

第37讲: 函数列的均方收敛与 Parseval 等式

(一) 可积函数或线性空间—— $L^2[a, b]$ 与均方收敛:

令 $L^2[a, b] = \{f(x) \mid f \text{ 及 } f^2 \text{ 都在 } [a, b] \text{ 上可积}\}$. 则 $L^2[a, b]$

是实数域 \mathbb{R} 上的一个线性空间. 对 $\forall f(x), g(x) \in L^2[a, b]$, 定义

f 与 g 的内积为: $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, 则 $\|f(x)\|^2 = (f(x), f(x))$

$= \int_a^b f^2(x)dx$, $\|f(x) - g(x)\|^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$. 设 $\{f_n(x)\} \in L^2[a, b]$.

$f(x) \in L^2[a, b]$. 若 $\|f_n(x) - f(x)\|^2 = \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上平方平均 (即均方) 收敛于 $f(x)$.

记作 $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{均方}} f(x)$. $x \in [a, b]$.

注意: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 中均方收敛于 $f(x)$, 并不表示在 $[a, b]$ 中

的每一点, $\{f_n(x)\}$ 都收敛于 $f(x)$, 而只能说 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$

中“大体上”都收敛于 $f(x)$. 因此, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上的均方收敛于 $f(x)$,

与 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛于 $f(x)$ 有着本质的区别.

- 例1. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处相等, 则必有 $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0$, 但由 $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0 \not\Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处相等.

设 $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$, $g(x) = \begin{cases} 5 & x=0 \\ \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & x=\frac{\pi}{2} \\ \sin x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 3 & x=\pi \end{cases}$,

则 $\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (f(x) - g(x))^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 0 dx = 0$

但 $f(x), g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上并不是处处相等的, 而是在有限个点上不相等.

(E) Bessel 公式与 Parseval 公式:

设 $f \in L^2([-\pi, \pi])$, 且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1).$

$\triangleq \begin{cases} S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ g_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (x_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \end{cases}$

将 $S_n(x)$ 为 f 的傅里叶级数的第 n 部分和, 而 $g_n(x)$ 为任一

n 次的三角多项式. 则:

Th1: $\|f(x) - g_n(x)\|^2 \geq \|f(x) - S_n(x)\|^2, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$

(2)

• Th2: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ (Bessel 不等式)

Th3: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ (Parseval 等式).

证 Th1: $\because \|f(x) - g_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx -$
 $= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx = \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)\right) \right] +$
 $2\left[\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m - \alpha_m)^2 + (b_m - \beta_m)^2\right]$

当且仅当, $g_n(x) = S_n(x)$ 时, $\|f(x) - g_n(x)\|^2$ 取最小值 $\|f(x) - S_n(x)\|^2$.

即 $\|f(x) - g_n(x)\|^2 \geq \|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)\right)$ (★)

证 Th2: 由 $\|f(x) - S_n(x)\|^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

• 此即 Bessel 不等式的基础. 上述级数部分和单调增

且有上界 $M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$. 故 $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$ 收敛, 且有

$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, Bessel 不等式得证.

证 Th3: 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n(x)\|^2 = 0$ 时 即 $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{均方}} f(x)$ 时.

由 (★) 得: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

(3).

- $L^2_{E, \mathbb{R}} \cap L^2_{E, \mathbb{C}}$ 中的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的实部 $g(x)$ 和虚部 $h(x)$ 满足: $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 在 $E, \mathbb{R} \cap L^2_{E, \mathbb{C}}$ 中必均收敛于 $f(x)$ 的严格证明见 §12.3.2. 属于选学内容. (Th 12.7)

下面利用 Ch12 定理 7, 证明连续的 2π 周期函数 $f(x)$

- 的 Parseval 公式: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

若是 2π 周期函数 $f(x)$, 其 Parseval 公式为:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n}{2} x dx, & (n \geq 0) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n}{2} x dx, & (n \geq 1) \end{cases}$$

若 $f(x)$ 是 2π 周期的奇(偶)函数, 且 $f \in L^2_{E, \mathbb{R}}$, 则

- 其 Parseval 公式分别为: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ 及

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

证 Ch12 定理 7: 已知 $f(x+2\pi) = f(x)$, $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$

$$\text{则 } F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x)$$

- $\therefore F(x)$ 为 2π 周期函数. 另外, $F(-x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(-x+t) dt$

$$\bullet \quad \begin{aligned} &\text{令 } -x+t=u \quad \frac{1}{2} \int_{-x-2}^{-x+2} f(u+x) f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(u) f(x+u) du = F(x) \\ &\text{则 } dt=du \end{aligned}$$

$\therefore F(x)$ 是 \mathbb{R} 上的 2 周期函数. 且 $F(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow B_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) \sin nx dx = 0, (n \neq 1), \quad A_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) f(x+t) dt \right) dx \xrightarrow{\text{换序}} \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 f(t) f(x+t) dx dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \left(\int_{-2+x}^{2+x} f(u) du \right) dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \left(\int_{-2}^2 f(u) du \right) dt = A_0^2$$

$$n \neq 1 \text{ 时, } A_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) f(x+t) dt \cos nx dx$$

$$\xrightarrow{\text{换序}} \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\int_{-2}^2 f(t) f(x+t) \cos nx dx \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \left(\int_{-2}^2 f(x+t) \cos nx dx \right) dt \xrightarrow{\substack{A+t=u \\ x=u-t}} \frac{A+t=u}{x=u-t}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \left(\int_{t-2}^{t+2} f(u) (\cos n(u-t)) du \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \left(\int_{-2}^2 f(u) (\cos nu \cos nt + \sin nu \sin nt) du \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt = a_n^2 + b_n^2$$

$$\therefore F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \xrightarrow[\text{一致收敛}]{\text{处处}} F(x) = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) f(x+t) dt$$

$$\bullet \quad \text{即 } \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) f(x+t) dt, \quad x \in [-2, 2].$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得: } \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^2(t) dt \quad (5)$$

Parseval公式的另一种证法: (设 f 为 2π 周期函数)

$$\text{已知: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \stackrel{\text{均方}}{=} f(x) \Rightarrow$$

$$\frac{a_0}{2\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{2}} + b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{2}} \right) = \frac{f(x)}{\sqrt{2}}, \quad x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$$

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{2}} + b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{2}} \right) = \frac{f(x)}{\sqrt{2}},$$

而 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{2}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{2}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2}}, \dots$

是 $\frac{f(x)}{\sqrt{2}}$ 所在的函数线性空间 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的标准正交基.

$$\therefore \left\| \frac{f(x)}{\sqrt{2}} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{即有 Parseval 公式:}$$

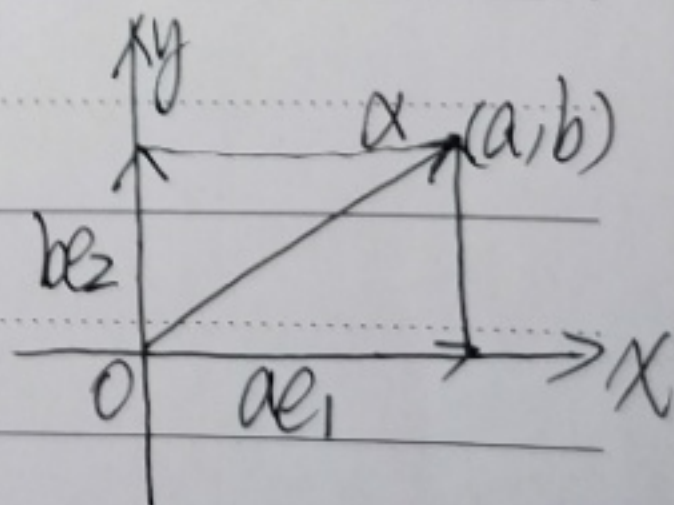
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

在有限维空间中. 例如, 在 \mathbb{R}^2 中. 令 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$

且 e_1, e_2 是二维欧几里得空间 \mathbb{R}^2 中的标准正交基. 对 $\alpha = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{有 } \alpha = ae_1 + be_2 \Rightarrow \|\alpha\|^2 = a^2 + b^2$$

这是 \mathbb{R}^2 中的勾股定理, 在 \mathbb{R}^3 中, 令



$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), \alpha = (a, b, c)$, 则

$\alpha = ae_1 + be_2 + ce_3$ 是 e_1, e_2, e_3 是 \mathbb{R}^3 的一个标准正交基. (b)

- $\|x\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 这是 R^3 中的勾股定理, 在 R^n 中, 令 $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则 e_1, e_2, \dots, e_n 是 R^n 的一组标准正交基, $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \|x\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. 这是 R^n 中的勾股定理. 而 Parseval 公式表示的是无穷维欧几里得空间 $L^2[a, b]$ 或 $L^2(\mathbb{R})$ 中的勾股定理.

例 2, 设 $f(x), g(x) \in L^2[a, b]$, 且
$$\begin{cases} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \end{cases}$$
 则
$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

证: $\because \begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{a_0 + \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \alpha_n) \cos nx + (b_n + \beta_n) \sin nx \\ f(x) - g(x) = \frac{a_0 - \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha_n) \cos nx + (b_n - \beta_n) \sin nx \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx & (*) \\ \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx & (**) \end{cases}$$

$(*) - (**) \Rightarrow \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) g(x) dx.$

(\Leftarrow) 反例:

ex 12.2/1; 2; 3; 4(1) (2); ex 12.3/8; 9.

(17).

第3讲(附件) Parseval 等式的另一种证法:

设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 2π 周期函数, 且满足 Dirichlet 收敛

Th 的连续函数. a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 则有 Parseval 等式:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

证: 由题设条件知:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \stackrel{\text{处处收敛}}{\text{绝对}} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$$

$$\frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx) \stackrel{-f(x)}{=} f^2(x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

逐项积分得:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + b_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot a_n + b_n \cdot b_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad \text{即}$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad \text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, (n \geq 0) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, (n \geq 1) \end{cases}$$

对于 $(-\infty, +\infty)$ 上的 $2l$ 周期函数, 且满足 Dirichlet 收敛 Th 的连续函数 $f(x)$, 同样有:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_0^l f^2(x) dx, \quad \text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, (n \geq 0) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, (n \geq 1) \end{cases}$$