

第44讲: 几个重要的反常积分

(一) 证明 Dirichlet 积分: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

证法(1): 利用 Fourier 变换法。取 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中绝对可积, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛。且

在任意有限区间中分段光滑, 因此可对 $f(x)$ 取 Fourier 变换:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-1}^1 1 (\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = \int_{-1}^1 \cos \lambda t dt \\ = \frac{2 \sin \lambda}{\lambda}, \text{ 当 } |x| \neq 1 \text{ 时, } f(x) \text{ 处处连续, 故有付氏逆变换:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin \lambda}{\lambda} (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda + 0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} f(x), & |x| \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases}$$

$$\text{特别地, 取 } x=0, \text{ 则有 } \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = f(0) = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{由此, 可以推出: } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{事实上, } \beta=0 \text{ 时, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = 0.$$

(1)

• 当 $\beta > 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{\beta x} d(\beta x) \xrightarrow{\beta x = u} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$;
 当 $\beta < 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{\beta x} d(\beta x) \xrightarrow{\beta x = u} \int_0^{-\infty} \frac{\sin u}{u} du = -\int_{+\infty}^0 \frac{\sin u}{u} du = -\frac{\pi}{2}$.
 $\int_0^{-\infty} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{V = -u} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-V)}{-V} (-dV) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin V}{V} dV = -\frac{\pi}{2}$.

通过(*)式, 可把 $\operatorname{sgn} x$ 这了个初等函数用含参反

常积分表示出来:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{\beta} d\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (*)2$$

例例(三): Fourier 积分法: 取 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

则 $f(x)$ 的连续点处, 有

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos \lambda x + B(\omega) \sin \lambda x] d\lambda \quad (*)3$$

其中, $A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 1 \cos \lambda t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\lambda}$,

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 1 \sin \lambda t dt = 0.$$

故 $|x| \neq 1$ 时, 有 $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \quad (*)4$

取 $x=0$ 时, 有 $f(0)=1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(2)

证法(三): 利用一致收敛积分的分析性技巧.

考虑含参反常积分: $g(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx, (u > 0)$.

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛且不含参变量 u , $\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $u \in [0, +\infty)$ 上

是一致收敛的. 且 $h(x, u) = e^{-ux}$ 关于 x 单调且关于 u 一致有界:

$|e^{-ux}| \leq e^0 = 1 = M$, 且 M 与 u 无关. 依一致收敛的 Abel 判别法,

反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $u \in [0, +\infty)$ 中一致收敛. 再从

$e^{-ux} \frac{\sin x}{x}$ 关于 x 在 $[0, +\infty)$ 上连续 $\Rightarrow g(u)$ 在 $[0, +\infty)$ 中

连续. 特别地, 在 $u=0$ 处右连续: $g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} g(u)$

因此, 只要求出 $u > 0$ 时的 $g(u)$ 表达式即可.

利用 $u > 0$ 时, $g'(u) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx \right)'_u = \int_0^{+\infty} (e^{-ux} \frac{\sin x}{x})'_u dx$

$= - \int_0^{+\infty} \sin x e^{-ux} dx = \frac{-1}{1+u^2} \Rightarrow g(u) = -\arctan u + C_0$

再从 $|g(u)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ux} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \frac{1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$

可知: $0 = g(+\infty) = -\arctan(+\infty) + C_0 \Rightarrow C_0 = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

(3).

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ 0 \quad u_0 \quad u \end{array}$$

$$\forall u \in (0, +\infty), \exists u_0 > 0$$

$$\text{故 } g(u) = -\arctan u + \frac{\pi}{2}, u \in (0, +\infty), \exists u_0 \leq u < +\infty$$

$$\text{因此, } g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} g(u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\arctan u + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{至于 } (\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx)'_u = \int_0^{+\infty} (e^{-ux} \frac{\sin x}{x})'_u dx \text{ 这一步之所}$$

$$\text{以成立, 是因为 } \int_0^{+\infty} (e^{-ux} \frac{\sin x}{x})'_u dx = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-ux} dx$$

$$\text{在 } [u_0, +\infty) \text{ 上一致收敛, } (\forall u_0 > 0): \text{ 且 } |\sin x e^{-ux}| \leq e^{-u_0 x},$$

$$\forall u_0 \leq u < +\infty, \forall x > 0. \text{ 且 } \int_0^{+\infty} e^{-u_0 x} dx = \frac{1}{u_0} \text{ 知, } \int_0^{+\infty} e^{-u_0 x} dx$$

$$\text{是 } \int_0^{+\infty} (e^{-ux} \frac{\sin x}{x})'_u dx \text{ 的收敛部分, 依收敛部分判定法即知}$$

$$-\int_0^{+\infty} \sin x e^{-ux} dx \text{ 在 } [u_0, +\infty) \text{ 上一致收敛。}$$

(E) 证明 poisson 积分 (即高斯积分):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \text{ 或 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.5)$$

$$\text{证: 利用 } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \Rightarrow$$

$$I^2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx) (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \xrightarrow[y=r \sin \theta]{x=r \cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

(4).

$$\bullet \quad = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{d(-\frac{1}{2}r^2)}{-2} = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \pi. \text{ 且 } I > 0,$$

故 $I = \sqrt{\pi}$.

如果局限于 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 本身的计算, 则无法进行! 原因是 e^{-x^2} 有原函数存在, 为 $\int_0^x e^{-t^2} dt$, 但此原函数是

与无穷级数表示的函数相等函数. 因此, 中微-莱布尼茨公式无法应用. 刚才将一重反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 化为二重反常积分 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 的计算, 是将低维问题是高维化想法的应用实例. 这种思想在数学物理

方程课程解二维波动方程的初值问题时, 还会遇到.

此时, 我们就将二维问题看作是一个特殊的三维问题来求. 低维问题放到一个更大背景中考察,

或许就变为一个简单问题. $(\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} du \xrightarrow{\frac{(F(u))=V}{\frac{dV}{du}=\frac{d}{du} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \frac{dV}{dV}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-V} dV = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \iff \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xu^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}})$

(5). (补充) 计算 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \beta x dx, (\beta \in \mathbb{R})$. (答案: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2/4}$)
过程见反面.

$$e) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2+y^2) dx dy = \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2+y^2) dy dx \quad (\text{对称即可})$$

(三). 证明 Fresnel (菲涅耳) 积分: $B) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2+y^2) dx dy = \pi$ (见教材 7.2.30)

$$(1). \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (*)$$

证: 设 $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$, 且 $x^2 = t$, 则 $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \text{ 利用 Poisson 积分: } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \right) \sin t dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du dt \quad \text{交换积分次序} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t dt du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}, \quad (\text{因分部积分可得: } \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t dt = \frac{1}{u^4+1})$$

$$\text{证 } \int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{u^2+1}{u^4+1} du + \frac{1}{2} \int \frac{1-u^2}{u^4+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(1+\frac{1}{u^2}) du}{u^2+\frac{1}{u^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{(1-\frac{1}{u^2}) du}{u^2+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(u+\frac{1}{u})}{(u+\frac{1}{u})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1} + C.$$

$$\text{故 } \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} (0-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{故 } I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

(6).

同理: $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$. (A7)

交换积分次序之所以能顺利进行, 是因为引进了一个收敛因子 e^{-Vt} ($V > 0$) 后, $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+V)} \sin t dt$ 关于 u 在 $[0, +\infty)$ 中一致收敛, $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+V)} \sin t dt$ 关于 t 在 $[0, +\infty)$ 中也一致收敛且 $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+V)} |\sin t| dt$ 收敛这三个条件都成立。而且,

$$\lim_{V \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+V)} \sin t dt \right) du = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t dt du \text{ 成立。}$$

Fresnel 积分在光学理论中常用到。它的计算方法是依积分问题高维化的又一成功案例。

(四) 证明: $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\alpha\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) (A8)

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (A9)$$

(A8), (A9) 两式及积分统称为 Laplace 积分。

证(1): $\because \left| \frac{\cos \beta x}{x^2 + \beta^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + \beta^2}, \forall \beta \in [0, +\infty), \forall x \in [0, +\infty)$

(7)

且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^2} = \frac{\pi}{2x}$, 故依一致收敛的优积分判定法, 会参

反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+x^2} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 中关于 β 一致收敛。

而在反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+x^2} dx$ 中, 对于 $\beta_0 > 0$, 及 $\forall b > 0$,

积分 $\left| \int_0^b \sin \beta x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \beta b}{\beta} \right| \leq \frac{2}{\beta_0}, \forall \beta \in [\beta_0, +\infty)$. 且

$\frac{x}{x^2+x^2}$ 关于 x 单调减且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 一致趋零。即积分

$\int_0^b \sin \beta x dx$ 在 $[\beta_0, +\infty)$ 中关于参数 β 一致有界, 且 $\frac{x}{x^2+x^2}$ 中

无参数 β , 故 $\frac{x}{x^2+x^2}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为一致趋零。利用一致

的 Dirichlet 判定法, $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\cos \beta x}{x^2+x^2} \right)' dx$

在 $[\beta_0, +\infty)$ 中一致收敛。根据一致收敛的性质 Th3, 求导与

积分可以交换顺序:

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+x^2} dx = - \left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+x^2} dx \right)' = -I'(\beta) \quad (*)$$

从 Dirichlet 积分可知, $\beta > 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow$

$$I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2+x^2)} dx$$

(8).

同理, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(x^2+\alpha^2)} dx$ 在 $[\beta_0, +\infty)$ 中关于 β 的求导与

积分号也可以交换: $\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(x^2+\alpha^2)} dx \right)'_{\beta} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \beta x}{x(x^2+\alpha^2)} \right)'_{\beta} dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+\alpha^2} dx = I(\beta). \quad \text{即有:}$$

$$I'(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+\alpha^2} dx = \alpha^2 I(\beta), \quad \text{即} = \text{齐次系数}$$

线性微分方程: $I'(\beta) - \alpha^2 I(\beta) = 0$ 通解:

$$I(\beta) = C_1 e^{\alpha \beta} + C_2 e^{-\alpha \beta}. \quad (\star II)$$

利用 $|I(\beta)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos \beta x}{x^2+\alpha^2} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$ 知 $I(\beta)$ 是 β

的有界函数, 故 $C_1 = 0$, 否则, $I(\beta)$ 无界. $\Rightarrow I(\beta) = C_2 e^{-\alpha \beta}$

前面已经证明了 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+\alpha^2} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 中关于 β

一致收敛, 因此 $I(\beta)$ 在 $[0, \beta)$ 中连续, 特别地在 $\beta=0$ 处

连续. 故 $I(0) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} = C_2 e^0 = C_2$.

$$\text{即 } C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \text{故 } I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2+\alpha^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha \beta}.$$

$$\text{而 } J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2+\alpha^2} dx = -I'(\beta) = -\left(\frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha \beta} \right)'_{\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha \beta}.$$

(9).

• (五). 设 a, b, c 均为实数, 且 $a > 0$, 计算反常积分:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx. \quad (\text{概率论中常见的积分})$$

解: 指数部分配方可得:

$$-ax^2+bx+c = -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac+b^2}{4a} \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \cdot e^{-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2} dx = e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2} dx$$

$$\text{令 } \sqrt{a}\left(x - \frac{b}{2a}\right) = u \quad e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{a}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}}.$$

则 $dx = \frac{1}{\sqrt{a}} du$

重要的含参反常积分还有 Euler 积分. 分别是:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

下一讲, 即 ch13 第 5 讲中详细介绍.

(六) 作业: 习题 13.2 / 1(2), (3).

习题 13.4 / 6, 8(2), (4), (6).

下一讲: Γ 函数与 B 函数. (第 48 讲)

(10).

Γ 函数是一个神奇的

函数, 概率统计中

的正态分布, χ^2 分布,

t 分布, F 分布都与

Γ 函数有关!