

## 第35讲: Fourier级数及其应用

(一) 引进函数  $f(x)$  的 Fourier 级数的意义:

(1). 将  $f(x)$  展成 Taylor 级数  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$ , 对  $f(x)$  的

要求太高, 需要  $f(x)$  在  $J(x_0, \delta)$  中有任意阶导数, 且当  $n$  有

在余项  $R_n(x) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 时, Taylor 级数才收敛于  $f(x)$ ;

(2). Taylor 级数没有体现周期函数的特点, 而周期问题是许多实际问题必须面对的实际问题。

(二) 三角函数系:  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx,$

$\sin nx, \dots$  在  $E, J$  中两两正交性:

(1).  $1$  与  $\cos nx$  的内积  $\int_{-2}^2 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-2}^2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

(2).  $(1, \sin nx) = \int_{-2}^2 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-2}^2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

(3).  $(\cos mx, \cos nx) = \int_{-2}^2 \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

$= \begin{cases} 2 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$  即  $\|\cos nx\|^2 = (\cos nx, \cos nx) = 2, n=1, 2, 3, \dots$

(1)



• (4)  $(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx$   
 $= \begin{cases} 2, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$  即  $\|\sin nx\|^2 = (\sin nx, \sin nx) = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

(5).  $(\cos mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) dx \equiv 0, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ .

• (6).  $(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi$ . 因此, 经归一化后,

$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos x}{\sqrt{2}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{2}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2}}, \dots$  (A)

成为  $[-\pi, \pi]$  上的标准正交向量(函数)系.

思考题: (A) 能否成为  $[-\pi, \pi]$  上所有  $2\pi$  周期函数两

• 标准正交基?

(E)  $f(x)$  的傅里级数与傅里系数:

(1). 设  $f(x)$  以  $T=2\pi$  为周期:  $f(x+2\pi) \equiv f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , 且已知:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), x \in \mathbb{R}$ , 此外, 假设是右边

• 级数可逐项积分 (例如, 右级数在  $\mathbb{R}$  上一致收敛于  $f(x)$  时, 右级数即可逐项积分) (2).



① 利用:  $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-2}^2 \cos nx dx + b_n \int_{-2}^2 \sin nx dx)$   
 $= a_0 \cdot 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot 0 + b_n \cdot 0) = a_0 \cdot 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx;$

2° 当  $m \geq 1$  时,  $\int_{-2}^2 f(x) \cos mx dx = \int_{-2}^2 \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-2}^2 \cos mx \cos nx dx$

$+ b_n \int_{-2}^2 \cos mx \sin nx dx) = \frac{a_0}{2} \times 0 + a_m \int_{-2}^2 \cos^2 mx dx + b_m \times 0 = a_m \cdot 2,$

$\Rightarrow a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos mx dx, m=1, 2, 3, \dots$

3° 当  $m \geq 1$  时,  $\int_{-2}^2 f(x) \sin mx dx = \int_{-2}^2 \frac{a_0}{2} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-2}^2 \sin mx \sin nx dx$

$+ b_n \int_{-2}^2 \sin mx \sin nx dx) = \frac{a_0}{2} \times 0 + a_m \times 0 + b_m \int_{-2}^2 \sin^2 mx dx = b_m \cdot 2,$

$\Rightarrow b_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin mx dx.$

综合 ①, 2°, 3° 得:  $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos nx dx, n=0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin nx dx, n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$   
 $\dots \dots \text{(*)}$

将 (\*) 为  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的 Fourier 级数. 利用  $f(x) \cos nx$ ,

$\sin nx$  皆为以 4 为周期的函数. 又得: 对于任意实数  $a$ , 成立:

$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx, n=0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx, n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$

③.  $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx, n=0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx, n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$



- 对于已知函数周期函数  $f(x)$ , 当  $f(x) \in E_{2,2}$  上可积时.

由(1)可确定  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

则由(1)可确定系数的级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

为  $f(x)$  的 Fourier 级数, 记作:

- $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

(注: (2) 右边的级数未必收敛, 即使收敛也未必收敛于  $f(x)$ )

(四)  $f(x)$  的 Fourier 级数的收敛定理 (Dirichlet 收敛定理):

若 (1)  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期; (2)  $x \in \mathbb{R}$  中,  $f(x)$  分段

光滑, 即  $f(x) \in [a, b]$  上由有限段光滑曲线连接而成且连接

点处, 最多有  $\overset{f(x), f'(x) \text{ 均}}{\text{第一类间断点}}$ , 则必有:

(1)  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \xrightarrow{\text{处处收敛}} \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 是 } f \text{ 的 } G \text{ 点} \\ \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}, & \text{当 } x \text{ 是 } f \text{ 的间断点} \end{cases}$

(2) 此外, 若  $f(x) \in \mathbb{R}$  上处处  $C$ , 则必有:

- $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \xrightarrow{\text{处处一致收敛}} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$



- Dirichlet 收敛 Th 的详细证明可见高数第三册 §15.4。

(四) 例题与证明举例:

例 1: 设  $2\pi$  周期函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  中为:  $f(x) = |x|$ .

(1) 将  $f(x)$  展成 Fourier 级数 并指出收敛情况;

(2) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  的和;

(3) 求一般  $2\pi$  周期且奇、偶函数  $f(x)$  的付氏级数。

(4) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$  的和。

解 (1):  $f(x)$  满足 Dirichlet 收敛 Th, 并且  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上处处  $C$ , 因此,

$f(x)$  的付氏级数在  $\mathbb{R}$  上处处一致收敛于  $f(x)$  本身。

(2): 另外,  $f(x)$  是偶函数,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, n=1, 2, 3, \dots$

而  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$ ; 当  $n \geq 1$  时,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[ 0 + \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi}$$

(5).



$$\therefore f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1})}{n^2 \pi} \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \begin{array}{l} \text{处处一致} \\ \text{绝对} \end{array} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

特别地:  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \xrightarrow[\text{处处绝对}]{\text{一致}} x, \quad x \in [0, \pi]$

取  $x=0$ , 即得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , 利用  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的绝对

收敛性. 设  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , 则  $A = (\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots)$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}A \Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\text{由 } \begin{cases} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{1}{4}A = \frac{\pi^2}{24} \end{cases}$$

相减得:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12};$

例(3): 若  $f(x)$  是 Dirichlet 函数且是奇(偶)函数时.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \equiv 0, \quad (b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \equiv 0). \text{ 因此,}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \xrightarrow[\text{处处}]{\text{一致}} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \quad (\text{若 } f(x) \text{ 是奇函数}) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \xrightarrow[\text{处处}]{\text{一致}} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \quad (\text{若 } f(x) \text{ 为偶函数}) \quad (6)$$

(5), (6) 分别称为  $f(x)$  的正弦级数, 余弦级数.

(6)



解(4): 从  $\frac{x}{2} - \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = x$ ,  $0 < x < \pi$ , 两边

在  $[0, x]$  上积分:  $\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{x^2}{2}$ ,  $0 < x < \pi$ .

在  $[0, x]$  上再积分:  $\frac{x^3}{4} + \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x - 1}{(2n-1)^4} = \frac{x^3}{6}$ ,  $0 < x < \pi$ .

令  $x = \pi$ , 得  $\frac{\pi^3}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^3}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ ;

令  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  绝对收敛知:  $S = (\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots) +$

$(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots) = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} S \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ;

从  $\begin{cases} \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \\ \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \times \frac{1}{16} \end{cases}$  相减得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{14}{16} \times \frac{\pi^4}{90}$ .

对  $\frac{x^3}{4} + \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x - 1}{(2n-1)^4} = \frac{x^3}{6}$ ,  $x \in [0, \pi]$  不断地在  $[0, x]$  上

积分, 然后取  $x = \pi$ , 还可得到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$  ( $m=3, 4, 5, \dots$ )

的一系列结果. 若取  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ , 等等, 也可得到另一些有用的结果。

例(5)其他:  $\pi^2, \frac{1}{1^2}, 2^2; 4; 6; 7; 8$ .