

## 目 录

摘要 .....	i
ABSTRACT .....	ii
1 绪论 .....	1
1.1 研究背景及意义 .....	1
1.2 国内外研究现状 .....	2
1.2.1 张量鲁棒主成分分析研究现状 .....	2
1.2.2 张量完备化研究现状 .....	6
1.3 本文主要工作 .....	9
1.4 论文结构 .....	10
2 预备知识 .....	11
2.1 张量基础概念 .....	12
2.2 张量奇异值分解及张量核范数 .....	15
2.3 本章小结 .....	16
3 基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析 .....	17
3.1 相关知识 .....	18
3.1.1 鲁棒估计与 Huber 函数 .....	18
3.1.2 改进的 Huber 函数 .....	18
3.1.3 改进的 Huber 张量核范数 .....	20
3.2 模型建立 .....	20
3.3 算法优化 .....	24
3.4 实验结果与分析 .....	26
3.4.1 模拟数据实验 .....	28
3.4.2 彩色图像去噪实验 .....	30
3.4.3 视频序列去噪实验 .....	33
3.4.4 算法收敛性分析 .....	36
3.5 本章小结 .....	37
4 基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化 .....	38

4.1 相关知识 .....	38
4.1.1 张量平滑先验及全变分正则 .....	38
4.1.2 基于 Huber 损失的张量完备化 .....	40
4.2 模型建立 .....	41
4.3 算法优化 .....	42
4.4 实验结果与分析 .....	45
4.4.1 模拟数据实验 .....	45
4.4.2 彩色图像补全实验 .....	47
4.4.3 多光谱图像补全实验 .....	50
4.5 本章小结 .....	52
5 总结和展望 .....	53
5.1 论文工作总结 .....	53
5.2 论文工作展望 .....	53
参考文献 .....	55
致谢 .....	63

## 摘要

低秩张量，例如彩色图像、视频序列、多光谱图像等，在实际生活和科学的研究中起着关键的作用。其中彩色图像是计算机视觉领域进行分类、检测和分割等任务常见的研究对象，而在遥感领域，传感器采集的数据会以多光谱、高光谱等张量结构的数据呈现。然而张量数据在采集和传输的过程中往往受到成像环境和传输环境的因素影响，从而导致数据出现退化的情况，例如噪声污染和信息缺失等。这在一定程度上增加了张量数据在后续研究中的困难。因此，对于观测到的退化张量，如何通过算法恢复干净的原始张量已经成为机器学习和数据挖掘领域热门的研究问题。为了应对上述挑战，本文针对张量恢复领域中重要的张量鲁棒主成分分析和张量完备化问题，利用原始张量数据中奇异值分布的先验信息提出了一种改进的张量核范数。并进一步考虑真实张量数据中存在的局部平滑性质，使用全变分正则项来提升张量恢复模型。具体研究工作如下：

1. 针对传统的张量核范数没有考虑原始张量奇异值大小分布的不足，本文提出了一种改进的 Huber 张量核范数。该范数使用改进的 Huber 函数来约束张量奇异值，进而实现对原始张量奇异值的准确恢复。同时为了应对张量受噪声污染问题，提出了基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。根据半二次理论和交替方向乘子法设计了一种有效的求解算法。在模拟张量数据以及真实张量数据上进行的实验验证了所提出模型在张量低秩恢复上的有效性。
2. 为了应对张量数据在部分缺失情况下的恢复问题。本文同时考虑真实张量存在的低秩先验和局部平滑先验，使用改进的 Huber 张量核范数来对张量低秩性进行刻画。同时增加全变分正则化项来提升恢复张量的局部平滑性质，进而提升张量恢复效果。针对张量缺失问题，提出了基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型。在算法优化方面，基于对称高斯 - 赛德尔交替方向乘子法设计求解方法。最后通过模拟张量数据以及真实张量数据的实验结果验证了所提出模型在张量补全任务的性能。

**关键词：**张量鲁棒主成分分析；张量完备化；张量核范数；全变分正则；半二次理论；交替方向乘子法

## ABSTRACT

Low-rank tensor data, such as color images, video sequences, hyperspectral images, etc., plays a crucial role in real-world applications and scientific research. For example, color images are important research objects for tasks such as classification, detection, and segmentation in the field of computer vision. In remote sensing, the data collected by sensor is usually presented in tensors such as multispectral and hyperspectral images. However, tensor data is often corrupted by noises and missing values during the acquisition and transmission process because of the limitations of imaging environments and transmission conditions. This significantly impacts the application of tensor data in subsequent research. Therefore, it is a popular topic to recover the original (clean) tensor from the observed (degraded) tensor in the fields of machine learning and data mining. In order to address the above challenges, this paper proposes an improved tensor nuclear norm for the tensor robust principal component analysis and tensor completion problems. The proposed norm can exploit priori information about the singular value distribution in the original tensor. Furthermore, this paper considers the local smoothness present in real-world tensor, and the total variation regularization is employed to enhance the tensor recovery model. The contributions of this paper are as follows:

1. The traditional tensor nuclear norm fails to consider the distribution of singular value magnitudes in the original tensor. To address the limitation, this paper proposes a Tensor Improved Huber Norm (TIHN) which employs the improved Huber function to constrain the tensor singular values. The proposed TIHN enables accurate recovery of the singular values in the original tensor. Additionally, a Huber Tensor Robust Principal Component Analysis (HTR-PCA) model is introduced to recover the clean tensor from observation. An efficient algorithm is designed based on the half-quadratic theory and the alternating direction method of multiplier framework. Experiments conducted on both simulated and real-world tensor data validate the effectiveness of the proposed model in restoring the low-rank tensors.
2. For the tensor completion problem with missing values, this paper simultaneously considers the low-rank prior and local smoothness prior inherent in real tensors. The TIHN is used to characterize the low-rank property and the total variation regularization term is added to enhance the local smoothness property. A Huber Tensor Completion with Total Variation

Regularization (HTC\_TV) model is proposed to complete the tensor with missing values. In terms of optimization, an efficient algorithm is designed based on the symmetric Gauss- Seidel based alternating direction method of multiplier framework. Finally, experimental results on simulated tensor as well as real-world tensor demonstrate the performance of the proposed models in addressing tensor completion with different missing rates.

**Keywords:** tensor robust principal component analysis; tensor completion; tensor nuclear norm; total variation regularization; half-quadratic theory; alternating direction method of multiplier

# 1 絮论

## 1.1 研究背景及意义

随着计算机与大数据技术学科的不断发展。无论是科研、工作、还是人们的日常生活中，数据出现的频率越来越高，规模也越来越大，同时数据结构也越来越复杂。其中海量的数据以张量的结构出现，例如彩色图像、高光谱图像、多光谱图像、医学图像、彩色视频等。与向量和矩阵形式的数据相比，张量数据具有丰富的空间与结构信息，蕴含着无限的价值。但随之而来的是，海量的信息也对数据处理能力提出了更高的要求。因此，张量数据的复杂性对于科学研究与日常生活来说既是机遇，亦是挑战。如今，与张量数据有关的研究被广泛应用于机器学习 (Liu *et al.* 2014, Sidiropoulos *et al.* 2017)、数据挖掘 (Kolda and Sun 2018)、和人工智能 (Newman *et al.* 2018, Panagakis *et al.* 2021) 等众多领域，为大数据处理技术的快速发展提供强大的动力。

张量数据在带来巨大的研究与应用前景的同时，也面临着许多不足。比如张量数据由于其复杂的结构，在数据采集和处理的过程中更容易受到内在和外在因素的影响。进而出现数据受噪声污染和部分缺失等退化现象，例如在彩色图像、多光谱图像等数据的采集、存储、传输过程中可能会受到噪声污染、相机抖动、传输信号丢失等因素制约，使得最后得到的图像往往存在噪声或部分缺失的问题 (巫勇等 2021)。这种数据污染或缺失问题又会在处理过程中影响后续的计算结果，导致最终模型的不准确性与不可靠性。因此，如何解决张量数据质量退化的问题，即从观测到的带噪声或缺失的张量数据中恢复出原始的张量数据成为重要的研究问题。

近些年来，由于数据恢复需求的增大，有关向量及矩阵数据的去噪及补全方法得到了深入研究，受到压缩感知理论 (Candès and Wakin 2008, 石光明等 2009, 戴琼海 2011) 的启发，基于矩阵数据的恢复算法被提出并得到了广泛应用。例如 Candes 等人 (2011) 提出能够对受污染矩阵数据进行去噪的鲁棒主成分分析方法 (Robust Principal Component Analysis, RPCA) 和对缺失矩阵进行补全的低秩矩阵完备化方法 (Low-Rank Matrix Completion, LRMC)。这两种方法都对潜在的干净矩阵有着低秩的先验假设。然后根据该先验来恢复出潜在低秩矩阵。而与矩阵结构的数据不同，张量结构数据的秩没有统一的定义，因此对于张量结构数据低秩性的刻画是富有挑战性的。而随着张量结构数据的不断增多，有关张量结构数据的恢复技术亦成为了数据恢复领域的热点。同时，由于矩阵结构的数据恢复算法有着非常完善的理论与框架，这也为张量数据

的恢复算法的研究打下了夯实的基础。如今有关张量鲁棒主成分分析 (Tensor Robust Principal Component Analysis, TRPCA) 和低秩张量完备化 (Low-Rank Tensor Completion, LRTC) 的研究也在不断发展 (Liu *et al.* 2016, Lu *et al.* 2019)。特别地, 由于张量结构的数据相比向量和矩阵具有更加丰富的空间结构, 这使得张量结构数据的恢复效果在诸多领域例如彩色图像去噪 (Bengua *et al.* 2017, 贾慧迪等 2019)、高光谱图像恢复 (蔡明娇等 2023, 赵梓渊等 2023)、背景建模 (Sobral *et al.* 2017, 韩乐等 2019) 等研究任务中取得了良好的效果, 并成为机器学习、数据挖掘领域的重要技术。综上所述, 本研究具有很强的研究意义及应用价值。

## 1.2 国内外研究现状

随着日常生活与科学研究中心涉及的张量数据逐渐增多, 张量数据在获取以及传输的过程中不可避免地会包含噪声污染以及缺失等情况, 所以有关低秩张量恢复的研究已经成为国内外研究的热点。本文将从张量鲁棒主成分分析以及张量完备化两个问题出发, 介绍当前低秩张量恢复问题以及国内外的研究现状。

### 1.2.1 张量鲁棒主成分分析研究现状

近些年来, 有关张量鲁棒主成分分析问题的研究得到了广泛的发展与应用, 其中基于低秩表示的恢复模型起到了重要作用。例如主成分分析 PCA (Principal Component Analysis) 作为一种常见的数据降维方法 (Hotelling 1933), 在模式识别以及机器学习中的很多领域都作出了重要贡献。例如随着如今科学技术的不断发展, 在日常生活以及科学研究中心接触到的数据维度也不断在增加, 这种维度的上升在丰富了数据信息的同时也给数据的处理带来了不小的挑战。而 PCA 可以在尽量保存原有数据信息的前提下实现对数据维度的减少, 从而给后续数据的应用提供方便。故基于 PCA 的方法已经被不断研究和应用 (刘敬浩等 2020, 王琪等 2023)。然而随着现实问题的需要以及研究的不断深入, 观测到的数据通常是退化的 (存在噪声或缺失), 这给 PCA 的应用带来了很大的挑战。一些研究指出 PCA 对于噪声或者是离群值往往是不够鲁棒的 (Lathauwer *et al.* 2000, Candès *et al.* 2011)。为了克服这个问题, 即增强 PCA 模型的稳定性, Candès 等人 (2011) 提出了鲁棒主成分分析模型 RPCA, 该模型旨在将观测到的带噪声矩阵  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$  分离成干净的低秩矩阵  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$  与稀疏噪声矩阵  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$  之和。其中

**L** 表示数据潜在的低秩结构项，**E** 表示稀疏噪声项。RPCA 模型可以被描述为：

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{E}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

其中  $\lambda > 0$  为一可调参数，用以平衡模型低秩项与稀疏项。 $\|\mathbf{L}\|_*$  表示矩阵 **L** 的核范数， $\|\mathbf{E}\|_1$  是矩阵  $\ell_1$  范数。

同传统的 PCA 方法相比，RPCA 方法不仅仅是一种基于矩阵的数据降维方法，它还可以处理存在噪声或异常值的数据，而且对于处理的结果以及速度有比较好的保证。因此，基于 RPCA 的方法目前已被广泛应用于图像(视频)去噪 (Bouwmans *et al.* 2011)、背景建模 (Cao *et al.* 2016, Vaswani *et al.* 2018)、人脸识别 (Pang *et al.* 2019)、推荐系统 (孙华成等 2019, 李晶晶等 2021) 等机器学习和数据挖掘问题中。例如在图像处理方面，RPCA 模型可以将真实的低秩图像和噪声分离开来，进而恢复受损的图像 (Feng *et al.* 2013)。这对图像、视频以及医学图像等领域有着重要意义。同时，在信号处理方面，RPCA 模型也可以处理受到噪声干扰的信号以提高信号的稳定性与精度 (Zhao *et al.* 2014)。在数据挖掘方面，RPCA 可以用于大规模数据的降维操作，在保留数据特征的前提下尽量降低数据处理的空间复杂度和时间复杂度 (Oh *et al.* 2015)。总之，RPCA 由于其对噪声的鲁棒性，已经被广泛应用于计算机的许多领域中。

然而，基于 RPCA 的方法的一个不足就是它是为二维(矩阵)形式的数据设计的。但现实生活中的数据通常是高维的，以张量(维度大于等于 3)的形式存在的 (Gao *et al.* 2020, Mu *et al.* 2020)。例如，彩色图像可以看作是由行、列、以及颜色通道组成的三阶张量。同样的，灰度视频序列也可以看作是行、列、时间帧构成的三阶张量。类似的张量数据还有多光谱图像以及高光谱图像等等。当需要处理这些张量数据时，RPCA 方法只能拆分每一层张量为矩阵，再进行恢复。而这种做法往往破坏了原来张量的数据结构，使得恢复效果不尽人意 (Lu *et al.* 2019)。为了解决这个问题，近些年来许多工作 (Chang *et al.* 2020, Kong *et al.* 2018, Kong *et al.* 2021, Qiu *et al.* 2022) 都聚焦于将原来只适用于矩阵的 RPCA 模型推广到能处理张量结构数据，即张量鲁棒主成分分析 TRPCA 问题。具体来说，TRPCA 问题旨在将观测到的带噪声张量数据分解为一个干净的低秩张量和一个稀疏的噪声张量(图 1.1 是一个 TRPCA 问题的简单示意图)。事实上，将矩阵形式的 RPCA 问题推广到张量数据所遇到最大的问题在于对张量的秩的定义。不同于矩阵的秩有着严格的定义，张量的秩并没有唯一的定义，这使得对于张

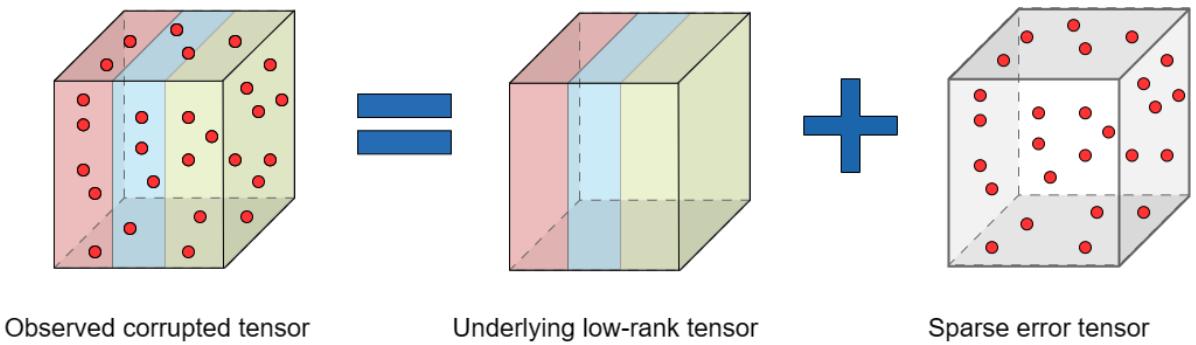


图 1.1 张量鲁棒主成分分析问题示意图。对于观测到的张量，目的是恢复出潜在的低秩张量和稀疏张量。

Fig. 1.1 An illustration of the TRPCA problem. For the observed tensor, the goal is to recover the underlying low-rank tensor and sparse tensor.

量低秩性的刻画较为困难。如今许多经典的工作都致力于研究对张量秩的定义以及对张量低秩性的刻画。包括 CP(CANDECOMP/PARAFAC) 秩 (Hitchcock 1927)、Tucker 秩 (Kolda *et al.* 2009, Li *et al.* 2017)、以及张量管秩 (Lu *et al.* 2016) 等等。其中一些常见的张量分解以及对应秩的定义方法如下。

张量的 CP 秩被定义为张量进行 CP 分解之后的秩一张量之和的最小数目 (Hitchcock 1927)。然而，求解张量 CP 分解的过程通常是一个 NP 难问题，因此有关张量 CP 分解以及 CP 秩的研究主要集中在优化算法。例如，Zhao 等人 (2015) 在其研究中提出了一个鲁棒 CP 分解问题，虽然该问题对于张量恢复的结果有理论保证，但是该优化算法是非凸的，对于该问题的计算求解有着不小挑战。与 CP 分解较难计算的要求不同，Kolda 等人 (2009) 提出的张量 Tucker 秩，使凸松弛在张量恢复模型中也得到了应用。对于一个  $n$  维张量  $\mathcal{L}$ ，其对应的 Tucker 秩表现为一个  $n$  维向量： $\text{rank}_{tc}(\mathcal{L}) = [\text{rank}(\mathbf{L}^{\{1\}}), \text{rank}(\mathbf{L}^{\{2\}}), \dots, \text{rank}(\mathbf{L}^{\{n\}})]$ 。其中  $\mathbf{L}^{\{i\}}$  是张量  $\mathcal{L}$  按第  $i$  个模展开的分解矩阵。Tucker 分解对于 CP 分解更利于优化求解，但由于 Tucker 秩并不是单一数值，通常难以计算大小。为了优化这个问题，Huang 等人 (2015) 通过将张量按模进行矩阵展开，进而将矩阵核范数的求和定义为张量的核范数之和 (Sum of Nuclear Norm, SNN)，即  $\sum_i \|\mathbf{L}^{\{i\}}\|_*$ 。同时，SNN 可以被看作是 Tucker 秩的一个凸松弛，具有良好的优化性质。基于 SNN 的张量鲁棒主成分分析模型如下：

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \|\mathbf{L}^{\{i\}}\|_* + \|\mathcal{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}, \quad (1.2)$$

其中  $\alpha_i > 0$  是正则化参数,  $\mathbf{L}^{\{i\}}$  表示张量按模  $i$  展开得到的矩阵。尽管基于 SNN 的张量鲁棒主成分分析能取得比较好的恢复效果, 但 SNN 并不是 Tucker 秩最佳的凸包络, 因此基于 SNN 的张量鲁棒主成分分析模型得出的解往往是次优的 (Hou *et al.* 2021)。Huang 等人 (2015) 在 SNN 的基础上提出一种新的张量鲁棒主成分分析模型, 通过引入 Frobenius 范数分别对原始模型中的低秩项和稀疏项进行约束, 进而使求解模型更加稳定, 其具体优化模型为:

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \|\mathbf{L}^{\{i\}}\|_* + \|\mathcal{E}\|_1 + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{L}\|_F^2 + \|\mathcal{E}\|_F^2, \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}. \quad (1.3)$$

最近, 随着 Kilmer 等人 (2011) 的工作提出了有关张量积以及张量奇异值分解等张量运算的具体数学框架。Lu 等人 (2016) 在张量鲁棒主成分分析问题中使用该框架来刻画张量的低秩性, 并进一步根据分解定义了张量的管秩、平均秩等。同时为了方便优化, 该工作还给出了张量核范数 (Tensor Nuclear Norm, TNN) 的具体定义。基于该张量核范数的张量鲁棒主成分分析模型如下:

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \|\mathcal{L}\|_* + \lambda \|\mathcal{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}, \quad (1.4)$$

其中  $\|\mathcal{L}\|_*$  表示  $\mathcal{L}$  的张量核范数。最近 Kilmer 等人 (2021) 的工作已经证明了张量奇异值分解框架对于张量鲁棒主成分分析问题求解的有效性。同时, 由于张量核范数良好的恢复理论保证使得基于张量分解的框架在近些年的张量低秩恢复研究领域中受到了广泛的关注 (Lu *et al.* 2019, Zhang *et al.* 2016, Hou *et al.* 2021)。例如, 为了进一步提升基于张量核范数的鲁棒主成分分析方法的性能, Gao 等人 (2019) 的工作提出了增强的张量鲁棒主成分分析方法 (Enhanced TRPCA, ETRPCA), 该方法通过定义了一个加权的截断  $p$  范数来实现对张量不同奇异值给予不同权重的目的, 但是该方法在优化过程中使用的是固定权重, 需要提前手动设置。这限制了它在实际应用中的能力和灵活性, 同时方法的性能依赖于对权重的选取。Jiang 等人 (2020) 建立了一种新的张量核范数 PSTNN (Partial Sum of the Tubal Nuclear Norm), 该方法考虑原始张量核范数的局部和作为原始张量核范数的替代。具体来说, 当优化过程中最小化 PSTNN 时, 只有较小的奇异值受到惩罚而大的奇异值不会。这种处理其实暗含了一个假设, 即小奇异值与张量的信息无关, 而这种假设在现实中可能限制过多。更进一步的, Zheng 等人

(2020) 建立了一种新的张量  $N$ -管秩并提出了其对应的张量核范数 WSTNN (Weighted Sum of the Tensor Nuclear Norm) 作为其凸松弛。基于 WSTNN 的方法可以处理沿不同模式展开的不同相关性，而且该框架不仅适用于三维张量。Zhou 等人 (2019) 基于贝叶斯分解提出了一种贝叶斯分解的张量鲁棒主成分分析方法 BTRTF (Bayesian Treatment of Robust Tensor Factorization)。其方法在优化过程中可以自动确定张量管秩的大小，同时自动计算出 TRPCA 问题的低秩和稀疏成分之间的权衡系数。近年来，许多张量领域相关的研究还提出了许多低秩张量近似框架，如 TT(Tensor Train) 分解 (Oseledets 2011)、TR(Tensor Ring) 分解 (Zhao *et al.* 2016) 以及高阶 SVD(High Order SVD) 分解 (Wang *et al.* 2023)。由于张量低秩性并没有唯一定义，因此这些张量分解研究往往重在解决张量恢复中常见的某些问题，例如高阶张量的分解、具有张量环结构的数据的低秩定义等。

### 1.2.2 张量完备化研究现状

上一小节介绍了从矩阵鲁棒主成分分析发展为张量鲁棒主成分分析的过程及研究现状。与之类似，张量完备化可以认为是矩阵完备化从矩阵到张量的拓展。因此在介绍张量完备化之前，不妨先分析矩阵完备化问题。矩阵完备化问题旨在从存在缺失的矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$  中利用低秩的先验信息恢复缺失的元素，进而恢复出完整的低秩矩阵  $\mathbf{X}$ ，这一问题可以被描述为下列数学模型：

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_*, \text{ s.t. } \mathbb{P}_{\Omega}(\mathbf{X}) = \mathbb{P}_{\Omega}(\mathbf{M}), \quad (1.5)$$

其中  $\|\mathbf{X}\|_*$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的核范数，作为矩阵秩的凸松弛。 $\Omega \in \{1, 2, \dots, d_1\} \times \{1, 2, \dots, d_2\}$  为指示其观测到元素位置的指标集， $\mathbb{P}_{\Omega}(\mathbf{M})$  算子表示矩阵  $\mathbf{M}$  在指标集  $\Omega$  上的正交投影即：

$$\mathbb{P}_{\Omega}(\mathbf{M})_{ij} = \begin{cases} \mathbf{M}_{ij}, & (i, j) \in \Omega, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.6)$$

有关低秩矩阵完备化问题的相关算法以及理论研究工作开展较早，并且已有非常丰富的研究成果 (Candès *et al.* 2010, 史加荣等 2013, 闫喜红和张宁 2024)。例如 Candès 等人 (2010) 利用凸松弛的方法对原始的完备化问题进行处理，使得该问题在实际应用中更加方便求解。同时，对于矩阵在一定条件下能否准确恢复该方法也给出了证明。更进一步，Klopp 等人 (2017) 在矩阵完备化问题的基础上，考虑数据被噪声污染且部分数

据缺失的情况。提出了如下的鲁棒矩阵完备化模型：

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{E}} \frac{1}{2} \|\mathbb{P}_\Omega(\mathbf{M} - \mathbf{X} - \mathbf{E})\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{X}\|_* + \lambda_2 \|\mathbf{E}\|_1, \text{s.t. } \|\mathbf{X}\|_\infty \leq a, \|\mathbf{E}\|_\infty \leq a, \quad (1.7)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  为正则化参数， $a > 0$ 。该工作还给出了算法恢复的理论误差。

尽管基于矩阵的完备化方法在缺失数据的补全上已经取得了比较好的效果，但是随着日常生活以及科学的研究的深入，基于矩阵数据的完备化方法在处理张量数据时显得无能为力。当对张量数据的缺失进行恢复时，基于矩阵的完备化方法只能将张量数据展开为矩阵进行分别处理，然后将处理后的结果重新构成为张量得到恢复结果。这种做法在恢复的过程中破坏了张量的空间结构，往往只能取得次优解的恢复结果。因此，如今的许多工作都聚焦于对张量结构数据的恢复，即张量完备化方法。与张量鲁棒主成分分析方法类似，从矩阵的完备化方法推广到张量完备化方法的一个难点在于对张量秩的定义，张量完备化问题可以建模为：

$$\min_{\mathcal{X}} \text{rank}(\mathcal{X}), \text{s.t. } \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}), \quad (1.8)$$

其中  $\text{rank}(\mathcal{X})$  表示张量  $\mathcal{X}$  的秩， $\Omega$  为指示观测元素与缺失元素的指标集， $\mathbb{P}_\Omega$  为在指标集  $\Omega$  上的正交投影。随着科学的研究的不断进步，数据维度越来越大。能够对张量整体进行补全的张量完备化方法已经被广泛应用于计算机研究的各个领域，例如信号处理 (Qin *et al.* 2019)、医学图像处理 (Liu *et al.* 2021)、遥感图像处理 (Zhang and Ng 2019) 等。然而，与张量鲁棒主成分分析问题类似，张量完备化问题的难点在于张量的秩并没有一个较为严格的定义。近年来，对于张量完备化问题，许多工作都重点聚焦于对张量秩的定义或者说对张量秩的优化。例如，Liu 等人 (2013) 的工作利用张量每个模展开的矩阵范数之和即 SNN 来逼近张量的 Tucker 秩，并基于此构建了如下基于 SNN 的张量完备化模型：

$$\min_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\mathbf{X}^{\{i\}}\|_*, \text{s.t. } \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}), \quad (1.9)$$

其中  $\alpha_i$  为加权因子，作用是平衡各个模展开矩阵的低秩性。 $\mathbf{X}^{\{i\}}$  为张量  $\mathcal{X}$  按第  $i$  个模展开的分解矩阵。进一步，Gandy 等人 (2011) 的工作考虑张量存在噪声污染和数据缺失的情况，提出了基于 SNN 的鲁棒化张量完备化模型并设计了有效的求解方法。Li 等人 (2017) 的研究使用了计算机视觉领域常见的平滑性先验来约束基于 SNN 的张量完

完备化模型，从而提升模型对于自然图像等张量数据的恢复效果。其提出的基于全变分 (Total Variation) 正则化的 SNN 完备化模型 (简记为 SNN\_TV) 如下：

$$\min_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\mathcal{X}_{(i)}\|_* + \lambda \|\mathcal{X}\|_{\text{TV}}, \text{s.t. } \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}), \quad (1.10)$$

其中  $\|\mathcal{X}\|_{\text{TV}}$  是对低秩张量平滑性的约束。然而，一些研究指出 SNN 并不是 Tucker 秩的最紧凸逼近，即求解 SNN 往往得不到问题的最优解。随着张量积以及张量奇异值分解的定义，Lu 等人 (2016) 提出张量核范数及其对应的张量管秩。并在接下来的工作 (Lu *et al.* 2019) 中将所提出的张量核范数应用在张量完备化中，所提出的基于张量核范数的张量完备化模型如下：

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_*, \text{s.t. } \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}), \quad (1.11)$$

其中  $\|\mathcal{X}\|_*$  定义为张量  $\mathcal{X}$  的核范数。同时，该工作还给出了对于精准恢复出张量缺失元素的一个最小观测概率的证明。近些年，由于张量积张量核范数在完备化领域良好的恢复效果及理论保证，许多基于其改进的方法被提出并用于张量完备化问题。例如 Zhou 等人 (2017) 受到矩阵分解思想的启发，利用张量积的性质通过分解来构造低秩张量，并提出基于张量分解的低秩张量完备化模型：

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \frac{1}{2} \|\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{X} * \mathcal{Y} - \mathcal{M})\|_F^2, \quad (1.12)$$

其中恢复出的张量的低秩性通过  $\mathcal{X}$  与  $\mathcal{Y}$  之间进行张量积进行保证。由于分解性质的存在，该模型在运行过程中不需要使用奇异值分解来优化模型。这使得该模型能用较小的时间代价来计算复杂的张量模型。然而，该模型存在的不足是必须提前通过设置张量  $\mathcal{X}$  与  $\mathcal{Y}$  的维度大小来假定潜在张量的低秩程度，这使得模型的性能依赖于所设定的维度参数。Lu 等人 (2018) 的研究使用离散余弦变换而非快速傅里叶变换来处理张量核范数，并提出了变换的张量核范数来刻画待恢复张量整体的低秩性。并证明了所有可逆的线性变换都可以用于优化张量核范数。Jiang 等人 (2020) 的研究建立了一种基于三阶张量核范数的框架表示，将原始的张量核范数低秩优化问题转变为基于张量多秩的框架，使得模型对于三阶张量的恢复效果更好。Qiu 等人 (2021) 的研究考虑现实张量数据中存在的平滑性先验来改进张量核范数，并提出基于全变分正则化和张量核范数的

张量完备化模型(记为 TNN\_TV)。然而,该工作使用的仍是基于矩阵形式的二维全变分约束,对于张量数据应该使用更高维度的正则化约束。

综上所述,张量鲁棒主成分分析和张量完备化两个张量恢复领域重要的模型在国内外都得到了广泛且深入的研究,众多模型的提出使得张量恢复的速度和精度也在不断提升。但张量由于其秩的不确定性,因此各个模型所面临的缺点也不容忽视。

### 1.3 本文主要工作

由于传统的基于张量核范数的方法对低秩张量进行恢复时,最小化核范数会对张量所有的奇异值施加同等力度的惩罚,这会导致对大的奇异值惩罚力度过大,而现实生活中的许多具有张量结构的数据(如自然图像、视频序列等),其较大的奇异值往往与数据的重要信息(如边缘信息等)密切相关。所以传统的方法求得的全局最优解所对应的张量恢复效果较差。受到改进的 Huber 函数的启发,本文提出了一种新的张量范数。该范数可以对张量奇异值施加更为合适的约束从而导致较好的恢复效果。并且基于提出的张量范数,本文分别提出了新的张量鲁棒主成分分析以及张量完备化方法。对比传统的低秩张量恢复方法,本文试图建立一个更加稳定、更为理想的张量恢复模型,其主要工作总结如下:

1. 本文提出了一种新的张量范数,即改进的 Huber 张量核范数。与传统张量核范数相比,提出的张量范数考虑了不同大小奇异值间的差异,通过对它们施加不同的惩罚来达到更好的恢复效果。进一步,本文将提出的张量范数应用于张量鲁棒主成分分析问题。并基于半二次优化理论和交替方向乘子法来设计优化算法来求解所提出的模型。最后,在模拟和真实张量上的实验验证了模型的有效性。

2. 在提出的张量范数的基础上,针对低秩张量恢复领域另一个重要问题,即张量完备化问题。本文进一步考虑图像等低秩张量中存在的局部平滑先验来改进所提出的张量恢复模型,并提出了基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型。该模型同时考虑了真实张量数据的低秩性与局部平滑性信息,从而能实现更佳的恢复效果。在优化算法方面,根据高斯 - 赛德尔交替方向乘子法设计优化算法有效地求解模型。在实验方面,对比传统的张量完备化方法,本研究提出的模型在模拟张量数据和真实张量数据上能取得更好的效果。

## 1.4 论文结构

全文总共包含五个章节，下列为各个章节的主要内容：

第一章：绪论部分，本章节阐述了低秩张量恢复的研究背景与意义，同时针对低秩张量鲁棒主成分分析和张量完备两个低秩张量的主要任务进行介绍，并系统分析了它们的研究进展。

第二章：介绍了本文用到的相关预备知识。主要对研究的张量知识进行了系统的说明，包含张量的基础知识，张量奇异值分解框架以及张量核范数的定义等。

第三章：研究张量鲁棒主成分分析问题，本章提出了一种新的张量范数，即改进的 Huber 的张量核范数，同时将提出的范数应用到张量鲁棒主成分分析问题，提出了基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。为了求解该模型，本章提出了一种基于半二次优化理论和交替方向乘子法框架的优化算法并给出了证明。同时，有关模拟数据和真实数据去噪的实验验证了所提出的方法的有效性和优越性。最后本章对提出的算法进行了收敛性的分析，证明了在实际应用中具有良好的收敛性质。

第四章：研究张量完备化问题，本章进一步将提出的改进的 Huber 的张量核范数应用到张量恢复领域的另一个重要问题即张量完备化问题中，同时为了在真实张量数据上得到更好的恢复效果，本文利用自然图像和多光谱图像等张量数据具有的局部平滑先验来进一步提升模型，并提出基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型。在优化算法方面，根据对称高斯 - 赛德尔交替方向乘子法设计优化算法。最后为了测试所提出的模型的有效性，本研究在实验中选取了不同程度缺失的张量数据来对提出的模型进行检验。实验的结果验证了所提出模型的效果。

第五章：第五章为论文总结和展望部分，对本文的主要研究工作进行了总结，并在此基础上对未来可进行的深入研究进行展望。

## 2 预备知识

本章节主要介绍本文涉及到的张量有关的基础数学知识，张量奇异值分解框架以及张量范数等定义。为了方便说明，本文使用小写字母如  $a$  表示标量，加粗的小写字母如  $\mathbf{a}$  表示列向量，粗体大写字母如  $\mathbf{A}$  表示矩阵。 $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{C}$  分别表示元素所属的实数域或复数域。对于本文主要研究的张量数据，使用手写体如  $\mathcal{A}$  来表示张量。特别的，三维张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  的第  $(i, j, k)$  个元素表示为  $\mathcal{A}_{ijk}$  或  $\mathcal{A}(i, j, k)$ 。对于张量常用的纤维结构与切面结构的表示，在本章后续部分会对应介绍。为了方便阅读，表 2.1 列出了本文主要使用的符号及其对应的意义。

表 2.1 本文的主要符号。

Table 2.1 Convention of key notations in this paper.

符号	意义
$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$	列向量
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$	矩阵
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{P}$	投影算子
$\Omega$	观测到的样本点集合
$D$	一阶有限差分算子
$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$	三维张量
$\mathcal{A}_{ijk}$ or $\mathcal{A}(i, j, k)$	张量的 $(i, j, k)$ 位置元素
$\mathcal{A}(i, :, :)$	张量的水平切片
$\mathcal{A}(:, j, :)$	张量的侧面切片
$\mathcal{A}(:, :, k)$ or $\mathbf{A}^{(k)}$	张量的正面切片
$fft$	离散傅里叶变换
$\bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$	对张量的第三个维度进行离散傅里叶变换结果
$\ \mathcal{A}\ _*$	张量的核范数
$\ \mathcal{A}\ _F$	张量的 Frobenius 范数

## 2.1 张量基础概念

张量可以看作是向量和矩阵数据在更高维度的扩展，能够方便有效地对自然图像、多光谱图像等现实数据进行刻画。本小节主要介绍张量的一些基础概念与定义，包括张量的纤维、切片等。同时为了推导出张量之间的乘积运算，本小节会给出块循环矩阵、块对角矩阵等定义。最后会给出常用的特殊张量(单位张量、正交张量等)的定义。

**定义 2.1** (张量的纤维)(Kilmer *et al.* 2011) 对于任意的三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，通过固定其中两个坐标，变化另一个坐标。可以得到张量的纤维。分别为行纤维  $\mathcal{A}(i, :, k)$ 、列纤维  $\mathcal{A}(:, j, k)$  以及管纤维  $\mathcal{A}(i, j, :)$ (简称管)，其具体如图 2.1 所示。

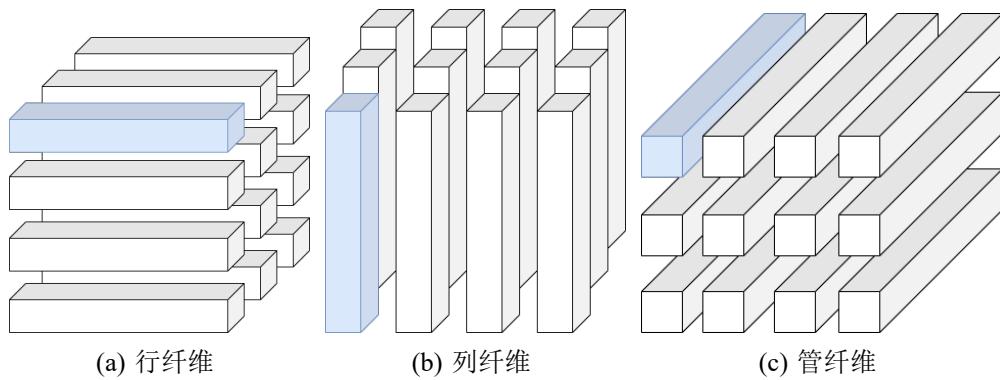


图 2.1 三阶张量的纤维示意图。

Fig. 2.1 Fibers of a 3-order tensor.

**定义 2.2** (张量的切片)(Kilmer *et al.* 2011) 对于任意的三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，通过固定其中一个坐标，变化另外两个坐标。可以得到张量的切片。分别为水平切片  $\mathcal{A}(i, :, :)$ 、 $\mathcal{A}(:, j, :)$  以及正面切片  $\mathcal{A}(:, :, k)$ 。此外，为了方便可以将  $\mathcal{A}(:, :, k)$  简记为  $\mathbf{A}^{(k)}$ 。其具体如图 2.2 所示。

**定义 2.3** (张量折叠算子、展开算子)(Kilmer *et al.* 2011) 对于任意的三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，其张量展开算子  $\text{unfold}(\cdot)$  与对应的折叠算子  $\text{fold}(\cdot)$  定义如下：

$$\text{unfold}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{(d_3)} \end{bmatrix}, \quad \text{fold}(\text{unfold}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}. \quad (2.1)$$

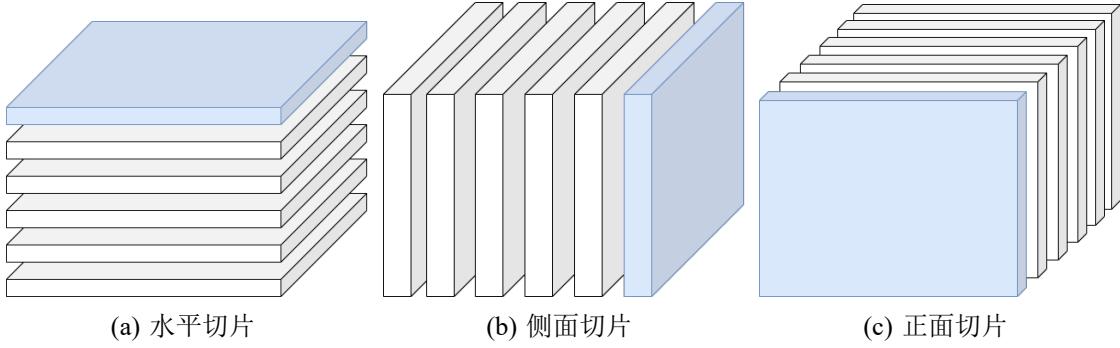


图 2.2 三阶张量的切片示意图。

Fig. 2.2 Slices of a 3-order tensor.

**定义 2.4** (块循环矩阵、块对角矩阵)(Kilmer *et al.* 2011) 对于任意的三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ , 其块循环矩阵  $\text{bcirc}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  定义为:

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(d_3)} & \dots & \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{A}^{(1)} & \dots & \mathbf{A}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{(d_3)} & \mathbf{A}^{(d_3-1)} & \dots & \mathbf{A}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

同时, 对于张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ , 使用  $\bar{\mathcal{A}}$  表示沿着  $d_3$  维度对张量  $\mathcal{A}$  进行离散傅里叶变换 (Discrete Fast Fourier Transform,  $\text{fft}$ ) 的结果, 记为  $\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$  或  $\bar{\mathcal{A}} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{A}}, [], 3)$ 。 $\bar{\mathcal{A}}$  满足其每个正面切片  $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$  都在对角线上按顺序排序, 同时  $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$  是块对角矩阵, 定义为:

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{bdiag}(\bar{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{A}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{A}}^{(d_3)} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

**定义 2.5** (张量积,T-product)(Kilmer *et al.* 2011) 对于三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  和  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{d_2 \times l \times d_3}$ , 它们的 T-product 定义为:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} = \text{fold}(\text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B})). \quad (2.4)$$

注意所得的积  $\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$  为大小  $d_1 \times l \times d_3$  的张量。通过张量积的定义，可以看出张量积与矩阵积类似，只是使用了循环卷积的思想来替代了元素间的乘法运算。同时，当  $d_3 = 1$  时，张量积退化为矩阵积。

事实上，借助于离散傅里叶变换 ( $fft$ ) 及其对应的逆变换 ( $ifft$ )，可以有效地求解张量积，例如对于求解  $\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$ 。首先可以分别对  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  沿着  $d_3$  维度作离散傅里叶变换，可以得到  $\bar{\mathcal{A}} = fft(\mathcal{A}, [], 3)$  和  $\bar{\mathcal{B}} = fft(\mathcal{B}, [], 3)$ 。进一步可以计算出  $\bar{\mathcal{C}}$  的每一个正面切片  $\bar{\mathbf{C}}^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}^{(i)} \bar{\mathbf{B}}^{(i)}$ 。其中  $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$  和  $\bar{\mathbf{B}}^{(i)}$  分别为  $\bar{\mathcal{A}}$  和  $\bar{\mathcal{B}}$  的第  $i$  个正面切片。最终张量积的结果为  $\mathcal{C} = ifft(\bar{\mathcal{C}}, [], 3)$ 。

**定义 2.6** (张量共轭转置)(Kilmer *et al.* 2011) 对于任意三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，其共轭转置为  $\mathcal{A}^* \in \mathbb{C}^{d_2 \times d_1 \times d_3}$ 。它是通过对原始张量  $\mathcal{A}$  每一个正面切片都进行共轭转置，转置后第一张正面切片的位置不动，而其余切片按逆顺序排序得到，即：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{*(1)} &= (\mathcal{A}^{(1)})^*, \\ \mathcal{A}^{*(i)} &= (\mathcal{A}^{(n_3+2-i)})^*. \end{aligned}\tag{2.5}$$

**定义 2.7** (单位张量)(Kilmer *et al.* 2011) 三阶张量  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d_3}$  为单位张量有且仅当： $\mathcal{I}$  的第一个正面切片为单位矩阵，其他的正面切片均为零矩阵。同时，在适当的维度下，有  $\mathcal{A} * \mathcal{I} = \mathcal{A}$  和  $\mathcal{I} * \mathcal{A} = \mathcal{A}$  成立。

**定义 2.8** (正交张量)(Kilmer *et al.* 2011) 三阶张量  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d_3}$  为正交张量当其满足：  
 $\mathcal{Q} * \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^* * \mathcal{Q} = \mathcal{I}$ 。

**定义 2.9** ( $F$ -对角张量)(Kilmer *et al.* 2011) 当张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d_3}$  的所有正面切片均满足非对角线元素为零，该张量为  $F$ -对角张量。

**定义 2.10** (张量的逆)(Kilmer *et al.* 2011) 设张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d_3}$ ，张量  $\mathcal{A}$  的逆为  $\mathcal{B}$ ，且满足  $\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathcal{I}$  和  $\mathcal{B} * \mathcal{A} = \mathcal{I}$ 。

**定义 2.11** (张量范数)(Kilmer *et al.* 2011) 对于三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d \times d \times d_3}$ ，设  $a_{ijk}$  为其  $ijk$  位置上的元素，一些基本的张量范数定义如下：

1. 张量  $\ell_1$  范数：  $\|\mathcal{A}\| = \sum_{ijk} |a_{ijk}|$ ;
2. 张量 Frobenius-范数：  $\|\mathcal{A}\|_F = \sqrt{\sum_{ijk} |a_{ijk}|^2}$ ;
3. 张量无穷范数：  $\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{ijk} |a_{ijk}|$ .

## 2.2 张量奇异值分解及张量核范数

有了前文对张量基础概念的说明，以及对张量积、张量范数等定义的阐述，本小节进一步说明与本文密切相关的张量奇异值分解框架 (Tensor Singular Values Decomposition, T-SVD) 和张量核范数 (Tensor Nuclear Norm, TNN) 等的定义，具体如下：

**定义 2.12** (张量奇异值分解, T-SVD)(Kilmer *et al.* 2011) 同矩阵类似，三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  可以被分解为：

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*, \quad (2.6)$$

其中  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_1 \times d_3}$  和  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{d_2 \times d_2 \times d_3}$  均为正交张量， $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  为  $F$ -对角张量。

有关 T-SVD 的直观解释在图 2.3 中。同时借助快速傅里叶变换，可以高效地计算一个张量的 T-SVD 分解，其具体过程在算法 2.2 中。

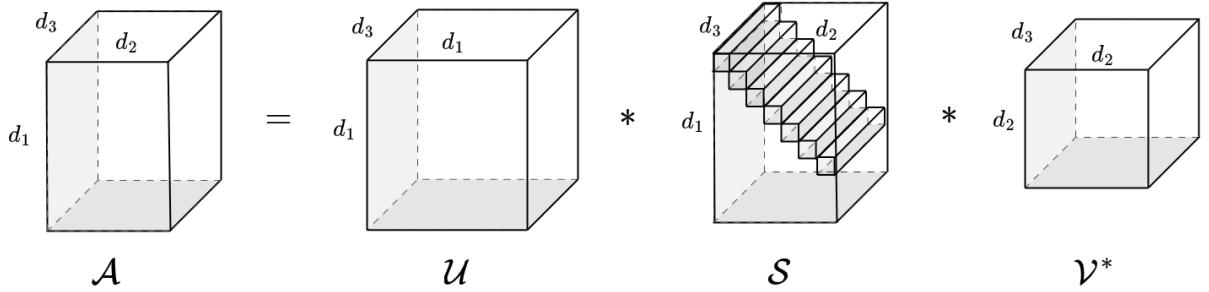


图 2.3 三阶张量 T-SVD 示意图。

Fig. 2.3 An illustration of T-SVD of a 3-order tensor.

**定义 2.13** (张量管秩)(Lu *et al.* 2016) 设张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  可以被分解为  $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ ，使用  $\text{rank}_t(\mathcal{A})$  代表它的管秩，具体定义为  $\mathcal{S}$  中非零奇异管的数量：

$$\text{rank}_t(\mathcal{A}) = \#\{i : \mathcal{S}(i, i, :) \neq 0\}. \quad (2.7)$$

**定义 2.14** (张量核范数)(Lu *et al.* 2016) 设张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  可以被分解为  $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ ，则  $\mathcal{S}$  的全部正面切片奇异值求和定义为张量  $\mathcal{A}$  的核范数：

$$\|\mathcal{A}\|_* = \sum_{i=1}^d \mathcal{S}(i, i, 1) = \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d \sigma_i (\bar{\mathbf{A}}^{(k)}), \quad (2.8)$$

表 2.2 T-SVD 算法。

Tab. 2.2 T-SVD algorithm.

**算法 2.2 Tensor Singular Values Decomposition (T-SVD)**

**输入:** 三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ .

1: 计算  $\bar{\mathcal{A}} = fft(\mathcal{A}, [], 3)$ .

2: 计算  $\bar{\mathcal{U}}$ ,  $\bar{\mathcal{S}}$  和  $\bar{\mathcal{V}}$  的每个正面切片:

**for**  $i = 1, \dots, d_3$  **do**

$[\bar{\mathbf{U}}^{(i)}, \bar{\mathbf{S}}^{(i)}, \bar{\mathbf{V}}^{(i)}] = \text{SVD}(\bar{\mathbf{A}}^{(i)})$ .

**end for**

3: 计算  $\mathcal{U} = ifft(\bar{\mathcal{U}}, [], 3)$ ,  $\mathcal{S} = ifft(\bar{\mathcal{S}}, [], 3)$  和  $\mathcal{V} = ifft(\bar{\mathcal{V}}, [], 3)$ .

**输出:**  $\mathcal{A}$  进行 T-SVD 之后的成分  $\mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{V}$ .

其中  $d = \min\{d_1, d_2\}$ ,  $\sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})$  表示  $\bar{\mathbf{A}}^{(k)}$  的第  $i$  个奇异值。

**定义 2.15** (加权张量核范数)(Wang *et al.* 2023) 设张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  可以被分解  $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ ,  $\mathcal{A}$ , 对于一个权重矩阵  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times d_3}$ , 其中  $d = \min\{d_1, d_2\}$ 。张量  $\mathcal{A}$  的加权核范数定义为:

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathbf{W},*} = \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d W_{ik} \sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)}). \quad (2.9)$$

## 2.3 本章小结

本章节主要介绍了张量的一些基础知识, 包含张量的基础概念(张量纤维、张量切片等), 以及张量的乘积运算(T-product)和各种特殊性质的张量(单位张量、正交张量等)的定义。接着展示了张量的奇异值分解(T-SVD)框架及快速求解算法。同时给出了基于张量奇异值分解框架提出的张量管秩和张量核范数的定义。借助于该张量分解框架, 低秩恢复模型可以直接对张量进行建模, 而不需要将张量转化为矩阵, 从而学习到张量数据全局的低秩性。因此基于张量奇异值分解和张量核范数的张量恢复算法得到了广泛的应用。

### 3 基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析

张量鲁棒主成分分析方法在张量数据去噪任务中起着重要的作用，特别是在自然图像去噪以及视频序列去噪等计算机视觉领域。为了更好地恢复出低秩张量，本章节提出改进的 Huber 函数并通过该函数来约束低秩张量奇异值，从而构造出改进的 Huber 的张量核范数，实现对低秩张量重要信息相关的大奇异值较小惩罚。进一步本章节还提出了一种新的改进的 Huber 的张量核范数并应用于张量鲁棒主成分分析任务中。为了求解所提出的模型，本章提出了一种基于半二次优化理论和交替方向乘子法的优化方法。最终模拟数据和真实数据的恢复实验验证了所提出模型的有效性。

本章的主要动机如下：基于张量核范数的方法作为一种经典的张量鲁棒主成分分析方法得到了广泛的应用。然而传统的张量核范数定义为张量中所有奇异值之和，这使得在优化过程中最小化张量核范数时对低秩张量所有的奇异值都施加了同样大小的约束，事实上，如图 3.1 所示，低秩张量的奇异值分布往往是不均衡的。大的奇异值通常也对应着低秩张量中的重要信息，在最小化张量核范数的过程中应该被施加较小的约束。故基于传统张量核范数的方法往往会导致算法恢复出的低秩张量与真实的低秩张量有区别。而本章提出的改进张量的核范数能通过自适应调节对奇异值的约束来达到更佳的恢复效果。

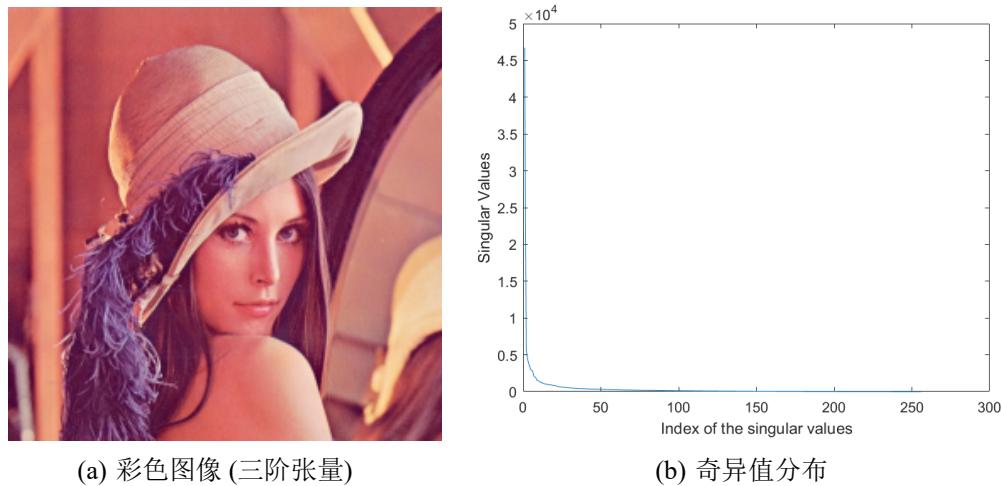


图 3.1 三阶张量 (以彩色图像为例) 及其对应的奇异值分布。

Fig. 3.1 Illustration of a third-order tensor (color image) and its corresponding singular value distribution.

### 3.1 相关知识

#### 3.1.1 鲁棒估计与 Huber 函数

本小节介绍鲁棒估计与 Huber 函数。其中 Huber 函数可以被认为是标准最小二乘 (Least Squares) 估计子的一种更佳替代 (He *et al.* 2014)。设向量  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$  是观测到的数据以及重构的数据之间的差即重构误差。 $e_i$  是  $\mathbf{e}$  的第  $i$  个元素，标准的最小二乘方法往往通过最小化均方误差 ( $\min \sum_{i=1}^m e_i^2$ ) 的方法来尽可能得减小重构误差。事实上，传统的最小二乘方法对于大的噪声值或离群值是非常敏感的。因为过大的值通过以均方误差为损失函数的模型会使得模型往噪声或离群值方向不断偏离。为了缓解这个问题，Huber 函数被提出来用以作为均方误差的一个良好替代，具体来说，基于 Huber 函数的方法试图最小化下列函数：

$$\phi_H(x) = \begin{cases} x^2/2, & \text{if } |x| \leq \delta, \\ \delta(|x| - \delta/2), & \text{if } |x| > \delta, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $\phi_H(x)$  表示 Huber 函数并且  $\delta$  为一个正的常数值。通过 Huber 函数的定义可以发现，当自变量  $x$  的值比较大时， $\phi_H(x)$  有着比均方误差 (即  $x^2$ ) 更加慢的增长速度。当模型遇到大的噪声和离群值时，Huber 函数对应产生的损失较小，这样就会使模型解的偏移程度减小，从而保证解的精确性和模型的鲁棒性。对于 Huber 函数也可以总结为对于大的自变量值，Huber 函数有着更小的惩罚。

#### 3.1.2 改进的 Huber 函数

受到鲁棒估计思想以及 Huber 函数的启发，本小节聚焦于张量恢复问题，提出了改进的 Huber 函数并将其应用于张量恢复领域中。根据定义 2.14，传统的张量核范数计算为张量进行奇异值分解后全部奇异值之和。在模型求解的过程中，低秩张量的恢复通过最小化其核范数来实现。然而，由于在张量核范数的定义中，每个奇异值都受到了完全一样的惩罚 (即绝对值函数  $|x|$ )。这使得真实的较大奇异值在最小化核范数的过程中被过度惩罚，最终恢复出来的奇异值要小于真实值，从而导致次优解的出现。事实上，大的奇异值往往与张量的重要信息相联系 (例如图像的边缘信息等)。因此，在张量恢复最小化核范数的过程中，需要对大的奇异值给予比较小的惩罚 (即小于绝对值函数  $|x|$ )，使其能准确恢复。幸运的是，上一小节介绍的 Huber 函数有着类似的

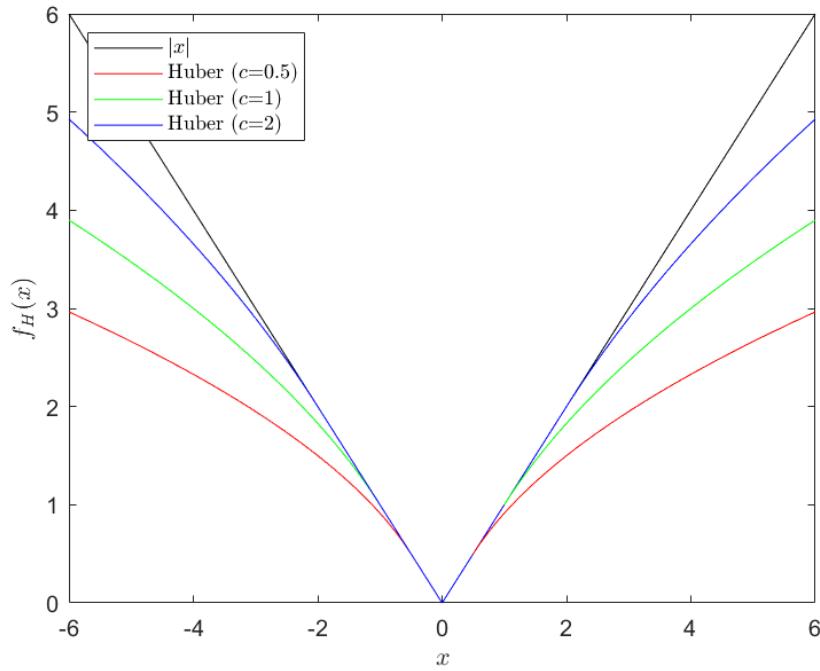


图 3.2 改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  在不同参数  $c$  的情况下与绝对值函数  $|x|$  的对比。

Fig. 3.2 Comparison of the improved Huber function  $f_H(x)$  and absolute function  $|x|$  with different parameter  $c$ .

性质，即 Huber 函数能够对大的自变量值施加小的惩罚从而成为均方误差的一个更佳的替代。所以一个自然的想法是使用 Huber 函数作为惩罚函数来对张量奇异值进行约束。然而，通过 Huber 函数的定义即公式 (3.1) 可以发现，对于比较大的奇异值 ( $> \delta$ )，Huber 函数的惩罚力度与原始张量核范数一样，均为  $|x|$ 。事实上，对于小的奇异值 ( $\leq \delta$ )，应当施加和原始张量核范数一样的惩罚力度 (即  $|x|$ )，而对于相对比较大的奇异值 ( $> \delta$ )，需要选择比张量核范数更小的惩罚力度 (即小于  $|x|$ ) 来确保大的奇异值能准确恢复，进而提升低秩张量恢复的效果。这促使我们提出以下的改进的 Huber 函数：

$$f_H(x) = \begin{cases} |x|, & \text{if } |x| \leq c, \\ 2\sqrt{c|x|} - c, & \text{if } |x| > c. \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $c$  是一个正的常数。为了便于对比，图 3.2 给出了在不同参数  $c$  的情况下所提出的改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  与绝对值函数  $|x|$  的数值。从图中可以看出，改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  有着比  $|x|$  更慢的增长速度。这导致相比原始的张量核范数，使用  $f_H(x)$  作为

惩罚函数对张量奇异值进行恢复时，大的奇异值能因为受到较小的惩罚而被准确地恢复出来。这是构建比原始张量核范数更佳替代方案的理想属性。

### 3.1.3 改进的 Huber 张量核范数

在提出改进的 Huber 函数的基础上，本小节将改进的 Huber 函数用于张量范数中实现对奇异值的约束。具体来说，提出了以下改进的 Huber 张量核范数的定义：

**定义 3.1** (改进的 Huber 张量核范数) 对于三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，其改进的 Huber 张量核范数 (Tensor Improved Huber Norm, TIHN) 定义为：

$$\|\mathcal{X}\|_{\text{H}} = \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d f_{\text{H}}(\sigma_i(\bar{\mathbf{X}}^{(k)})), \quad (3.3)$$

其中  $d = \min\{d_1, d_2\}$ ， $f_{\text{H}}(x)$  是公式 (3.2) 中定义的改进的 Huber 函数。

需要指出的是，这是第一个使用改进的 Huber 函数的思想来约束奇异值进而提升低秩张量恢复效果的工作。所提出的改进的 Huber 的张量核范数能够增强鲁棒主成分分析问题中恢复张量的低秩性，具体总结为以下性质：

1. 改进的 Huber 张量核范数和原始的张量核范数分别使用改进的 Huber 函数和绝对值函数来约束张量奇异值，图 3.2 通过可视化展示了这两个损失函数的区别。可以发现，使用改进的 Huber 张量核范数时，原始低秩张量中比较大的奇异值会受到相对比较小的惩罚，这将导致大奇异值的更准确的恢复。即通过改进的 Huber 张量核范数能做到对低秩张量的更好恢复。
2. 特别的，当参数  $c \rightarrow \infty$ ，改进的 Huber 函数  $f_{\text{H}} \rightarrow |x|$ ，此时改进的 Huber 张量核范数与原始的张量核范数相等。即所提出的改进的 Huber 张量核范数可以认为是原始张量核范数的一个推广。

## 3.2 模型建立

在提出了改进的 Huber 张量核范数的基础上，本小节将所提出的新的张量范数应用到张量恢复领域重要的问题，即张量鲁棒主成分分析中，提出了如下的基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析 (Huber Tensor Robust Principal Component Analysis,

HTRPCA) 模型:

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \|\mathcal{L}\|_H + \lambda \|\mathcal{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}. \quad (3.4)$$

然而, 由于所提出的改进的 Huber 函数的非线性以及复杂性, 使用常规的优化方法直接求解该模型比较困难, 往往无法得到最优解。在本文的工作中, 我们使用了基于半二次理论 (half-quadratic theory)(Nikolova *et al.* 2005) 以及交替方向乘子法 (Alternating Direction Method of Multiplier) 优化框架 (Boyd *et al.* 2011) 的求解方法来求解所提出的基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。具体过程为首先引入一个与 Huber 函数最小化有关的半二次优化引理如下:

**引理 3.1** 对于公式 (3.1) 中介绍的 Huber 函数, 为了方便, 这里改写自变量符号为  $z$ , 具体形式  $\phi_H(z)$  如下:

$$\phi_H(z) = \begin{cases} z^2/2, & \text{if } |z| \leq \delta, \\ \delta(|z| - \delta/2), & \text{if } |z| > \delta. \end{cases} \quad (3.5)$$

始终存在一个凸函数  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足:

$$\phi_H(z) = \min_w \left\{ \frac{1}{2} wz^2 + \psi(w) \right\}, \quad (3.6)$$

并且  $\phi_H(z)$  的最小值点满足  $w = \eta(z)$ , 其中函数  $\eta(z)$  定义为:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } |z| \leq \delta, \\ \delta/|z|, & \text{if } |z| > \delta. \end{cases} \quad (3.7)$$

引理 3.1 介绍了有关 Huber 函数的半二次最小化形式, 在本文工作中, 在求解所提出的基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型时需要最小化改进的 Huber 张量核范数, 而该张量范数与改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  的定义相关。因此, 本研究进一步探索改进的 Huber 函数的最小化性质, 并推导出改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  的类似半二次最小化性质, 该性质有助于对提出的模型更好的求解。具体的理论与证明如下:

**定理 3.2** 对于公式 (3.2) 中定义的改进的 Huber 函数:

$$f_H(x) = \begin{cases} |x|, & \text{if } |x| \leq c, \\ 2\sqrt{c|x|} - c, & \text{if } |x| > c. \end{cases}, \quad (3.8)$$

始终存在一个凸函数  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足:

$$f_H(x) = \min_w \{w|x| + \psi(w)\} \quad (3.9)$$

并且  $f_H(x)$  的最小值点满足  $w = \xi(x)$ , 其中函数  $\xi(x)$  定义为:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| \leq c, \\ \sqrt{c/|x|}, & \text{if } |x| > c. \end{cases} \quad (3.10)$$

**证明:** 令  $z = \sqrt{2|x|}$  和  $\delta = \sqrt{2|c|}$ , 有  $f_H(x) = \phi_H(z)$ 。由于  $\phi_H(z)$  满足引理 3.1, 所以可以得到以下结果:

$$f_H(x) = \phi_H(z) = \min_w \left\{ \frac{1}{2}wz^2 + \psi(w) \right\} = \min_w \{w|x| + \psi(w)\}, \quad (3.11)$$

同时,  $f_H(x)$  的最小值满足  $w = \eta(z) = \eta(\sqrt{2|x|})$ 。为了简便, 可以定义  $\xi(x) = \eta(\sqrt{2|x|})$ , 这样  $w$  可以计算为:

$$w = \xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| \leq c, \\ \sqrt{c/|x|}, & \text{if } |x| > c. \end{cases} \quad (3.12)$$

□

接下来可以使用定理 3.2 的性质将所提出的 Huber 张量鲁棒主成分分析模型转化为一个便于求解的形式, 首先回顾定义 3.1, 改进的 Huber 张量核范数定义如下:

$$\|\mathcal{L}\|_H = \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d f_H \left( \sigma_i (\bar{\mathbf{L}}^{(k)}) \right). \quad (3.13)$$

根据定理 3.2, 对于每一个奇异值  $\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)})$ , 都存在一个  $w_{ik}$ (为了简便, 不妨将所有的

$w_{ik}$  整合为一个矩阵  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times d_3}$ ，使得：

$$f_H(\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)})) = \min_{W_{ik}} (W_{ik}\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)}) + \psi(W_{ik})), \quad (3.14)$$

同时，该最小值点满足如下形式：

$$W_{ik} = \xi(\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)})). \quad (3.15)$$

进而，所提出的改进的 Huber 张量核范数即公式 (3.13) 可以转化为如下形式：

$$\|\mathcal{L}\|_H = \min_{\mathbf{W}} \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d (W_{ik}\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)}) + \psi(W_{ik})). \quad (3.16)$$

以上即所提出的改进的 Huber 张量核范数的基于半二次理论的最小化形式，更进一步地。将公式 (3.16) 代入到 Huber 张量主成分分析模型即公式 (3.4) 中，可以得到如下形式：

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathbf{W}} \frac{1}{d_3} \sum_{k=1}^{d_3} \sum_{i=1}^d (W_{ik}\sigma_i(\bar{\mathbf{L}}^{(k)}) + \psi(W_{ik})) + \lambda \|\mathcal{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}. \quad (3.17)$$

可以看到，该形式符合加权张量核范数的形式，根据定义 2.15，最终我们的 Huber 张量鲁棒主成分分析模型可以转化为如下的加权形式：

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathbf{W}} \|\mathcal{L}\|_{\mathbf{W},*} + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 + \Psi(\mathbf{W}) \text{ s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}, \quad (3.18)$$

其中  $\Psi(\mathbf{W}) \in \mathbb{R}$  定义为  $(\Psi(\mathbf{W}))_{ik} = \psi(W_{ik})$ 。相较于原始的模型，该带权核范数形式的模型便于求解。在本章节的下一部分，我们会设计一个非常有效的算法来求解该模型。

**注 3.3** 定理 3.2 使用了一种权重的思想来理解所提出的改进的 Huber 张量核范数以及其对应的张量鲁棒主成分分析模型。具体来说，改进的 Huber 函数所对应的权重函数可以计算为  $w = \xi(x)$ 。图 3.3 给出了该权重函数在不同参数  $c$  下的示例，从图中可以看到，随着奇异值的增大，其权重数值会减小。这也意味着在最小化改进 Huber 的张量核范数中大的奇异值会受到小的惩罚。特别的，当参数  $c \rightarrow \infty$ ，此时权重函数变为  $w = 1$ 。这意味着所有奇异值都受到相同的惩罚，即与原始的张量核范数相同。故这里也说明所提出的改进的 Huber 张量核范数是原始张量核范数的一种推广。

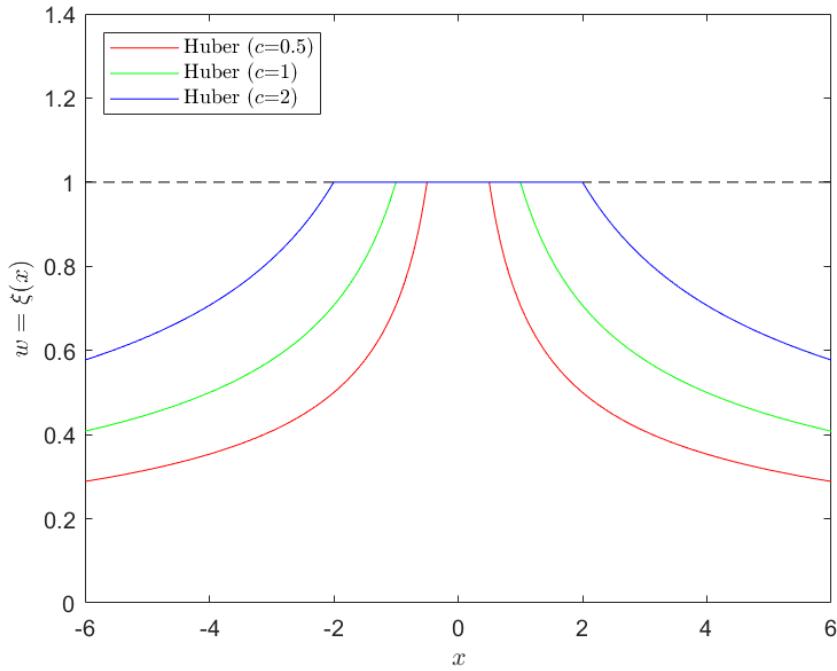


图 3.3 不同参数  $c$  下改进的 Huber 函数  $f_H(x)$  所对应的权重函数  $w = \xi(x)$ 。

Fig. 3.3 The weight function  $w = \xi(x)$  of the improved Huber function  $f_H(x)$  with different parameter.

### 3.3 算法优化

本小节旨在设计一种有效的优化算法来求解提出的基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。需要指出的是，不同于以前的许多工作在模型优化过程中使用固定权重的优化策略。在本文工作中，所设计的算法能根据改进的 Huber 函数及其对应的权重函数来在每次算法迭代中自适应更新权重，取得更合理的效果。首先，基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型，即公式 (3.18) 所对应的增广拉格朗日函数如下：

$$L(\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{Y}, \mathbf{W}, \mu) = \|\mathcal{L}\|_{\mathbf{W},*} + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 + \Psi(\mathbf{W}) + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{L} + \mathcal{E} - \mathcal{X} + \mathcal{Y}/\mu\|_F^2 - \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Y}/\mu\|_F^2, \quad (3.19)$$

其中  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  表示由拉格朗日乘子所组成的三阶张量， $u > 0$  为一参数，可以用来控制算法收敛速度。基于交替方向乘子法优化框架。该增广拉格朗日函数中的变量可以交替优化求解，具体过程为：

更新  $\mathcal{L}$ : 通过固定其他变量, 首先可以通过求解下列表子问题来更新  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_{t+1} = \arg \min_{\mathcal{L}} \frac{1}{\mu_t} \|\mathcal{L}\|_{\mathbf{W},*} + \frac{1}{2} \|\mathcal{L} - (\mathcal{X} - \mathcal{E}_t - \mathcal{Y}_t/\mu_t)\|_F^2. \quad (3.20)$$

为了求解该子问题, 可以引入一个有关加权张量核范数 (Weighted Tensor Nuclear Norm, WTNN) 最小化问题求解的定理 (Wang *et al.* 2023)。

**定理 3.4** (Wang *et al.* 2023) 对于一个三阶张量  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$  和一个权重矩阵  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times d_3}$ , 不妨记  $\mathbf{w}_k$  为  $\mathbf{W}$  的第  $k$  列并且  $d = \min\{d_1, d_2\}$ 。 $\mathcal{M}$  的 T-SVD 分解为  $\mathcal{M} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ 。考虑如下的 WTNN 最小化问题:

$$\mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\mathbf{W},*}}(\mathcal{M}) = \arg \min_{\mathcal{L}} \|\mathcal{L}\|_{\mathbf{W},*} + \frac{1}{2} \|\mathcal{L} - \mathcal{M}\|_F^2, \quad (3.21)$$

其中  $\|\cdot\|_{\mathbf{W},*}$  表示 WTNN,  $\mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\mathbf{W},*}}(\cdot)$  记为一个近端优化算子。如果权重矩阵满足  $0 \leq W_{1k} \leq W_{2k} \cdots \leq W_{dk}$ ,  $k = 1, \dots, d_3$ 。那么问题 (3.21) 的全局最优解如下:

$$\mathcal{L}^* = \mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\mathbf{W},*}}(\mathcal{M}) = \mathcal{U} * ifft(\mathcal{P}_{\mathbf{W}}(\bar{\mathcal{S}}), [], 3) * \mathcal{V}^*, \quad (3.22)$$

其中运算算子  $\mathcal{P}_{\mathbf{W}}(\bar{\mathcal{S}})$  结果为一张量并满足其第  $k$  个正面切片为  $\mathbf{P}_{\mathbf{w}_k}(\bar{\mathbf{S}}^{(k)})$ 。 $\bar{\mathbf{S}}^{(k)}$  是  $\bar{\mathcal{S}}$  的第  $k$  个正面切片。运算算子  $\mathbf{P}_{\mathbf{w}_k}(\bar{\mathbf{S}}^{(k)})$  表示一个对角矩阵, 具体计算为  $(\mathbf{P}_{\mathbf{w}_k}(\bar{\mathbf{S}}^{(k)}))_{ii} = (\bar{\mathbf{S}}_{ii}^{(k)} - w_{ki})_+$ , 其中  $x > 0$  时  $(x)_+ = x$ 。对于  $(x)_+ = 0$ ,  $w_{ki}$  为向量  $\mathbf{w}_k$  的第  $i$  个元素。

回顾公式 (2.15) 有关张量加权核范数的定义, 有  $\frac{1}{\mu_t} \|\mathcal{L}\|_{\mathbf{W}_t,*} = \|\mathcal{L}\|_{\frac{1}{\mu_t} \mathbf{W}_t,*}$ , 同时根据定理 3.4, 子问题 (3.20) 的最优解为:

$$\mathcal{L}_{t+1} = \mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\frac{1}{\mu_t} \mathbf{W}_t,*}}(\mathcal{X} - \mathcal{E}_t - \mathcal{Y}_t/\mu_t). \quad (3.23)$$

更新  $\mathcal{E}$ : 通过固定其他变量, 迭代过程中可以通过求解下列表子问题来更新变量  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_{t+1} = \arg \min_{\mathcal{E}} \frac{\lambda}{\mu_t} \|\mathcal{E}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathcal{E} - (\mathcal{X} - \mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{Y}_t/\mu_t)\|_F^2, \quad (3.24)$$

该子问题同样存在一个闭式解。为了得到该闭式解, 需要引入软阈值求解算子。该闭

式解可以通过如下公式计算：

$$\mathcal{E}_{t+1} = \mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(\mathcal{X} - \mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{Y}_t/\mu_t),$$

其中  $\mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(\cdot)$  为一软阈值算子，其具体定义为  $\mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(\mathcal{A})$  的第  $ijk$  个元素为  $sign((\mathcal{A})_{i,j,k}) \cdot \max(|(\mathcal{A})_{i,j,k}| - \lambda/\mu_t)$ 。

**更新  $\mathbf{W}$** : 固定其他变量，根据公式 (3.15)，权重矩阵  $\mathbf{W}$  的更新形式为：

$$(W_{ik})_{t+1} = \xi \left( \sigma_i \left( \bar{\mathbf{L}}_{t+1}^{(k)} \right) \right). \quad (3.25)$$

**更新  $\mathcal{Y}$  和  $\mu$** : 通过下列等式更新迭代过程中的拉格朗日乘子张量以及参数  $\mu$ :

$$\mathcal{Y}_{t+1} = \mathcal{Y}_t + \mu_t (\mathcal{L}_{t+1} + \mathcal{E}_{t+1} - \mathcal{X}), \quad \mu_{t+1} = \rho \mu_t, \quad (3.26)$$

其中  $\rho$  为一可调参数，在本章节后续的所有实验中，对于所有方法均设置  $\rho = 1.1$ 。为了方便，算法 3.1 总结了所提出的 Huber 张量鲁棒主成分分析模型的具体优化步骤。其中  $\mathbf{1}_{d \times d_3}$  表示维度为  $d \times d_3$  并且元素全为 1 的矩阵。

### 3.4 实验结果与分析

本章节聚焦于张量鲁棒主成分分析问题。我们使用模拟张量数据和真实张量数据对提出的基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型 (HTRPCA) 进行实验，并与近年来提出的一些经典低秩张量恢复方法进行比较。所有的实验都运行于 MATLAB R2020a 软件，下面给出了张量鲁棒主成分分析实验的一些基本情况：

**实验数据**: 实验数据分为模拟数据以及真实数据，其中模拟数据通过张量积等定义使用 MATLAB 软件生成，具体可见后续对应的实验部分。真实数据包括彩色图像以及灰度视频序列，其中彩色图像使用伯克利分割数据集 (Berkeley Segmentation Dataset, BSD)(Martin *et al.* 2001)，灰度视频序列使用 YUV 视频序列作为实验样本。

**对比方法**: 为了验证所提出的方法的有效性，本实验选择了近些年提出的一些经典的张量鲁棒主成分分析方法作为对比方法，分别是：基于 Tucker 分解的 SNN 方法 (Liu *et al.* 2012)、基于张量 T-SVD 分解以及张量核范数的 TRPCA 方法 (Lu *et al.* 2019)、基于固定加权 Schatten- $p$  范数的 ETRPCA 方法 (Gao *et al.* 2019) 以及基于贝叶斯分解的

表 3.1 HTRPCA 算法。

Tab. 3.1 HTRPCA Algorithm.

---

**算法 3.1** Huber Tensor Robust Principal Component Analysis (HTRPCA)

**输入:** 观测数据  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ , 参数  $\lambda > 0$ .

**初始化:**  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{E}_0 = \mathcal{Y}_0 = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{1}_{d \times d_3}, \mu_0 = 10^{-4}, \rho = 1.1, \mu_{\max} = 10^6, \epsilon = 10^{-8}$  and  $t = 0$ .

**while** not converged **do**

- 1: 通过公式 (3.20) 来更新低秩张量  $\mathcal{L}_{t+1}$ ;
- 2: 通过公式 (3.24) 来更新稀疏张量  $\mathcal{E}_{t+1}$ ;
- 3: 通过公式 (3.25) 来更新权重矩阵  $\mathbf{W}_{t+1}$ ;
- 4: 通过公式 (3.26) 来更新拉格朗日乘子张量  $\mathcal{Y}_{t+1}$  和参数  $\mu_{t+1}$ ;
- 5: 检查收敛条件:
 
$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{L}_t\|_\infty &< \epsilon, \|\mathcal{E}_{t+1} - \mathcal{E}_t\|_\infty < \epsilon, \\ \|\mathcal{X} - \mathcal{E}_{t+1} - \mathcal{L}_{t+1}\|_\infty &< \epsilon; \end{aligned}$$
- 6:  $t = t + 1$ .

**end while**

**输出:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{t+1}, \mathcal{E} = \mathcal{E}_{t+1}$ .

---

BTRTF 方法 (Zhou *et al.* 2019)。

**参数设置:** 对于所有对比方法, 本研究都遵照原文作者代码或文章建议来进行参数的设置。特别的, 对于鲁棒主成分分析模型中平衡低秩项和稀疏项的参数  $\lambda$ 。Huang 等人 (2015) 的研究指出 SNN 方法使用原文理论设置的参数效果并不好, 因此这里在进行实验尝试后选择了如下的参数: 对于模拟实验以及彩色图像恢复实验  $\alpha = [15, 15, 1.5]$ , 对于视频序列恢复实验  $\alpha = [100, 0.1, 1]$ 。至于剩下的其他方法, 都设置为  $\lambda = 1/\sqrt{\max(n_1, n_2) \times n_3}$ 。另外, 对于所提出的 HTRPCA 模型, 在改进的 Huber 函数即公式 (3.2) 中存在一个参数  $c$ , 该参数的设置如下: 对于迭代过程中的低秩张量  $\mathcal{L}$ ,  $\bar{\mathbf{L}}^{(k)}$  表示其经过离散傅里叶变换之后的第  $k$  个正面切片, 对于该切片的所有奇异值 (即  $\sigma_1(\bar{\mathbf{L}}^{(k)}), \dots, \sigma_d(\bar{\mathbf{L}}^{(k)})$ ) 都设置为相同的参数  $c_k$ , 具体设置如下:

$$c_k = \tau * \text{mean}(\sigma_1(\bar{\mathbf{L}}^{(k)}), \dots, \sigma_d(\bar{\mathbf{L}}^{(k)})), \quad (3.27)$$

其中  $\tau$  为一可调参数，在后续的实验中均设置  $\tau = 0.5$ 。这样的设置保证了参数  $c$  在算法迭代过程中能自适应地进行设置。

**评价指标:** 对于模拟数据的恢复实验，可以直接使用恢复的相对平方误差来评价各种方法的恢复好坏。具体指标在对应的章节进行介绍。至于真实数据，即彩色图像与灰度视频序列恢复实验，本实验选取峰值信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) 以及结构相似度 ((structural similarity index, SSIM) 两种指标对恢复结果进行定量的评价 (Wang *et al.* 2004)。其中 PSNR 和 SSIM 指标的定义如下：

$$\text{PSNR}(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*) = 10 \log_{10} \left( \frac{d_1 d_2 d_3 \|\mathcal{L}^*\|_\infty^2}{\|\hat{\mathcal{L}} - \mathcal{L}^*\|_F^2} \right), \quad (3.28)$$

$$\text{SSIM}(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*) = \frac{(2\mu_{\hat{\mathcal{L}}} \mu_{\mathcal{L}^*} + C_1)(2\sigma_{\hat{\mathcal{L}}\mathcal{L}^*} + C_2)}{(\mu_{\hat{\mathcal{L}}}^2 + \mu_{\mathcal{L}^*}^2 + C_1)(\sigma_{\hat{\mathcal{L}}}^2 + \sigma_{\mathcal{L}^*}^2 + C_2)}, \quad (3.29)$$

其中  $\mathcal{L}^*$  为原始的真实张量图像， $\hat{\mathcal{L}}$  为算法恢复的张量图像。 $\mu_{\hat{\mathcal{L}}}$  和  $\mu_{\mathcal{L}^*}$  为其对应张量数据的均值， $\sigma_{\hat{\mathcal{L}}}$  和  $\sigma_{\mathcal{L}^*}$  为其对应张量数据的标准差， $\sigma_{\hat{\mathcal{L}}\mathcal{L}^*}$  为两个张量间的协方差。从定义可以看出，通常 PSNR 和 SSIM 值越高，图像的恢复效果越好。反之恢复效果越差。

### 3.4.1 模拟数据实验

为了验证所提出的方法在低秩张量恢复问题上的有效性，首先针对张量鲁棒主成分分析问题，我们设计了多种模拟数据进行恢复实验。然后比较在模拟数据上基于 SNN、TNN、ETRPCA、BTRTF 以及本研究所提出 HTRPCA 方法的恢复准确性。参照 (Gao *et al.* 2021) 中的实验设计，对于模拟数据的设置以及生成过程具体如下：

根据公式 (2.5) 即有关张量积的定义，通过软件生成张量  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{d_1 \times r \times d_3}$  以及  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{r \times d_2 \times d_3}$ ，其中  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{Q}$  的元素均从独立的均匀分布 (即高斯分布中采样)。这样，根据张量积的定义，通过对张量  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{Q}$  进行张量积得到一个张量管秩为  $r$  的张量即  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 。当  $r \ll \min\{d_1, d_2\}$  时， $\mathcal{L}_0$  为一低秩张量。同时，对于稀疏项噪声，同样生成一个稀疏张量  $\mathcal{E}_0$  并且满足  $\|\mathcal{E}_0\|_0 = m$ ，通过控制  $m$  的大小来控制该张量的稀疏度，同时  $\mathcal{E}_0$  的非零元素满足伯努利分布。这样就可以构建出一个受噪声污染的低秩张量，即  $\mathcal{X} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{E}_0$ 。最后利用各个算法对该模拟张量进行恢复实验，算法恢复出的低秩张量与稀疏张量分别记为  $\hat{\mathcal{L}}$  与  $\hat{\mathcal{E}}$ 。为了比较算法恢复结果，本文使用如下指标来衡量算法对模拟数据恢复的效果：

表 3.2 各维度模拟张量在 10% 噪声下恢复结果。

Tab. 3.2 Correct recovery for random problems of varying sizes with 10% noises.

$d$	$r$	$m$	Algorithm	$\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$	$\ \hat{\mathcal{E}}\ _0$	$RSE(\hat{\mathcal{L}})$	$RSE(\hat{\mathcal{E}})$
100	10	1e5	SNN	10	940731	5.31e-1	6.33e-3
100	10	1e5	TRPCA	10	101856	2.26e-7	9.83e-10
100	10	1e5	ETRPCA	10	100561	1.35e-7	5.71e-10
100	10	1e5	BTRTF	10	100000	1.03e-7	2.49e-10
100	10	1e5	HTRPCA	10	100000	8.72e-8	2.73e-10
200	20	8e5	SNN	20	916235	8.18e-1	4.10e-3
200	20	8e5	TRPCA	20	815165	3.64e-7	5.73e-10
200	20	8e5	ETRPCA	20	804578	2.25e-7	4.82e-10
200	20	8e5	BTRTF	20	801214	1.07e-7	7.63e-11
200	20	8e5	HTRPCA	20	800000	9.13e-8	4.99e-11
300	30	27e5	SNN	30	2783840	2.83e1	9.50e-3
300	30	27e5	TRPCA	30	2753693	9.37e-7	9.71e-10
300	30	27e5	ETRPCA	30	2716580	2.63e-7	7.03e-10
300	30	27e5	BTRTF	30	2704391	8.91e-8	3.24e-10
300	30	27e5	HTRPCA	30	2700000	6.97e-8	7.99e-11

1.  $\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$ : 低秩张量  $\hat{\mathcal{L}}$  的管秩, 越接近设定的  $r$  效果越好。
2.  $\|\hat{\mathcal{E}}\|_0$ : 稀疏张量  $\hat{\mathcal{E}}$  的稀疏度, 越接近设定的  $m$  效果越好。
3.  $RSE(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{\|\hat{\mathcal{L}} - \mathcal{L}_0\|_F}{\|\mathcal{L}_0\|_F}$ : 低秩张量  $\hat{\mathcal{L}}$  和真实低秩张量  $\mathcal{L}_0$  之间的相对平方误差, 该指标越小代表恢复效果越好。
4.  $RSE(\hat{\mathcal{E}}) = \frac{\|\hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E}_0\|_F}{\|\mathcal{E}_0\|_F}$ : 稀疏张量  $\hat{\mathcal{E}}$  和真实稀疏张量  $\mathcal{E}_0$  之间的相对平方误差, 该指标越小代表恢复效果越好。

同时为了方便, 在实验中设置  $d_1 = d_2 = d_3 = d$  并且  $r = 0.1d$ 。并且每次恢复实验进行 10 次取平均值。表 3.2 给出了各种方法在不同大小模拟张量被 10%(即  $m = 0.1n^3$ ) 噪声污染的恢复结果, 表 3.3 给出了各种方法在不同大小模拟张量被 20%(即  $m = 0.2n^3$ ) 噪声污染的恢复结果。从表 3.2 和表 3.3 有关模拟数据的恢复结果可以得出如下结论:

1. 基于 TNN 的方法在模拟数据上的恢复效果要好于基于 SNN 的方法, 原因是 SNN 并不能很好的捕捉张量结构层与层之间的信息
2. HTRPCA 方法由于考虑了低秩张量大小奇异值的差异性, 在模拟数据恢复的各个评价指标中都取得了很好的结果。

表 3.3 各维度模拟张量在 20% 噪声下恢复结果。

Tab. 3.3 Correct recovery for random problems of varying sizes with 20% noises.

$d$	$r$	$m$	Algorithm	$\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$	$\ \hat{\mathcal{E}}\ _0$	$RSE(\hat{\mathcal{L}})$	$RSE(\hat{\mathcal{E}})$
100	10	2e5	SNN	10	947705	3.39e-1	6.70e-3
100	10	2e5	TRPCA	10	200006	5.49e-7	3.01e-9
100	10	2e5	ETRPCA	10	200000	3.38e-7	1.82e-9
100	10	2e5	BTRTF	10	200000	2.43e-7	1.56e-9
100	10	2e5	HTRPCA	10	200000	3.14e-7	1.67e-9
200	20	16e5	SNN	20	1600397	1.86e1	6.60e-3
200	20	16e5	TRPCA	20	1600259	6.37e-7	1.71e-9
200	20	16e5	ETRPCA	20	1600004	6.36e-7	1.70e-9
200	20	16e5	BTRTF	20	1600128	5.73e-7	1.37e-9
200	20	16e5	HTRPCA	20	1600000	3.34e-7	8.77e-10
300	30	54e5	SNN	30	5423711	4.24e2	3.21e1
300	30	54e5	TRPCA	30	5401661	8.36e-7	1.49e-9
300	30	54e5	ETRPCA	30	5400006	7.74e-7	1.37e-9
300	30	54e5	BTRTF	30	5400000	5.47e-7	7.92e-10
300	30	54e5	HTRPCA	30	5400000	3.40e-7	5.69e-10

### 3.4.2 彩色图像去噪实验

在本小节中，本研究重点聚焦于彩色图像去噪实验，该实验旨在从受到噪声污染的自然图像中恢复出干净的、无噪的真实图像。事实上，一些研究已经表明自然界中干净的彩色图像可以被近似为三阶低秩张量。例如 Hu 等人 (2013) 的研究指出自然图像的场景信息往往由前 20 个奇异值决定。因此该自然图像可以被认为是近似低秩的，故使用张量鲁棒主成分分析方法就可以实现对受到噪声污染图像的恢复。实验具体过程与设置如下：我们选用伯克利分割数据集 (即 BSD 数据集) 作为实验样本，该数据集包含 500 张维度为  $482 \times 321 \times 3$  的彩色图像，并且被划分为三个子数据集分别为 BSD\_train(200 张)、BSD\_test(200 张)、BSD\_val(100 张)。对于每张图片，本实验选取 10% 的像素 (像素点位置服从高斯分布) 并将其数值设置为  $[0,255]$  的随机值作为噪声。然后使用各对比方法 (SNN、TRPCA、ETRPCA、BTRTF) 以及所提出的 HTRPCA 方法对噪声图像进行恢复。

为了直观理解各个方法的恢复结果，我们在 BSD 数据集中选取了 6 张图像作为样本，将真实图像 (作为背景对比)、带噪图像、以及各算法恢复出来的低秩图像进行可视化展示，具体结果如图 3.4 所示，可以看到，基于张量核范数的方法 (TRPCA、ETRPCA、BTRTF 以及 HTRPCA) 在图像恢复效果上要好于基于 SNN 的方法，说明张

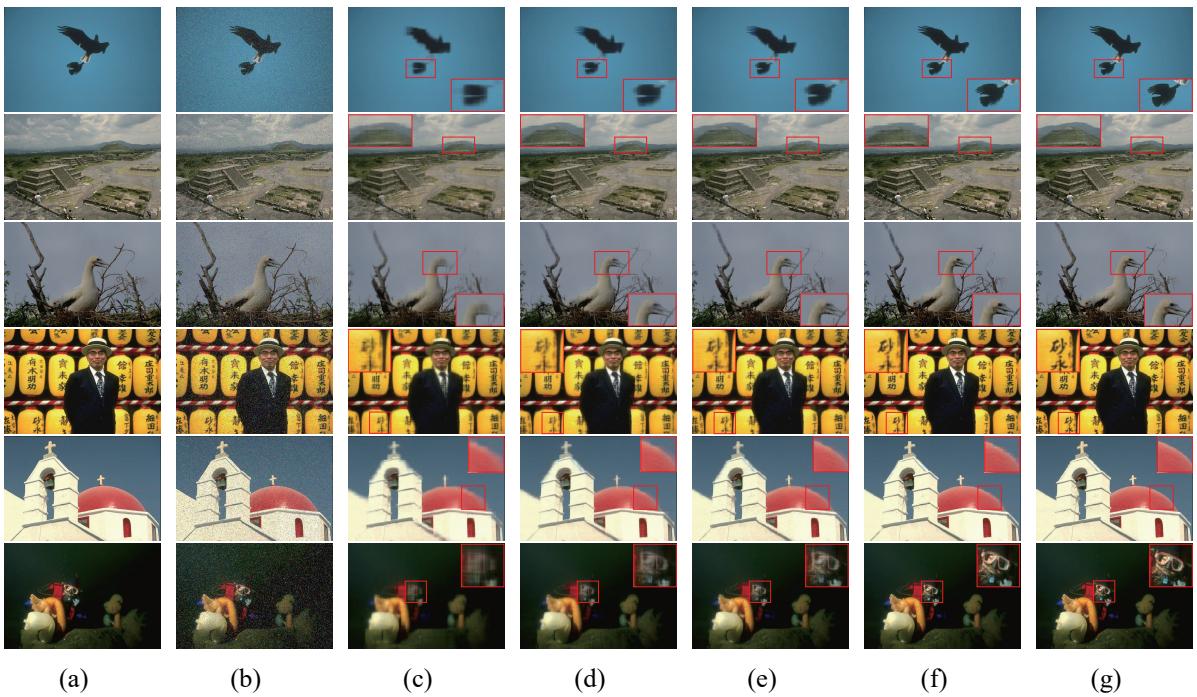


图 3.4 彩色图像恢复效果 (数据来自 BSD 数据集 6 张图像)。 (a) 真实图像; (b) 观测的带噪图像; (c)-(g) 分别是 SNN, TRPCA, ETRPCA, BTRTF 和 HTRPCA 方法恢复图像。

Fig. 3.4 Comparison of the recovery performance on 6 images from the BSD dataset. (a) Original image; (b) observed image; (c)-(g) recovered images by SNN, TRPCA, ETRPCA, BTRTF and HTRPCA, respectively.

量积以及张量核范数等的定义能很好得捕捉张量层与层之间的信息，有助于低秩张量的恢复。同时，所提出的 HTRPCA 方法在图像色彩以及图像边缘细节上的恢复效果要好于其他对比方法。这是因为我们提出的 TIHN 范数对于大的奇异值恢复效果更接近真实值，而自然图像大奇异值往往与图像中的色彩边缘信息相联系，从而导致了更佳的恢复效果。为了量化所有方法的效果，本实验也统计了这 6 张样本对应的 PSNR 以及 SSIM 值，结果如表 3.4 所示。可以看出所提出的 HTRPCA 方法在 PSNR 和 SSIM 两个评价指标的结果也要优于其他的对比方法，这个与图像的可视化结果是相对应的。

同时，为了避免图片个例的影响。对于彩色图像 BSD 数据集，本实验还统计了各个方法在三个子集 (即 `BSD_train`、`BSD_test` 和 `BSD_val`) 以及整个 BSD 数据集 (`BSD_all`) 上图像恢复的平均结果，具体结果如表 3.5 所示。可以看到，在 BSD 数据集上我们方法的效果在 PSNR 指标上比其他对比方法要高至少 5db，同时 SSIM 值也是最高的，这也验证了我们的方法在彩色图像恢复上的有效性。进一步，本实验从 BSD 数

表 3.4 图像恢复实验图 3.4 中 6 张样本的 PSNR 值和 SSIM 对比，最好的结果已标粗。

Tab. 3.4 Comparison of PSNR and SSIM values on the related 6 images in Fig. 3.4 for color image recovery experiment. The best results are highlighted in boldface.

测试	SNN		TRPCA		ETRPCA		BTRTF		HTRPCA	
图像	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Image1	30.39	0.984	31.82	0.985	33.29	0.987	37.29	0.994	<b>41.33</b>	<b>0.998</b>
Image2	25.17	0.909	29.12	0.952	28.99	0.937	30.95	0.944	<b>34.50</b>	<b>0.979</b>
Image3	22.80	0.898	26.40	0.934	26.46	0.923	28.78	0.958	<b>31.89</b>	<b>0.975</b>
Image4	23.90	0.965	25.43	0.966	26.95	0.970	29.35	0.983	<b>33.60</b>	<b>0.986</b>
Image5	24.54	0.947	27.09	0.956	28.25	0.963	31.17	0.978	<b>33.55</b>	<b>0.988</b>
Image6	28.09	0.966	30.28	0.970	31.98	0.973	35.37	0.977	<b>40.65</b>	<b>0.989</b>

表 3.5 彩色图像去噪实验：BSD 数据集及三个子集上的平均 PSNR 和 SSIM 值，最好的结果已标粗。

Tab. 3.5 Comparison of PSNR values (average) and SSIM values (average) on the three subsets of the BSD dataset. The best results are highlighted in boldface.

测试	SNN		TRPCA		ETRPCA		BTRTF		HTRPCA	
数据集	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
BSD_train	27.58	0.935	29.44	0.961	29.76	0.950	31.69	0.963	<b>35.63</b>	<b>0.984</b>
BSD_test	27.13	0.933	28.95	0.959	29.29	0.950	31.30	0.961	<b>35.06</b>	<b>0.983</b>
BSD_val	27.11	0.925	29.15	0.955	29.06	0.939	30.90	0.951	<b>34.91</b>	<b>0.980</b>
BSD_all	27.31	0.932	29.18	0.959	29.43	0.949	31.38	0.960	<b>35.25</b>	<b>0.983</b>

据集中随机选取 50 张图片并展示出各个方法的恢复效果，如图 3.5 所示。可以看出，在每一张图像上我们的方法都取得了比较好的效果，故可以认为所提出的 HTRPCA 方法在彩色图像去噪的实验室是具有普适性的。基于以上的彩色图像去噪结果，可以得到下述结论：

1. 基于 TNN 的方法 (TRPCA、ETRPCA、BTRTF 和 HTRPCA) 总体上优于基于 SNN 的方法。原因是基于 SNN 的方法需要将张量数据沿一种模式展开为矩阵，在展开过程中张量的结构信息已被破坏。与此相反，基于 TNN 的方法可以更有效地利用高阶

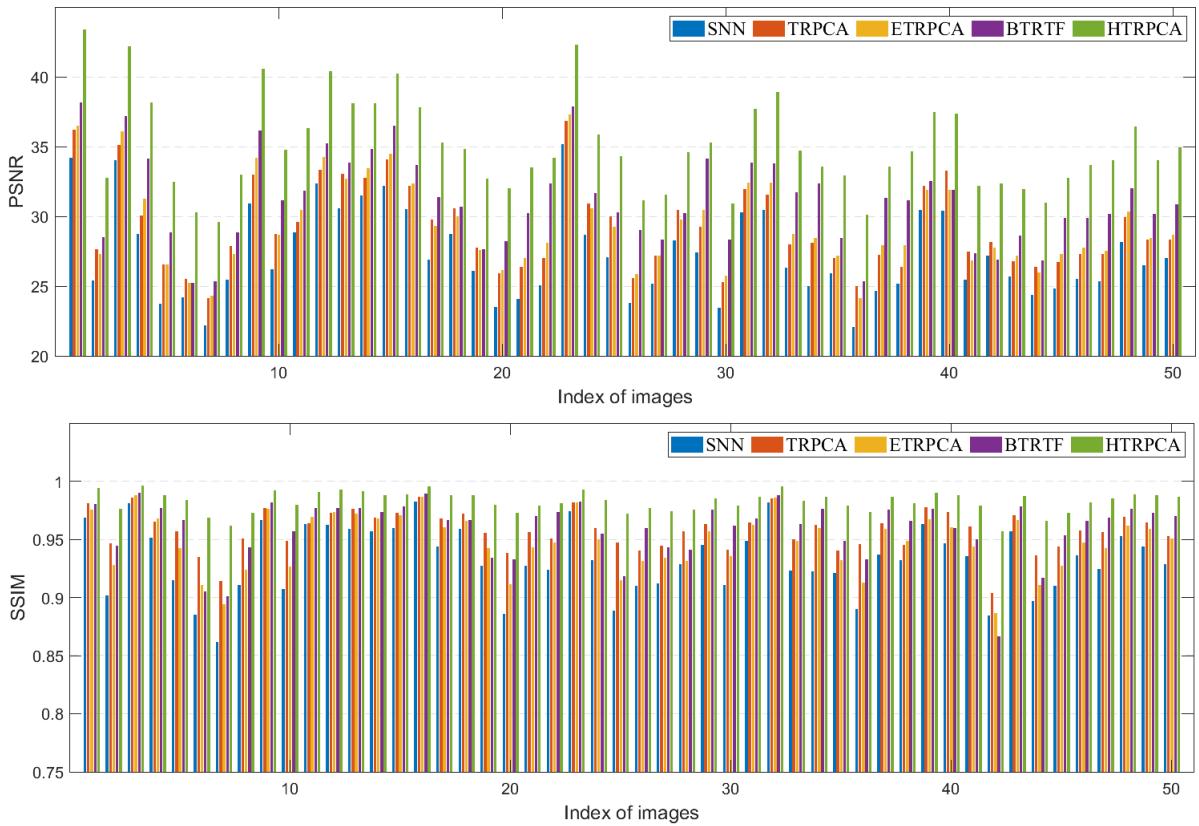


图 3.5 彩色图像恢复实验: 各方法在 BSD50 张图像上的恢复效果 (PSNR 和 SSIM 值)

Fig. 3.5 Comparison of PSNR values and SSIM values of SNN, TRPCA, ETRPCA, BTRTF, HTRPCA for image recovery on 50 images.

信息进行恢复, 从而导致对张量数据的更佳恢复。

2. 与 TRPCA 和 ETRPCA 相比, 所提出的 HTRPCA 方法可以准确地恢复图像边缘和颜色信息。原因在于 HTRPCA 可以通过加权函数自适应地学习张量正面切片的权重, 而这种权重比较合适。相比之下, ETRPCA 中的权重需要手动设置, 因此并不能保证设置的权重是比较合适的。

### 3.4.3 视频序列去噪实验

在另一项实验中, 本研究在广泛使用的 YUV 视频序列数据集上验证了 HTRPCA 的有效性。本实验在该数据集中选取了 10 个有代表性的视频序列, 分别为 Akiyo、Carphone、Claire、Coastguard、Container、Foreman、Hall、Mobile、News 和 Salesman 进行实验。同时每个视频序列选取前 100 帧进行实验, 即视频序列构成维度为

表 3.6 灰度视频序列实验：各方法在 10 个 YUV 视频序列的 PSNR 值对比。最好的结果已标粗。

Tab. 3.6 Comparison of PSNR values on ten YUV video sequences. The best results are highlighted in boldface.

测试视 频序列	SNN		TRPCA		ETRPCA		BTRTF		HTRPCA	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Akiyo	29.47	0.925	36.86	0.985	37.16	0.986	39.85	0.990	<b>45.91</b>	<b>0.995</b>
Carphone	29.69	0.914	33.44	0.967	33.91	<b>0.969</b>	34.94	0.965	<b>38.45</b>	0.967
Claire	30.03	0.950	37.32	0.988	37.67	0.989	39.54	0.988	<b>44.79</b>	<b>0.994</b>
Coastguard	24.92	0.836	32.91	0.973	33.28	0.974	33.98	<b>0.977</b>	<b>35.56</b>	0.976
Container	26.44	0.902	41.13	0.985	41.51	<b>0.995</b>	43.02	0.991	<b>47.34</b>	0.993
Foreman	27.62	0.876	31.89	0.971	32.65	0.973	35.41	0.974	<b>37.32</b>	<b>0.978</b>
Hall	27.06	0.920	31.69	0.977	31.98	0.978	34.94	0.971	<b>38.65</b>	<b>0.982</b>
Mobile	31.92	0.947	39.23	0.987	39.53	<b>0.988</b>	42.11	0.981	<b>45.14</b>	0.985
News	22.03	0.773	28.49	0.950	28.85	0.954	30.85	0.959	<b>32.53</b>	<b>0.960</b>
Salesman	32.79	0.922	39.32	0.981	39.63	0.982	40.51	0.980	<b>42.78</b>	0.983

144 × 176 × 100 大小的张量。对比之前彩色图像可以发现，灰度视频序列的  $d_3$  维度要比彩色图像大许多，这使得对视频序列的去噪任务要困难许多。同样的，对于视频序列实验本文随机选取 10% 的像素点替换为 [0,255] 的随机值，然后使用各种张量鲁棒主成分分析方法对带噪的视频序列进行恢复。

有关灰度视频序列去噪的实验结果如下：表 3.6 列出了各个张量去噪方法在 10 个 YUV 视频序列上的 PSNR 以及 SSIM 指标。从中可以看出，即使是维度比较大的张量，所提出的 HTRPCA 方法在视频去噪实验中依旧能取得非常好的效果。同时，为了方便直观理解恢复结果，本实验在 10 个视频序列中选取了三个 (Akiyo、Salesman、Coastguard) 对它们结果中的一帧进行展示，恢复效果如图 3.6 所示。从恢复效果图可以看出，基于 SNN 的方法由于其优化过程中对张量进行展开处理，导致恢复结果比较模糊。同时在所有方法中，所提出的 HTRPCA 方法在灰度视频序列的恢复实验中取得了最好的效果。基于以上的灰度视频序列去噪结果，可以得到下述结论：

1. 灰度视频序列由于其前后帧之间具有连续性，可以视为具有低秩张量的结构。在灰度视频去噪的实验中，由于 SNN 方法的本质还是对张量进行矩阵化的展开，忽略

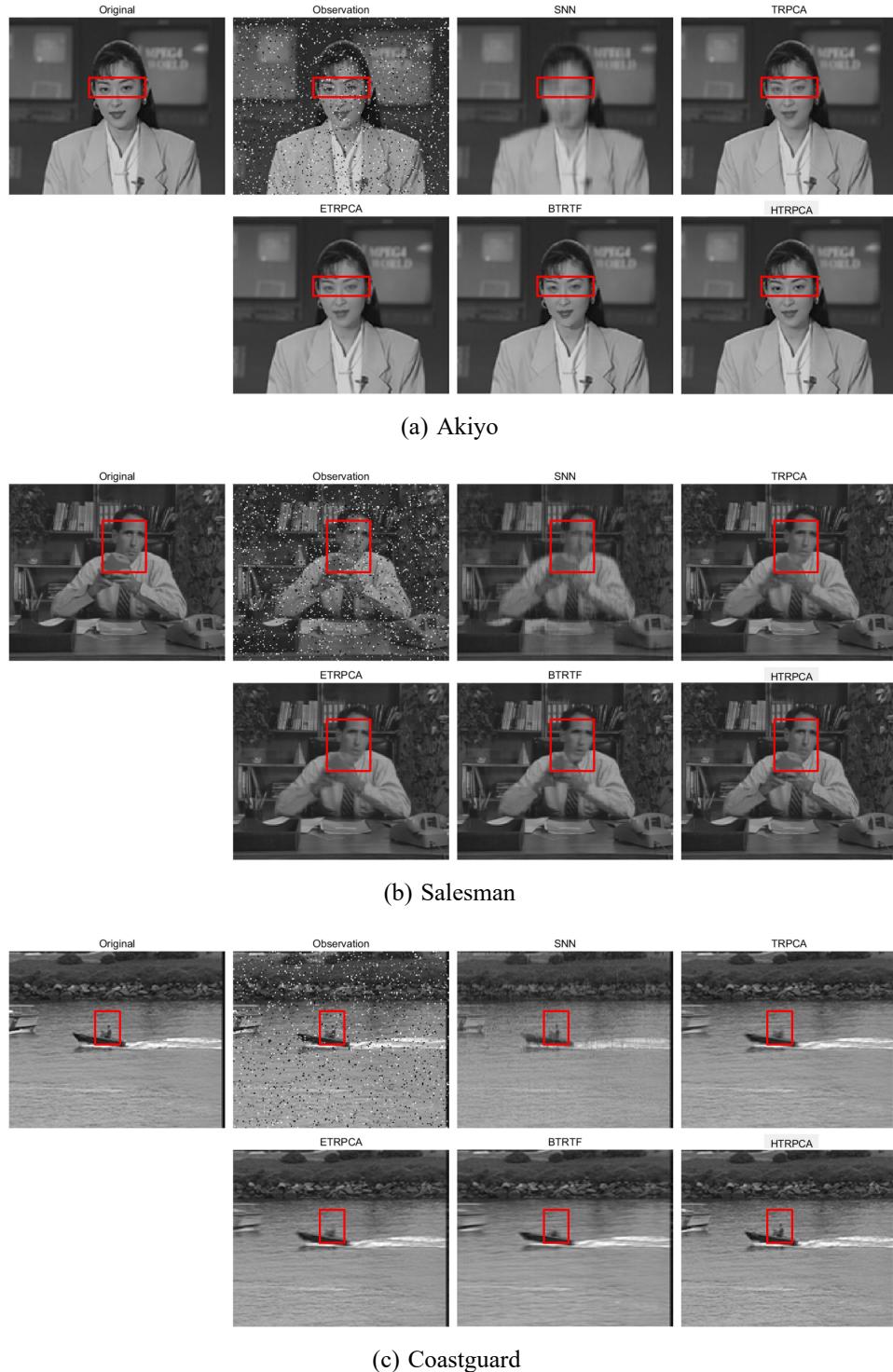


图 3.6 灰度视频序列恢复效果：各方法在 3 个 YUV 视频序列上的恢复效果。

Fig. 3.6 Recovery performance comparison on 3 video sequences from the YUV dataset.

了张量正面切片之间的联系，导致视频序列恢复的结果较差。相反基于张量核范数的方法如 TRPCA, ETRPCA 由于张量积以及张量核范数的定义中考虑到了切片之间的相关性，恢复效果较 SNN 方法好。

2. 随着  $d_3$  维度的增加，灰度视频序列的恢复对比自然图像变得更加困难。尽管如此，本文提出的 HTRPCA 方法在各个帧图像的边缘细节上的恢复效果是最清晰的。这说明提出的改进的 Huber 张量核范数能够准确地恢复出张量较大奇异值，从而导致更为清晰的细节恢复。并且就 PSNR 指标而言，所提出的 HTRPCA 方法仍比其他对比方法平均高出至少 5db。

#### 3.4.4 算法收敛性分析

本小节对所提出的 HTRPCA 算法进行收敛性分析。如算法 4.1 所示，所提出的方法基于交替方向乘子算法，各个变量（如  $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{E}$ ）在算法运行过程中交替迭代更新。因此，为了验证所提出的算法的收敛性，本小节探究了算法在 BSD 数据集一张样本恢复过程中  $\mathcal{L}_t + \mathcal{E}_t - \mathcal{X}$  和  $\mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{L}_t$  的变化。结果如图 3.7 所示，可以看到，所提出的 HTRPCA 算法这两项误差在 50 次的迭代后就趋于 0。这表明提出的优化方法在实际应用中具有良好的收敛性。

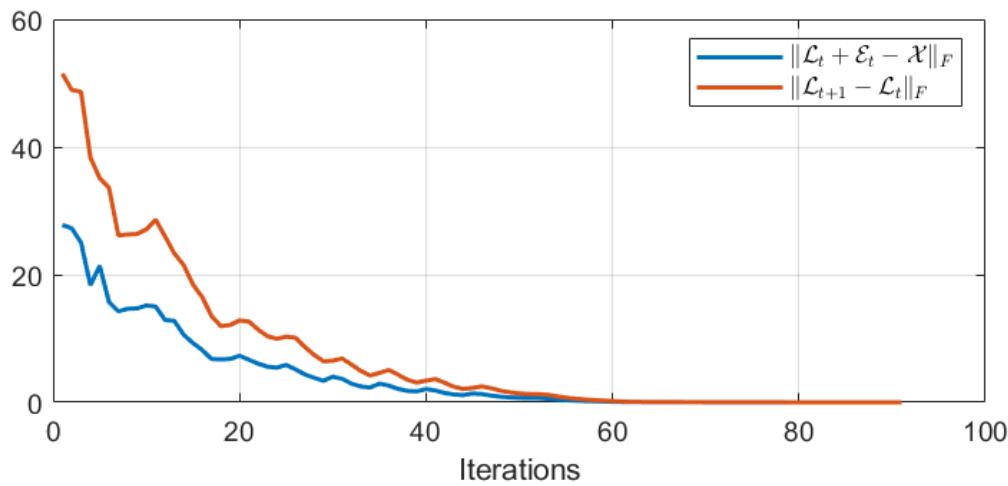


图 3.7 HTRPCA 方法在 BSD 数据集实验上的收敛性曲线。

Fig. 3.7 The convergence behaviour of HTRPCA on recovering one image from the BSD dataset.

### 3.5 本章小结

在本章节中，本研究提出了一种新的张量范数，即改进的 Huber 张量核范数。由于原始的张量核范数在张量恢复的过程中忽视了张量奇异值之间的差异性，对所有奇异值在优化过程中都施加同样的最小化惩罚，进而导致基于原始张量核范数的方法对于大奇异值的恢复效果欠佳（大奇异值往往与低秩张量重要信息相联系）。受到改进的 Huber 函数的启发，本文提出的改进的 Huber 张量核范数能实现对大的奇异值施加较小的惩罚，从而导致更好的恢复。同时本研究将提出的范数应用到张量鲁棒主成分分析问题，提出一种新的模型，即基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。并且为了求解该方法，提出了一种基于半二次优化理论和交替方向乘子法框架的优化算法并给出了证明。该算法能有效求解所提出的方法。同时，有关模拟数据、彩色图像以及灰度视频序列去噪的实验证明了所提出的方法的有效性和优越性。最后本章对提出的算法进行了收敛性的分析，验证了算法在应用中具有良好的收敛性质。

## 4 基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化

张量完备化方法在张量缺失数据的恢复中起着重要的作用。本章节针对存在部分元素缺失的张量数据，利用本研究提出的改进的 Huber 张量核范数来对张量低秩性进行建模，提出了基于 Huber 损失的张量完备化模型 (Huber Tensor Completion, HTC)。同时为了进一步提升模型在张量实际应用中的效果，本章节进一步考虑了自然图像和多光谱图像等张量数据中存在的局部平滑先验信息。使用三维的全变分正则化方法 (Total Variation Regularization) 来约束张量恢复模型，并提出了基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型 (Huber Tensor Completion with Total Variation Regularization, HTC\_TV)。同时本章基于对称的高斯 - 赛德尔交替方向乘子法 (Symmetric Gauss-Seidel based Alternating Direction Method of Multipliers, sGS-ADMM) 来有效求解所提出的 HTC\_TV 模型。最后，在模拟数据和真实数据 (自然图像和多光谱图像) 的实验验证了本章提出算法的有效性。

### 4.1 相关知识

#### 4.1.1 张量平滑先验及全变分正则

本小节主要介绍张量数据中存在的平滑先验及其对应的全变分正则项。对于干净无损的彩色图像和多光谱图像等现实张量数据，除了其本身具有低秩属性之外，计算机视觉领域的许多研究注意到这些张量结构的数据本身还具有一些自带的先验信息例如局部平滑性、稀疏性、非局部的自相似性等 (Rudin *et al.* 1972, 余丽红等 2009, 吴亮和唐利明 2023)。以局部平滑性为例，为了使图像恢复算法恢复出的结果具有局部平滑性质，Rudin 等人 (1972) 首先提出全变分正则化思想来刻画灰度图像的局部平滑性并应用在图像去噪领域。随后该正则化还被推广到图像去模糊领域 (Rudin and Osher, 1994)。与以上基于灰度图像的二维全变分方法不同。由于张量数据具有多维的结构，因此本章使用张量数据在两个空间维度和一个管维度上的三维全变分正则来约束张量恢复模型，从而使恢复出的张量同时具有低秩性和局部平滑性。具体来说，对于三维张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ，可以使用一阶有限差分算子来刻画其各向异性全变分如下：

$$\|\mathcal{X}\|_{\text{TV}} = \|D\mathcal{X}\|_1 = \|D_{d_1}\mathcal{X}\|_1 + \|D_{d_2}\mathcal{X}\|_1 + \|D_{d_3}\mathcal{X}\|_1, \quad (4.1)$$

其中  $D_{d_1}, D_{d_2}, D_{d_3}$  分别表示三阶张量在各个维度上的一阶有限差分算子。对于低秩张量  $\mathcal{X}$  中的元素  $\mathcal{X}(i, j, k)$ , 对应的一阶有限差分算子计算如下:

$$\begin{aligned} D_{d_1}\mathcal{X} &= \mathcal{X}(i, j + 1, k) - \mathcal{X}(i, j, k); \\ D_{d_2}\mathcal{X} &= \mathcal{X}(i + 1, j, k) - \mathcal{X}(i, j, k); \\ D_{d_3}\mathcal{X} &= \mathcal{X}(i, j, k + 1) - \mathcal{X}(i, j, k). \end{aligned} \quad (4.2)$$

另外, 涉及到边界点时采用循环定义为:  $\mathcal{X}(i, 1, k) - \mathcal{X}(i, d_2, k), \mathcal{X}(1, j, k) - \mathcal{X}(d_1, j, k)$  以及  $\mathcal{X}(i, j, 1) - \mathcal{X}(i, j, d_3)$ 。为了直观的理解张量数据的局部平滑性, 图 4.1 给出了彩色图像和多光谱图像不同维度进行差分运算的结果。其中彩色图像我们只选用两个空间维度, 因为彩色图像的第三个维度为 RGB 不同色层, 该维度并不具有平滑性质。同时为了方便, 对于多光谱图像中某一个波段的图像, 使用灰度数值对图像进行展示。

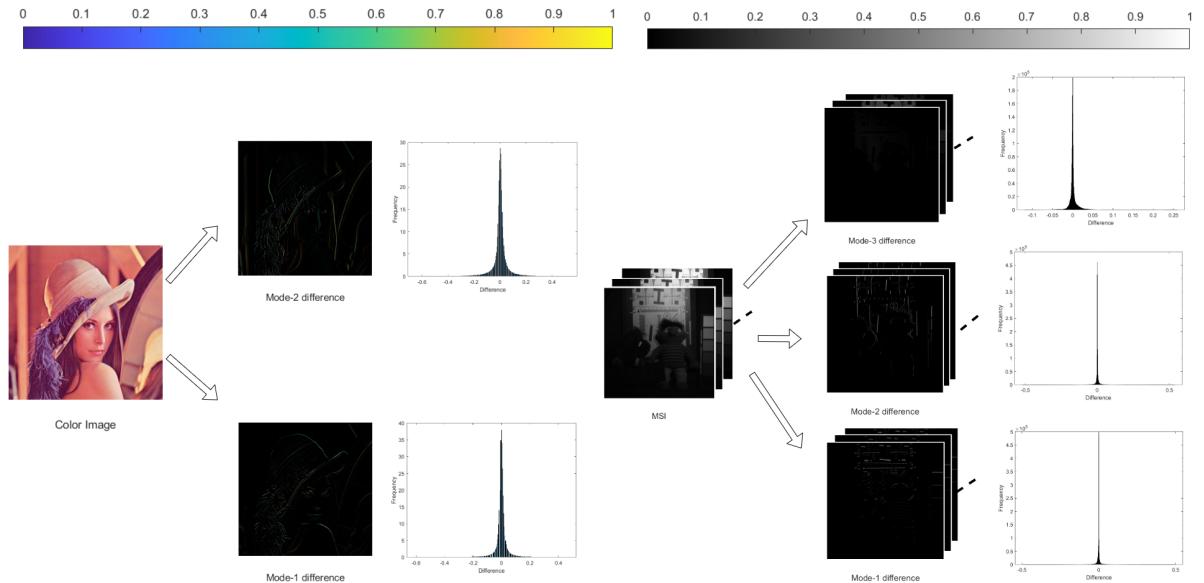


图 4.1 彩色图像与多光谱图像局部平滑性示意图。

Fig. 4.1 Illustration of the local smoothness of color and multispectral images.

从图 4.1 可以看出, 自然图像和多光谱数据等张量结构的数据在其多个维度上都具有局部平滑性, 即各个维度进行差分运算之后得到的张量元素具有稀疏性质。这个现象使得我们在本文后续的工作中使用三个不同方向的全变分正则化来约束所提出的 Huber 张量完备化的模型, 以期望达到三阶张量在所有方向上的平滑性恢复。

#### 4.1.2 基于 Huber 损失的张量完备化

为了进一步检验所提出的改进的 Huber 张量核范数的有效性。不同于之前研究的张量鲁棒主成分分析任务，本小节将所提出的改进 Huber 张量范数应用于张量完备化问题中，并给出其对应的优化框架。对于存在元素缺失的张量  $\mathcal{M}$ ，本章提出以下基于 Huber 损失的张量完备化模型来恢复出潜在的低秩张量  $\mathcal{X}$ ：

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_H, \text{s.t. } \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M}), \quad (4.3)$$

其中  $\|\mathcal{X}\|_H$  为公式 (3.3) 提出的改进的 Huber 张量核范数， $\Omega$  表示张量数据中观测到的位置的指标集， $\mathbb{P}$  表示正交投影算子。 $\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X})$  表示矩阵  $\mathcal{X}$  在指标集  $\Omega$  上的正交投影，即：

$$\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X})_{ijk} = \begin{cases} \mathcal{X}_{ijk}, & (i, j, k) \in \Omega, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.4)$$

同样，由于改进的 Huber 函数的非线性性质，基于半二次理论以及定理 3.2 可以将提出的模型转化为如下带权形式：

$$\min_{\mathcal{X}, \mathbf{W}} \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W},*} + \Psi(\mathbf{W}), \text{s.t. } \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M}), \quad (4.5)$$

其中  $\mathbf{W}$  为权重矩阵。同时为了方便求解，引入辅助变量  $\mathcal{E}$  将模型 (4.5) 转化为如下形式：

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathbf{W}} \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W},*} + \Psi(\mathbf{W}), \text{s.t. } \mathcal{X} + \mathcal{E} = \mathcal{M}, \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{E}) = 0. \quad (4.6)$$

使用 ADMM 框架来求解上述模型，其增广拉格朗日函数如下：

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{Y}, \mathbf{W}, \mu) = \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W},*} + \Phi(\mathbf{W}) + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{M} - \mathcal{X} - \mathcal{E} + \mathcal{Y}/\mu\|_F^2 - \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Y}/\mu\|_F^2, \quad (4.7)$$

其中  $\mathcal{Y}$  为拉格朗日乘子张量，参数  $\mu > 0$ 。然后通过交替迭代变量  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{W}$  和  $\mathcal{Y}$  来得到模型的最优解。这部分详细求解本文不再赘述，算法 4.1 给出了所提出的 Huber 张量完备化模型的具体优化步骤。其中  $\Omega^c$  为指标集  $\Omega$  的补集。

表 4.1 HTC 算法。

Tab. 4.1 HTC algorithm.

---

**算法 4.1** Huber Tensor Completion (HTC)

**输入:** 观测到的缺失张量元素  $\mathcal{M}_{ijk}, (i, j, k) \in \Omega$ , 其中  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$

**初始化:**  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}_0 = \mathcal{Y}_0 = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{1}_{d \times d_3}, \mu_0 = 10^{-4}, \rho = 1.1, \mu_{\max} = 10^6, \epsilon = 10^{-8}$  and  $t = 0$ .

**while** not converged **do**

1: 通过下列公式来更新低秩张量  $\mathcal{X}_{t+1}$ :

$$\mathcal{X}_{t+1} = \mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\frac{1}{\mu_t} \mathbf{W}_{t,*}}}(\mathcal{M} - \mathcal{E}_t + \mathcal{Y}_t / \mu_t); \quad (4.8)$$

2: 通过下列公式来更新辅助张量  $\mathcal{E}_{t+1}$ :

$$\mathcal{E}_{t+1} = \mathbb{P}_{\Omega^c}(\mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{M} - \mathcal{Y}_t / \mu_t); \quad (4.9)$$

3: 通过下列公式来更新权重矩阵  $\mathbf{W}_{t+1}$ :

$$(W_{ik})_{t+1} = \xi \left( \sigma_i \left( \bar{\mathbf{X}}_{t+1}^{(k)} \right) \right); \quad (4.10)$$

4: 通过下列公式来更新拉格朗日乘子张量  $\mathcal{Y}_{t+1}$  和参数  $\mu_{t+1}$ :

$$\mathcal{Y}_{t+1} = \mathcal{Y}_t + \mu_t (\mathcal{X}_{t+1} + \mathcal{E}_{t+1} - \mathcal{M}), \quad \mu_{t+1} = \rho \mu_t; \quad (4.11)$$

5: 检查收敛条件:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{X}_t\|_\infty &< \epsilon, \|\mathcal{E}_{t+1} - \mathcal{E}_t\|_\infty < \epsilon, \\ \|\mathcal{M} - \mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{E}_{t+1}\|_\infty &< \epsilon; \end{aligned}$$

6:  $t = t + 1$ .

**end while**

**输出:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{t+1}$ .

---

## 4.2 模型建立

对于三维张量数据, 本小节同时考虑其具有的低秩和局部平滑性先验信息。具体来说, 使用本研究提出的改进的 Huber 张量核范数来刻画张量的低秩性。同时对于张量的局部平滑性质, 我们使用张量数据在空间和管维度上的三维全变分方法来进行约

束。最终，本文提出了如下的基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型：

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_H + \lambda \|\mathcal{X}\|_{TV}, \text{s.t. } \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M}), \quad (4.12)$$

其中  $\lambda > 0$  为一可调参数，用来对模型低秩项和全变分正则项的权衡。由于全变分正则化的存在，该模型除了能更好地恢复出低秩张量之外，还可以更好地保持自然图像的空间相关性、高光谱图像的谱相关性以及视频序列的时间相关性等。使得恢复出的张量效果更好。

### 4.3 算法优化

为了高效求解所提出的基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型。本小节利用对称的高斯 - 赛德尔交替方向乘子法 (Chen *et al.* 2017) 框架来设计优化算法。具体过程如下：首先，对于提出的全变分模型 (4.12) 中的约束条件，可以使用张量的 Frobenius 范数来刻画  $\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{X})$  和  $\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M})$  之间的差。故可以得到如下模型：

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_H + \lambda \|\mathcal{X}\|_{TV} + \frac{\beta}{2} \|\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M} - \mathcal{X})\|_F^2, \quad (4.13)$$

其中  $\beta$  为一参数。基于半二次优化理论，定理 3.2 以及全变分约束项的具体定义  $\|\mathcal{X}\|_{TV} = \|D\mathcal{X}\|_1$ 。上述模型可转化为：

$$\min_{\mathcal{X}, \mathbf{W}} \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W}, *} + \lambda \|D\mathcal{X}\|_1 + \Psi(\mathbf{W}) + \frac{\beta}{2} \|\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M} - \mathcal{X})\|_F^2. \quad (4.14)$$

为了便于求解，引入辅助变量  $\mathcal{Z}, \mathcal{F}$  以及  $\mathcal{O}$  并满足  $\mathcal{Z} = \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M}) - \mathcal{X}, \mathcal{F} = D\mathcal{O}$  以及  $\mathcal{O} = \mathcal{X}$ 。则模型 (4.14) 可转化为：

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{F}, \mathcal{O}, \mathbf{W}} (\|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W}, *} + \lambda \|\mathcal{F}\|_1) + \Psi(\mathbf{W}) + \frac{\beta}{2} \|\mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{Z})\|_F^2, \\ \text{s.t. } & \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{F} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -D \\ -\mathcal{I} \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{\Omega}(\mathcal{M}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中  $\mathcal{I}$  表示单位张量。可以看出模型 (4.15) 中有四组变量  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 、 $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{Z}$  和  $\mathbf{W}$ 。并且目标函数关于变量  $\mathcal{Z}$  为二次，关于其他变量都是非光滑凸的。故本章设计对称高斯-赛德尔交替方向乘子法算法来迭代求解该模型。其增广拉格朗日函数如下：

$$\begin{aligned} L(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{O}, \mathcal{Z}, \mathbf{W}, \mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2, \mathcal{Y}^3) = & \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W},*} + \lambda \|\mathcal{F}\|_1 + \Psi(\mathbf{W}) + \frac{\beta}{2} \|\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{Z})\|_F^2 \\ & + \langle \mathcal{Y}^1, \mathcal{X} + \mathcal{Z} - \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}) \rangle + \langle \mathcal{Y}^2, \mathcal{F} - D\mathcal{O} \rangle + \langle \mathcal{Y}^3, \mathcal{X} - \mathcal{O} \rangle \\ & + \frac{\mu}{2} (\|\mathcal{X} + \mathcal{Z} - \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 + \|\mathcal{F} - D\mathcal{O}\|_F^2 + \|\mathcal{X} - \mathcal{O}\|_F^2), \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中  $\mu > 0$  为给定常数， $\mathcal{Y}^1$ 、 $\mathcal{Y}^2$  和  $\mathcal{Y}^3$  分别为对应三个约束条件的拉格朗日乘子张量。模型 (4.15) 为带线性等式约束的非光滑凸优化问题，存在四组变量  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 、 $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{Z}$  和  $\mathbf{W}$  交替迭代顺序为  $(\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})$ 、 $\mathcal{O}_{t+1}$ 、 $\mathcal{Z}_{t+1}$  和  $\mathbf{W}_{t+1}$ 。求解过程如下：

**更新  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$** ：此时变量  $\mathcal{X}$  与  $\mathcal{F}$  不相关，它们对应的子问题为：

$$\mathcal{X}_{t+1} = \arg \min_{\mathcal{X}} \frac{1}{\mu_t} \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{W},*} + \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - (\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}) + \mathcal{O}_t - \mathcal{Z}_t - \frac{1}{\mu_t} (\mathcal{Y}_t^1 + \mathcal{Y}_t^3))\|_F^2, \quad (4.17)$$

以及

$$\mathcal{F}_{t+1} = \arg \min_{\mathcal{F}} \lambda \|\mathcal{F}\|_1 + \frac{\mu_t}{2} \|\mathcal{F} - (D\mathcal{O}_t - \frac{1}{\mu_t} \mathcal{Y}_t^2)\|_F^2. \quad (4.18)$$

根据引理 3.4 以及稀疏软阈值算子，上述两个子问题的解为

$$\mathcal{X}_{t+1} = \mathbf{Prox}_{\|\cdot\|_{\frac{1}{\mu_t} \mathbf{W}_{t,*}}}(\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}) + \mathcal{O}_t - \mathcal{Z}_t - \frac{1}{\mu_t} (\mathcal{Y}_t^1 + \mathcal{Y}_t^3)), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{F}_{t+1} = \mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(D\mathcal{O}_t - \frac{1}{\mu_t} \mathcal{Y}_t^2), \quad (4.20)$$

其中  $\mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(\cdot)$  为一软阈值算子，其具体定义为  $\mathbf{T}_{\frac{\lambda}{\mu_t}}(\mathcal{A})$  的第  $ijk$  个元素为  $sign((\mathcal{A})_{i,j,k}) \cdot \max(|(\mathcal{A})_{i,j,k}| - \lambda/\mu_t)$ 。

**更新  $\mathcal{O}$** ：变量  $\mathcal{O}$  的存在显式解，具体形式如下：

$$\mathcal{O}_{t+1} = (D^*(\mathcal{Y}_t^2 + \mu_t \mathcal{F}_{t+1}) + \mathcal{Y}_t^3 + \mu_t \mathcal{X}_{t+1}) / (\mu_t(\mathcal{I} + D^*D)). \quad (4.21)$$

表 4.2 HTC\_TV 算法。

Tab. 4.2 HTC\_TV algorithm.

---

**算法 4.2 Huber Tensor Completion with Total Variation Regularization (HTC\_TV)**

---

**输入:** 观测到的缺失张量元素  $\mathcal{M}_{ijk}, (i, j, k) \in \Omega$ , 其中  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ , 参数  $\lambda > 0, \beta > 0$ .  
**初始化:**  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_0 = \mathcal{Z}_0 = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{1}_{d \times d_3}, \mathcal{Y}_0^1 = \mathcal{Y}_0^2 = \mathcal{Y}_0^3 = 0, \mu_0 = 10^{-4}, \rho = 1.1, \mu_{\max} = 10^6, \epsilon = 10^{-8}$  and  $t = 0$ .

**while** not converged **do**

- 1: 通过公式 (4.17) 和 (4.18) 分别更新低秩张量  $\mathcal{X}_{t+1}$  及辅助张量  $\mathcal{F}_{t+1}$ ;
- 2: 通过公式 (4.21) 更新辅助张量  $\mathcal{O}_{t+1}$ ;
- 3: 通过公式 (4.22) 更新辅助张量  $\mathcal{Z}_{t+1}$ ;
- 4: 通过公式 (4.23) 更新权重矩阵  $\mathbf{W}_{t+1}$ ;
- 5: 通过公式 (4.24) 更新拉格朗日乘子张量  $\mathcal{Y}_{t+1}^1, \mathcal{Y}_{t+1}^2, \mathcal{Y}_{t+1}^3$  和参数  $\mu_{t+1}$ ;
- 6: 检查收敛条件:  
 $\|\mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{X}_t\|_\infty < \epsilon, \|\mathcal{F}_{t+1} - \mathcal{F}_t\|_\infty < \epsilon, \|\mathcal{O}_{t+1} - \mathcal{O}_t\|_\infty < \epsilon, \|\mathcal{Z}_{t+1} - \mathcal{Z}_t\|_\infty < \epsilon,$   
 $\|\mathcal{X}_{t+1} + \mathcal{Z}_{t+1} - \mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_\infty < \epsilon, \|\mathcal{F}_{t+1} - D\mathcal{O}_{t+1}\|_\infty < \epsilon, \|\mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{O}_{t+1}\|_\infty < \epsilon;$
- 7:  $t = t + 1$ .

**end while**

**输出:**  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{t+1}$ .

---

**更新  $\mathcal{Z}$ :** 变量  $\mathcal{Z}$  对应的子问题亦存在显式解如下:

$$\mathcal{Z}_{t+1} = \frac{1}{\beta + \mu_t} \mathbb{P}_\Omega(\mu_t(\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}) - \mathcal{X}_{t+1}) - \mathcal{Y}_t^1) + \mathbb{P}_{\Omega^c}(-\mathcal{X}_{t+1} - \frac{1}{\mu_t} \mathcal{Y}_t^1). \quad (4.22)$$

**更新  $\mathbf{W}$ :** 固定其他变量, 权重矩阵  $\mathbf{W}$  的更新形式为:

$$(W_{ik})_{t+1} = \xi \left( \sigma_i \left( \bar{\mathbf{X}}_{t+1}^{(k)} \right) \right). \quad (4.23)$$

**更新  $\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2, \mathcal{Y}^3$  和参数  $\mu$ :** 通过下列等式更新各个拉格朗日乘子张量以及参数  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{t+1}^1 &= \mathcal{Y}_t^1 + \mu_t(\mathcal{X}_{t+1} + \mathcal{Z}_{t+1} - (\mathbb{P}_\Omega(\mathcal{M}))), \mathcal{Y}_{t+1}^2 = \mathcal{Y}_t^2 + \mu_t(\mathcal{F}_{t+1} - D\mathcal{O}_{t+1}), \\ \mathcal{Y}_{t+1}^3 &= \mathcal{Y}_t^3 + \mu_t(\mathcal{X}_{t+1} - \mathcal{O}_{t+1}), \mu_{t+1} = \rho\mu_t. \end{aligned} \quad (4.24)$$

算法 4.2 总结了对称高斯 - 赛德尔交替方向乘子法框架求解基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型的过程。

## 4.4 实验结果与分析

本小节使用模拟张量数据和真实张量数据对所提出的基于 Huber 损失的张量完备化模型 (HTC) 以及基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型 (HTC\_TV) 进行实验，并与近些年来提出的一些经典低秩张量完备化方法进行比较。为了方便，下面给出了张量完备化实验的一些基本情况：

**实验数据:** 实验数据分为模拟数据以及真实数据。其中模拟数据通过张量积等定义使用 MATLAB 软件生成，具体可见后续对应的实验部分。真实数据为彩色图像和多光谱图像数据，分别使用 BSD 和 CAVE 数据集作为实验样本。

**对比方法:** 为了验证所提出的方法的有效性，本文选取了一些经典的张量完备化方法作为对比方法，分别是：基于 Tucker 分解的 SNN 方法 (Liu *et al.* 2012) 及其考虑平滑先验的 SNN\_TV 方法 (Li *et al.* 2017)、基于张量 T-SVD 分解以及张量核范数的 TNN 方法 (Lu *et al.* 2019) 及其考虑平滑先验的 TNN\_TV 方法 (Qiu *et al.* 2021)。

**参数设置:** 对于所有对比方法，都遵照原文作者代码或文章建议来进行参数的设置。具体来说，对于 SNN 方法，在实验中参数设置  $\alpha = [15, 15, 1]$ ；对于 SNN\_TV 方法，参数设置为  $\alpha = [1/3, 1/3, 1/3]$  和  $\lambda = 0.02$ ；对于 TNN\_TV 方法，参数设置为  $\lambda = 10$ ；对于本文提出的 HTC 和 HTC\_TV 方法，参数设置为  $\lambda = 10$  以及  $\tau = 0.5$ 。

**评价指标:** 对于模拟数据的恢复实验，直接使用恢复的相对平方误差来评价各种方法的恢复好坏。对于真实数据，即彩色图像和多光谱图像补全实验，我们同样选取峰值信噪比 (PSNR) 以及结构相似度 (SSIM) 两种指标对恢复结果进行评价。

### 4.4.1 模拟数据实验

为了验证提出的模型在张量完备化问题上的效果，本实验设计了两种模拟数据进行补全实验。然后比较了各个算法在模拟数据上的恢复准确性。参照 (Lu *et al.* 2018) 中的实验设计，对于模拟数据的设置以及生成过程具体如下：

根据公式 (2.5) 即有关张量积的定义，通过软件生成张量  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{d_1 \times r \times d_3}$  以及  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{r \times d_2 \times d_3}$ ，其中  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{Q}$  的元素均从独立的均匀分布 (即高斯分布中采样)。这样，

表 4.3 各维度模拟张量在 10% 缺失下恢复结果。

Tab. 4.3 Correct recovery for random problems of varying sizes with 10% missings.

$d$	$r$	Algorithm	$\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$	$RSE(\hat{\mathcal{L}})$
20	2	SNN	2	3.21e-1
	2	TNN	2	4.88e-6
	2	HTC	2	4.51e-6
	2	SNN_TV	2	1.19e-1
	2	TNN_TV	2	2.98e-7
	2	HTC_TV	2	1.84e-7
50	5	SNN	5	3.15e-1
	5	TNN	5	4.41e-6
	5	HTC	5	5.36e-6
	5	SNN_TV	5	3.79e-1
	5	TNN_TV	5	5.62e-7
	5	HTC_TV	5	4.01e-7
100	10	SNN	10	6.21e-1
	10	TNN	10	5.26e-5
	10	HTC	10	3.44e-5
	10	SNN_TV	10	3.18e-1
	10	TNN_TV	10	2.23e-1
	10	HTC_TV	10	1.81e-1

根据张量积的定义，通过对张量  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{Q}$  进行张量积得到一个张量管秩为  $r$  的张量即  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 。当  $r << \min\{d_1, d_2\}$  时， $\mathcal{L}_0$  为一低秩张量。进一步，根据提前设定好的缺失率对构建出的低秩张量进行缺失处理，得到待恢复的缺失张量。最后利用各个算法对该模拟张量进行补全实验，算法恢复出的低秩张量记为  $\hat{\mathcal{L}}$ 。为了比较算法恢复结果，模拟实验使用如下两个指标来衡量各个方法对模拟数据恢复的效果：

1.  $\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$ : 低秩张量  $\hat{\mathcal{L}}$  的管秩，越接近设定的  $r$  效果越好。
2.  $RSE(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{\|\hat{\mathcal{L}} - \mathcal{L}_0\|_F}{\|\mathcal{L}_0\|_F}$ : 低秩张量  $\hat{\mathcal{L}}$  和真实低秩张量  $\mathcal{L}_0$  之间的相对平方误差，该指标越小代表恢复效果越好。

为了方便，对于模拟数据的维度设置为  $d_1 = d_2 = d_3 = d$  并且  $r = 0.1d$ 。同时每组实验进行 10 次取均值。表 4.3 给出了各种方法在不同大小模拟张量在 10% 随机缺失情况下的恢复结果，表 4.4 给出了各种方法在不同大小模拟张量在 20% 随机缺失情况的恢复结果。有关模拟数据的恢复结果可以得出如下结论：

1. 基于张量核范数的方法在模拟数据上的恢复效果要好于基于 SNN 的方法，原因是 SNN 在运行过程中需要展开张量，丢失了张量的结构信息。

表 4.4 各维度模拟张量在 20% 缺失下恢复结果。

Tab. 4.4 Correct recovery for random problems of varying sizes with 20% missings.

$d$	$r$	Algorithm	$\text{rank}_t(\hat{\mathcal{L}})$	$RSE(\hat{\mathcal{L}})$
20	2	SNN	2	4.39e-1
20	2	TNN	2	4.54e-6
20	2	HTC	2	4.17e-6
20	2	SNN_TV	2	3.24e-1
20	2	TNN_TV	2	6.26e-7
20	2	HTC_TV	2	3.53e-7
50	5	SNN	5	4.44e-1
50	5	TNN	5	2.77e-5
50	5	HTC	5	1323e-5
50	5	SNN_TV	5	4.46e-1
50	5	TNN_TV	5	2.22e-1
50	5	HTC_TV	5	1.78e-1
100	10	SNN	10	4.47e-1
100	10	TNN	10	4.04e-5
100	10	HTC	10	3.01e-5
100	10	SNN_TV	10	3.52e-1
100	10	TNN_TV	10	3.64e-1
100	10	HTC_TV	10	2.71e-1

2. 由于改进的 Huber 核范数比传统的张量核范数更能准确的恢复出张量的低秩信息，因此 HTC 和 HTC\_TV 方法的效果优于 TNN 和 TNN\_TV 方法。
3. 在张量维度变大和缺失率变高时，基于全变分正则的完备化方法在模拟数据上的效果有限。原因可能是模拟数据并不符合张量的平滑性假设。

#### 4.4.2 彩色图像补全实验

本小节将本研究提出的张量完备化方法应用彩色图像补全的任务中，该任务聚焦于从观测到的缺失图像中恢复出真实的低秩图像。我们选用伯克利分割数据集作为实验样本。在实验过程中，本文会依据设定的缺失率对自然图像进行缺失处理，然后使用各个对比方法以及所提出的完备化方法 (SNN, TNN, SNN\_TV, TNN\_TV, HTC 和 HTC\_TV 方法) 分别对缺失图像进行补全实验。同时本实验会对实验样本设定不同的数据缺失率以达到对所有方法更全面的测试效果，具体的实验结果如下：

为了直观理解各种方法在不同数据缺失率的自然图像上的恢复结果，本实验在 BSD 数据集中选取了 2 组 (每组各三张) 图像，分别以 90%, 95% 的高缺失率对实验数

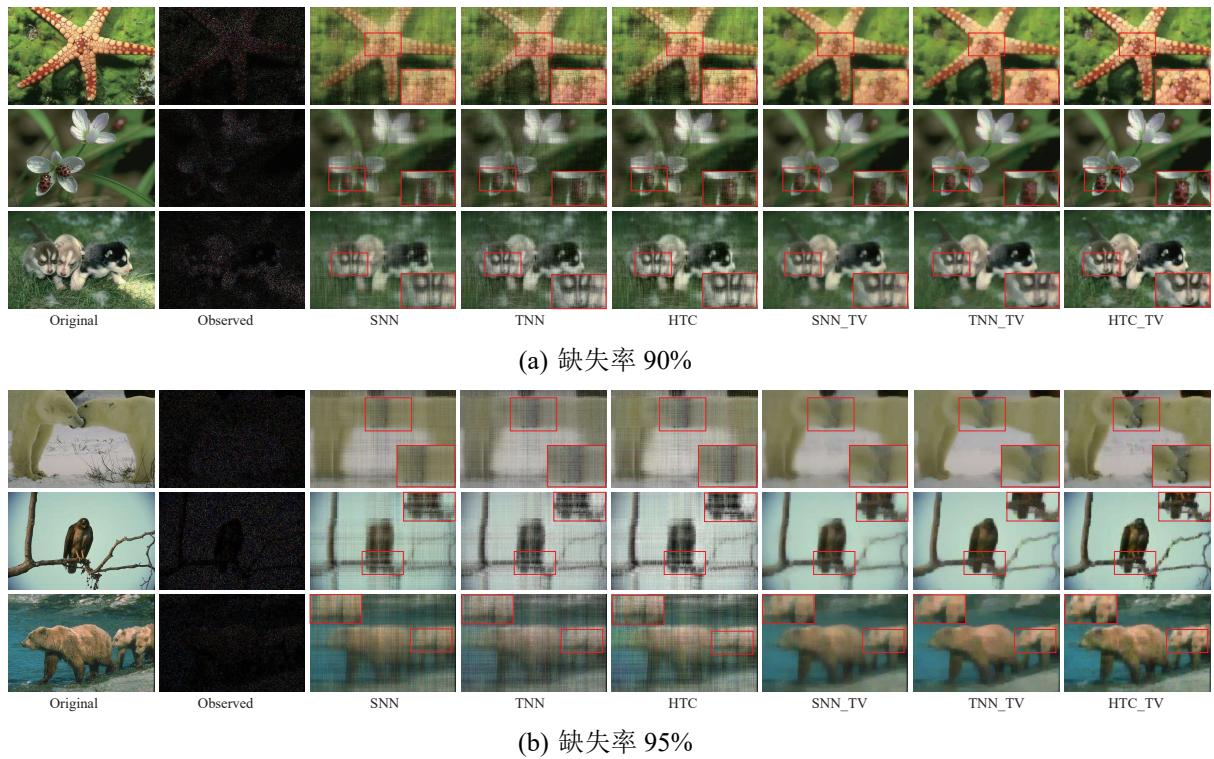


图 4.2 不同缺失率下的彩色图像补全实验 (实验数据来自 BSD 数据集 6 张图像)。(a) 缺失率为 90%; (b) 缺失率为 95%。

Fig. 4.2 Comparison of the recovery performance on 6 images from the BSD dataset with different missing rates. (a) 90% missing; (b) 95% missing.

据设置缺失，然后将真实图像（作为背景对比）、采样到的缺失图像、以及各算法恢复出来的低秩图像进行可视化展示。结果如图 4.2 所示，可以看到，没有考虑图像平滑先验的张量完备化方法高缺失率的图像上恢复效果较差，这是因为所能观测到的像素点信息太少，在仅有低秩先验信息的情况下进行图像的恢复是非常具有挑战的。与之相对的，考虑了图像平滑先验的方法在图像细节的恢复上要更好。同时，本研究提出的方法 (HTC, HTC\_TV) 在恢复效果上要好于基于 SNN 和 TNN 的方法。这两点证明了所提出的 TIHN 范数以及平滑先验应用的有效性。本实验也统计了这 6 张样本对应的 PSNR 以及 SSIM 值，结果如表 4.5 所示。可以看出所提出的方法在 PSNR 和 SSIM 两个评价指标的结果也要优于其他的对比方法，这个结果与图像的可视化结果相对应。

为了避免图片个例的影响，本实验还统计了各个方法在三个子集（即 BSD\_train、BSD\_test 和 BSD\_val）以及整个 BSD 数据集 (BSD\_all) 上图像在不同缺失率下的恢复的平均结果，具体结果如表 4.6 所示。可以看到，在 BSD 数据集上我们方法的效果在

表 4.5 彩色图像补全图 4.2 中 6 张样本的 PSNR 和 SSIM 值对比，最好的结果已标粗。

Tab. 4.5 Comparison of PSNR and SSIM values on the related 6 images in Fig. 4.2 for color image recovery experiment. The best results are highlighted in boldface.

测试 图片	缺失 率	SNN		TNN		HTC		SNN_TV		TNN_TV		HTC_TV	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Image1		18.50	0.381	18.65	0.395	19.11	0.406	21.07	0.591	21.90	0.619	<b>24.05</b>	<b>0.724</b>
Image2	90%	23.42	0.631	23.81	0.647	24.63	0.694	26.60	0.869	27.87	0.884	<b>29.93</b>	<b>0.914</b>
Image3		20.74	0.515	21.51	0.528	22.27	0.553	23.17	0.669	23.86	0.686	<b>25.47</b>	<b>0.751</b>
Image4		21.37	0.479	21.24	0.464	21.78	0.541	24.14	0.716	24.35	0.726	<b>25.42</b>	<b>0.751</b>
Image5	95%	17.88	0.413	18.02	0.435	19.01	0.503	20.40	0.787	21.41	0.821	<b>23.05</b>	<b>0.855</b>
Image6		19.61	0.348	19.91	0.339	20.15	0.401	22.04	0.501	22.97	0.515	<b>24.51</b>	<b>0.607</b>

表 4.6 彩色图像补全实验：BSD 数据集及三个子集上的平均 PSNR 和 SSIM 值，最好的结果已标粗。

Tab. 4.6 Comparison of PSNR values (average) and SSIM values (average) on the three subsets of the BSD dataset. The best results are highlighted in boldface.

测试 数据集	缺失 率	SNN		TNN		HTC		SNN_TV		TNN_TV		HTC_TV	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
BSD_train		21.07	0.539	21.35	0.525	21.71	0.536	22.71	0.641	23.10	0.654	<b>24.94</b>	<b>0.725</b>
BSD_test	90%	20.49	0.520	20.77	0.503	21.15	0.515	22.21	0.635	22.61	0.650	<b>24.48</b>	<b>0.723</b>
BSD_val		20.59	0.506	20.92	0.496	21.20	0.507	22.25	0.609	22.67	0.622	<b>24.43</b>	<b>0.694</b>
BSD_all		20.74	0.525	21.03	0.510	21.38	0.522	22.42	0.632	22.82	0.646	<b>24.65</b>	<b>0.718</b>
BSD_train		19.03	0.426	18.75	0.379	19.69	0.453	20.54	0.547	21.27	0.564	<b>22.69</b>	<b>0.616</b>
BSD_test	95%	18.18	0.349	18.41	0.403	19.52	0.442	20.06	0.526	20.78	0.554	<b>22.21</b>	<b>0.611</b>
BSD_val		18.44	0.355	19.02	0.401	19.21	0.429	20.21	0.522	20.98	0.539	<b>22.35</b>	<b>0.591</b>
BSD_all		18.57	0.381	18.67	0.393	19.53	0.444	20.28	0.534	21.02	0.555	<b>22.43</b>	<b>0.609</b>

PSNR 指标上比其他对比方法平均要高 1 到 2db，同时 SSIM 值也是最高的。这也验证了所提出的方法在彩色图像补全方法上的有效性。总之，基于以上的彩色图像补全结果，可以得到下述结论：

1. 基于张量 T-SVD 分解的方法 (TNN, TNN\_TV, HTC, HTC\_TV) 总体上优于基于 SNN 的方法。原因是基于 SNN 的方法在恢复过程中张量的结构信息已被破坏。与此相反，基于 TNN 的方法可以更有效地利用高阶信息进行恢复。同时，我们提出的 HTC 和 HTC\_TV 方法由于其提出的新的张量范数能更好地恢复出原始张量的奇异值，通常

会导致较好的恢复效果。

2. 由于考虑了图像本身具有的平滑先验信息，因此 SNN\_TV, TNN\_TV 和 HTC\_TV 方法在高缺失率自然图像上的恢复效果要显著好于未考虑平滑先验的方法。

#### 4.4.3 多光谱图像补全实验

在张量完备化的另一项实验中，本文使用多光谱图像作为真实张量数据来对提出的两种张量完备化方法进行测试。多光谱图像具有三维张量的结构，包含二维的平面像素信息和一个波段的信息。本实验选取 CAVE 多光谱数据集作为实验样本，该数据集包含 32 个维度为 256x256x31 的多光谱图像，本实验在其中选取 10 个具有代表性的多光谱图像，分别为 (Balloons、Beads、Cd、Cloth、Face、Lemon、Flowers、Hairs、Superballs、Watercolors) 进行实验。为了测试算法在不同数据缺失率下的恢复效果，我们将 10 个多光谱数据分为两组，然后分别设置 90% 和 95% 两种不同的缺失率对各个张量完备化方法进行实验。

多光谱图像补全的具体实验结果如下：对于不同缺失率下的多光谱图像，表 4.7 给出了各个张量完备化方法补全后图像的 PSNR 和 SSIM 值。从数值指标可以看出，即使是面对高缺失率的多光谱图像，本文所提出的 HTC 和 HTC\_TV 方法仍然能得到非常好的恢复效果，同时，本文还分别选取了 90% 和 95% 的多光谱样本各一个 (分别为

表 4.7 多光谱图像补全实验：CAVE 数据集补全的平均 PSNR 和 SSIM 值，最好的结果已标粗。

Tab. 4.7 Comparison of PSNR values (average) and SSIM values (average) on the CAVE dataset. The best results are highlighted in boldface.

测试 数据	缺失 率	SNN		TNN		HTC		SNN_TV		TNN_TV		HTC_TV	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Balloons		30.51	0.934	40.08	0.981	41.79	0.974	31.43	0.950	45.65	0.995	<b>46.43</b>	<b>0.997</b>
Beads	90%	19.32	0.454	27.65	0.860	28.92	0.850	20.67	0.558	32.35	0.953	<b>33.27</b>	<b>0.955</b>
Cd		27.61	0.920	31.67	0.931	32.52	0.939	30.75	0.930	37.81	0.979	<b>38.61</b>	<b>0.982</b>
Cloth		21.64	0.431	30.87	0.900	32.84	0.918	22.52	0.490	33.84	0.946	<b>34.69</b>	<b>0.952</b>
Face		33.55	0.930	39.92	0.977	41.71	0.974	30.96	0.922	45.52	0.994	<b>46.34</b>	<b>0.995</b>
Lemon		24.35	0.755	32.96	0.901	33.78	0.871	24.94	0.790	37.35	0.966	<b>38.03</b>	<b>0.968</b>
Flowers	95%	25.61	0.741	31.92	0.857	32.60	0.814	27.19	0.798	37.20	0.955	<b>37.71</b>	<b>0.956</b>
Hairs		29.87	0.852	34.48	0.924	36.29	0.922	26.23	0.838	39.12	0.972	<b>40.07</b>	<b>0.975</b>
Superballs		27.18	0.840	33.45	0.895	33.98	0.833	29.62	0.915	38.96	0.977	<b>39.49</b>	<b>0.975</b>
Watercolors		21.15	0.585	29.06	0.892	30.36	0.885	21.48	0.606	32.80	0.956	<b>33.67</b>	<b>0.961</b>

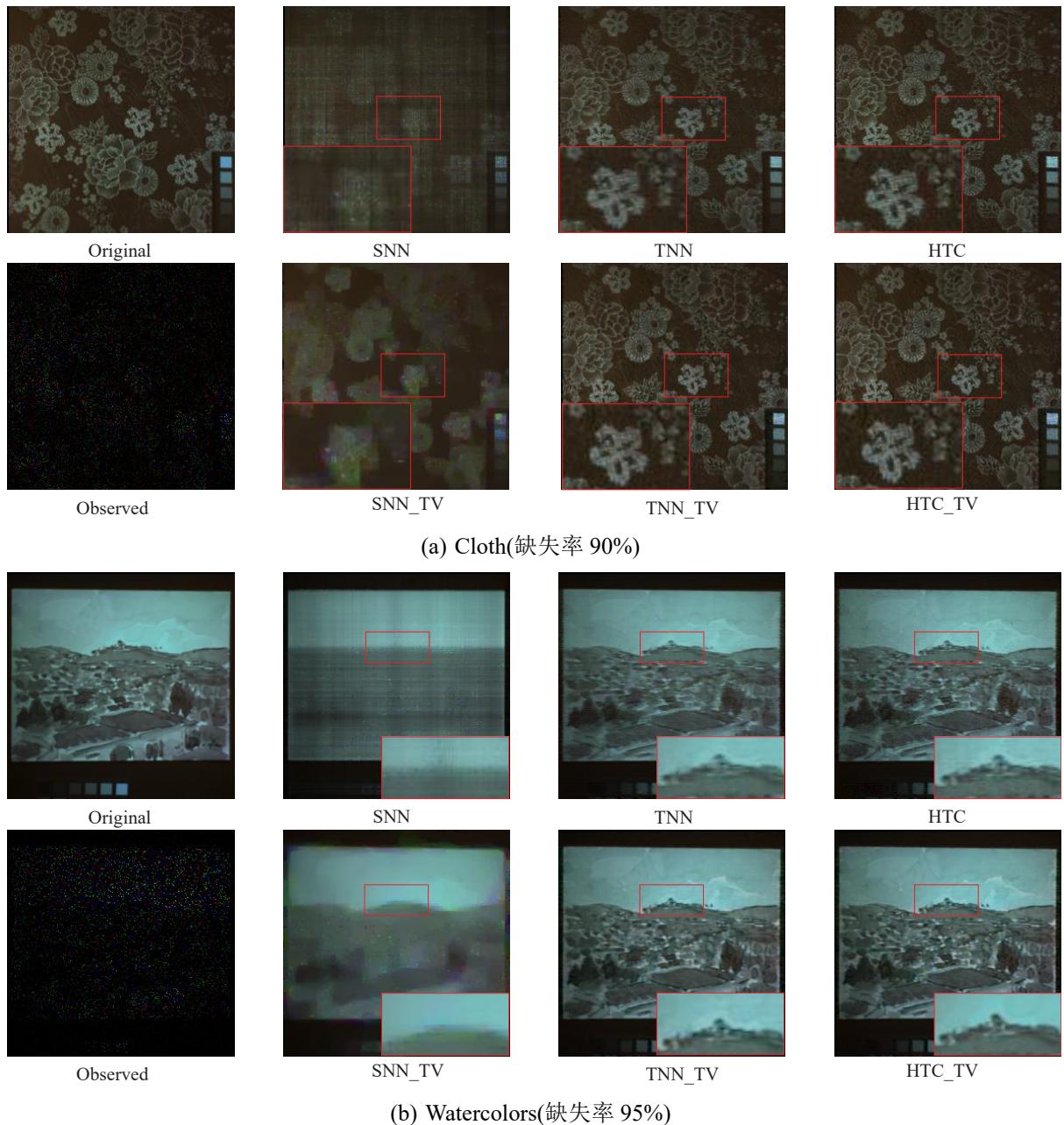


图 4.3 不同缺失率下的多光谱图像补全实验(实验数据来自 CAVE 数据集 2 张图像)。(a) 缺失率为 90%; (b) 缺失率为 95%。

Fig. 4.3 Comparison of the recovery performance on 2 images from the CAVE dataset with different missing rates. (a) 90% missing; (b) 95% missing.

Cloth 和 Watercolors) 进行可视化展示, 为了便于可视化, 我们选取多光谱的前三个波段组合进行展示, 结果如图 4.3 所示。可以看出, 在高光谱补全的可视化图中, 我们提出的 HTC 和 HTC\_TV 的方法在图像细节的恢复都是比较好的。总之, 基于上述多光

谱图像补全实验，可以得到如下结论：

1. 在张量完备化实验中，在同样缺失率的情况下，多光谱图像补全的效果要优于彩色图像。原因是多光谱图像第三维度的光谱信息要比彩色图像多，在同样的缺失率的补全下，所能观测到的有效信息更多。同时，本文提出的 HTC 和 HTC\_TV 方法由于改进的 Huber 张量核范数能对低秩张量进行更好的刻画，导致其恢复结果要优于基于传统张量核范数的方法 (TNN 和 TNN\_TV)。
2. 基于全变分正则化的方法在多光谱图像补全任务上的效果要优于未考虑张量局部平滑性的方法，这也验证了本文使用全变分正则化来提升模型对真实低秩张量恢复效果的正确性。

## 4.5 本章小结

在本研究提出改进的 Huber 张量核范数基础上，为了进一步验证该范数的有效性。本章节将提出的范数应用到张量恢复领域中另一个重要的任务即张量完备化问题中，并提出了基于 Huber 损失的张量完备化模型 (HTC)。同时为了在自然图像和多光谱图像等真实张量数据补全任务中取得更好的恢复效果，本章还考虑了真实张量数据本身具有的局部平滑属性。进一步使用三维的全变分正则化约束并提基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型 (HTC\_TV)。综上，本章节提出了两种新的张量完备化模型。在优化算法方面，本文使用对称高斯 - 赛德尔交替方向乘子法来高效求解提出的模型。同时在实验方面，在模拟数据和真实数据 (自然图像及多光谱图像) 上的补全结果也验证了我们提出的两种模型的恢复性能。

## 5 总结和展望

### 5.1 论文工作总结

本文主要研究低秩张量恢复问题，针对原始张量核范数存在的对低秩张量中所有奇异值施加同等约束的不足，基于所提出的改进的 Huber 张量核范数、以及现实张量中存在的局部平滑先验，分别提出了基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析、基于 Huber 损失的张量完备化、基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化模型。以上模型分别实现了对低秩张量的准确恢复、结合先验信息实现更佳恢复等功能。本文的具体研究工作总结如下：

1. 在张量鲁棒主成分分析方面，提出了改进的 Huber 张量核范数。与传统的张量核范数相比，提出的新的张量范数能够在优化过程中考虑低秩张量中不同奇异值大小的重要性，通过对奇异值施加不同的惩罚达到对奇异值更佳的恢复。同时将提出的范数应用于张量鲁棒主成分分析问题并提出基于 Huber 损失的张量鲁棒主成分分析模型。为了高效求解提出的模型，结合半二次优化理论和交替方向乘子法的优化框架，提出了一种有效的求解算法，能够在迭代求解过程中自适应地学习权重。最后，模拟数据集和真实数据集上（自然图像和灰度视频序列）的实验结果验证了模型出色的性能。

2. 在张量完备化方面，在改进的 Huber 张量核范数的基础上，提出基于 Huber 损失的张量完备化模型及其优化算法。该模型在模拟数据集和自然图像等的效果比使用传统张量核范数的方法恢复效果要好。同时，本文考虑到自然图像等张量存在的平滑性先验，进一步通过全变分的正则化提升张量恢复模型，最终提出基于 Huber 损失和全变分正则的张量完备化方法。进一步，本文利用高斯 - 赛德尔优化框架来高效求解所提出的模型。最后提出的两种模型在不同采样率的模拟数据和真实数据的补全实验上取得了良好的效果。

### 5.2 论文工作展望

本文主要进行了张量恢复领域两个主要问题，张量鲁棒主成分分析及张量完备化两个问题的研究，提出了三个有效的模型。但是此研究依然具有进一步探索的空间。

1. 本文虽然考虑了张量恢复领域两个经典的问题。即对应张量数据去噪的张量鲁棒主成分分析任务和对应张量数据补全的张量完备化任务。但现实生活中会存在张量

数据既存在噪声污染又存在数据缺失的情况。因此未来的研究工作可以考虑将提出的张量范数应用在这种更为复杂的场景，提出能同时处理两种任务的模型。

2. 对于本文所提出的三种张量恢复模型，在模型优化过程中往往需要计算张量奇异值分解，这在一定程度上会降低算法运行效率。因此后续可以使用张量分解等框架来实现对张量低秩性的约束，从而避免张量奇异值分解提升算法运行效率。

## 参考文献

1. 蔡明娇,蒋俊正,蔡万源,周芳.张量分解和自适应图全变分的高光谱图像去噪.西安电子科技大学学报,2023, 1-11
2. 韩乐,魏蔚,高丽.基于 PTV-TV 张量建模的压缩视频背景前景恢复与分离.华南理工大学学报(自然科学版),2019, 47:59-67
3. 贾慧迪,韩志,陈希爱,唐延东.基于非局部张量火车分解的彩色图像修补.模式识别与人工智能,2019, 32:955-963
4. 李晶晶,夏鸿斌,刘渊.融合注意力 LSTM 的神经张量分解推荐模型.中文信息学报,2021, 35:91-100
5. 刘敬浩,孙晓伟,金杰.基于主成分分析和循环神经网络的入侵检测模型.中文信息学报,2020, 34:105-112
6. 石光明,刘丹华,高大化,刘哲,林杰.压缩感知理论及其研究进展.电子学报,2009, 37:1070-1081
7. 史加荣,郑秀云,魏宗田,杨威.低秩矩阵恢复算法综述.计算机应用研究,2013, 30:1601-1605
8. 孙华成,王永利,赵亮,陈广生.基于张量分解的跨领域推荐方法.计算机与数字工程,2019, 47:1694-1701
9. 王琪,常庆瑞,李铠,陈晓凯,缪慧玲.基于主成分分析和随机森林回归的冬小麦冠层叶绿素含量估算.麦类作物学报,2024, 1-11
10. 吴亮,唐利明.基于重叠群稀疏分数阶全变分正则化模型的图像去噪算法.湖北民族大学学报(自然科学版),2023, 41:40-50
11. 巫勇,刘永坚,唐塘,王洪林,郑建成.基于鲁棒低秩张量恢复的高光谱图像去噪.计算机科学,2021, 48:303-307
12. 闫喜红,张宁.一种改进的求解矩阵补全问题的原始 - 对偶算法.应用数学学报,2024, 1-18

13. 余丽红, 冯衍秋, 陈武凡. 基于自适应正则化的全变分去噪算法. 中国图象图形学报, 2009, 14:1950-1954
14. 赵梓渊, 唐意东, 黄树彩. 基于张量分解的光谱图像压缩感知重构. 现代防御技术, 2023, 1-9
15. Bengua J, Phien H, Tuan H, Do M. Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26:2466-2479
16. Bouwmans T, Javed S, Zhang H, Lin Z, Otazo R. On the applications of robust PCA in image and video processing. *Proceedings of the IEEE*, 2018, 106:1427-1457
17. Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3:1-122
18. Brigham E. The fast Fourier transform and its applications. Prentice-Hall, 1988
19. Candès E, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25:21-30
20. Candès E, Plan Y. Matrix completion with noise. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98:925-936
21. Candès E, Li X, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis?. *Journal of the ACM*, 2011, 58:1-37
22. Cao W, Wang Y, Sun J, Meng D, Yang C, Cichocki A, Xu Z. Total variation regularized tensor RPCA for background subtraction from compressive measurements. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25:4075-4090
23. Chang Y, Yan L, Zhao X L, Feng H, Zhang Z, Zhang S. Weighted low-rank tensor recovery for hyperspectral image restoration. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50:4558-4572

24. Chen L, Sun D, Toh K. An efficient inexact symmetric Gauss-Seidel based majorized AD-MM for high-dimensional convex composite conic programming. *Mathematical Programming*, 2017, 161:237-270
25. Feng J, Xu H, Yan S. Online robust PCA via stochastic optimization. In Proceedings of the Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2013, Stateline, NV, USA
26. Gandy S, Recht B, Yamada I. Tensor completion and low-n-rank tensor recovery via convex optimization. *Inverse Problems*, 2011, 27:025010.
27. Gao Q, Xia W, Wan Z, Xie D, Zhang P. Tensor-SVD based graph learning for multi-view subspace clustering. In Proceedings of the AAAI conference on Artificial Intelligence (AAAI), 2020, New York, USA
28. Gao Q, Zhang P, Xia W, Xie D, Gao X, Tao D. Enhanced tensor RPCA and its application. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, 43:2133-2140
29. Gu S, Xie Q, Meng D, Zuo W, Feng X, Zhang L. Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision. *International Journal of Computer Vision*, 2017, 121:183-208
30. He R, Hu B, Yuan X, Wang L. Robust recognition via information theoretic learning. Springer International Publishing, 2014
31. Hitchcock F. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. *Journal of Mathematics and Physics*, 1927, 6:164-189
32. Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 1933, 24:417
33. Hou J, Zhang F, Qiu H, Wang J, Wang Y, Meng D. Robust low-tubal-rank tensor recovery from binary measurements. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2021, 44:4355-4373

34. Hu Y, Zhang D, Ye J, Li X, He X. Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 35:2117-2130
35. Huang B, Mu C, Goldfarb D, Wright J. Provable models for robust low-rank tensor completion. *Pacific Journal of Optimization*, 2015, 11:339-364
36. Huber P. Robust statistics. John Wiley & Sons, 2004.
37. Jiang T, Huang T, Zhao X, Deng L. Multi-dimensional imaging data recovery via minimizing the partial sum of tubal nuclear norm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, 372:112680
38. Jiang T, Ng M, Zhao X, Huang T. Framelet representation of tensor nuclear norm for third-order tensor completion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020, 29:7233-7244
39. Kilmer M, Horesh L, Avron H, Newman E. Tensor-tensor algebra for optimal representation and compression of multiway data. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2021, 118: e2015851118
40. Kilmer M, Martin C. Factorization strategies for third-order tensors. *Linear Algebra and its Applications*, 2011, 435:641-658
41. Klopp O, Lounici K, Tsybakov A B. Robust matrix completion. *Probability Theory and Related Fields*, 2017, 169:523-564
42. Kolda T, Bader B. Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, 2009, 51:455-500
43. Kolda T, Sun J. Scalable tensor decompositions for multi-aspect data mining. in Proceedings of IEEE International Conference on Data Mining (ICDM), 2008, Pisa, Italy
44. Kong H, Lu C, Lin Z. Tensor Q-rank: new data dependent definition of tensor rank. *Machine Learning*, 2021, 110:1867-1900
45. Kong H, Xie X, Lin Z. t-Schatten- $p$  norm for low-rank tensor recovery. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2018, 12:1405-1419

46. Koren Y. Factorization meets the neighborhood: a multifaceted collaborative filtering model. In Proceedings of International Conference on Knowledge Discovery and Data mining (KDD), 2008, Las Vegas, NV, USA
47. Lathauwer L, Moor D, Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, 2000, 21:1253-1278
48. Li X, Ye Y, Xu X. Low-rank tensor completion with total variation for visual data inpainting. In Proceedings of the AAAI conference on Artificial Intelligence (AAAI), 2017, San Francisco, CA, USA
49. Liu J, Musialski P, Wonka P, Ye J. Tensor completion for estimating missing values in visual data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 35:208-220
50. Liu Y, Shang F, Fan W, Cheng J, Cheng H. Generalized higher-order orthogonal iteration for tensor decomposition and completion. In Proceedings of the Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2014, Montreal, Canada
51. Liu Y, Yi Z, Zhao Y, Chen F, Feng Y, Guo H, Leong A T, Wu E X. Calibrationless parallel imaging reconstruction for multislice MR data using low-rank tensor completion. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2021, 85:897-911
52. Lu C. Transforms based tensor robust PCA: Corrupted low-rank tensors recovery via convex optimization. In Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV), 2020, Virtual
53. Lu C, Feng J, Chen Y, Liu W, Lin Z, Yan S. Tensor robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank tensors via convex optimization. In Proceedings of the Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016, Las Vegas, NV, USA
54. Lu C, Feng J, Chen Y, Liu W, Lin Z, Yan S. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 42:925-938

55. Lu C, Peng X, Wei Y. Low-rank tensor completion with a new tensor nuclear norm induced by invertible linear transforms. In Proceedings of the Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2019, Long Beach, CA, USA
56. Martin D, Fowlkes C, Tal D, Malik J. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV), 2001, Kauai, HI, USA
57. Mu Y, Wang P, Lu L, Zhang X, Qi L. Weighted tensor nuclear norm minimization for tensor completion using tensor-SVD. *Pattern Recognition Letters*, 2020, 130:4-11
58. Newman E, Horesh L, Avron H, Kilmer M. Stable tensor neural networks for rapid deep learning. *arXiv*, 2018, arXiv:1811.06569
59. Nikolova M, Ng M. Analysis of half-quadratic minimization methods for signal and image recovery. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27:937-966
60. Oh T, Tai Y, Bazin J, Kim H, Kweon I. Partial sum minimization of singular values in robust PCA: Algorithm and applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2015, 38:744-758
61. Oseledets I. Tensor-train decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, 33:2295-2317
62. Panagakis Y, Kossaifi J, Chrysos G, Oldfield J, Nicolaou M, Anandkumar A, Zafeiriou S. Tensor methods in computer vision and deep learning. *Proceedings of the IEEE*, 2021, 109:863-890
63. Pang M, Cheung Y, Wang B, Lou J. Synergistic generic learning for face recognition from a contaminated single sample per person. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2019, 15:195-209
64. Qin B, Xi M, Hao D, Lv Y, Liu Q, Zhu Y, Ding S, Zhao J, Fei B. Accurate vessel extraction via tensor completion of background layer in X-ray coronary angiograms. *Pattern recognition*, 2019, 87:38-54

65. Qiu H, Wang Y, Tang S, Meng D, Yao Q. Fast and Provable Nonconvex Tensor RPCA. In Proceedings of the International Conference on Machine Learning (ICML), 2022, Baltimore, MD, USA
66. Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60:259-268
67. Rudin L, Osher S, Total variation based image restoration with free local constraints. In Proceedings of the International Conference on Image Processing (ICIP), 1994, Austin, TX, USA
68. Sidiropoulos N, Lathauwer L, Fu X, Huang K, Papalexakis E E, Faloutsos C. Tensor decomposition for signal processing and machine learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65: 3551-3582
69. Sobral A, Zahzah E. Matrix and tensor completion algorithms for background model initialization: A comparative evaluation. *Pattern Recognition Letters*, 2017, 96:22-33
70. Vaswani N, Bouwmans T, Javed S, Narayananurthy P. Robust subspace learning: Robust PCA, robust subspace tracking, and robust subspace recovery. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2018, 35:32-55
71. Wang Y, Kou K, Chen H, Tang Y, Li L. Double Auto-Weighted Tensor Robust Principal Component Analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2023, 32:5114-5125
72. Wang Z, Bovik A, Sheikh H, Simoncelli E. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on Image Processing*, 2004, 13:600-612
73. Xu H, Caramanis C, Sanghavi S. Robust PCA via outlier pursuit. In Proceedings of the Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2010, Vancouver, Canada
74. Zhang F, Wang J, Wang W, Xu C. Low-tubal-rank plus sparse tensor recovery with prior subspace information. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, 43:3492-3507

75. Zhao K, Peng C, Cheng Q. Robust PCA via Nonconvex Rank Approximation. In Proceedings of the IEEE International Conference on Data Mining (ICDM), 2015, Atlantic City, NJ, USA
76. Zhang Z, Aeron S. Exact tensor completion using t-SVD. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 65: 1511-1526
77. Zhao Q, Meng D, Xu Z, Zuo W, Zhang L. Robust principal component analysis with complex noise. In Proceedings of the International Conference on Machine Learning (ICML), 2014, Beijing, China
78. Zhao Q, Zhou G, Xie S, Zhang L, Cichocki A. Tensor ring decomposition. *arXiv*, 2018, arXiv:1606.05535
79. Zhang X, Ng M. A corrected tensor nuclear norm minimization method for noisy low-rank tensor completion. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2019, 12:1231-1273
80. Zheng Y, Huang T, Zhao X, Jiang T, Ji T, Ma T. Tensor N-tubal rank and its convex relaxation for low-rank tensor recovery. *Information Sciences*, 2020, 532:170-189
81. Zhou P, Lu C, Lin Z, Zhang C. Tensor factorization for low-rank tensor completion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 27:1152-1163
82. Zhou Y, Cheung Y. Bayesian low-tubal-rank robust tensor factorization with multi-rank determination. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 43:62-76

## 致 谢

感谢导师以及所有参加论文评审和论文答辩的老师们。

刘有恒于华中农业大学

2024 年 5 月 17 日