

第一次习题课讲义

于俊骞

2024 年 3 月 9 日

目录

1	课程综述	3
1.1	从一元到多元——多变量微积分	3
1.1.1	极限与范数	3
1.1.2	求导与微分	4
1.1.3	重积分	6
1.2	从平直到弯曲——曲线曲面积分	6
1.2.1	曲线积分	6
1.2.2	曲面积分	7
1.2.3	广义 Stokes 公式	7
1.3	从一般到特殊——Fourier 级数	7
1.4	从离散到连续——积分的敛散性	9
2	第八章回顾	10
2.1	公式汇总	10
2.2	解题技巧	11
2.2.1	求方程	11
2.2.2	求夹角	12
2.2.3	求距离	12
2.2.4	求投影	12
3	专题：矩阵变换与解析几何	13
3.1	矩阵的几何意义	13
3.2	矩阵与几何变换	14

3.2.1	行列式与可逆性	14
3.2.2	相似与相抵	14
3.2.3	特征值与特征向量	15
3.2.4	二次型的正交相似	15
3.3	二次曲面的分类	16
4	拓展：更高雅的几何	18
4.1	拓扑学 *	18
4.1.1	拓扑公理	18
4.1.2	连续函数与同胚	19
4.1.3	三角剖分与曲面分类	21
4.1.4	快进到微分流形 *	23
4.2	古典微分几何	25
4.2.1	Frenet 标架 *	25
4.2.2	曲面基本量与曲率 *	26
4.2.3	内蕴几何的一些结论	27

1 课程综述

狭义的“微积分”到数分 (B1) 的第五章定积分就结束了，所以在座的各位都已经掌握了微积分（笑）。(B2) 中的所有内容，都是对 (B1) 的推广。

1.1 从一元到多元——多变量微积分

将微积分推广到多变量的直接原因是，我们生活在三维空间，一旦涉及到高维，经典力学玩的那套平地或斜面推滑块、滚小球的理论就失效了。

完全相同地，我们可以模仿单变量微积分的思路，建立多变量微积分的理论。

1.1.1 极限与范数

无论怎样的极限，都可以用 $\varepsilon - \delta/N$ 语言描述，即“只要自变量离得够近，那函数值也得很近”。唯一不同的是，多变量的研究对象从“数”变成了“点”，不再存在“绝对值”概念。

事实上对于向量，我们可以用向量的模长代替绝对值，来描述两点间距。特别地，一维的模长就是绝对值。因此，对于最一般的，从 m 维空间映到 n 维空间的函数 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，它在 \mathbf{x}_0 处的极限为 \mathbf{y}_0 描述为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}| < \varepsilon$$

其中前者为 m 维向量的模长，后者为 n 维向量的模长。

进一步，我们还可以将模长推广为范数。此时，我们需要保留一些模长原有的性质，才知道定义的也是“模长”。

定义 1 (范数). 若线性空间 X 上的一个函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty)$ 满足

1. 正定性: $\|x\| \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$
2. 齐次性: 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. 三角不等式: $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$

则称它是 X 上的一个范数。

n 维欧氏空间中最常见的范数称为 p 范数，即

定义 2 (p 范数). 对于 n 维向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 它的 p 范数定义为

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

特别地, 当 $p \rightarrow +\infty$ 时, 还可以得到无穷范数

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

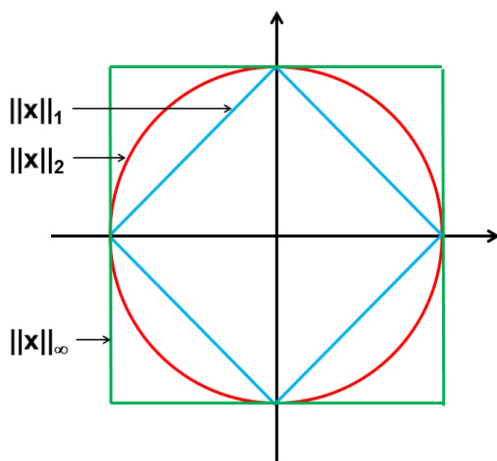


图 1: 范数示意图

注 1. 不难发现 1 范数是所谓直角距离, 而 2 范数就是我们熟知的欧式距离, 也即模长。至于它们为什么满足范数的三条性质, 感兴趣的同学可以自己验证。

至此, 将前面极限表述中的模长升级为范数, 我们就得到了“极限”这一概念的最一般表述, 进而可得到连续函数的定义。

1.1.2 求导与微分

在单变量中, 求导是“差商的极限”。但由于向量不能做分母, 这种方法只能在直线上定义导数。因此, 最直接的想法就是先沿着某一条直线定义导数。

定义 3 (方向导数). 设 \mathbf{x} 是欧氏空间中一点, \mathbf{u} 是一个单位向量, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是实值函数, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

存在时, 称它为 \mathbf{x} 处沿 \mathbf{u} (所在直线的) 的方向导数。

注 2. 若 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ 为向量值函数, 则可以对每一个分量定义方向导数。

特别地, 沿坐标轴的方向导数称为偏导数。

定义 4 (偏导数). f 沿着 x_i 轴的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{y})}{t}$$

不难发现, 这 n 个偏导数看起来就像是 \mathbb{R}^n 的一组基, 如果所有方向导数可以构成一个类似线性空间的结构, 那么任意方向导数都可以写成这 n 个偏导数的线性组合, 这时候就方便得多了。

定义 5 (微分). f 在 \mathbf{y} 处的微分定义为

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

它描述了一点处的线性近似。

一点处没有统一的“导数”概念, 故多变量中没有“可导”, 只有可微。

定义 6 (可微). f 在 \mathbf{y} 处可微是指

$$f(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) h_i = o(|\mathbf{h}|), \quad |\mathbf{h}| \rightarrow 0$$

而 f 的可微性有如下推导关系:

定理 1. 对于 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$f \text{ 的所有偏导数在 } \mathbf{x}_0 \text{ 连续} \implies f \text{ 在 } \mathbf{x}_0 \text{ 可微} \implies \begin{cases} f \text{ 在 } \mathbf{x}_0 \text{ 连续} \\ f \text{ 在 } \mathbf{x}_0 \text{ 的所有偏导数存在} \end{cases}$$

这里也能看出, 为什么在单变量的时候就更强调“连续可导”而非仅仅“可导”。连续可导的另一个好处是求偏导可以随意换序。

注 3. 上面的推导都是单向的, 其他方向均存在反例。比如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在原点处的两个偏导数均存在且为 0, 但 f 在原点甚至不连续。

1.1.3 重积分

和单变量一样, 我们仍然想通过 Riemann 和定义积分。只要函数足够“规整”使其可积, 我们的难点落在了“分割”这一步上。实轴上, 我们可以将积分区域分成小区间。类似地, 高维的积分是在闭的矩形、长方体这样的集合上定义的。接下来, 只要集合够好, 那么用这些形状去逼近整个集合, 就得到了这个集合上的积分。

注 4. 多变量时没有“不定积分 (antiderivative)”这一概念, 因为微积分基本定理不再成立。

通过定义去算积分基本是不现实的。我们的方法是让被积函数够好, 使得一个 n 重积分能够写成 n 个单变量积分, 再去使用微积分基本定理。

1.2 从平直到弯曲——曲线曲面积分

分析的本质是线性逼近。我们已经能在欧式空间上做积分, 那么在弯曲的空间上积分, 最直接的想法是局部“拉直展平”。

以下我们只讨论数量场的积分, 向量场的积分想法类似。

1.2.1 曲线积分

一维空间没有非平凡的内蕴几何, 任何一条曲线都可以等距地变换为直线, 具体操作就是拉直。因此, 我们要做的就是将曲线的参数方程带回到积分式中, 得到

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \int_0^T f(r(t)) r'(t) dt$$

这里的 $r'(t)$ 就可以看作在“拉直”的过程中伸缩比例系数。特别地, 如果曲线选取弧长参数化, 那么这一项就是 1。此时, 拉直的过程不进行伸缩, 此即等距的一个直观感受。

当然, 曲线积分的严格定义仍然是对曲线“分割、求和、取极限”, 道理完全相同。

1.2.2 曲面积分

与曲线不同的是，曲面存在非平凡内蕴几何。比如球面不可能等距地变为平面，就像地球仪上的贴纸不能平展开贴在白纸上。这种情况下，就不能像曲线一样选取合适的参数，使得它化成一个平面积分的常数倍。

更困难的一点是，如果想通过“分割、求和、取极限”的方式定义积分的话，甚至对于包括圆柱面在内的性质很好的曲面，它最后一步的极限可能也是不存在的。因此，我们只能形式化地将曲面积分定义为

$$\iint_{\Sigma} f(\mathbf{r}) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

可以验证该定义与平面相容，且对换元成立。

1.2.3 广义 Stokes 公式

不是微积分基本定理用不起，而是 Stokes 更有性价比。既然微积分基本定理不成立，那我们自然想找个替代品。

微积分基本定理的本质是积分求导互逆，因此对于重积分，一个比较直接的想法是把被积函数以合适的方式“微分”一下，然后把积分增加一重（真·积分要积到九重）。

在二维体现为 **Green 公式**（沿平面区域边界积一圈等于某些偏导数在区域上的积分），在三维体现为 **Gauss 公式**（沿空间区域表面积一圈等于某些偏导数在区域上的积分）和狭义 **Stokes 公式**（沿曲面边界积一圈等于旋度在曲面上的积分）。

最后它们都归结为

定理 2 (广义 Stokes 公式). 设 Ω 是一个单连通区域， ω 是一个函数，则

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

注 5. 当 Ω 取实轴上的闭区间时，广义 Stokes 公式退化成了微积分基本定理。“昨天你对我爱理不理，今天我让你高攀不起”。

1.3 从一般到特殊——Fourier 级数

数分 (B1) 中我们学到了级数的一般理论。这里，我们对于周期函数，研究一种全新的级数：Fourier 级数。

我们之前最常见的周期函数是三角函数，那么对于一般周期函数，能不能把它写成三角函数的之多可数线性组合？

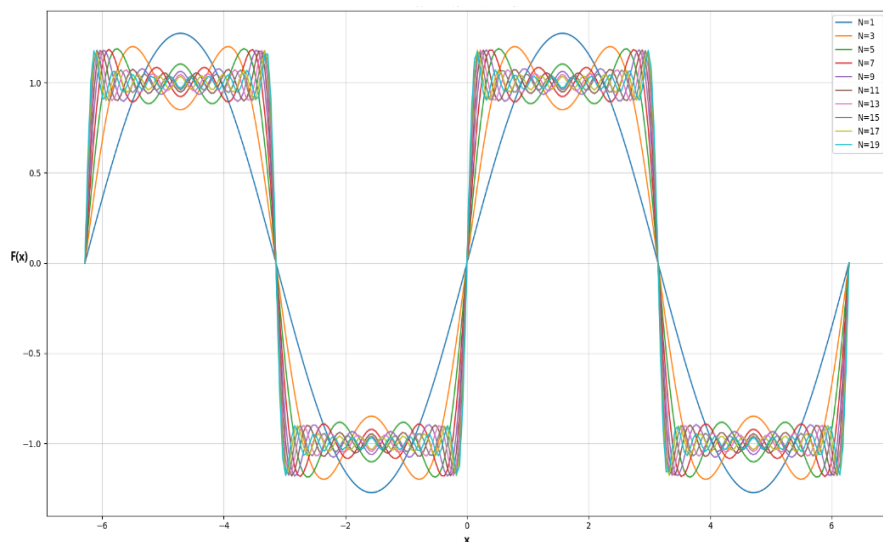


图 2: 周期函数分解为三角函数

定义 7 (L^2 内积). L^2 空间（平方可积函数空间）中的内积定义为

$$(f, g) = \int f g$$

在这种新的内积意义下，集合

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

中的元素两两正交。于是，它们可以作为一组正交基，张成一个无穷维线性空间，这是一个函数空间。周期函数在上面的投影就是 Fourier 级数。

我们肯定希望能如同向量坐标表示一样，将 Fourier 级数和原函数划等号。但对不起，做不到！

事实上，就算一个函数的 Fourier 级数存在，它也不一定收敛于原函数，甚至不一定收敛。Fourier 级数的逐点收敛、积分收敛等问题是早期调和分析的重要研究对象。不过这门课中，我们会给 f 加上一些“强有力的”正则性条件，使 Fourier 级数逐点收敛到原函数的左右极限平均值。

Fourier 分析的另一个重要课题是 **Fourier 变换**。但完整版的 Fourier 变换高度依赖于复分析和测度论。所以，对于数分 (B2)，会算就行。

1.4 从离散到连续——积分的敛散性

级数是离散的求和，积分是连续的求和。因此，积分（无穷积分与瑕积分）的敛散性判别法应当和级数如出一辙。事实的确如此，数项级数与反常积分、函数项级数与含参变量积分的理论完全对应。

除此之外，通过添加参数的方法，我们可以计算诸如 **Gauss 积分**、**Fresnel 积分** 等无法用初等方法算出来的积分。

进一步，我们在 (B1) 中学到常义积分可以定义函数，那广义积分必然也可以。通过这种方式，我们可以将阶乘光滑延拓到 **Gamma 函数**。另一个 **Beta 函数** 本质上也是 Gamma 函数，可用于简化一类三角积分的计算。

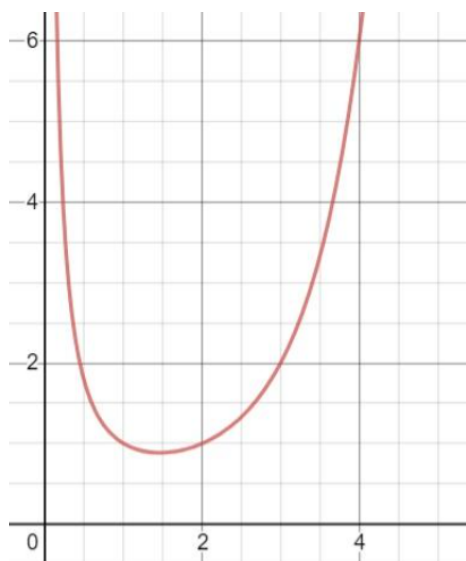


图 3: Gamma 函数图像

2 第八章回顾

2.1 公式汇总

叉乘的定义 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

其几何意义为平行四边形的有向面积。注意以此方法求三角形面积要除以 2。

注 6. 叉乘运算是反对称的, 注意交换时要加负号。

Lagrange 公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

混合积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

其几何意义为平行六面体的有向体积。注意以此方法求四面体体积要除以 6。

方向余弦 对于向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 其三个方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

直线方程 过 (x_0, y_0, z_0) , 方向向量为 (a, b, c) 的直线方程可写作以下形式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$r(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

也可以写成两平面交线的形式, 这时候方向向量为两平面法向量的叉乘。

注 7. 这里的第一行的形式特指 $abc \neq 0$ 的情形, 若某一项为 0, 比如 $c = 0$, 则去掉该项, 另写一行 $z = z_0$ 。

平面方程

$$ax + by + cz + d = 0$$

其法向量为 (a, b, c) , 且注意到“哪项系数为 0 平面就与哪个轴平行”。

注 8. 二次曲面的分类的知识点直接归在本讲义的第三部分。

旋转曲面 绕坐标轴得到的旋转曲面方程形如

$$\text{绕 } x \text{ 轴: } F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴: } F(y, \sqrt{z^2 + x^2}) = 0$$

$$\text{绕 } z \text{ 轴: } F(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

2.2 解题技巧

以下 \mathbf{n} 表示平面的法向量, \mathbf{a}, \mathbf{b} 表示直线的方向向量。

2.2.1 求方程

平面 想办法算出法向量 (a, b, c) , 设平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$, 再利用其余条件求出 d 。

直线 想办法求出方向向量, 再利用其余条件得到直线上一点即可。

2.2.2 求夹角

两平面夹角 即法向量夹角及其补角。

直线与平面夹角

$$\theta = \arcsin \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

2.2.3 求距离

点到平面的距离

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

两平行平面的距离

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

两平行直线的距离 在两直线上各取一点 M, N ，则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{MN} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$$

注 9. 即平行四边形的高为面积除以底。

两异面直线的距离 在两直线上各取一点 M, N ，则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{MN} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

注 10. 即平行六面体的高为面积除以底面积。

2.2.4 求投影

点在直线上的投影 待定系数设出直线上一点，再利用内积为 0，得到投影。

直线在平面上的投影 投影的方向向量为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})$$

再代入平面与直线交点即可。

3 专题：矩阵变换与解析几何

为了更明确地表达几何意义，这里我们只讨论三阶方阵，其余阶数的理论完全相同。

根据线性代数惯例，这一部分的向量均写成列向量。

3.1 矩阵的几何意义

无论线代 (B1) 还是王新茂的线代 (A1)，都会把矩阵当成一个数表，定义一堆复杂的概念和运算。但线性代数不应该这么粗浅。（学了两年线代后，我逐渐理解了一切！）

我们首先严格定义线性空间中的线性变换

定义 8 (线性变换). 设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{a}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

则称 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的一个线性变换。

直观上看，线性变换可以进行伸缩、旋转、剪切等操作。如果发空间画上网格，则变换前后网格间平行关系不变，且间距相等。

事实上，我们有更简单的描述。注意到线性空间中的点可以用基向量**唯一**线性表示。因此线性变换就是在**变换基向量**。不难验证为了符合线性变换的定义，线性变换能且只能动基向量，前面乘的参数 λ, μ 动不了一点（还不能理解的话可以看下面具体的例子）。

下面开始具体计算。如果线性变换 \mathcal{A} 将基向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 依次变为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ ，则任意向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ 有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{v}) &= \mathcal{A}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\mathcal{A}(\mathbf{i}) + y\mathcal{A}(\mathbf{j}) + z\mathcal{A}(\mathbf{k}) \\ &= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\mathbf{v} \end{aligned}$$

其中 $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T$ 。

从 \mathbf{v} 的任意性，我们可以看出，方阵左乘向量就是对向量的一个线性变换。因此，方阵可以视为欧氏空间的一个向量值的“线性函数”，它将一个向量线性地打到另一个向量。

进一步，矩阵相乘就是线性变换的复合。我们知道函数复合具有结合律但不具有交换律，这也就是了为什么矩阵乘法可以结合不能交换。

3.2 矩阵与几何变换

3.2.1 行列式与可逆性

个人认为“行列式”是一个比较糟糕的翻译，它只保留了一个很次要的性质——转置不变性，而忽略了行列式 (determinant) 的几何意义。

在三维欧氏空间中，考虑一个正方体 $[0, 1]^3$ ，由线性性知，它被一个方阵作用后，还是一个平行六面体。这个平行六面体的有向体积是

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \det A$$

因此，三阶矩阵的行列式表示的是用这个矩阵进行线性变换后，一个三维图形的体积会被放大多少倍。这里我们可以看到

$$\det(AB) = \det A \det B$$

进一步地，如果一个三维图形体积被放大或缩小有限倍，那么取个倒数它是完全可能复原的。然而一旦放大 0 倍，这个图形就被降为打击成二维、一维甚至 0 维。此时覆水难收，不可能再用线性的方法将它复原，因此

定理 3. 方阵可逆当且仅当行列式非零。

3.2.2 相似与相抵

定义 9 (矩阵的相似). 对于矩阵 A, B , 若存在可逆方阵 P , 使得 $A = P^{-1}BP$, 则称 A 与 B 相似。

我们知道可逆方阵是可逆线性变换，因此相似的几何意义是“变过去 \rightarrow 操作 \rightarrow 变回来”。通过这种方式，我们有可能将原方阵相似到一个简单的方阵，也就是将坐标系改变一下，在新的坐标系中进行一个很简单的几何变换，再把坐标系变回来。

注 11. 不是方阵的矩阵，视为线性变换时，会改变空间的维数，因此第三步坐标系拉不回来。这说明只有方阵能相似。

相抵则更加一般，区别于相似，它在第三步不要求“以同样方式”把坐标系拉回来，因此可对任意矩阵做。

定义 10 (矩阵的相抵). 对于矩阵 A, B , 若存在可逆方阵 P, Q , 使得 $A = PBQ$, 则称 A 与 B 相抵。

根据线性代数理论, 任何方阵可相抵为标准型, 即

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

这说明在适当的坐标变换下, A 相当于前 r 个分量不变, 其他分量被“压扁”。换句话说, 矩阵的秩的几何含义, 就是这个矩阵会把一个 n 维的图形降维打击到 r 维。

3.2.3 特征值与特征向量

定义 11 (特征值与特征向量). 若 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 则称 λ 为 A 的一个特征值, 而 \mathbf{x} 称为 λ 对应的特征向量。

前面提到, 线性变换有很多种。但我们最想看到、最规整的一种就是对于向量“只伸缩不旋转”。特征向量所在的方向, 便有这么好的性质, 特征值就是伸缩的倍数。

注 12. 这个方向伸长 λ_1 倍, 那个方向伸长 λ_2 倍…… 最终, 很直观地看出 n 维体积就增大了 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 倍, 这也是为什么行列式等于各个特征值的乘积。

3.2.4 二次型的正交相似

进一步, 线性变换有没有可能做到“刚体运动”的效果(保长度且保角)呢? 答案是肯定的。

注 13. 这里的刚体运动包含了“反向刚体”, 即不要求保右手系。

前面知道, 线性变换本质是对基向量的变换。要保证刚体运动, 我们只需让变换后的基向量也是标准正交的就好, 也即矩阵的行向量标准正交。

定义 12 (正交方阵). 若 $PP^T = I$, 则称 P 是一个正交方阵。

这个定义与“矩阵行向量标准正交”等价, 这是因为

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} \iff PP^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T\mathbf{a} & \mathbf{a}^T\mathbf{b} & \mathbf{a}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{a} & \mathbf{b}^T\mathbf{b} & \mathbf{b}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{a} & \mathbf{c}^T\mathbf{b} & \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

不难看出等价性。

在三维欧氏空间中，刚体变换体现为平移和旋转。平移可以直接有向量加法得到，而旋转则是乘正交阵。

注 14. 从几何意义可以看出为什么正交阵的行列式只能为 ± 1 。

线性代数中有如下定理

定理 4. 任何一个对称阵可以用正交阵相似为 $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

该结论可以归纳得到，这里限于篇幅，不进行证明（反正你们之后都会学，欸嘿）。

至此，已成艺术 (?)

准备工作全部完成，下面我们可以进行二次曲面的分类。

3.3 二次曲面的分类

定理 5 (空间二次曲面分类定理). 三维欧氏空间中的二次曲面只有已命名的九种。

注 15. 我们要求二次项至少一项系数非零。

证明. 设二次曲面为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

它可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + K = 0$$

由前面定理，存在正交阵 P ，使得

$$P^T \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} P = P^{-1} \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

考虑刚体变换（旋转）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

并令

$$\begin{pmatrix} G' & H' & J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & H & J \end{pmatrix} P$$

于是曲面方程化为

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G' & H' & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + K = 0$$

情形一： 若每个系数非零的一次项，对应的二次项的系数都非零：
可以配方得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + G'x' + H'y' + J'z' + K \\ &= \lambda_1 \left(x' + \frac{G'}{2} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{H'}{2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{J'}{2} \right)^2 - M \end{aligned}$$

其中 M 是一个常数。

再进行一次刚体变换（平移）

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' + \frac{G'}{2} \\ y' + \frac{H'}{2} \\ z' + \frac{J'}{2} \end{pmatrix}$$

原方程化为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = M$$

这是标准方程，可根据 λ_i 和 M 的符号分类，得到的二次曲面有**椭球面、椭圆柱面、双曲柱面、单叶双曲面、双叶双曲面、双曲锥面**。

情形二： 若存在某个一次项系数非零，但它对应的二次项消失：

由对称性，不妨设 $\lambda_3 = 0$ 但 $J' \neq 0$ 。同除以 J' ，得到

$$z' = -\lambda_1 x'^2 - \lambda_2 y'^2 - G''x - H''y + K'$$

此时，由于含 z 的只有一个一次项，我们可以随时将曲面沿 z 轴平移，使得常数项消失。

若 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ，由于曲面是二次的，它们不能同时为 0，因此不妨设 $\lambda_2 = 0$ 。此时可沿着 x 轴平移，于是我们可以将方程改写为

$$z'' + H''y'' = -\lambda_1 x''^2$$

最后绕 x 轴旋转 $\theta = -\arctan H''$ ，即得到抛物柱面。

若 $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ，则可配方（平移）得到

$$z'' = -\lambda_1 x'' - \lambda_2 y''^2$$

两个特征值同号则为椭圆抛物面，异号则为双曲抛物面（马鞍面）。

至此，我们证明了二次曲面有且仅有 9 种

□

注 16. 可以进一步系数更一般的情况，得到包括空集、点、直线、平面、一对平行平面、一对相交平面在内的共 15 种广义二次曲面。

4 拓展：更高雅的几何

4.1 拓扑学 *

公理化的数学是建立在集合论上的。所以，就算具体的几何对象，也是从集合开始的。

4.1.1 拓扑公理

但有一个背景集合肯定是不够的，我们需要在其中找到一些特殊的子集，即“开集”。

定义 13 (拓扑空间). 设 X 是一个非空集合， \mathcal{O} 是 X 的一些子集的集合，满足：

1. $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. 设 I 是一个指标集， $O_i \in \mathcal{O}, \forall i \in I$ ，则 $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$
3. $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ，有 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

则称 \mathcal{O} 为 X 上的一个拓扑， \mathcal{O} 中的元素称为该拓扑下的开集。二元组 (X, \mathcal{O}) 称为一个拓扑空间。

注 17. 后两条性质称为开集公理。平凡地看出，度量空间中的开集满足该定义，这样的拓扑称为通常拓扑。

相较于开集，“邻域”的概念更好理解

定义 14 (邻域公理). 拓扑空间 X 中，非空集合 $\mathcal{N}(X, x)$ 若满足性质

1. $N \in \mathcal{N}(X, x) \implies x \in N$
2. $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(X, x) \implies N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(X, x)$
3. $N \in \mathcal{N}(X, x), N \subset U \subset X \implies U \in \mathcal{N}(X, x)$
4. $N \in \mathcal{N}(X, x) \implies \dot{N} = \{z \in X | N \in \mathcal{N}(X, z)\} \in \mathcal{N}(X, x)$

则称它为 x 的邻域。

注 18. 这里可以看出，我们在数分 (B1) 中经常要强调“小”邻域，因为邻域可以大到是全空间。

值得一提的是，开集公理和邻域公理定义的拓扑是等价的。与它们等价的还有闭集公理和拓扑基公理。

拓扑空间是最简单的几何对象，虽然“简陋”但足够发展出一套理论。

4.1.2 连续函数与同胚

在度量空间中，不难验证连续等价于开集的原像是开集。后者不依赖于拓扑结构，所以在拓扑空间中，我们将“开集的原像是开集”作为连续函数的定义（也等价于闭集原像是闭集、邻域原像是原像、拓扑基原像是开集）。由此，我们可以定义拓扑学中最重要等价关系。

定义 15 (同胚). 若 X, Y 两个拓扑空间，连续的一一映射 $f: X \rightarrow Y$ 可逆，且逆映射也连续，则称 f 是 X, Y 之间的同胚。此时，称 X, Y 是同胚的。

形象地看，同胚允许拉伸、扭转、揉捏等，但不允许挖洞、粘连、降维。

包括开集、闭集、紧集、连通、道路连通、基本群、同调群在内的绝大多数拓扑性质都在同胚下保持，所以通常把同胚的拓扑空间视作同一个，比如喜闻乐见的“咖啡杯与甜甜圈”。

这里我们可以提一个有趣的东西：**Peano 曲线**。如图构造一系列闭区间到三角形的连续双射，可以证明这列函数一致收敛与一个连续函数 f ，由此做到“直线填满平面图形”。但这不意味着它们同胚（更强地，可以证明维数不同的空间不可能同胚）。

采用反证法，在闭区间中间挖掉一个点，则三角形上也会挖掉一个点，它们仍然同胚，但前者不连通、后者连通，矛盾！事实上，最终的 f 连续，但不可逆，因为它不再是单射。

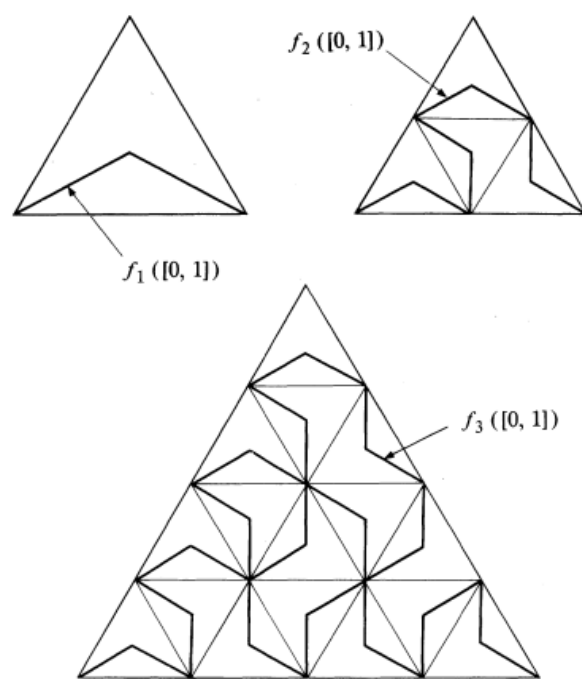


图 4: Peano 曲线

4.1.3 三角剖分与曲面分类

关于拓扑学，最后介绍一个很实用的定理。

定理 6 (紧曲面的三角剖分). 任何一个紧（有界闭）曲面可以剖分成有限个“三角形”。这里的三角形的边可以不是直的。

三角形的好处是，它是最简单的二维多边形，称为**单纯形**。

示例可以参考下图，这个定理保证了使用计算机对曲面进行建模的可行性（比如原神）。对于拓扑学而言，这个定理能够辅助我们将所有紧曲面分类。

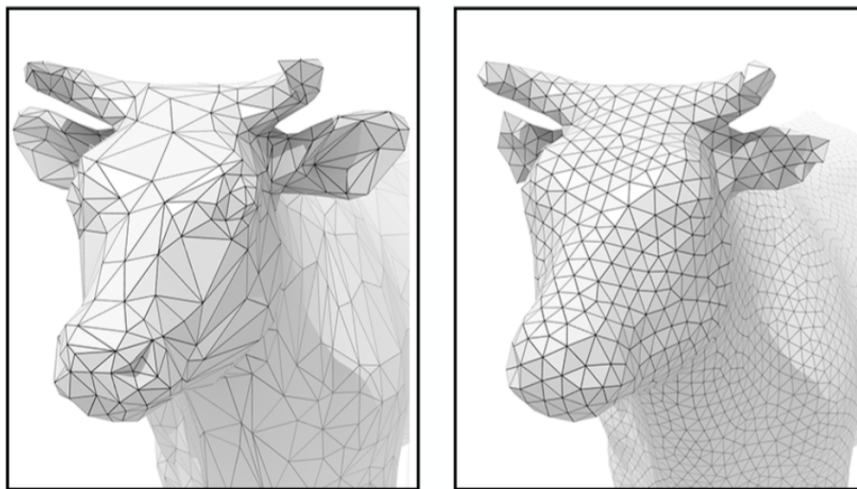


图 5: 三角剖分示例

定理 7 (紧曲面分类定理). 任何一个紧曲面要么同胚于

$$S^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \mathbb{D}_i \right)$$

要么同胚于

$$S^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \mathbb{D}_i \right)$$

其中 S^2 为球面， T^2 为环面 (*torus*)， $\mathbb{R}P^2$ 为射影平面， \mathbb{D}_i 为开圆盘。

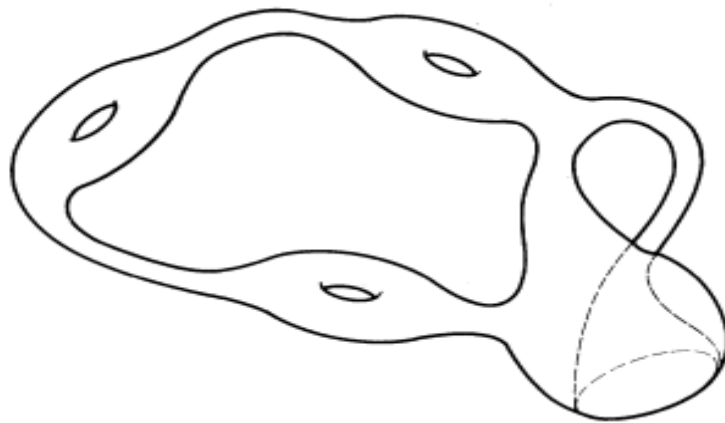


图 6: 一个无边紧曲面

例如上图中的曲面，直观上看，它是 $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# K$ ，这里 K 是 **Klein 瓶**。在同胚意义下，它可以写成 8 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和。这里的井号表示连通和，直观上理解，就是把两个曲面各挖去一个洞，再用一条管道连接起来。

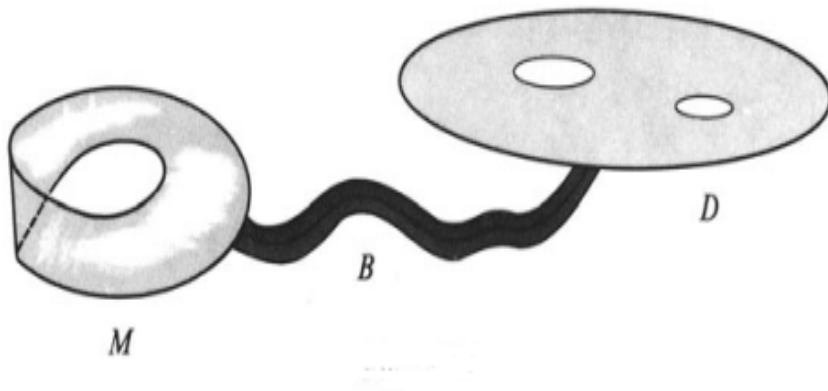


图 7: 连通和示例

有了这里的预备知识，我们就可以引出千禧年七大难题之一：

定理 8 (Poincare 猜想). 若一个拓扑空间同伦于 S^n ，则它同胚于 S^n 。

同伦是一个弱于同胚的等价关系，它去掉了同胚中“双射”的要求。比如，圆盘跟一个点是同伦的，却显然不同胚。

值得一提的是，紧曲面分类定理已经可以证明庞加莱猜想的 $n = 2$ 情形，而最难的 $n = 4$ 情形是 Perelman 通过几何流的方式证明的。至此，庞加莱猜想已经被证实。

不过它还有一个加强版本，即把同胚加强为微分同胚，就是将连续函数升级为光滑函数。这个定理暂时悬而未决，目前手头紧的同学可以尝试一下 (bushi)。

4.1.4 快进到微分流形 *

一般的拓扑空间上，可用的工具太少。我们更喜欢研究性质好的空间。

定义 16 (拓扑流形). 满足 T_2, A_2 和局部欧的拓扑空间称为**拓扑流形**。

T_2 又称为 **Hausdorff 性质**，指的是任何两点都可以用两个开集把它们分开，不会粘连到一起。 A_2 称为**第二可数**，比较复杂，暂时理解为“不是太大”就好。局部欧的性质很重要，它表示任何一个点，都可以找到一个开邻域与欧氏空间的一个开集同胚。这使得我们可以把流形局部放在欧氏空间里研究。

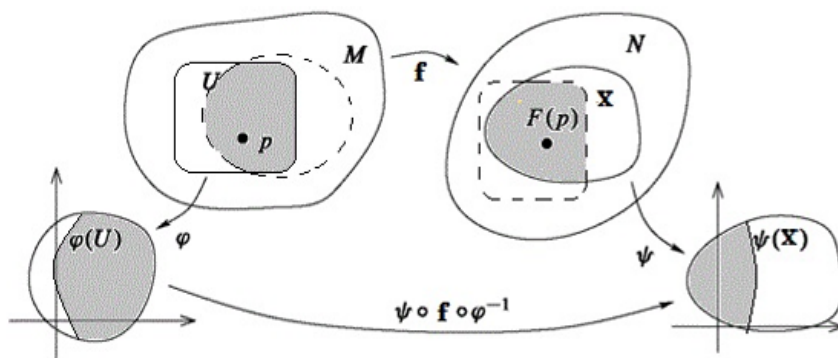


图 8: 流形上的光滑函数

进一步，如果拓扑流形性质足够好，我们可以在上面加一个光滑结构，得到**光滑流形**。由此我们可以定义光滑函数（不仅仅连续），具体步骤是如上图。这样，就可以用欧氏空间中函数的光滑性定义流形上函数的光滑性。

流形理论中最重要的结论称为单位分解:

定理 9 (光滑流形的单位分解). 令 M 为一个光滑流形, $\{U\}$ 一系列覆盖 M 的开集 (可以不可数). 若 $\{\rho_\alpha\}$ 是一族定义在整个流形 M 上光滑函数, 且满足

- 对于任意 α , $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$;
- 对于任意 α , $\rho_\alpha|_{U_\alpha^c} = 0$;
- 任意一点 $p \in M$, 都存在一个的邻域, 在上面只有有限个 ρ_α 非零;
- 对于任意 $p \in M$, $\sum \rho_\alpha(p) = 1$.

则称 $\{\rho_\alpha\}$ 为一个从属于 $\{U\}$ 的 (光滑) 单位分解 (P.O.U.)

一个极其不平凡的结论是单位分解一定存在。而光滑流形理论中的绝大多数结论最终归结于单位分解的存在性。

单位分解存在性证明, 采用的是构造性方法, 用到了 (B1) 中那个著名的函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

正是它光滑但不解析的特性, 让光滑流形的理论远远比解析流形丰富。

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \implies f_1(x) = \begin{cases} \in (0, 1), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \\ f_2(x) &= \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_1(1-x)} \implies f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \in (0, 1), & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \\ f_3(x) &= f_2(2 - |x|) \implies f_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ \in (0, 1), & 1 < |x| < 2, \\ 1, & |x| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

The graphs of f_1 , f_2 and f_3 (with $n = 1$) are shown below:

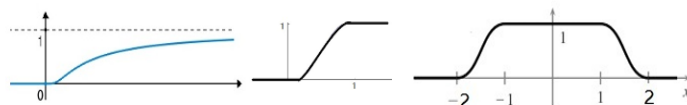


图 9: 单位分解的初步构造

4.2 古典微分几何

拓扑学研究的对象比较抽象，那下面来点具体的、我们能看见的。将分析工具引入三维欧氏空间，就能建立与经典力学同步发展的古典微分几何（而现代的微分几何是在流形上研究的）。

4.2.1 Frenet 标架 *

曲线是一个一维空间，所以我们希望只用一个参数表示。曲线方程通常写作 $\mathbf{r}(t)$ ， t 可以直观理解为时间，此时曲线对应了一个物体再某个时刻的位置。

但是，后面的计算会发现，用时间做参数不够好。一个观察是，把曲线拉直，那么它可以和一条直线一一对应，因此可以采用弧长作为参数。换句话说，将“走了多远”和“走到了哪里”对应起来，记作 $\mathbf{r}(s)$ 。

为了区分，对一般参数求导记为 \mathbf{r}' ，对弧长参数求导记为 $\dot{\mathbf{r}}$ 。弧长参数的最大好处是导数模长恒为 1。

对于曲线，最重要的是研究它的“弯曲程度”，即曲率，用 κ 表示。对于空间曲线，我们还可以研究挠率，即这条曲线有多不想待在一个平面内，用 τ 表示。最形象的例子是圆柱螺旋线，它像一个弹簧，曲率越大，半径越小（转圈圈转得快）；挠率越大，间距越大（被拉长的弹簧）。

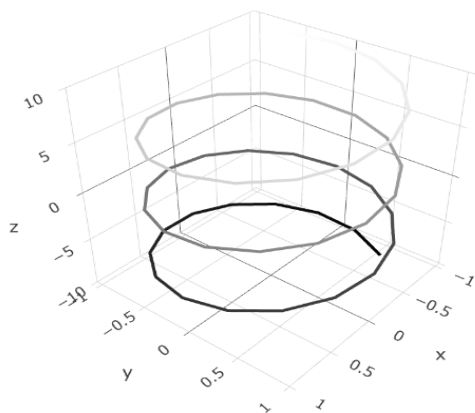


图 10: 圆柱螺旋线

曲线论可以用一个公式终结，即

定理 10 (曲线论). 弧长参数空间曲线满足

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

这里 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ 依次是切向量、主法向量、副法向量。

它在物理中有另一个名字：自然坐标系。

4.2.2 曲面基本量与曲率 *

曲面是二维的，所以参数化之后，可以写成 $\mathbf{r}(u, v)$ 。研究曲面实际上不需要太多关注它的，我们通常只需知道它的基本量。

定义 17 (曲面的基本量). 设曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 的法向量为 \mathbf{n} ，则它的第一基本量为

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$$

第二基本量为

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle \quad M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \quad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$$

比如，之后学到曲面积分时，我们用到的面积元就可表示为 $\sqrt{EG - F^2}$ 。

类似曲线，我们也想研究一个曲面的弯曲程度。Gauss 采用的方法是这样的：

1. 选取曲面上一点的一个小邻域，每点对应一个单位法向量；
2. 将这些单位向量的起点平移到单位球球心，它们在球面上指出一个面积；
3. 计算它与小邻域面积的比值，并让小邻域面积趋于 0，得到 **Gauss 曲率**，记为 K 。

我们就可以通过基本量计算曲面的弯曲程度。

定理 11 (Gauss 曲率的计算).

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

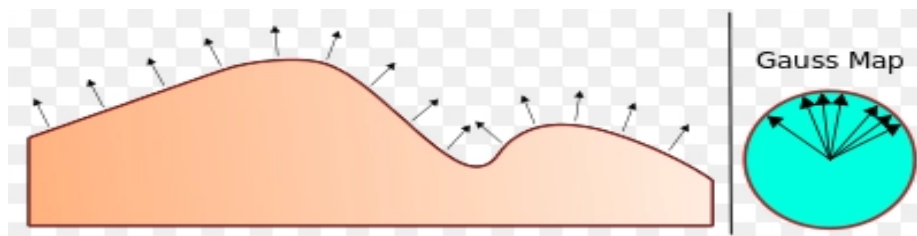


图 11: Gauss 曲率

4.2.3 内蕴几何的一些结论

曲面的法向量与这个曲面如何嵌入高维空间有关。比如平面和抛物柱面，它们在内蕴上没有任何区别，可以**等距同构**，只是嵌入三维空间的方式不一样。由此可以看出，第二基本量是个依赖于嵌入，但第一基本量至于曲面本身的性质有关。根据这一性质，我们完全可以发展一套**内蕴几何**的理论。限于篇幅，这里只介绍几个有意思的定理。

定理 12 (Gauss 绝妙定理).

$$\begin{aligned}
 4(EG - F^2)K = & E(E_v G_v - 2F_v G_v + G_u^2) \\
 & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v G_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u) \\
 & + G(E_u G_v - 2E_u F_v + E_v^2) \\
 & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu})
 \end{aligned}$$

这个定理虽然丑陋，但它表明了 Gauss 曲率是个内蕴量，它与曲面如何嵌入空间无关。因此，我们可以得到一个反直觉的事实：包括圆柱面和抛物柱面在内，**柱面的曲率为 0**。这个定理也说明了为什么白纸为什么没法贴在球面上。

广义相对论中提到“我们的宇宙是弯曲的”也是这个意思，只不过是更高维的 Gauss 曲率不平凡。那么问题来了，我么生活在宇宙中，目前无法站到更高维取看，那怎么判断宇宙是弯曲的呢？

定理 13 (Gauss-Bonnet 公式). 设曲面上三条测地线 围成 $\triangle ABC$ ，则

$$\iint_{\triangle ABC} K dS = \angle A + \angle B + \angle C - 2\pi$$

测地线大致可以理解为曲面上最短的直线，比如平面上的直线、球面上的大圆（如经线）。在弯曲的空间中，我们确实可以让“三角形内角和不是180度”。通过这个定理，我们即使“身在庐山中”，也可以窥其形貌。

最后，再介绍一个很形象的定理：

定理 14 (毛球定理)，球面上不存在处处光滑的向量场。

它的另一种表述是“球面连续向量场必有零点”。

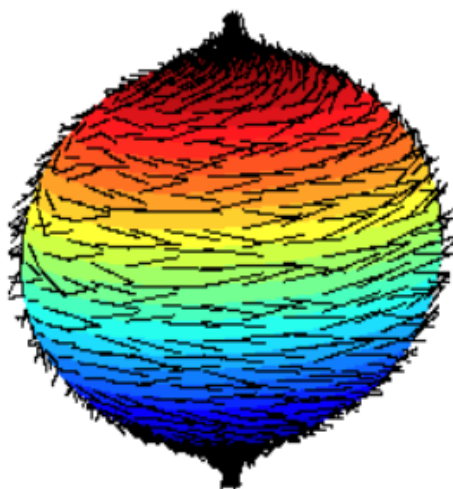


图 12: 毛球定理

向量场就是向量值函数，它的光滑性也是指无穷次可导。把风向和风力视为向量，那么一个形象的表述是地球上至少有一处不刮风。

另一方面，前面提到的光滑 **Poincare** 猜想在 2 维是成立的（曲面分类就能证）。因此，我们考虑一只猫，它的外部与一个球面微分同胚。由于光滑函数的复合仍为光滑函数，球面上不存在处处光滑向量场表明了猫身上不存在光滑向量场（猫毛）。因此，猫的身上总有一处，无论往哪个方向摸都是逆毛而上，这就是这只猫身上的“禁区”，不要摸这些地方。