第十四周作业答案

于俊骜

2024 年 6 月 18 日

习题 12.4

1

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{0}^{T} \xi e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{iT\lambda+1}{\lambda^2}e^{-iT\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda}+e^{-i\lambda}-2}{\lambda}e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\lambda}e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

(3)

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}}{a^2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\lambda|+ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

2

(1)

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a|x|}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} xe^{(a-i\xi)x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xe^{-(a+i\xi)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{xe^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\right|_{x=-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,\mathrm{d}x - \left.\frac{xe^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\right|_{x=0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left.\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2}\right|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(a+i\xi)^2} - \frac{1}{(a-i\xi)^2} \\
&= -\frac{4ai\xi}{(a^2+\xi^2)^2}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(1-\xi)}\,\mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix(1+\xi)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{e^{ix(1-\xi)}}{i(1-\xi)}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{e^{-ix(1+\xi)}}{i(1+\xi)}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\xi}{1+\xi} = -\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi^2}
\end{aligned}$$

习题 13.1

1

(2)

收敛。

注意到该积分无瑕点，且对于充分大的 $x>0$，有

$$\sqrt{x}e^{-x} < e^{\frac{x}{2}}e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}$$

从而由比较判别法，该积分收敛。

(3)

发散。

注意到该积分无瑕点，且

$$\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}},\ x\to\infty$$

从而由比较判别法，该积分发散。

(6)

发散。

注意到该积分只有 1 一个瑕点，且

$$\frac{x^2}{(\sqrt[3]{1-x^2})^5}\sim\frac{2^{-\frac{5}{3}}}{(1-x)^{\frac{5}{3}}},\ x\to 1^-$$

从而由比较判别法，该积分发散。

(7)

收敛。

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\sim\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\to 0^+$$

从而由比较判别法，该积分收敛。

(10)

收敛。

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x\to 0^+$$

从而由比较判别法，直接积分可知其收敛。

(14)

（旧版书印刷错误，对应新版书的第 12 问）

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{1}{x^{\mu-1}},\ x\to 0^+$$

$$\frac{\arctan^\mu}{x^\mu}\sim\frac{\pi}{2x^\mu},\ x\to +\infty$$

由比较判别法，该积分收敛当且仅当 $1<\mu<2$。

2

(4)

注意到

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)} \sim \frac{1}{x},\ x \to 0^+$$

从而由比较判别法，该积分发散。

问题反馈

- Fourier 积分的结果应当只有一个积分号
- 特殊函数 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的 Fourier 变换可以通过 $e^{-|x|}$ 间接计算，直接计算会用到复变中的留数定理；
- 部分同学把 x^{-p} 的收敛性记反；
- 别漏瑕点。