

第二周作业答案

于俊骞

2024 年 3 月 12 日

习题 8.3

1

(1)

是。

平面 Oxy 上椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转而成。

(2)

是。

平面 Oxy 上的圆 $x^2 + y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转而成。

(3)

不是。

(4)

是。

平面 Oxy 上的双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 x 轴旋转而成。

(5)

不是。

(6)

是。

平面 Oxy 上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转而成。

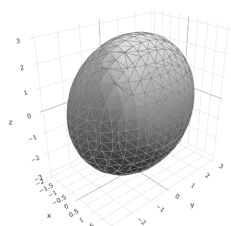
(7)

是。

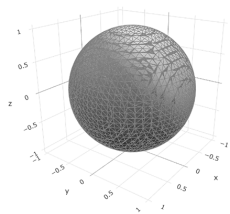
平面 Oxz 上的抛物线 $4z = x^2$ 绕 z 轴旋转而成。

(8)

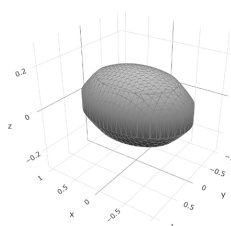
不是。



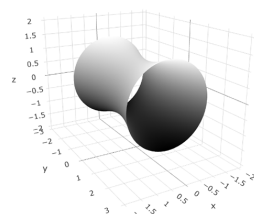
(1)



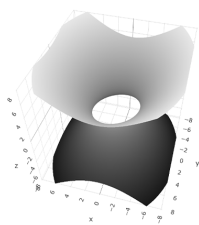
(2)



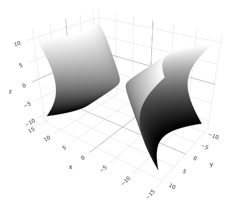
(3)



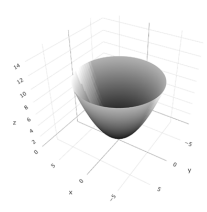
(4)



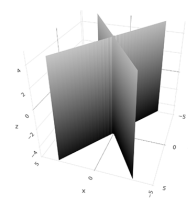
(5)



(6)



(7)



(8)

图 1: 第 1 题图

2

(1)

直线；平面。

(2)

直线；平面。

(3)

圆；圆柱面。

(4)

双曲线；双曲柱面。

(5)

抛物线；抛物柱面。

(6)

点；直线。

(7)

两个点；两条平行直线。

(8)

两个点；两条平行直线。

3

(1)

单叶双曲面，方程为

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

(2)

无名旋转曲面，方程为

$$y^2 + z^2 = \sin^2 x, \quad x \in [0, \pi]$$

(3)

椭球面，方程为

$$4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$$

习题 8.4

1

令 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - \frac{1}{2}$, 则

$$x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{3}{4}$$

这是一个双叶双曲面。

2

令 $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, y' = \frac{x-y}{2}, z' = z$, 则

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}y' + z' + 1 = 0$$

再令 $x'' = x, y'' = y' - \sqrt{2} + z' + 3$, 则

$$x''^2 - y''^2 + z'' + 3 = 0$$

这是一个双曲抛物面。

4

(4)

令 $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$, 则球面坐标系方程为

$$\rho^2(\sin^2 \theta \cos 2\varphi - \cos^2 \theta) = 1$$

(5)

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 得到

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$$

再令 $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$, 则球面坐标系方程为

$$\rho^2(1 + \cos^2 \theta) = 4$$

(6)

令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}$, 得到

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \implies (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = 4x^2$$

再令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则柱面坐标系方程为

$$r^2 + z^2 = 4 \cos^2 \theta$$

(10)

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$, 结合 $\cos \varphi \geq 0$, 得到直角坐标系方程

$$z = x^2 - y^2$$

8

$$\begin{cases} x = x_0 + a \sin u \cos v \\ y = y_0 + a \sin u \sin v \\ z = z_0 + a \cos u \end{cases} \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi)$$

9

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos u \end{cases} \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi)$$

11

$$\begin{cases} x = a \cosh u \cos v \\ y = b \cosh u \sin v \\ z = c \sinh u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi)$$

习题 9.1

12

令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$ 。于是

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v} \right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v} \right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v} \implies f(2, 3) = -2$$

13

$$f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = (x + y)^{x-y}$$

$$\varphi(f(x, y), \psi(x, y)) = x^y + x - y$$

$$\psi(\varphi(x, y), f(x, y)) = x + y - x^y$$

14

(2)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{xy} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} y = a$$

(7)

存在。

注意到, 存在 $M > 0$, 使得

$$e^{x+y} \geq (x+y)^4 \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4, \quad x+y > M$$

因此

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{x+y} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^4} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

(9)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\sqrt{xy+1} + 1 \right) = 2$$

(10)

不存在。

事实上, $y = 0$ 时原式恒为 0。而取 $y = -x + x^2$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = -x + x^2}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

故极限不存在。

15

(1)

由

$$e^{\frac{1}{x^2-y^2}} = e^{\frac{1}{\rho^2 \cos 2\varphi}}$$

知, 极限存在当且仅当

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

(2)

由

$$e^{x^2-y^2} \sin 2xy = e^{\rho^2 \cos 2\varphi} \sin (\rho^2 \sin 2\varphi)$$

知, 极限存在当且仅当

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \cup \{0, \pi\}$$

17

(1)

$x_0 \neq y_0$ 时, (x_0, y_0) 处显然连续。

$x_0 = y_0 = 0$ 时, 当 $y = 0$ 时函数值恒为 0。另一方面, 取 $y = x - x^2$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x - x^2}} \frac{xy}{x - y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x - x^2}} \frac{x(x - x^2)}{x^2} = 1 \neq 0$$

故不连续。

$x_0 = y_0 \neq 0$ 时

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = y_0}} \frac{xy}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy_0}{x - y_0}$$

不存在。

18

证明. 注意到 $\cos \alpha = 0$ 时, $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, t) = 0$ 。

$\cos \alpha \neq 0$ 时, 对于 $t \neq 0$ 有

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} \implies \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0 = f(0, 0)$$

另一方面, 取 $y = x^2$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2}} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$$

这说明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续。□

问题反馈

- 习题 9.1 的 15(2) 几乎都漏情况;
- 曲面命名不规范, 出现“抛物面、旋转椭球面”等;
- 遇到平方差时, 尽量考虑双曲三角换元;
- 习题 9.1 的 17(1), 直线 $y = x$ 上的连续性并不相同, 不能混为一谈;