要針對關節空間的軌跡進行速度同步規劃的測試，根據第 4.2 節中所提到的多軸梯形速度曲線進行同步與非同步的測試，主要比較有多軸同步與加速度不同步但速度同步以及都不同步的三種情況，其實驗方法則分別由 $[25, 40 \ 10]^T$ 移動到 $[-25, 60 \ 20]^T$ 與 $[-25, 60 \ 20]^T$ 移動到 $[-25, 30 \ 20]^T$ ，共兩個測試路徑，其分別敘述如下：

(a) 測試軌跡一

在測試軌跡一的部分，是讓機械手臂做一個對角移動，其移動的軌跡如圖 5.1 所示，而各軸速度變化如圖 5.2 所示。由圖 5.1 的右側視角(right)可以看出，未具同步處理的軌跡相當不規則也無效率，雖然具備速度同步的軌跡改善許多，但仍不比完全同步的軌跡來的有效率。

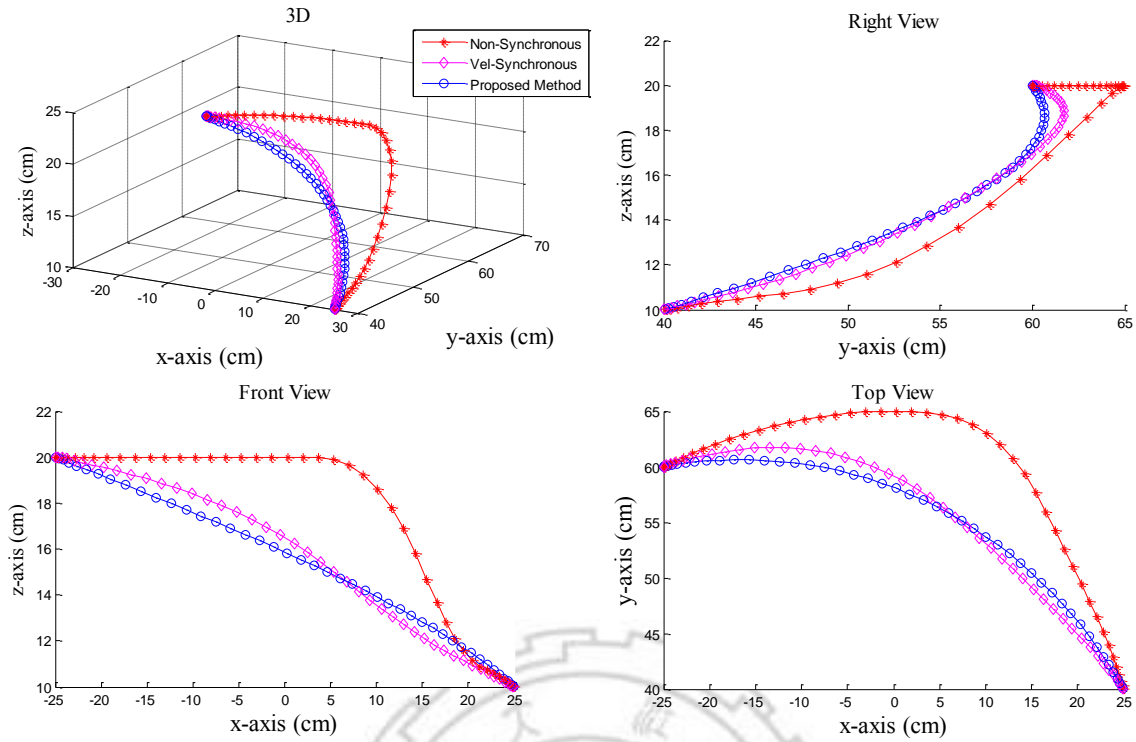


圖 5.1、多軸同步測試軌一跡之三種方法的等視角圖與三視圖

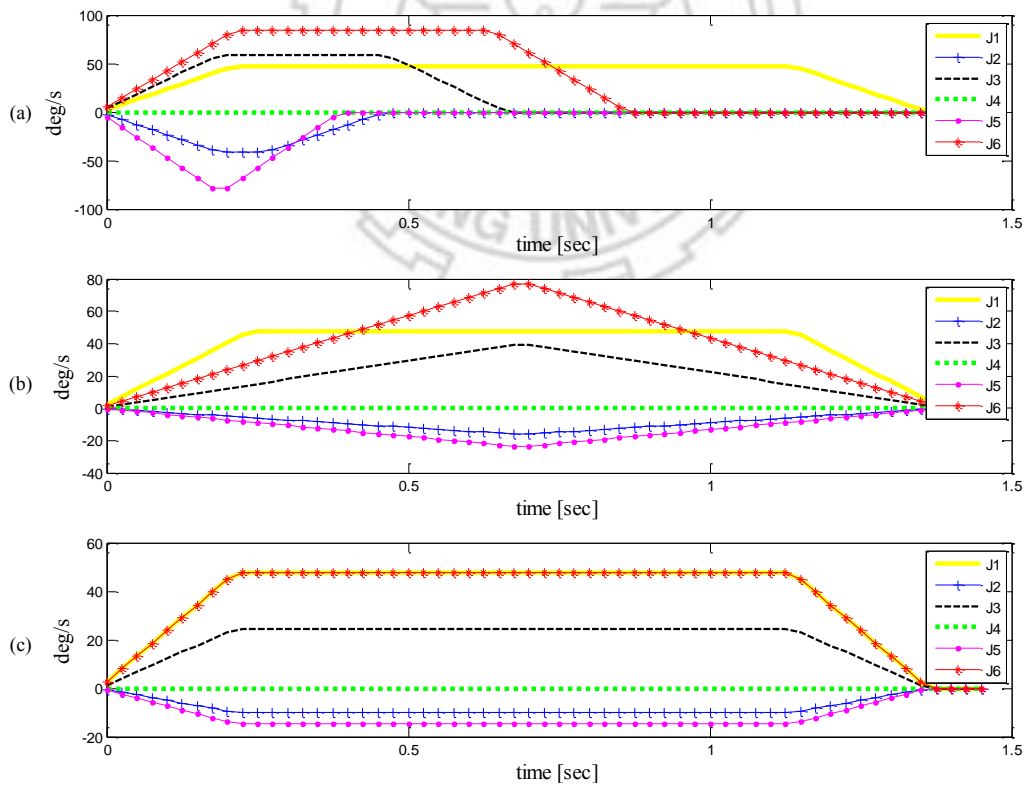


圖 5.2、多軸同步測試軌跡一之速度變化圖：(a) 未具有同步處理、(b) 速度同步但加速度不同步、及(c) 完全同步

(a) 測試軌跡二

在測試軌跡二的部分，是讓機械手臂做一個只動 y 軸的直線移動，其移動的軌跡如圖 5.3 所示，而各軸速度變化如圖 5.4 所示。由圖 5.3 的前視角(front)可以看出，無論是未具同步處理或者只有速度同步的軌跡在 y 軸作直線移動時， x 軸與 z 軸的變化是不規則的，這樣容易造成使用者在操作機械手臂時的危險，因為當使用者在下達一個命令時，機械手臂過大的移動範圍將會導致機械手臂碰撞的危險，因此本論文所提出的同步處理方法可以有效改善這個問題。

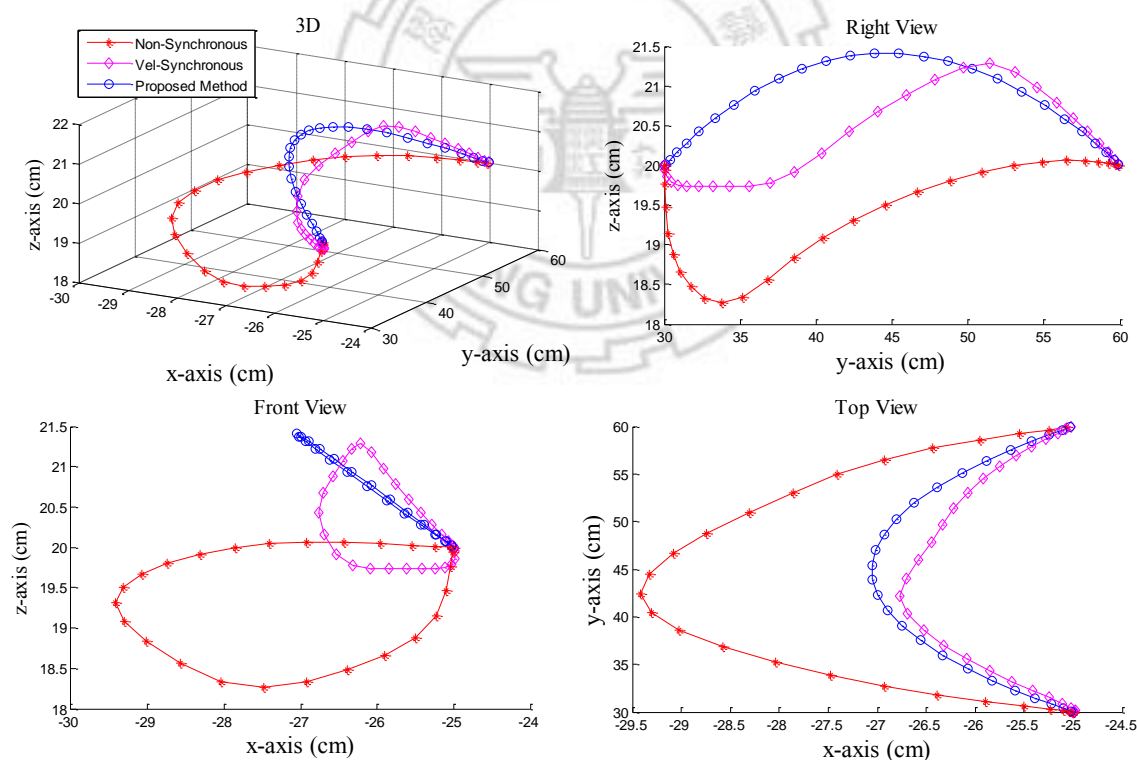


圖 5.3、多軸同步測試軌跡二之三種方法的等視角圖與三視圖

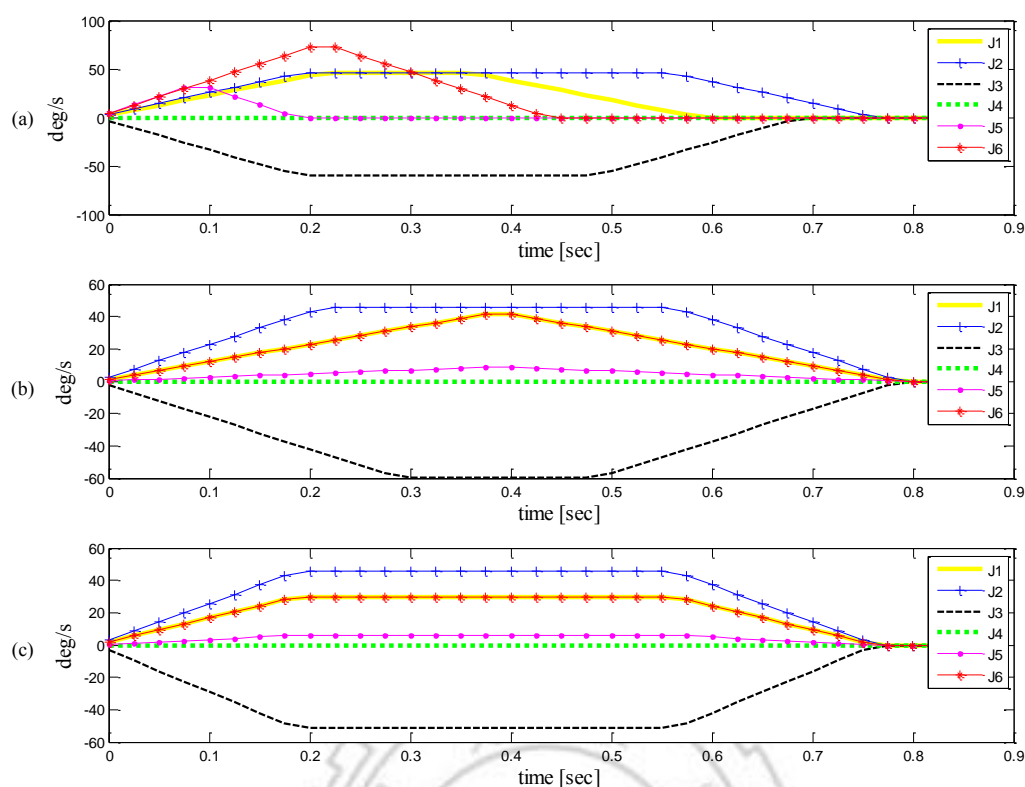


圖 5.4、多軸同步測試軌跡二之速度變化圖：(a) 未具有同步處理、(b) 速度同步但加速度不同步、及(c) 完全同步

5.2 連續多點的關節軌跡規劃之實測

本節主要針對連續多點的關節軌跡規劃進行實作測試，其輸入的條件如表 5.1 所示，其機械手臂的末端點於三維空間的軌跡如圖 5.5 所示，而六軸關節的回授資訊則如圖 5.6 所示，由實驗結果可以看出，機械手臂的末端點確實可以連續且平順的經過多個指定之路徑點。

表 5.1、連續多點的軌跡規劃之輸入條件說明表

	符號	數值
各軸最大角速度(deg/s)	v_{\max}	25、35、45、72、72、72
路徑點	\mathbf{q}_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \\ 10 \end{bmatrix}$

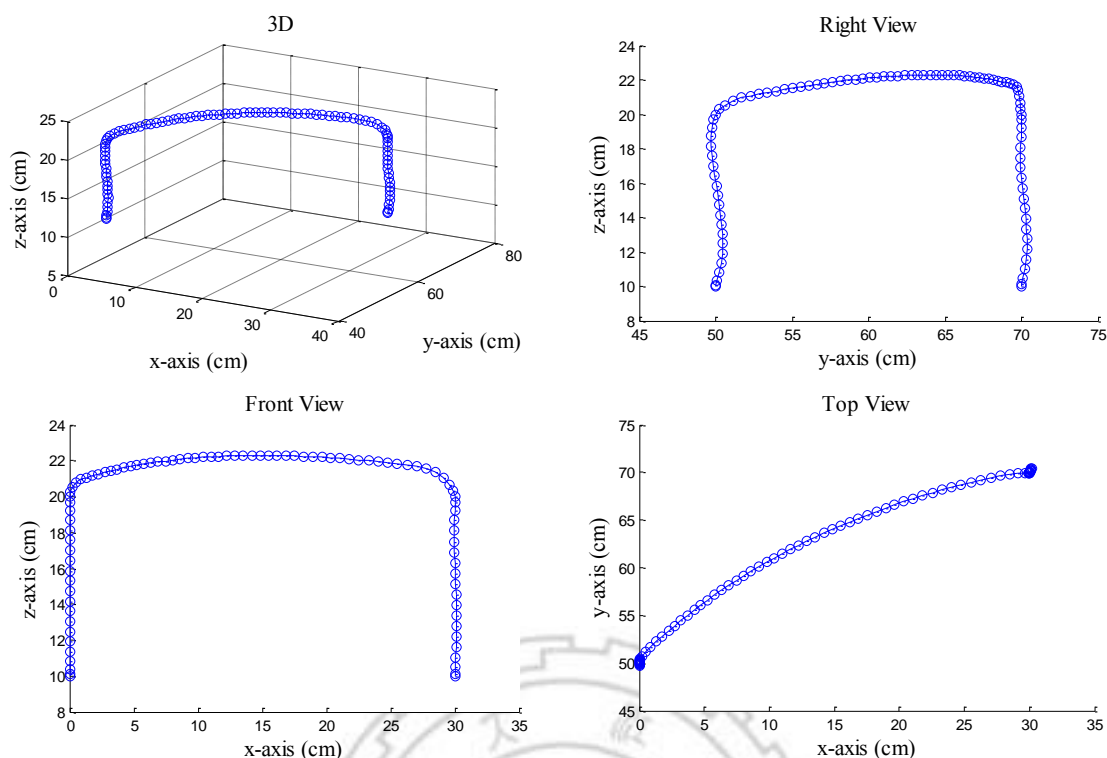


圖 5.5、連續多點的關節軌跡規劃之等視角圖與三視圖

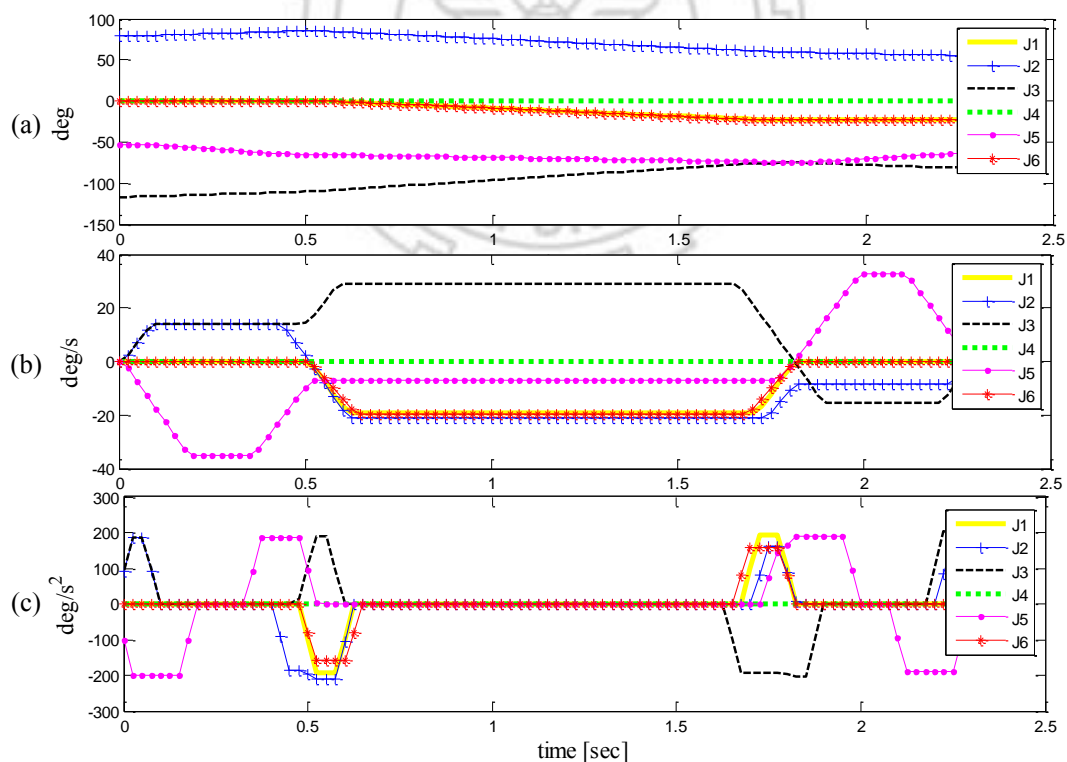


圖 5.6、連續多點的關節軌跡規劃之關節回授資訊：(a) 角度、(b) 角速度、及(c) 角加速度

5.3 工作空間的軌跡規劃之模擬與實作

本節主要針對工作空間的軌跡規劃進行模擬與實作，共使用兩套測試軌跡與對應的輸入條件，主要比較 4.3 節與 4.4 節所提出的方法。表 5.2 與表 5.3 分別為測試軌跡一與測試軌跡二的輸入條件，其中包含 S 形速度曲線的最大速度、最大加速度以及最大急衝度，而圖 5.7 與圖 5.8 則分別是測試軌跡一與測試軌跡二根據路徑點產生的控制點與路徑。以下將詳細說明模擬與實作的結果。

表 5.2、測試軌跡一之輸入條件說明表

	符號	數值
最大速度	v_{\max}	30 cm/s
最大加速度	a_{\max}	100 cm/s ²
最大急衝度	j_{\max}	240 cm/s ³
取樣時間	T_s	25 ms
插補曲線	-	3 次 NURBS 曲線
路徑點	\mathbf{q}_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

表 5.3、測試軌跡二之輸入條件說明表

	符號	數值
最大速度	v_{\max}	20 cm/s
最大加速度	a_{\max}	120 cm/s ²
最大急衝度	j_{\max}	500 cm/s ³
取樣時間	T_s	25 ms
插補曲線	-	3 次 NURBS 曲線
路徑點	\mathbf{q}_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10.5 \\ 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4.5 \\ 18.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4.5 \\ 18.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10.5 \\ 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

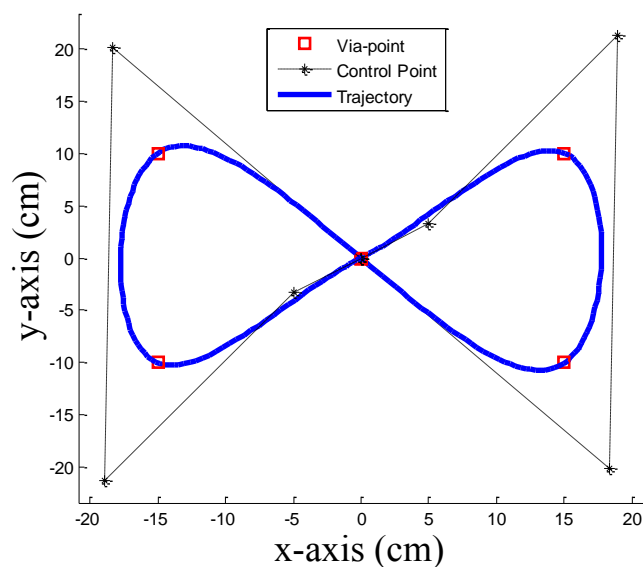


圖 5.7、測試軌跡一之路徑點、控制點與路徑示意圖

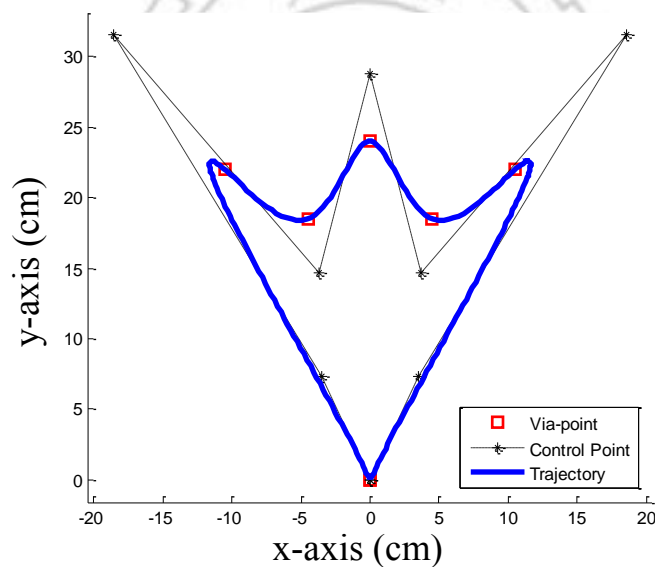


圖 5.8、測試軌跡二之路徑點、控制點與路徑示意圖

5.3.1 實驗模擬

在實驗模擬方面，本論文根據提出的方法與等速的二階泰勒展開插補法以及具有速度規劃的二階泰勒展開插補法[35]進行比較，其中因為等速的泰勒展開插補法在使用輸入條件為全速（100%的 v_{\max} ）的狀況下，

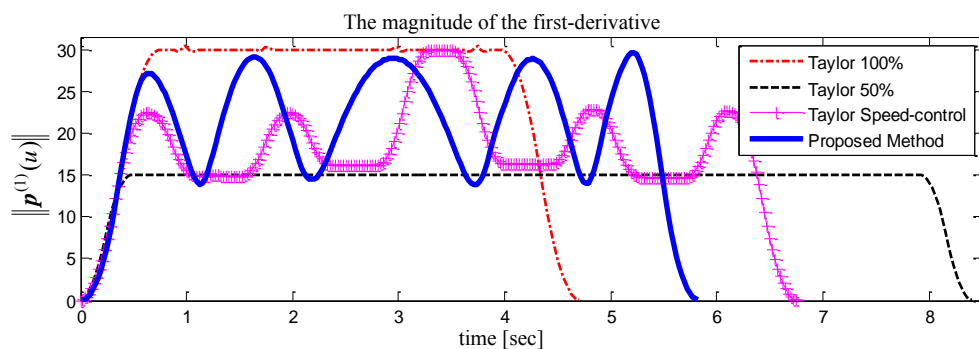
所造成的誤差與加速度將可能過大，因此為了實作比較的可行性，會將等速的泰勒展開插補法分為全速與限速(50%的 v_{\max})兩種情況。以下將分別是兩套測試軌跡的模擬結果：

(a) 測試軌跡一

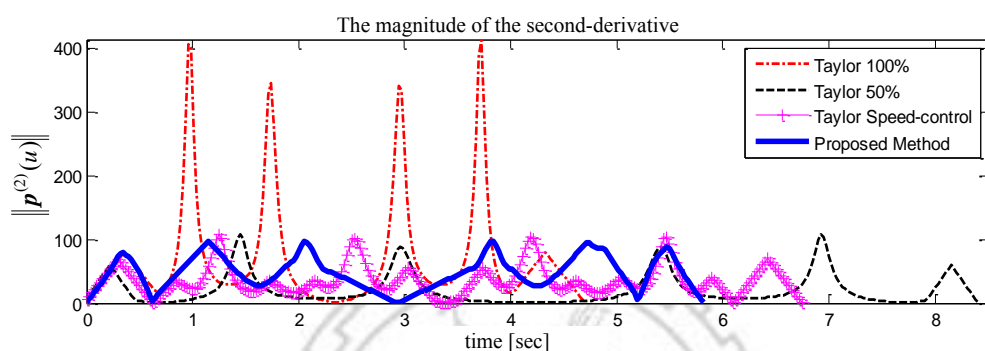
根據測試軌跡一的輸入條件表 5.3 與路徑圖 5.7，模擬四種方法所規劃的軌跡速度、加速度、參數增量變化與弦誤差如圖 5.9 所示，而各方法的比較數據則如表 5.4 所示。由結果可以看出，使用全速的泰勒展開插補法雖然移動速度最快，但會造成非常嚴重的加速度與弦誤差突波，必須降低最大移動速度至 50%才可以勉強達到規範的限制內，而具有速度控制的泰勒展開插補方法雖然可以改善上述問題，但與本論文所提出的軌跡規劃方法比較起來，本論文所提出的方法可以縮短約 0.92 秒的移動時間，並且在移動的過程中抑制最大加速度與最大弦誤差的突波發生，同時，運算時間也可以由 14.29ms 縮短至 8.32ms，整體而言，本論文所提出的方法可以比其他三種方法更有效率且達到精準的軌跡。

表 5.4、測試軌跡一之模擬數據表

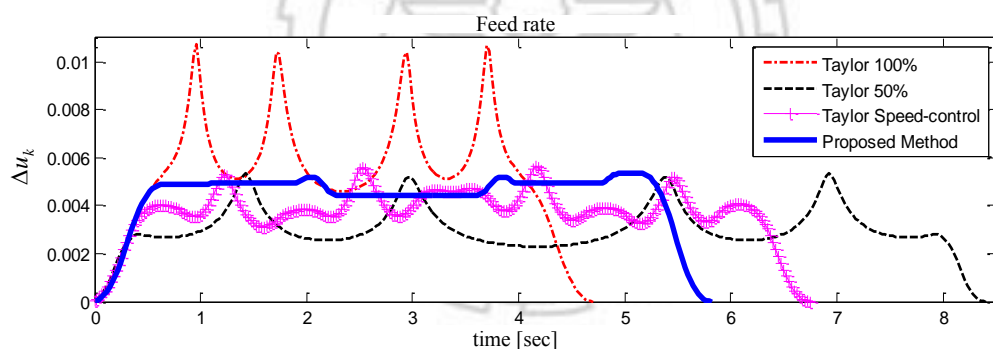
	移動時間 (sec)	運算時間 (ms)	最大加速度 (cm/s ²)	弦誤差 (mm)	
				MAX	RMS
等速二階泰勒展開 插補法：100%	4.70	6.15	413.86	0.321	0.086
等速二階泰勒展開 插補法：50%	8.40	6.23	108.79	0.085	0.023
具速度控制的二階 泰勒展開插補法	6.75	14.29	107.40	0.084	0.027
本論文之方法	5.83	8.32	96.81	0.075	0.031



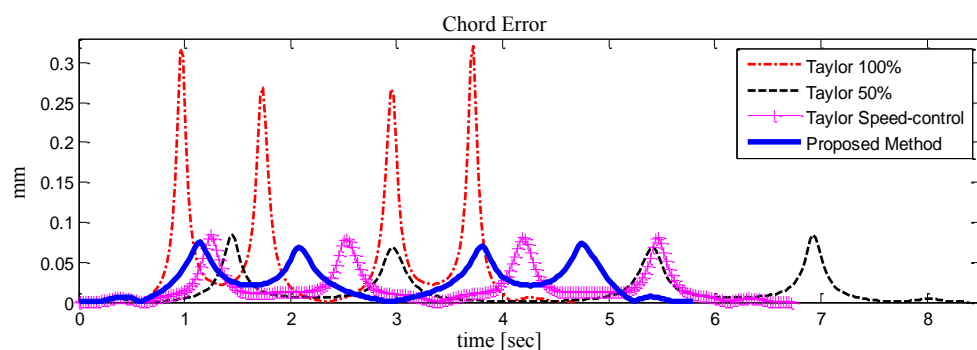
(a) 軌跡的速度變化圖



(b) 軌跡的加速度變化圖



(c) 軌跡的參數增量變化圖



(d) 軌跡的弦誤差變化圖

圖 5.9、測試軌跡一之模擬結果(速度、加速度、參數增量變化、弦誤差)

(b) 測試軌跡二

根據測試軌跡二的輸入條件表 5.3 與路徑圖 5.8，模擬四種方法所規劃的軌跡速度、加速度、參數增量變化與弦誤差如圖 5.10 所示，圖 5.11 則是將圖 5.10 放大後的結果，而各方法的比較數據則如表 5.5 所示。由結果可以看出，因測試軌跡二在轉彎處的幅度比測試軌跡一還要大，在這樣的軌跡中，使用等速泰勒展開插補法無論在全速或限速的條件下，所造成的加速度與弦誤差突波都更為嚴重，而具有速度控制的泰勒展開插補法在雖然沒這麼嚴重，但同樣也會有些許誤差，而本論文所提出的方法並不會有此問題，且同樣與測試軌跡一一樣，可以維持較好的移動效率與精準度。

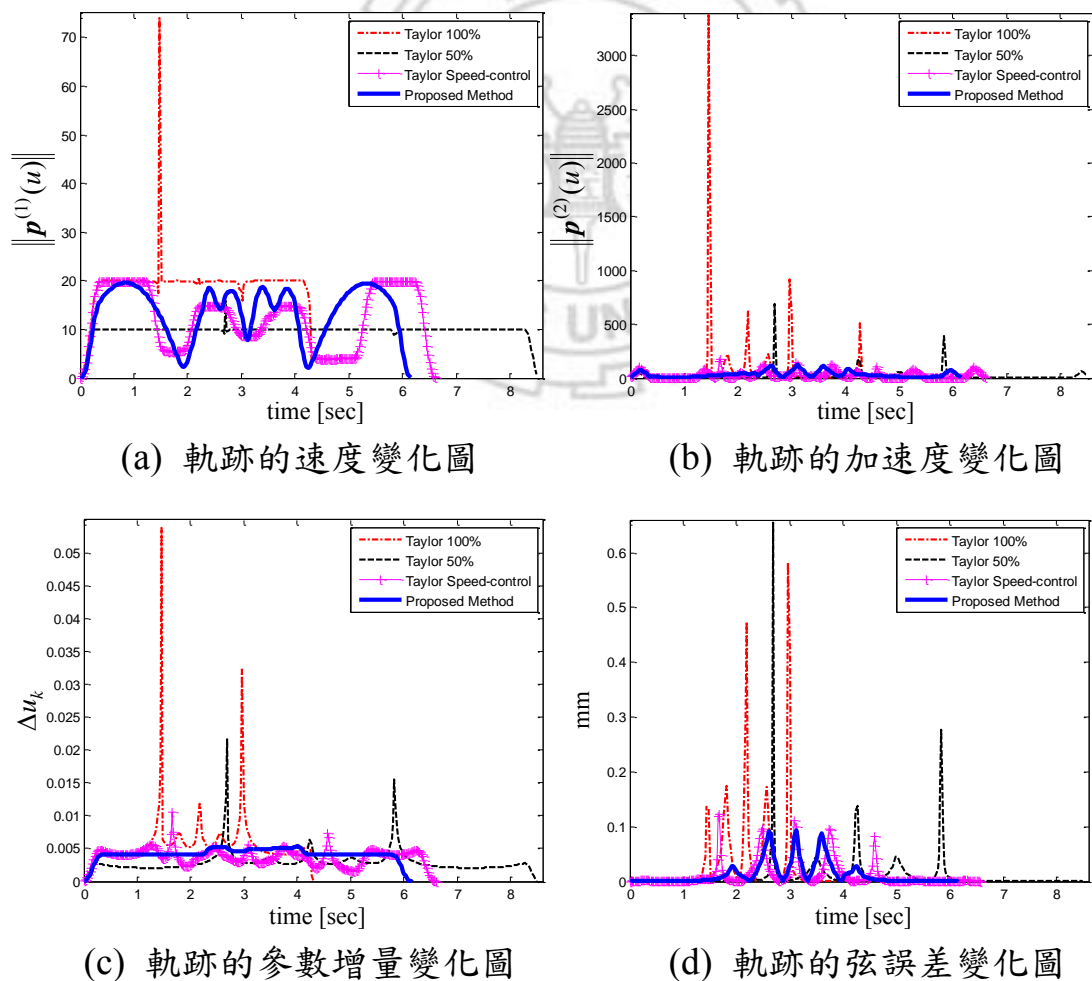
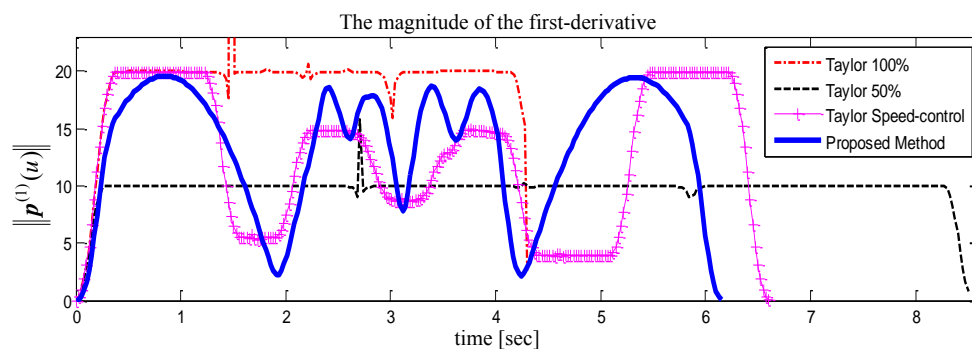
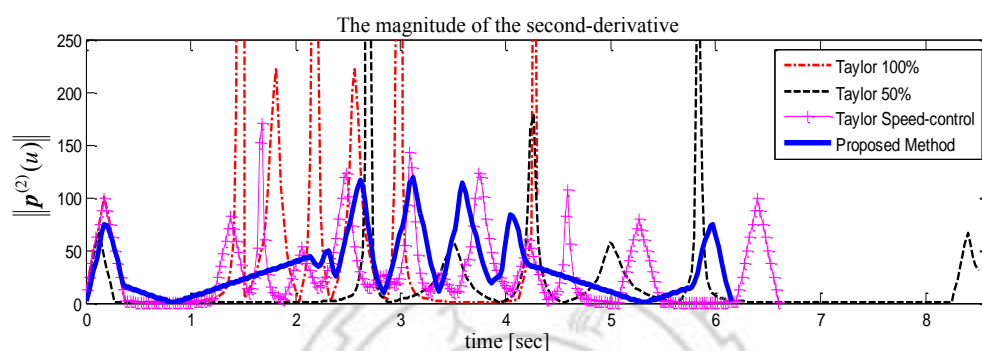


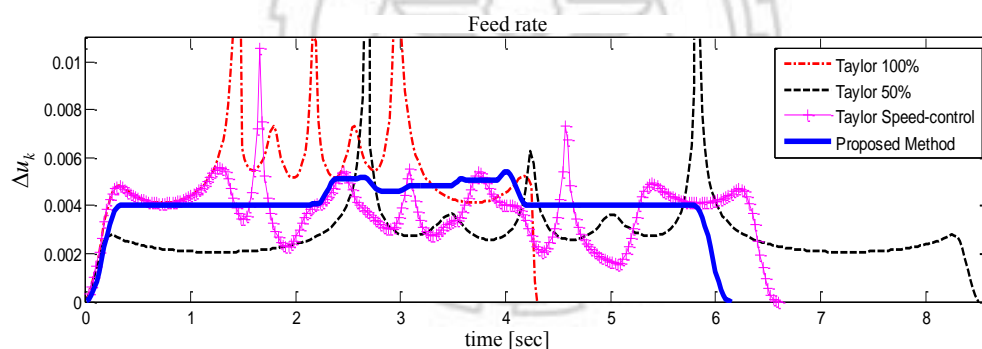
圖 5.10、測試軌跡二之模擬結果(速度、加速度、參數增量變化、弦誤差)



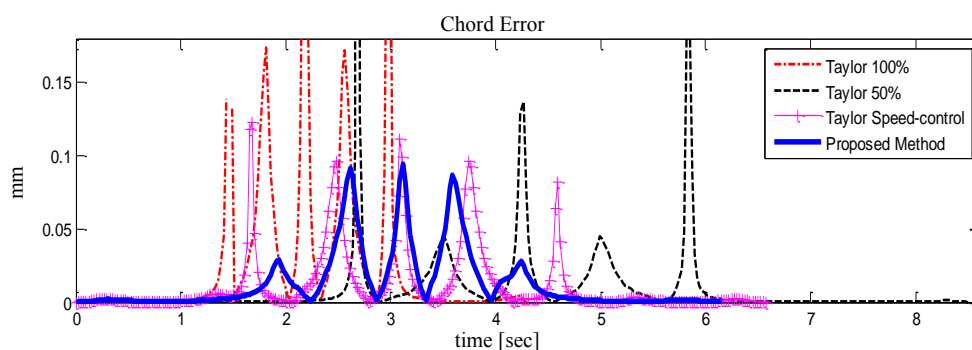
(a) 軌跡的速度變化圖



(b) 軌跡的加速度變化圖



(c) 軌跡的參數增量變化圖



(d) 軌跡的弦誤差變化圖

圖 5.11、測試軌跡二之模擬結果的放大圖

表 5.5、測試軌跡二之模擬數據表

	移動時間 (sec)	運算時間 (ms)	最大加速度 (cm/s ²)	弦誤差 (mm)	
				MAX	RMS
等速二階泰勒展開 插補法：100%	4.30	6.21	3389.68	0.581	0.083
等速二階泰勒展開 插補法：50%	8.50	6.17	691.31	0.656	0.044
具速度控制的二階 泰勒展開插補法	6.60	12.26	170.52	0.123	0.026
本論文之方法	6.15	7.19	119.53	0.094	0.024

5.3.2 實作測試

在實作測試方面，本論文採用與模擬相同的輸入條件，並實際利用本論文所提出的六軸機械手臂驗證結果。在實作測試上會加上追蹤誤差以及六軸機械手臂各軸的角度、角速度與角加速度等資訊，而運算時間與模擬結果相同，因此將不會再重複展現。而在實驗模擬中，使用等速泰勒展開插補法在全速 100%的條件下所造成的加速度過大，容易導致機械手臂馬達受損，因此並不會於實作中測試。在實作測試上主要針對測試軌跡二進行測試：

(a) 測試軌跡二

在測試軌跡二的實作上，會實際利用自行開發的六軸機械手臂夾取色筆來繪製軌跡，其過程如圖 5.12 所示。圖 5.13 則分別是使用三種方法所繪製的軌跡，可以發現等速二階泰勒展開插補法即使只使用 50%的速度，在尖銳的轉角處仍然會造成劇烈的震動。而由圖 5.14 的放大比較中可以看出，本論文提出的方法在轉角處比具速度控制的二階泰勒展開插補法更能減少震動的發生。圖 5.15 與表 5.6 為實測波形與數據比較表。

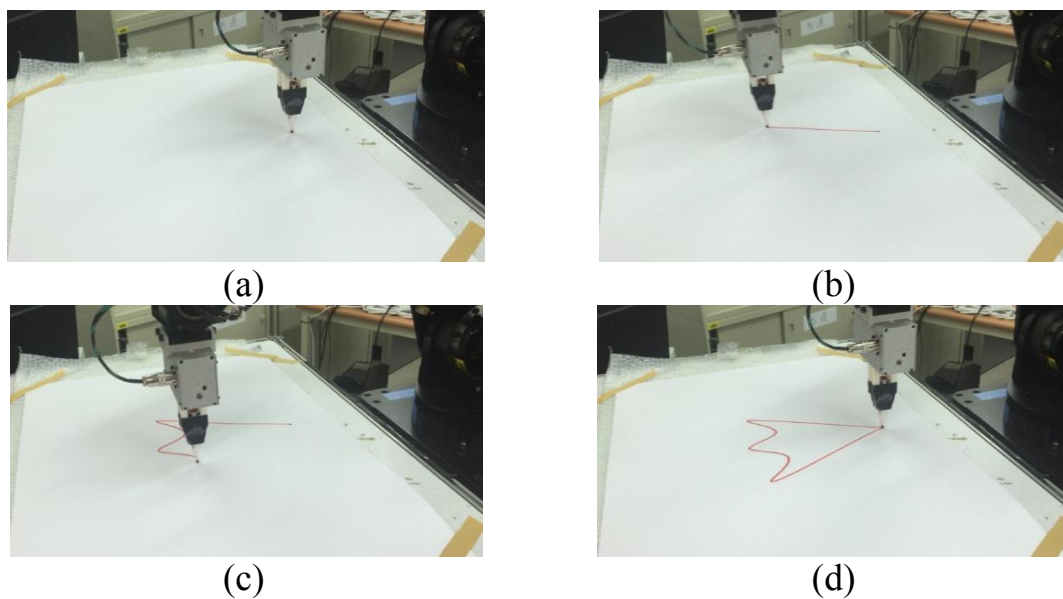


圖 5.12、實作測試軌跡二的連續畫圖示意圖

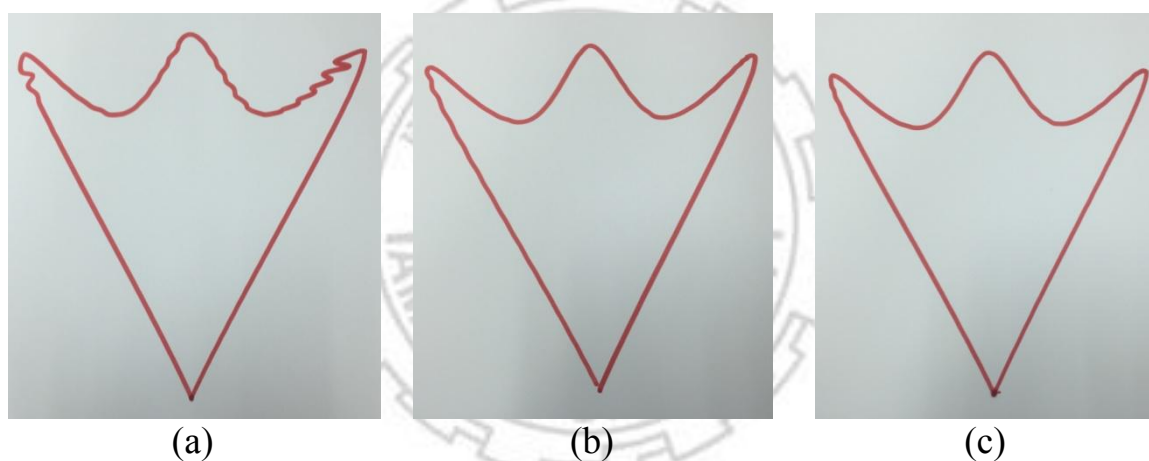


圖 5.13、測試軌跡二的繪製軌跡比較：(a) 等速二階泰勒展開插補法 50%、(b) 具速度控制的二階泰勒展開插補法、及(c) 本論文提出的方法

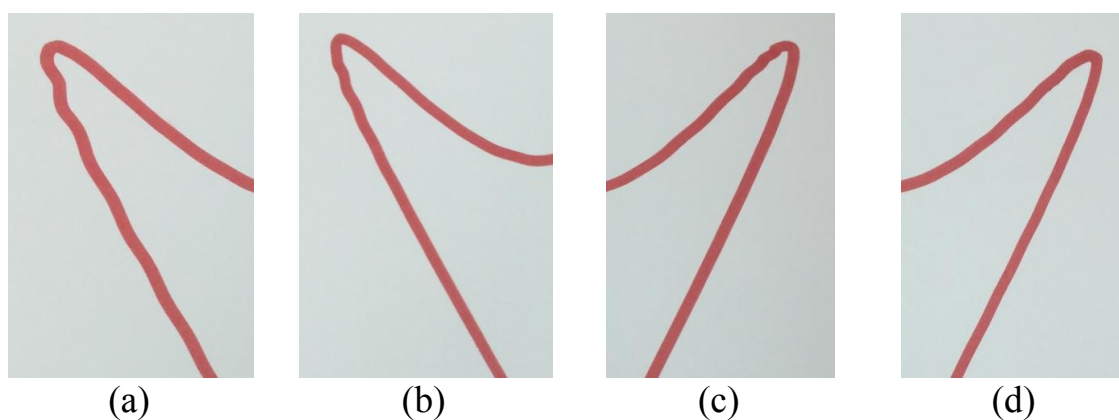


圖 5.14、測試軌跡二的尖銳處放大比較：(a)與(c)為具速度控制的二階泰勒展開插補法、(b)與(d)為本論文所提出的方法

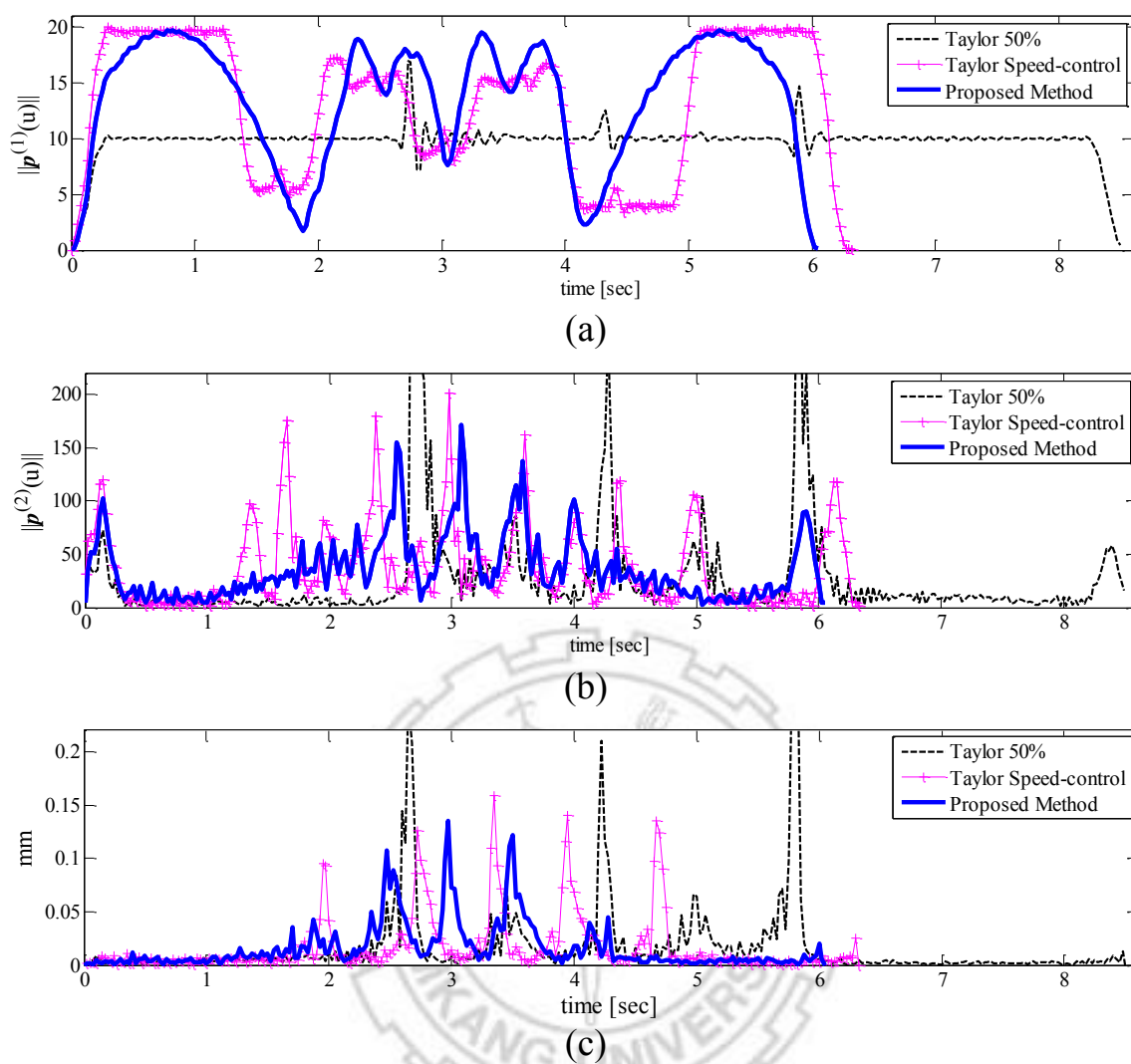


圖 5.15、測試軌跡二實作的末端點軌跡變化：(a) 速度變化、(b) 加速度變化、及(c) 弦誤差

表 5.6、測試軌跡二的實作數據表

	移動時間 (sec)	最大 加速度 (cm/s ²)	弦誤差 (mm)		追蹤誤差 (mm)	
			MAX	RMS	MAX	RMS
等速二階泰勒展開 插補法：50%	8.50	420.79	0.369	0.045	2.723	0.307
具速度控制的二階 泰勒展開插補法	6.40	201.40	0.159	0.032	0.982	0.256
本論文之方法	6.05	171.00	0.135	0.027	0.745	0.218

第 6 章 結論與未來展望

6.1 結論

本論文利用一台自行開發的六軸機械手臂實現兩種機械手臂必要的軌跡規劃方法，其包含(1) 關節空間的軌跡規劃以及(2) 工作空間的軌跡規劃。在關節空間的軌跡規劃方面，本論文主要提出一套具有啟動與結束速度限制的多軸梯形速度曲線之同步與串聯方法，其主要貢獻在於當機械手臂各軸馬達具有不同的最大速度與最大加速度之限制下，本論文所提出的方式可以使各軸馬達達到速度與加速度的同步，經由實驗證實，具有同步速度規劃的末端點軌跡可以減少移動的範圍，避免末端點軌跡的不確定性。而在多個路徑點的串聯上，本論文也提出一套串聯梯形速度曲線的方式，使機械手臂可以不必在每個路徑點下停止，而是透過梯形速度曲線串聯的方式提升機械手臂通過連續路徑點的效率；在工作空間的軌跡規劃方面，本論文主要提出一套在三維空間中基於參數式曲線的軌跡規劃方法，其主要貢獻在於當輸入連續多個路徑點時，本論文可以使用三次 NURBS 曲線對輸入的路徑點進行軌跡插補，並依據路徑點的弦長將曲線重新參數化，使產生的軌跡具備位置、速度與加速度的連續性，最後再利用軌跡的切線與曲率強度進行分段式速度規劃，經由實驗證實，本論文所提出的方法可避免使用泰勒展開插補法，並且保持軌跡的精準度與提升機械手臂於軌跡移動上的效率。

6.2 未來展望

本論文所提出的方法無論在關節空間與工作空間的軌跡規劃上都可以在速度與加速度的限制下提升移動效率，然而，機械手臂於軌跡規劃這個議題仍有許多可以發展的方向，以下將分別說明：

1. 在關節空間的軌跡規劃上，可以利用 S 形速度曲線或者 B-Spline 曲線改善梯形速度曲線的加速度不連續的問題。
2. 在分段式速度規劃方面，目前是採用預視規劃的方式，必須於規劃的過程中將整段軌跡檢查一次，如此會花費較多時間計算，未來可以加入 FIFO Buffer 的概念，根據軌跡的移動速度判斷應該預先檢查足夠減速的距離即可，如此可達到即時速度規劃又可以減少事情計算的時間。
3. 在分段式速度規劃方面，目前是利用 S 形速度曲線的方式改變參數增量，但在轉彎處的部分，有可能因為 S 形速度曲線的加速度過大而導致軌跡的加速度超速，在這個部份同樣可以透過 B-Spline 的方式改善。
4. 加入機械手臂的物理模型參數至軌跡規劃的限制中，使模擬與實際執行的差距減少，如果是七軸以上的機械手臂，因具有冗餘自由度，還可深入探討如何產生能量花費最小軌跡規劃。
5. 本論文所採用的軸控卡並未具有位置緩衝器的功能，使得在機械手臂軌跡追蹤的過程會因為自行計算的角速度有所誤差而導致下一刻的角度不夠精準，未來可以選用具有位置緩衝器的軸卡，可以提升整體機械手臂的精準度。

參考文獻

- [1] A. Piazzzi and A. Visioli, "Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, pp. 140-149, 2000.
- [2] J.W. Jeon and Y.Y. Ha, "A generalized approach for the acceleration and deceleration of industrial robots and CNC machine tools," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, pp. 133-139, 2000.
- [3] 李建翔，具有速度及加速度限制之多軸運動控制，國立台灣科技大學電機工程學系碩士論文(指導教授：施慶隆)，2000。
- [4] S. Macfarlane and E.A. Croft, "Jerk-bounded manipulator trajectory planning design for real-time applications," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 1, pp. 42-52, 2003.
- [5] K. Seki and S. Tadakuma, "Minimum jerk control of power assisting robot based on human arm behavior characteristic," *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 722-721, 2004.
- [6] C. Zheng, Y. Su, and P. Müller, "Simple online smooth trajectory generations for industrial systems," *Mechatronics*, vol. 19, no. 4, pp. 571-576, 2009.
- [7] X. ure, D. Sidobre, and K. Nguyen, "From motion planning to trajectory control with bounded jerk for service manipulator robots," *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4505-4510, 2010.
- [8] A. Gasparetto, V. Zanutto, "A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 455-471, 2007.
- [9] W. Wu, S. Zhu, and S. Liu, "Smooth joint trajectory planning for humanoid robots based on B-splines," *2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pp. 475-479, 2009.

- [10] C. Rossi and S. Savino, "Robot trajectory planning by assigning positions and tangential velocities," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 29, no. 1, pp. 139-156, 2013.
- [11] H. Liu, X. Lai, and W. Wu, "Time-optimal and Jerk-continuous Trajectory Planning for Robot Manipulators with Kinematic Constraints," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 29, no. 2, pp. 309-317, 2013.
- [12] 黃士益，八軸機械手臂之設計與控制，國立臺灣大學機械工程學研究所碩士論文(指導教授：黃漢邦)，2013。
- [13] D.C.H. Yang and T. Kong, "Parametric interpolator versus linear interpolator for precision CNC machining," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, no. 3, pp. 225-234, 1994.
- [14] S.S. Yeh and P.L. Hsu, "The speed-controlled interpolator for machining parametric curves," *Computer-Aided Design*, vol. 31, no. 5, pp. 349-357, 1999.
- [15] R. V. Fleisig and A. D. Spence, "A constant feed and reduced angular acceleration interpolation algorithm for multi-axis machining," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 33, no. 1, pp. 1-15, 2001.
- [16] R.T. Farouki and Y.F. Tsai, "Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators," *Computer-Aided Design*, vol. 33, no. 2, pp. 155-165, 2001.
- [17] R.S. Lin, "Real-time surface interpolator for 3-D parametric surface machining on 3-axis machine tools," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 40, no. 10, pp. 1513-1526, 2000.
- [18] H.T. Yau, M.T. Lin, and M.S. Tsai, "Real-time NURBS interpolation using FPGA for high speed motion control," *Computer-Aided Design*, vol. 38, no. 10, pp. 1123-1133, 2006.
- [19] 宋孟沛，快速NURBS路徑插補及幾何誤差補償方法，國立清華大學動力機械工程學系博士論文(指導教授：雷衛台)，2007。
- [20] 曾聖戎，CNC控制器之NURBS曲線插補技術發展，國立中央大學機械工程研究所碩士論文(指導教授：賴景義)，2006。
- [21] 葉志華，即時預視NURBS插補器之研究，國立中正大學機電光整合工程研究所碩士論文(指導教授：姚宏宗、陳添福)，2006。
- [22] 林明宗，開發具有預視及學習功能之運動控制器，國立中正大學機械工程所博士論文(指導教授：姚宏宗、蔡孟勳)，2007。

- [23] M.T. Lin, M.S. Tsai, and H.T. Yau, "Development of a dynamics-based NURBS interpolator with real-time look-ahead algorithm," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 47, no. 15, pp. 2246-2262, 2007.
- [24] H.T. Yau, J.B. Wang, C.Y. Hsu, and C.H. Yeh, "PC-based controller with real-time look-ahead NURBS interpolator," *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 4, no. 4, pp. 331-340, 2007.
- [25] M.S. Tsai, H.W. Nien, and H.T. Yau, "Development of an integrated look-ahead dynamics-based NURBS interpolator for high precision machinery," *Computer-Aided Design*, vol. 40, no. 5, pp. 554-566, 2008.
- [26] 林文煜, *CNC工具機之NURBS插值器速度控制規劃*, 國立交通大學機械工程學系碩士論文(指導教授: 李安謙), 2008。
- [27] M.T. Heng, *Smooth and time-optimal trajectory generation for high speed machine tools*, Master Thesis, Applied Science in Mechanical Engineering, The University of Waterloo, Canada, 2008.
- [28] W.T. Lei and S.B. Wang, "Robust real-time NURBS path interpolators," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 49, no. 7-8, pp. 625-633, 2009.
- [29] A.C. Lee, M.-T. Lin, Y.-R. Pan, and W.Y. Lin, "The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools," *Computer-Aided Design*, vol. 43, no. 6, pp. 612-628, 2011.
- [30] D. Du, Y. Liu, X. Guo, K. Yamazaki, and M. Fujishima, "An accurate adaptive NURBS curve interpolator with real-time flexible acceleration/deceleration control," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 26, no. 4, pp. 273-281, 2010.
- [31] X. Wang, J.W. Wang, Z. Rao, "An adaptive parametric interpolator for trajectory planning," *Advances in Engineering Software*, vol. 41, no. 2, pp. 180-187, 2010.
- [32] 廖家豪, *五軸CNC工具機插補器之研究*, 國立中正大學機械工程研究所碩士論文(指導教授: 林榮信、陳世樂), 2010。
- [33] H. Dong, B. Chen, Y. Chen, J. Xie and Z. Zhou, "An accurate NURBS curve interpolation algorithm with short spline interpolation capacity," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 63, no. 9-12, pp. 1257-1270, 2012.
- [34] Y. Wang, H. Liu, and S. Yu, "Curvature-based real-time NURBS surface interpolator with look-ahead ACC/DEC control," *Mathematics in Computer Science*, vol. 6, no. 3, pp. 315-326, 2012.

- [35] H. Zhao, L.M. Zhu, and H. Ding, "A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 65, pp. 88-98, 2013.
- [36] D.K. Baek, S.H. Yang, and T.J. Ko, "Precision NUR S interpolator based on recursive characteristics of NUR S," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 65, no. 1-4, pp. 403-410, 2013.
- [37] ROBOTIS : <http://www.robotis.com/index/>
- [38] 李育昇，六軸機械手臂與音圈馬達夾爪的設計，淡江大學電機工程學系碩士論文(指導教授：翁慶昌)，2014。
- [39] 研華科技股份有限公司之工業電腦 IPC-5120 : <http://www.advantech.tw/>
- [40] 和椿科技股份有限公司之八軸軸控卡 MC8881P : <http://www.aurotek.com.tw/TW/>
- [41] 力浦電子股份有限公司之 IO 控制卡 LeapIO48 : <http://www.leap.com.tw/>
- [42] 松下伺服馬達與驅動器 : <http://industrial.panasonic.com/ww/products/motors-compressors/fa-motors/ac-servo-motors>
- [43] NABTESCO 行星式減速機 : <http://www.kuangho.com.tw/chinese/nabtesco.html>
- [44] Harmonic Drive 諧和式減速機 : <http://www.shijou.com.tw/hds/hd/main.html>
- [45] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*, 3rd Ed, New York, NY, USA: Prentice Hall, 2004.
- [46] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 2004.
- [47] M. A. Ali, H. A. Park, and C. S. G. Lee, "Closed-form inverse kinematic joint solution for humanoid Robots," *Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp.704-709, 2010.
- [48] X. Li, "Optimizing S-curve velocity for motion control," *Far East Journal of Applied Mathematics*, vol. 48, no. 1, pp. 1-15, 2010.
- [49] K.D. Nguyen, T.C. Ng, and I.M. Chen, "On algorithms for planning S-curve motion profiles," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 99-106, 2008.

- [50] L. Biagiotti and C. Melchiorri, *Trajectory planning for automatic machines and robots*, Springer, 2008.
- [51] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical recipes 3rd edition: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2007.
- [52] P. Alfeld, M. Neamtu, and L.L. Schumaker, “ernstein-Bézier polynomials on spheres and sphere-like surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 13, no. 4, pp. 333-349, 1996.
- [53] 吳新逸，空間中具曲率連續的B-Spline封閉曲線建構，國立成功大學機械工程學系碩士論文(指導教授：許來興)，2004。
- [54] 賴俊誠， α -spline與NURBS雕塑曲面設計之研究，國立中央大學電機工程學系碩士論文(指導教授：歐石鏡)，2000。
- [55] L. Piegl and W. Tiller, *The NURBS book, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [56] 沈宜郡，基於B-Spline曲線之六軸機械手臂繪圖系統，淡江大學電機工程學系碩士論文(指導教授：翁慶昌)，2013。
- [57] 連思豪，六軸機械手臂之NURBS插補器設計，淡江大學電機工程學系碩士論文(指導教授：翁慶昌、許駿飛)，2014。
- [58] S.S. Yeh and P.L. Hsu, “Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error,” *Computer-Aided Design*, vol. 34, no. 3, pp. 229-237, 2002.
- [59] A. Bardine, S. Campanelli, P. Foglia, and C.A. Prete, “NUR S interpolator with confined chord error and tangential and centripetal acceleration control,” *2010 International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, pp. 489-496, 2010.
- [60] 黃英哲，以幾何模型為基礎之高精度插補器設計，國立中正大學機械工程研究所碩士論文(指導教授：蔡孟勳)，2003。
- [61] Simpson's Rule : <http://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html>.
- [62] J.H. Mathews and K.K. Fink, *Numerical methods using matlab, 4th Edition*, Prentice-Hall Inc, Upper Saddle River, New Jersey, pp. 391-395. 2004.
- [63] W.T. Lei, M.P. Sung, L.Y. Lin, and J.J. Huang, “Fast real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools,” *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 47, no. 10, pp. 1530-1541, 2007.

研究著作

1. 期刊論文

- [1] C.Y. Tsai, C.C. Wong, C.J. Yu, C.C. Liu, and T.Y. Liu, "A hybrid switched reactive-based visual servo control of 5-DOF robot manipulators for pick-and-place tasks," *IEEE Systems Journal*, vol. 9, no. 1, pp. 119-130, 2015.
- [2] S.A. Li, J. Hsu, C.C. Wong, and C.J. Yu, "Hardware/software co-design for particle swarm optimization algorithm," *Information Sciences*, vol. 181, pp. 4582-4596, 2011.

2. 會議論文

- [1] C.C. Wong, C.J. Yu, and Y.C. Lai, "A PC-based configuration for the six-axis vertical articulated robot manipulator," *2014 CACS International Automatic Control Conference*, Nov. 2014.
- [2] C.C. Wong, C.J. Yu, H.S. Chang, and C.C. Liao, "Electric 2-finger parallel gripper with non-force sensor for multi-object grasping," *2014 CACS International Automatic Control Conference*, Nov. 2014.
- [3] C.C. Wong, C.J. Yu, and S.H. Lien, "Linear trajectory planning of the six-axis robot manipulator with a trapezoidal-velocity constraint," *2014 CACS International Automatic Control Conference*, Nov. 2014.
- [4] C.C. Wong, C.J. Yu, and S.H. Lien, "Trajectory generator design by using b-spline curves," *2014 International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Systems (ARIS 2014)*, Taipei, Taiwan, Jun. 6-8, 2014.
- [5] C.C. Wong, C.J. Yu, and Y.C. Lai, "Vision-based robot arm system design for air-hockey," *2014 International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Systems (ARIS 2014)*, Taipei, Taiwan, Jun. 6-8, 2014.
- [6] C.Y. Tsai, C.C. Wong, C.J. Yu, C.C. Liu, and M.H. Tsai, "An image-based reactive planning method for robot manipulator control," *The 43rd International Symposium on Robotics (ISR 2012)*, pp. 285-288, Taipei, Taiwan, Aug. 29-31, 2012.

- [7] C.C. Wong, C.J. Yu, H.S. Chang, H.C. Hsu, and M.H. Tsai, "Vision-based autonomous robot manipulators for ball grasping," *2012 National Symposium on System Science and Engineering* (NSSSE 2012), pp. 943-947, Keelung, Taiwan, Jun. 16-17, 2012. (In Chinese)
- [8] C.J. Yu, Y.J. Shen, T.K. Liu, and C.C. Wong, "Design of autonomous mobile robot with a robot arm," *2011 International Conference of Service and Interactive Robots*, Taichung, Taiwan, Nov. 25-27, 2011.
- [9] C.J. Yu, Y.H. Chen, and C.C. Wong, "Path planning method design for mobile robot," *SICE Annual Conference 2011* (SICE 2011), pp. 1681-1686, Tokyo, Japan, Sep. 13-18, 2011.
- [10] S.A. Li, C.C. Wong, C.J. Yu, and J. Hsu, "Hardware/software co-design for particle swarm optimization algorithm," *2010 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics* (SMC 2010), pp. 3762-3767, Istanbul, Turkey, Oct. 10-13, 2010.
- [11] S.A. Li, C.J. Yu, C.C. Chiang, and C.C. Wong, "Hardware/software co-design method for tracking skin object," *2009 National Symposium on System Science and Engineering* (NSSSE 2009), pp. 313-317, Taipei, Taiwan, Jun. 26, 2009. (In Chinese)
- [12] C.Y. Ho, H.C. Teng, C.C. Liu, C.Y. Chen, C.J. Yu, and C.C. Wong, "Omnidirectional vision-based Monte Carlo localization for autonomous robot," *2009 National Symposium on System Science and Engineering* (NSSSE 2009), pp. 297-302, Taipei, Taiwan, Jun. 26, 2009. (In Chinese)
- [13] H.C. Teng, C.C. Hsu, C.C. Wong, C.Y. Ho, C.Y. Chen, and C.J. Yu, "Dual-circle self-localization algorithm applied in omnidirectional vision autonomous mobile robot system," *2009 National Symposium on System Science and Engineering* (NSSSE 2009), pp. 287-292, Taipei, Taiwan, Jun. 26, 2009. (In Chinese)(Best Student Paper Award)
- [14] C.C. Wong, H.Y. Wang, K.H. Chen, C.J. Yu, and N. Aoyama "Motion controller design for two-wheeled robot based on a batch learning structure," *SICE Annual Conference 2008* (SICE 2008), pp. 772-776, Tokyo, Japan, Aug. 20-22, 2008.

3. 專利發明

- [1] 專利名稱：「粒子群最佳化演算法之加速裝置」，創作人：翁慶昌、李世安、余家潤，專利編號：新型第 M370768 號。

獲獎經歷

- [1] 參加「上銀科技公司」主辦的「第七屆上銀智慧機器手實作競賽」，榮獲「骨牌效應」單項冠軍、「機械揮毫」單項冠軍、「眼明手快」單項冠軍、「拍球入洞」單項冠軍以及總冠軍(四個單項競賽總積分排名第一)。(地點：台北南港世貿；日期：2014.08.01)(擔任隊長)
- [2] 參加「經濟部」主辦，由「財團法人精密機械研究發展中心」承辦的「2013年智慧機器人產品創意競賽：工業型機器人組」，榮獲第二名。(地點：台北南港世貿；日期：2013.08.30)(擔任隊長)
- [3] 參加「上銀科技公司」主辦的「第六屆上銀智慧機器手實作競賽」，榮獲「機械揮毫」單項冠軍、「拍球入洞」單項冠軍以及亞軍(四個單項競賽總積分排名第二)。(地點：台北南港世貿；日期：2013.08.29)(擔任隊長)
- [4] 參加「國際機器人足球聯盟(Federation of International Robot-soccer Association, FIRA)」主辦的「2012年FIRA世界盃機器人足球賽：中型視覺自主機器人組(RoboSot)」比賽，榮獲正規足球賽(Robot Soccer)冠軍以及技術挑戰賽(Technical Challenge)冠軍。(地點：英國、布魯斯托；日期：2012.08.20~2012.08.25)
- [5] 參加「上銀科技公司」主辦的「第四屆上銀智慧機器手實作競賽」，榮獲佳作。(地點：台北南港世貿；日期：2011.09.03)(擔任隊長)
- [6] 參加「經濟部工業局與新光保全公司」主辦，由「財團法人精密機械研究發展中心」承辦的「99新光保全智慧型保全機器人競賽」，榮獲冠軍。(地點：台北世貿一館；日期：2010.10.19)(擔任隊長)
- [7] 參加「國際機器人足球聯盟(Federation of International Robot-soccer Association, FIRA)」主辦的「2010年FIRA世界盃機器人足球賽：中型視覺自主機器人組(RoboSot)」比賽，榮獲冠軍。(地點：印度、班加羅爾；日期：2010.08.15~2010.08.19)

- [8] 參加「台灣機器人學會」主辦的「第一屆大專盃國際機器人實作競賽(2009 IRHOCS)：NIRST-Robot Challenge_Basketball Robot: NI 籃球賽機器人競賽」，榮獲第二名。(地點：銘傳大學台北校區逸仙堂；日期：2010.02.06~2010.02.07)
- [9] 參加「2009 海峽兩岸機器人足球邀請賽：家庭服務機器人組」，榮獲季軍。(地點：廣州、華南理工大學；日期：2009.11.05~2009.11.10)
- [10] 參加「國際機器人足球聯盟(Federation of International Robot-soccer Association, FIRA)」主辦的「2009 年 FIRA 世界盃機器人足球賽：中型視覺自主機器人組(RoboSot)」比賽，榮獲冠軍。(地點：韓國、仁川；日期：2009.08.16~2009.08.20)
- [11] 參加「經濟部工業局與新光保全公司」主辦，由「財團法人精密機械研究發展中心」承辦的「98 新光保全智慧型保全機器人競賽」，榮獲佳作。(地點：台北南港世貿；日期：2009.08.05)
- [12] 參加「中華民國系統學會」主辦的「2009 中華民國系統科學與工程研討會學生論文競賽」，榮獲最佳學生論文獎第二名，論文名稱：應用雙圓定位法的全方位視覺機器人定位系統。(地點：淡江大學；日期：2009.06.26)
- [13] 參加「經濟部工業局與新光保全公司」主辦，由「財團法人精密機械研究發展中心」承辦的「97 年智慧型機器人產品創意競賽：新光保全獎」，榮獲佳作。(地點：臺大醫院國際會議中心 3F；日期：2008.11.01)
- [14] 參加「ALTERA 公司」主辦的「2008 年 Altera 亞洲創新設計大賽」，榮獲冠軍，作品名稱為「智慧型即時監控系統之 SoPC 設計」。(地點：大同大學；日期：2008.11.01)
- [15] 參加「國際機器人足球聯盟(Federation of International Robot-soccer Association, FIRA)」主辦的「2008 年 FIRA 機器人足球世界杯：中型視覺自主機器人組(RoboSot)」比賽，榮獲冠軍。(地點：中國、青島；日期：2008.07.21~2008.07.25)
- [16] 參加「RoboCup 聯盟」主辦的「2008 年 RoboCup 世界杯機器人足球賽：中型機器人組(Middle Size League)」比賽，晉級十二強。(地點：中國、蘇州；比賽日期：2008.07.14~2008.07.20)
- [17] 參加「台灣機器人學會」主辦的「2007 台灣智慧型機器人大賽：RoboCup 中型機器人足球賽組」，榮獲冠軍。(地點：台南、南台科技大學；日期：2007.10.19~2007.10.20)