第十二周作业答案

于俊骜

2024 年 5 月 24 日

习题 11.3

7

(1)

证明. 令 $P=\frac{\partial f}{\partial x}, Q=\frac{\partial f}{\partial y}$，则由 Green 公式

$$\iint_D \Delta f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L -Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y=\oint_L \nabla f\cdot(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)=\oint_L\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s$$

这是因为将切向量 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 可得外法向量 $(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)$ 与外法向量同向。 □

(2)

证明. 由 (1) 知

$$\int_L \cos(\mathbf{a},\mathbf{n})\,\mathrm{d}s=\int_L \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

事实上我们可取 $f(x,y)=(x,y)\cdot\mathbf{a}$，则 $\nabla f=\mathbf{a}$，不难得到 $\Delta f=0$。 □

(3)

证明. 首先，由求导的 Leibniz 法则可知

$$\begin{aligned}u\Delta v&=\nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla u\cdot\nabla v\\ v\Delta u&=\nabla\cdot(v\nabla u)-\nabla u\cdot\nabla v\end{aligned}$$

于是作差可得

$$u\Delta v-v\Delta u=\nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla\cdot(v\nabla u)$$

因此，结合 (1) 可知

$$\iint_D(v\nabla u-u\nabla v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\nabla\cdot(v\nabla u-u\nabla v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L(v\nabla u-u\nabla v)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s$$

□

习题 11.7

2

(1)

直接计算可得

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (2x + y, x + 4y + 2z + 2y - 6z) = 0$$

因此由 Stokes 公式

$$\int_L \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^0 2x \,\mathrm{d}x - \int_0^a 6z \,\mathrm{d}z = -4a^2$$

(2)

直接计算可得

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy) = 0$$

因此由 Stokes 公式

$$\int_L \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^h z^2 \,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}h^3$$

3

(2)

直接计算可得

$$\nabla \times (yz(2x + y + z), xz(2y + z + x), xy(2z + x + y)) = 0$$

故 $\mathbf{v}$ 是无旋场，从而是有势场。其一个势函数为

$$\int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} \mathbf{v} \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{x_0} 0 \,\mathrm{d}x + \int_0^{y_0} 0 \,\mathrm{d}y + \int_0^{z_0} x_0 y_0 (2z + x_0 + y_0) \,\mathrm{d}z = x_0 y_0 z_0 (x_0 + y_0 + z_0)$$

因此，势函数为

$$\varphi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C$$

4

直接计算可得

$$\nabla \times \mathbf{F} = ((2 - 2a)x, (1 - a)y, (3a - 3)z + 5(1 - a))$$

因此 $\mathbf{F}$ 是无旋场当且仅当 $a = 1$。

此时

$$\mathbf{F} = (x^2 + 5y + 3yz, 5x + 3xz - 2, 3xy - 4z)$$

其一个势函数为

$$\int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_0^{x_0}x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^{y_0}(5x_0-2)\,\mathrm{d}y+\int_0^{z_0}(3x_0y_0-4z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}x_0^3+5x_0y_0-2y_0+3x_0y_0z_0-2z_0^2$$

因此，势函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+5xy-2y+3xyz-2z^2+C$$

5

(2)

$$u(x,u,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$$

6

(5)

直接计算可得

$$\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2}\right)=0$$

其中 $x,y,z\neq 0$。因此 $\mathbf{v}$ 是第一卦限的无旋场，从而积分与路径无关。此时

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_1^2\mathrm{d}x+\int_1^2\left(2+\frac{2}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\int_1^2\frac{4}{z^2}\,\mathrm{d}z=2$$

(6)

注意到

$$\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\nabla r$$

故 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ 中的有势场，积分与路径无关。因此

$$\int_{(x_1,x_2,x_3)}^{(x_2,y_2,z_2)}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{(x_1,x_2,x_3)}^{(x_2,y_2,z_2)}\nabla r\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{(x_1,x_2,x_3)}^{(x_2,y_2,z_2)}\mathrm{d}r=0$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

10

由题

$$0=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y\left(\alpha''+4\alpha+4x\alpha'\right)+\beta'-2y(2x\alpha'+\beta')-2\beta\tan 2x$$

为使上式恒成立，我们需要

$$\begin{cases}\beta'=2\beta\tan 2x\\ \alpha''+4\alpha=2\beta'\end{cases}$$

直接解方程，可得

$$\beta = Ce^{2\int \tan 2x \,\mathrm{d}x} = C\cos 2x$$

结合 $\beta(0) = 2$ 知 $C = 2$，因此

$$\beta = 2\cos 2x$$

进而

$$\alpha'' + 4\alpha = 4\cos 2x$$

类似可解得

$$\alpha = (1+x)\sin 2x$$

(2)

由 (1) 知

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_0^2 ((\sin 2x + 2(1+x)\cos 2x + 4x(1+x)\sin 2x) + 2\cos 2x)\,\mathrm{d}y = 8$$

13

由题

$$e^x\cos y + x^2 + f(x) = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = f''(x) + e^x\cos y + 2$$

即

$$f''(x) - f(x) = x^2 - 2$$

其特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$，因此它对应的齐次方程的通解为

$$\tilde{f} = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

观察得到原方程的解为

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2$$

代入初值条件 $f(0) = 0, f'(0) = 2$，得到解为

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 2x^2$$

进而

$$\left(e^x\sin y + ye^x + ye^{-x}\right)\mathrm{d}x + \left(e^x - e^{-x} + e^x\cos y\right) = 0 \tag{1}$$

全微分方程的解为

$$e^x\sin y + y(e^x + e^{-x}) = C$$

习题 12.1

1

(1)

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}\pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{n}(1 - 2\cos nx) = \frac{1}{n}\left(1 - 2(-1)^n\right)
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(x) \sim -\frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{n}\left(1 - 2(-1)^n\right)\sin nx\right)
$$

$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x \neq k\pi$ 时收敛于 $f(x)$，在 $x = k\pi$ 时收敛但不为自身。

(2)

注意到 $f(x)$ 是偶函数，从而 $b_n = 9$。计算可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{2n+1}{2}x + \cos\frac{2n-1}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{(2n+1)\pi}(-1)^n + \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^{n-1} = \frac{4}{4n^2-1}(-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}(-1)^{n-1}\cos nx
$$

$f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$。

4

(1)

由题

$$
0 = a_0 = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2a - |x|)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2a - x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\left(2a\pi - \frac{1}{2}\pi^2\right)
$$

显然 $a \neq 0$，于是 $a = \frac{\pi}{4}$。经检验，满足题中要求。

(2)

由题

$$1 = b_1 = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x = 2a \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

经检验，满足题中要求。

6

(1)

令 $t = x + \pi$，则

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t-\pi)\cos 2n(t-\pi)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -f(t)\cos 2nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x = 0 \\
b_{2n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t-\pi)\sin 2n(t-\pi)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -f(t)\sin 2nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

(2)

与 (1) 完全同理。

7

证明. 令 $t = x + h$，结合周期性知

$$\begin{aligned}
\bar{a}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\cos nh + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\sin nh \\
&= a_n\cos nh + b_n\sin nh \\
\bar{b}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin n(t-h)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt-nh)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\cos nh - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\sin nh \\
&= b_n\cos nh - a_n\sin nh
\end{aligned}$$

□

8

注意到 $f(x)$ 是偶函数，则 $b_n=0$。于是

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2-\frac{2}{3}\pi^2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx = (-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}
\end{aligned}
$$

由 $f(x)$ 的连续性知

$$
f(x) = 1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}\cos nx
$$

于是

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{4}\left(f(0)-1+\frac{1}{3}\pi^2\right) = \frac{\pi^2}{12}
$$

进一步，由 Parseval 等式

$$
2\left(1-\frac{1}{3}\pi^2\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = 2-\frac{4}{3}\pi^2+\frac{2}{5}\pi^4
$$

整理得到

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}
$$

问题反馈

- Green 公式的法向形式也很有用，有余力的同学可以记住；
- 在强调一次算叉乘的准确性和熟练度；
- 不是闭的曲面，用 Gauss 公式要补一块儿面积分；
- 求势函数最后要加 C；
- Fourier 级数中，a_0 要除以 2；
- Fourier 级数尽可能写 $\sim$ 而不要写 $=$，除非验证了收敛性。