第32讲：斯托克斯(Stokes)公式及其应用

(一) Stokes公式：

设Ω为R^3中的区域，$\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$，双侧光滑曲面$\Sigma\subset\Omega$，$\Gamma=\partial\Sigma$，且$\Gamma$的正向与$\Sigma$的正侧服从右手系，则有：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad 即$$

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\iint_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}ds=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds$$

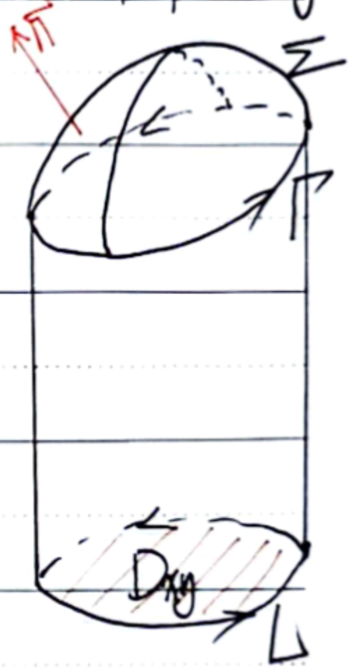
特别地，当Σ是位于xoy平面中的平面区域D，且Σ取上侧时，由于$z=0\Rightarrow dz=0\Rightarrow dydz=0, dzdx=0$，Stokes化为Green公式：$\oint_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

因此，Stokes公式是Green公式在R^3中的推广。

$\nabla\times\vec{A}\triangleq rot(\vec{A})$ 称为$\vec{A}$的旋度(rotation)

Stokes公式的证明思路同Green公式与Gauss公式，即先就特殊情形加以证明，再就一般化情形证明。

(I) 设Σ为显式光滑曲面：$z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$，取上侧，$\Gamma=\partial\Sigma$，且Γ的正向与Σ的正侧服从右手系，而Γ在xoy平面中的投影曲线为L，如图：



设L的参数表示为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，$t: a\to b$.

则Γ的参数表示为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(x(t),y(t)) \end{cases}$ $t: a\to b$.

从而 $\oint_\Gamma P(x,y,z)dx=\int_a^b P(x,y,z(x,y))x'(t)dt$

$$=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx+0dy \overset{Green}{=\!=\!=}$$ Σ: $z=z(x,y)$

$$\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\right]dxdy=-\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy. \quad (*)$$

而从 Σ: $z=z(x,y)$ 取上侧知，Σ: $F(x,y,z)=z-z(x,y)$，$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$=(F'_x,F'_y,F'_z)/\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}=(-z'_x,-z'_y,1)/\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\Rightarrow$$

$$\cos\beta=-z'_y/\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=-z'_y\cos\gamma\Rightarrow z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

代入(*1)可知：$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx = -\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\right]\cos\gamma dS$

$$= \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy \quad (*2);$$

(II)，若Σ为光滑曲面：$x=x(y,z)\in C^1(D_{yz})$，Σ取前侧时，

同样可推得：$\oint_{\Gamma} Q(x,y,z)dy=\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz \quad (*3)$，

若Σ为光滑曲面：$y=y(x,z)\in C^1(D_{xz})$，Σ取右侧时，

有 $\oint_{\Gamma} R(x,y,z)dz=\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx \quad (*4)$.

(III)，若Σ同时为：$z=z(x,y)$，$x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$时，

例如，椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在每个卦限都如此。

则(*2)，(*3)，(*4)同时成立，(*2)+(*3)+(*4)得：

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

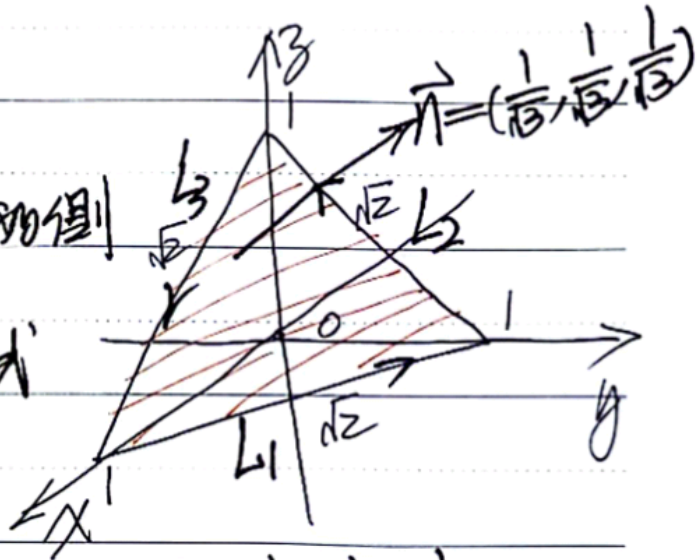
$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS$$

(IV)，若Σ可分成有限块上述曲面时，适当作辅助线，然后在每块上应用stokes公式，再相加，最后辅助线上抵消 (3).

分量全部连续，在Σ上∠B时stokes公式成立。

(三)例题：

例1、设Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦限部分，取上侧，求力场$\vec{F}(x,y,z)=(y^2,z^2,x^2)$绕$\partial\Sigma$正向一周所做的功W。



$\partial\Sigma=L_1+L_2+L_3$.

解法(一)：∵$\partial\Sigma$的正向与Σ的侧满足右手系，∴可用stokes公式求W：

$$W=\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}\,ds$$

$$=\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\partial\Sigma}y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt3}\iint_\Sigma((-2x)+(-2y)+(-2z))dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt3}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=-\frac{2}{\sqrt3}\iint_\Sigma 1dS=-\frac{2}{\sqrt3}S(\Sigma)=-\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{4}(\sqrt2)^2=-1$$

解法(2)：参数方程求曲线积分. $\oint_{L_1+L_2+L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz$

利用 $\partial\Sigma=L_1+L_2+L_3$ 具有轮换对称性,

可推得: $\oint_{\partial\Sigma} y^2dx=-\frac{1}{3}=\oint_{\partial\Sigma} z^2dx=\oint_{\partial\Sigma} x^2dz \Rightarrow W=3\times\frac{-1}{3}=-1$.

① 在 L_1 上, $z\equiv 0$, $y=1-x$, $x: 1\longrightarrow 0$. 取 x 为参变量.

则 $z^2dy=0$, $x^2dz=0$, $\int_{L_1} y^2dx=\int_1^0 (1-x)^2dx=-\int_0^1 (x-1)^2d(x-1)$

$=-\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{-1}{3}$. 即 $\int_{L_1} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}$. 同理,

$\int_{L_2} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}=\int_{L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, 故

$W=\oint_{L_1+L_2+L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}=-1$.

椭圆柱面

例2. 设 L 是 Σ_1: $z=3x^2+4y^2$ 与 Σ_2: $4x^2+y^2=4y$ 的交线.

椭圆抛物面

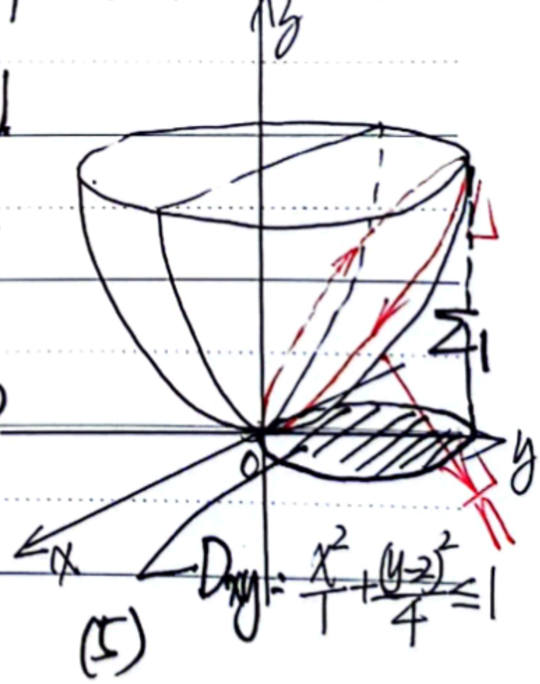
从 z 轴正方向看, L 的方向是顺时针方向. 求 $\vec{A}(x,y,z)=$

$(y(z+1), xz, xy-z)$ 沿 L 的环流量 W.

解: 设 Σ_1 是闭曲线 L 张成的光滑

曲面. 当 Σ_1 取下侧时, L 的正向与

Σ_1 的(正)侧服从右手系, 如图所示.



(5)

$$W=\oint_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds=\oint_L y(z+1)dx+xz\,dy+(xy-z)dz \xlongequal{stokes}$$

$$\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(z+1) & xz & xy-z \end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}dxdy=-(-1)\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy=S(D_{xy})=\pi\cdot1\cdot2=2\pi.$$

例3. 若 $\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)\in C^1(\Omega)$ 且 $\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\equiv0$, $\forall(x,y,z)$. 则称 $\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的无旋场. 证明:

若 $\vec{A}(x,y,z)$ 是曲面单连通域 Ω 中的无旋场, 则 $\vec{A}(x,y,z)$ 也是 Ω 中的保守场. (若 Ω 中任一闭路都可在 Ω 中张成一块光滑曲面, 则 Ω 称为曲面单连通域)

证: 在 Ω 中任取正向闭路 Γ, 且 Γ 在 Ω 中张成光滑曲面 Σ 的侧与 Γ 的正向服从右手法. 则由stokes公式:

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds=\iint_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,ds\equiv\iint_\Sigma 0\cdot\vec{n}\,ds=0$$ 知, $\vec{A}$ 是 Ω 中的保守场。

自)作业: ex11.3/1(6); ex11.4/2; ex11.5/1(6); 9(1),(2),(6)