第七次习题课讲义

于俊骜

2024 年 6 月 8 日

目录

1 第十二章复习 **2**

1.1 周期函数的 Fourier 展开 2

1.2 Fourier 级数的收敛性 3

1.3 Fourier 变换与逆变换 4

2 作业解答 **5**

2.1 习题 12.1.9 5

2.2 习题 12.2.2 5

2.3 习题 12.2.4(1) 6

2.4 习题 12.3.9 6

2.5 习题 12.4.1(3) 7

2.6 习题 12.4.2(1) 7

3 难题选讲 **8**

3.1 第 12 章综合习题 3 8

3.2 Riemann-Lebesgue 引理 * 8

3.3 第 12 章综合习题 8 9

4 拓展：Kitty, You Can Have Fourier Transform **10**

4.1 名副其实的逆变换 10

4.2 L^2 函数的 Fourier 变换 10

4.3 奇怪的导数增加了 10

4.4 收敛性更好的 Fourier 级数 * 10

1 第十二章复习

1.1 周期函数的 Fourier 展开

“展开”的本质，是将一个不够好的东西表达成一些好的东西的线性组合。比如 (B1) 中的 Taylor 展开，可以将解析函数用幂函数表示，而 Lebesgue 积分理论允许我们把可积函数展开为特征函数。常数和三角函数是基本初等函数中唯一的周期函数，这就让我们猜测，是否可以将任何一个周期函数展开为三角函数。

一旦 $f(x)$ 能展开，那么三角函数就像是 $f(x)$ 的一组基。事实上确实如此，而且我们惊讶地发现，可以引入一种内积——乘起来积分，使得他们两两“垂直”。这种内积称为 L^2 内积，这是因为，它可以诱导出 L^2 范数。

L^2 空间，就是 L^2 范数有界的函数组成的空间。Cauchy 不等式保证任何两个 L^2 空间中的函数做内积的值是有限的。因此类似于欧氏空间中的分解

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

我们也将 $[-\pi, \pi]$ 上的 L^2 函数进行正交分解，得到 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

有限区间的函数复制一下，结合三角函数的周期性，我们最终就可以得到周期函数的 Fourier 展开。

注 1. 三角函数是 $L^2[a,b]$ 的正交基，但 a,b 不能为无穷。另一方面，它们未必是标准正交基。以 $L^2[a,b]$ 为了，这些基的“模长”是自身做内积再开根号。因此，除以模长后才是标准正交基。

回想欧氏空间中向量往各个坐标轴上分解，我们是将向量与对应的单位向量做内积，就得到了“分量”。而 Fourier 级数中的系数，也就是这些“分量”。但三角函数未必是标准正交基，所以做完内积后还需要除去模长。因此，以 $[-\pi, \pi]$ 为例

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

Fourier 的复数形式，在后续课程比三角形式用得多。一个是它类似等比级数，方便研究敛散性；另一个是便于引入一些复分析的理论。这里不用过多留意，因为复数形式可以通过三角形式直接算出。

1.2 Fourier 级数的收敛性

类似 Taylor 级数，Fourier 级数也是未必收敛的，更不用说收敛于自身了。所以做展开时，一定要写波浪线而非等号。

数学分析中见到的收敛性，只有收敛、一致收敛、平方平均收敛。这里的平方平均收敛就是 Lebesgue 积分意义下的 L^2 收敛。我们目前见到的收敛性都是“依范数收敛”，即两者的差的范数趋于零。比如数列的收敛就是依**绝对值**收敛，函数的逐点收敛就是依**最大模范数**收敛，而平方平均收敛是依 $\mathbf{L^2}$ **范数**收敛。它们之间的不能说关系不大，只能说毫无关系。

因为 $L^1 \cap L^2$ （可积且平方可积）函数的 Fourier 级数是依 L^2 范数收敛的，而事实上 L^2 是个完备空间（柯西列一定收敛），所以它的极限是 L^2 函数。而 L^2 空间是有内积的，所以我们可以类似欧氏空间中的勾股定理

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

建立一种“无穷维版本”的勾股定理，即 **Parseval 等式**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

其几何意义就是“模长平方等于各分量的平方和”。另外，由于三角多项式的完备性，我们完全不需要考虑 Bessel 不等式取不了等的情况。

为了让 Fourier 级数有更好的收敛性，我们可以用一个比较好的东西“带带它”。比如，数项级数的 Cesàro 收敛比普通的收敛要容易一些，所以我们也想对 Fourier 级数进行一个类似的操作——求和再取平均。

定义 1 (Dirichlet 核)**.** *函数*

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos kx = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

称为 Dirichlet 核，它满足

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$$

利用 Dirichlet 核，我们就能证明 Dirichlet 定理，即

定理 1 (Dirichlet 定理)**.** *设周期函数 $f(x)$ 分段可微，则它的 Fourier 级数逐点收敛于*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

进一步，若 $f(x)$ 连续，则该收敛关于 x 是一致的。

另外可以提一下，Fourier 级数是可以逐项积分的，但逐项求导需要验证一致收敛性。

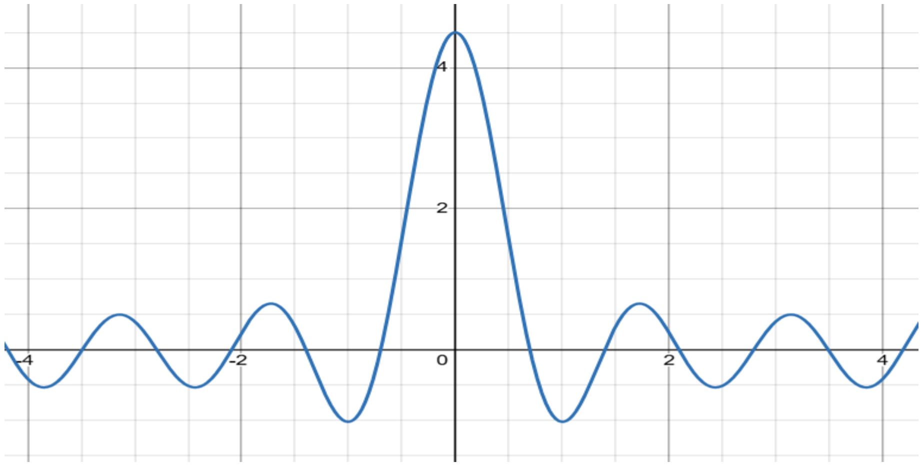

图 1: $N = 4$ 时的 Dirichlet 核

1.3 Fourier 变换与逆变换

级数和积分的关系是很紧密的。在测度论的意义下，级数是一种特殊的积分；另一方面，Riemann 积分的分割求和取极限，说明积分也是离散求和的极限。因此，我们可以把 Fourier 级数推广到 Fourier 积分，将其“连续化”。此时，只要保证收敛性，那么积分的区域也不再局限于闭区间

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Fourier 积分的看着像是“把 $f(x)$ 变回 $f(x)$”。它经过了两次积分，而所乘的项，其指数刚好差一个符号，就像是“正过去又反回来”。由此我们定义 Fourier 变换和逆变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

事实上，绝大多数函数正变换再逆变换，得到的并不是自身，这点我们会在拓展部分单独讨论。这也是为什么 Fourier 积分也要写**波浪线而非等号**。

本章 Fourier 变换会算就行，最多再知道它的卷积和求导性质

$$\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(\xi) &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\\
(f'(x))^\wedge(\xi) &= i\xi\hat{f}(\xi)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) &= (-ixf(x))^\wedge(\xi)
\end{aligned}$$

2 作业解答

2.1 习题 12.1.9

将 $f(x)$ 偶延拓为周期为 2π 的函数

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 \le x \le \pi \\ 1-x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\,\mathrm{d}x = 2+\pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

由 Dirichlet 定理，$-\pi \le x \le \pi$ 时恒有

$$\bar{f}(x) = 1+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx = 1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

于是取 $x=1$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

取 $x=4$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2} = \bar{f}(4) = \bar{f}(4-2\pi) = \pi-\frac{3}{8}\pi^2$$

注 2. *对于非周期函数，Dirichlet 定理只能在“所展开的周期内”使用，一旦到了该周期外面，Fourier 级数未必收敛于函数自身。因此求值时先要用周期性将 x 转移到周期内。*

2.2 习题 12.2.2

证明. 由均值不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

故该级数绝对收敛，从而收敛。另一级数同理。 □

注 3. 该题目是第 *7* 章一道课后题的直接推广。另外，这里也可以使用 *Cauchy* 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 习题 12.2.4(1)

证明. 注意到

$$\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$$

且 $m \neq n$ 时

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m+n)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m-n)x\,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = \pi \qquad \int_0^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \cdots\right\}$$

□

注 4. 常数和三角的模长是不一样的。三角做内积会搞“窝里斗”，抵消掉一部分，模长就会小。

2.4 习题 12.3.9

证明. 取 $x=1$，得到

$$\frac{\pi-1}{2} = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

不难验证其逐项求导后函数的一致收敛性，于是

$$\frac{\pi-1}{2} = f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$$

另一方面，由 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_1^{\pi}(\pi-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi-1)^2}{6}$$

□

注 5. *Fourier* 级数的逐项积分是一定成立的，但逐项求导仍然是需要验证一致收敛性的。

2.5 习题 12.4.1(3)

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}}{a^2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\lambda|+ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

注 6. 这题的想法是“后验”的，如果没碰到过，几乎不可能直接想到 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的 *Fourier* 变换。当然，这可以用含参变量或复分析的留数方法直接算出来 *(Kitty, you can have complex method. Meow!)*。它的灵感来自于下一题，即考虑 $e^{-|x|}$ 的 *Fourier* 逆变换（不是剥蒜用不起，而是查表更有性价比）。

2.6 习题 12.4.2(1)

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a|x|}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} xe^{(a-i\xi)x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xe^{-(a+i\xi)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{xe^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\right|_{x=-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,\mathrm{d}x - \left.\frac{xe^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\right|_{x=0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left.\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2}\right|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(a+i\xi)^2} - \frac{1}{(a-i\xi)^2} \\
&= -\frac{4ai\xi}{(a^2+\xi^2)^2}
\end{aligned}
$$

注 7. 复数的积分运算和实数异曲同工，敢拆敢算就行。

3 难题选讲

3.1 第 12 章综合习题 3

证明. 只需证 (1)。事实上

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t - \int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}+\pi\right)\sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\left(f\left(\frac{t}{n}\right) - \left(\frac{t}{n}+\pi\right)\right)\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

□

3.2 Riemann-Lebesgue 引理 *

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$
\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0
$$

证明. 我们只证前一个式子。

对于充分大的 λ，取 $n=[\sqrt{\lambda}]$，则我们可将 $[a,b]$ 分成 n 等分，即

$$
[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k],\ x_k = a+\frac{k}{n}(b-a)
$$

于是

$$
\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(x)\cos\lambda x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_{k-1}))\cos\lambda x - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\cos\lambda x
$$

记 ω_k 为 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅，则

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_{k-1}))\cos\lambda x\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\cos\lambda x\right| \\
&\le \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\omega_k + M\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos\lambda x\right| \\
&= \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\omega_k + \frac{M}{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{n}(\sin\lambda x_{k-1}-\sin\lambda x_k)\right| \\
&\le \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\omega_k + \frac{2M}{\lambda}
\end{aligned}
$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时，也有 $n \to +\infty$，于是上式趋于 0。 □

注 8. 这个结论说明：什么都摇摆不定只会害了你自己！会了它，照葫芦画瓢就能做出第 *12* 章综合习题的 *3* 和 *6*。

3.3 第 12 章综合习题 8

证明. 由题，$a_0 = 0$，因此我们可设

$$
f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)
$$

进而

$$
f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx + nb_n\cos nx) \tag{1}
$$

由 Parseval 等式

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \\
\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)
\end{aligned}
$$

比较系数可知，该不等式及其取等条件是显然的。 □