第二周作业答案

于俊骜

2024 年 3 月 10 日

习题 8.3

1

(1)

是。
平面 Oxy 上椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(2)

是。
平面 Oxy 上的圆 $x^2+y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(3)

不是。

(4)

是。
平面 Oxy 上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(5)

不是。

(6)

是。
平面 Oxy 上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(7)

是。
平面 Oxz 上的抛物线 $4z = x^2$ 绕 z 轴旋转而成。

(8)

不是。

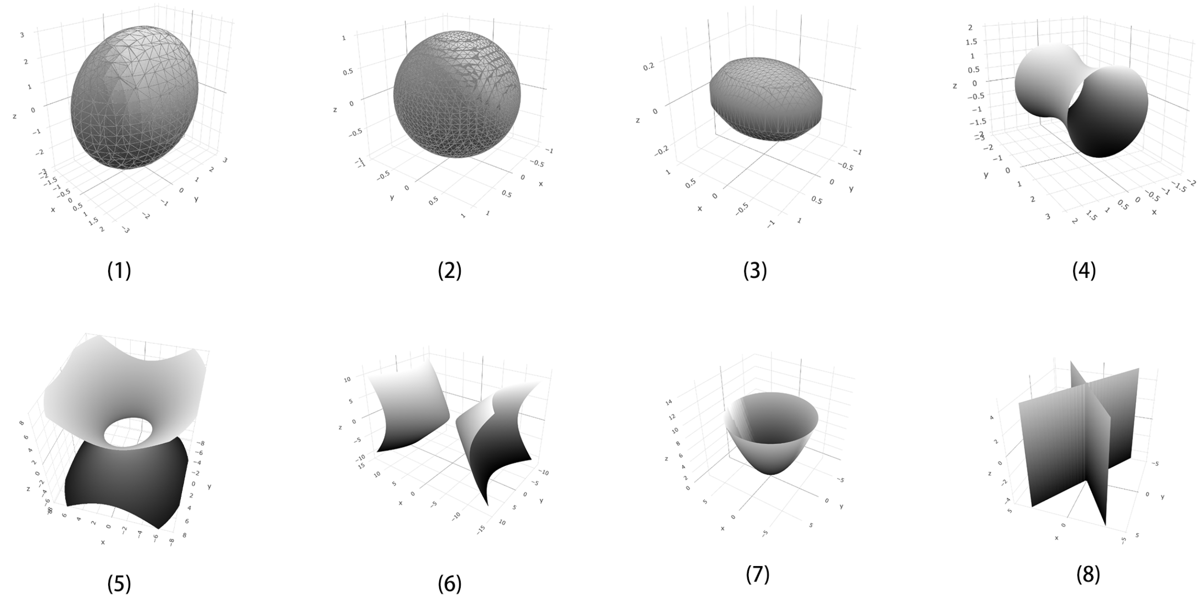

图 1: 第 1 题图

2

(1)

直线；平面。

(2)

直线；平面。

(3)

圆；圆柱面。

(4)

双曲线；双曲柱面。

(5)

抛物线；抛物柱面。

(6)

点；直线。

(7)

两个点；两条平行直线。

(8)

两个点；两条平行直线。

3

(1)

单叶双曲面，方程为

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

(2)

无名旋转曲面，方程为

$$y^2 + z^2 = \sin^2 x,\ x \in [0, \pi]$$

(3)

椭球面，方程为

$$4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$$

习题 8.4

1

令 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - \frac{1}{2}$，则

$$x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{3}{4}$$

这是一个双叶双曲面。

2

令 $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, y' = \frac{x-y}{2}, z' = z$，则

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}y' + z' + 1 = 0$$

再令 $x'' = x, y'' = y' - \sqrt{2} + z' + 3$，则

$$x''^2 - y''^2 + z'' + 3 = 0$$

这是一个双曲抛物面。

4

(4)

令 $x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho \cos\theta$，则球面坐标系方程为

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi - \cos^2\theta = 1$$

(5)

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，得到

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$$

再令 $x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho \cos\theta$，则球面坐标系方程为

$$\rho^2(1 + \cos^2\theta) = 2$$

(6)

令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}$，得到

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \Longrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = 4x^2$$

再令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则柱面坐标系方程为

$$r^2 + z^2 = 4\cos^2\theta$$

(10)

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$，结合 $\cos\varphi \geq 0$，得到直角坐标系方程

$$z = x^2 - y^2$$

8

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sin u\cos v \\ y = y_0 + a\sin u\sin v \\ z = z_0 + a\cos u \end{cases} \qquad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi)$$

9

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v \\ y = b\sin u\sin v \\ z = c\cos u \end{cases} \qquad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi)$$

11

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = b\cosh u\sin v \\ z = c\sinh u \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R},\ v \in [0,2\pi)$$

习题 9.1

12

令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$，则 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$。于是

$$f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v} \Longrightarrow f(2,3) = -2$$

13

$$\begin{aligned} f\left(\varphi(x,y), \psi(x,y)\right) &= (x+y)^{x-y} \\ \varphi\left(f(x,y), \psi(x,y)\right) &= x^y + x - y \\ \psi\left(\varphi(x,y), f(x,y)\right) &= x + y - x^y \end{aligned}$$

14

(2)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{xy} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} y = a$$

(7)

存在。

注意到，存在 $M > 0$，使得

$$e^{x+y} \geq (x+y)^4 \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4,\ x+y > M$$

因此

$$0 \leq \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{x+y} \leq \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^4} \leq \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

(9)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{xy+1}+1\right) = 2$$

(10)

不存在。

事实上，$y=0$ 时原式恒为 0。而取 $y=-x+x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

故极限不存在。

15

(1)

由

$$e^{\frac{1}{x^2-y^2}} = e^{\frac{1}{\rho^2\cos 2\varphi}}$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

(2)

由

$$e^{x^2-y^2}\sin 2xy = e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin\left(\rho^2\sin 2\varphi\right)$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \cup \{0, \pi\}$$

17

(1)

$x_0 \neq y_0$ 时，(x_0, y_0) 处显然连续。

$x_0 = y_0 = 0$ 时，不难得到

$$0 \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{xy}{x-y}\right| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|-\frac{xy}{x+y}\right| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x+y|}{4} = 0 = f(0,0)$$

$x_0 = y_0 \neq 0$ 时

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} \frac{xy}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{xy_0}{x-y_0}$$

不存在。

18

证明. 注意到 $\cos\alpha = 0$ 时，$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,t) = 0$。

$\cos\alpha \neq 0$ 时，对于 $t \neq 0$ 有

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} \Longrightarrow \lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0,0)$$

另一方面，取 $y = x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$$

这说明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续。 □