第38讲：Parseval等式及其拓展与应用

(一) 复习：设 $f(x), g(x) \in L^2[-l,l]$，$\omega=\frac{\pi}{l}$，则有：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方}}f(x),\ x\in[-l,l]$$

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\omega x+\beta_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方}}g(x).\ x\in[-l,l].$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x\,dx\ (n\geq 0);\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x\,dx\ (n\geq 1);$$

$$\alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\cos n\omega x\,dx\ (n\geq 0);\ \beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\sin n\omega x\,dx\ (n\geq 1).$$

且有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx;\ \frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g^2(x)dx,$$

$$\begin{cases}f(x)+g(x)\sim\frac{a_0+\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+\alpha_n)\cos n\omega x+(b_n+\beta_n)\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方}}f(x)+g(x)\\ f(x)-g(x)\sim\frac{a_0-\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n-\alpha_n)\cos n\omega x+(b_n-\beta_n)\sin n\omega x)\xlongequal{\text{均方}}f(x)-g(x)\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x)+g(x))^2dx & (*1)\\ \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x)-g(x))^2dx & (*2)\end{cases}$$

$(*1)-(*2)$：

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)dx\ . \quad (*3)$$

(二). 例题：

例1. 设 $f(x)\in L^2[-l,l]$ 且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$

证明：对 $\forall [a,b]\subset[-l,l]$，都有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x) \quad (*4).$$

即 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅氏级数未必恒等于 $f(x)$，但两边在 $[a,b]\subset[-l,l]$ 上的积分值相等。

证：取 $g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\\ 0, & x\in[-l,l]-[a,b]\end{cases}$. 则 $\begin{cases}\alpha_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)dx=\frac{1}{l}\int_a^b 1dx\\ \alpha_n=\frac{1}{l}\int_a^b 1\cos n\omega x dx\\ \beta_n=\frac{1}{l}\int_a^b 1\sin n\omega x dx\end{cases}$

利用(*3)式：

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)dx=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot 1dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

$$=\frac{1}{2l}\int_a^b a_0dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{l}\int_a^b\cos n\omega x dx+b_n\frac{1}{l}\int_a^b\sin n\omega x dx\right)$$

即 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)dx.$

特别地，若取 $[a,x]\subset[-l,l]$，则

$$\int_a^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega}(b_n\cos n\omega a-a_n\sin n\omega a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega}(a_n\sin n\omega x-b_n\cos n\omega x)$$

例2．将 $f(x)=x^2$，$x\in[0,1]$ 展成傅氏级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 之和.

解(1)：$\because 2l=1-0=1$，$\therefore l=\frac{1}{2}$，(2) 将 $f(x)$ 作 $T=2l=1$ 的周期

(2)

开拓后，开拓到R上的周期函数记作F(x)，则

$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)dx=2\int_0^{2l}F(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$，$n\geq1$时，

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=2\int_0^1 x^2\cos 2n\pi x\,dx=\frac{1}{n^2\pi^2}$，

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=2\int_0^1 x^2\sin 2n\pi x\,dx=\frac{-1}{n\pi}$.

(3). $\because f(x)=F(x)\big|_{[0,1]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\frac{-1}{n\pi}\sin 2n\pi x\right)=\begin{cases}x^2, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x=0,1.\end{cases}$$

即f(x)的傅氏级数在[0,1]上并不是处处收敛于$f(x)=x^2$本身，但除x=0,1

两点外，在其余的点处都收敛于$f(x)=x^2$本身，即f(x)的傅氏级数均方收

敛于f(x)，因此parseval等式成立：

(4). 利用parseval等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=2\int_0^1(x^2)^2dx$

即 $\frac{(\frac{2}{3})^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((\frac{1}{n^2\pi^2})^2+(\frac{-1}{n\pi})^2\right)=2\int_0^1(x^2)^2dx=\frac{2}{5}\Rightarrow$

$\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{5}-\frac{2}{9}=\frac{8}{45}\Rightarrow\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{8}{45}-\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}$

$=\frac{1}{90}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

例2表明：对于$\forall f(x)\in L^2[a,b]$，有$f(x)$的傅立叶级数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$ 其中$2l=(b-a)\Rightarrow l=\frac{b-a}{2}$

$$\therefore a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx\quad(n\geq 0)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx\quad(n\geq 1).$$

故$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\xlongequal{\text{均方}}f(x),\ x\in[a,b].$$

同样有parseval等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx.\qquad(*5)$$

例3，设$f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$．$F(\lambda)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$，$\lambda\in R$.

称$F(\lambda)$为$f(x)$的Fourier变换，则有parseval等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda\qquad(*6)$$

(*6)的证明见手稿P6.

由(*6)可推导出物理学中的海森堡测不准原理。

（即粒子的位置与动量都不能同时测准，也即，同时将粒子的位置与动量精确同时测量是不可能的。

(三) 广义Fourier级数与广义parseval等式

设$\{e_n(x)\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交系，即$(e_m(x),e_n(x))=$

$$\int_a^b e_m(x)e_n(x)dx=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$ 且对$\forall f\in L^2[a,b]$有

$f(x)$的广义付氏级数：$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n(x)$，$C_n = \int_a^b f(x) e_n(x) dx$

若广义的Parseval等式：$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx = \|f(x)\|^2$ 成立. (*7)

则称$\{e_n(x)\}$是$L^2[a,b]$的一组完备的标准正交基(5)，

这时必有 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n(x) \xlongequal{\text{均方}} f(x)$，$x \in [a,b]$.

即 $\|\sum_{m=1}^{n} C_m e_m(x) - f(x)\|^2 = \int_a^b (\sum_{m=1}^{n} C_m e_m(x) - f(x))^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

例如，在$L^2[-1,1]$中有一组完备的正交基：$P_0(x), P_1(x), P_2(x),$

$\cdots, P_n(x), \cdots$ $\quad P_n(x) \triangleq ((x^2-1)^n)^{(n)} / 2^n \cdot n!$ $(n \geq 0)$，$x \in [-1,1]$.

对于$\forall f(x) \in L^2[-1,1]$，有$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \xlongequal{\text{均方}} f(x)$

其中，$C_n \|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \Rightarrow C_n = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx / \|P_n(x)\|^2$

且 $\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$，$n=0,1,2,3,\cdots$

此处，$P_n(x)$称为n阶的Legendre（勒让德）函数，在数理方程中，

n阶的Bessel函数会得也构成一组完备的正交基。

(四)作业：EX12.1 / 2(2)；5； EX12.2 / 4(3),(4)；6.

例3的证明，即Fourier变换的parseval等式：

$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$ 的证明：

其中，$f(t) \in L^2_{(-\infty,+\infty)}$，且 $f(t)$ 连续，$F(\lambda) = F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$

证：设 $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)dt$，$x \in R$，则 $g(x) \in R \cap C$，且

$F(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)e^{-i\lambda x}dtdx \xlongequal{\text{交换积分次序}}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)e^{-i\lambda x}dxdt \xlongequal[\text{则 } x=u-t,\ dx=du]{\text{设 } x+t=u}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda(u-t)}dudt$

$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt\right) = F(\lambda)\cdot\overline{F(\lambda)} = |F(\lambda)|^2$

故 $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}d\lambda$ 即

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}d\lambda$，$\forall x \in R$，令 $x=0$

则有：$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$。证毕.

注：$\begin{cases} F(\lambda) = F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \\ f(t) = F^{-1}(F(\lambda)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \end{cases}$ 称之为"傅氏变换对"

并称 $f(t)$ 为本原函数，$F(\lambda)$ 为像原函数。

(6).

例4. 利用 $f(x)=\cos ax\ (0<a<1)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的Fourier级数.

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\cos nx\right),\ -\pi\le x\le\pi \qquad (*1)$$

证明：(1)、$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2x}{x^2-n^2\pi^2}$，$(x\ne k\pi,\ k\in Z)$ $(*2)$

(2)、$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2\pi^2}$，$(x\ne k\pi,\ k\in Z)$. $(*3)$

(ex12.3/4)

例5. 证明：三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在 $\forall[a,b]\subset(0,\pi)$ 中一致con，

但此三角级数不是任何一个在 $L^2[a,b]$ 中函数 $f(x)$ 的付氏级数。

即 $L^2[a,b]$ 中的任一个函数 $f(x)$ 的付氏级数，都是三角级数，

而有些三角级数却不是某个函数的付氏级数。(ch12综/1)

证例4/(1)：在 $(*1)$ 中，取 $x=\pi$，则有：

$$\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi}=\cot a\pi=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2a\pi}{(a\pi)^2-\pi^2n^2}$$，令 $a\pi=x$，则

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2x}{x^2-\pi^2n^2}，(x\ne k\pi,\ k\in Z).$$

(注：本题中，可将 $f(x)=\cos ax$ 中的 $0<a<1$，替换为 $a\notin Z$)

证例4/(2)：在 $(*1)$ 中，取 $x=0$，则得：

$$\frac{1}{\sin a x}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi a}{(a\pi)^2-n^2\pi^2}$$，令 $a\pi=x$，则有：

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2\pi^2}$$，$(x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$.

证例5(1°). 令 $a_n(x)=\sin nx$，$b_n(x)=\frac{1}{\ln n}$，$x\in[a,b]$，则

$|A_n(x)|=|a_1(x)+\cdots+a_n(x)|=|\sin x+\cdots+\sin nx|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\leq\frac{1}{m_0}$，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，

$\forall x\in[a,b]$，$m_0=|\sin\frac{x}{2}|$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，即 $|A_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致有

界，且 $b_n(x)=\frac{1}{\ln n}\downarrow 0$，即 $b_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中关于 n 单减且一致趋零.

依Dirichlet判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在 $[a,b]$ 中一致 con；

证例5(2°) 用反证法：若 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 是某个 $L^2[a,b]$ 中函

函数 $f(x)$ 的傅氏正弦级数，依Parseval等式，$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\ln n}/n)$

即 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 应绝对收敛！，然而若设 $g(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $x\in[2,+\infty)$

则 $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 中 C，单减，非负 且 $\int_2^{+\infty}g(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u}$

$=\ln u\Big|_{\ln 2}^{+\infty}=+\infty$. 即 $\int_2^{+\infty}g(x)dx$ div，从而依Cauchy的积分

判别法，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ div. 矛盾！故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 不是

$L^2[a,b]$ 中任何一个 $f(x)$ 的傅氏正弦级数。