第二十二讲 (2024.11.20)

设 $x \in X$，定义映射 $x^{**}: X^* \to \mathbb{K}$
$$f \mapsto f(x)$$

$\Rightarrow$ $x^{**} \in X^{**}$ 且 $\|x^{**}\| = \|x\|$.

$\Rightarrow$ 映射 $i: X \to X^{**}$
$$x \mapsto x^{**}$$

是线性等距嵌入，称为 X 到 X^{**} 的自然映射或自然嵌入. (canonical map)

Def 如果自然映射 $i: X \to X^{**}$ 是满射（从而是线性等距同构），则称 X 自反 (reflexive)

Note：存在非自反 Banach 空间 X s.t. X 与 X^{**} 等距同构 (James, 1950)

例：自反空间一定是 Banach 空间

有限维赋范空间自反 (HW：Ex 2.5.4)

Hilbert 空间自反 (HW)

Thm 当 $1 < p < \infty$ 时 L^p 自反

Pf 即证明：$\forall \Lambda \in (L^p)^{**}$，$\exists u \in L^p$ s.t.
$$\Lambda(f) = f(u), \quad \forall f \in (L^p)^*$$

[$i: L^p \to (L^p)^{**}$ 满 $\Longleftrightarrow$ $\forall \Lambda \in (L^p)^{**}$，$\exists u \in L^p$ s.t. $\underbrace{u^{**} = \Lambda}_{\Lambda(f) = u^{**}(f) = f(u)}$

回忆：$J: L^{p'} \to (L^p)^*$ 是线性等距同构 $\left(f_v(u) = \int uv \right)$
$\quad\quad\ \ v \mapsto f_v$

$$\begin{tikzcd}
L^{p'} \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (L^p)^* \arrow[d, "\Lambda"] \\
& \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

令 $\varphi \overset{def}{=} \Lambda \circ J$

$\Rightarrow \varphi \in (L^{p'})^*$

$(L^{p'})^* = L^p$

$\Rightarrow \quad \exists!\, u \in L^p$ s.t.

$$\varphi(v) = \int v u, \quad v \in L^{p'}$$

现在，$\forall f \in (L^p)^*$，令

$$v_f \overset{def}{=} J^{-1}(f) \quad (\text{即 } v_f \text{ 是 } f \text{ 的表示向量})$$

$$\Rightarrow \Lambda(f) = (\Lambda \circ J)(J^{-1}(f))$$
$$= \varphi(v_f) = \int v_f u = \int u v_f = f(u)$$

Thm $C[a,b]$ 不自反

Pf 假设 $C[a,b]$ 自反

$\Rightarrow \quad \forall \Lambda \in C[a,b]^{**}, \quad \exists u \in C[a,b]$ s.t.

(*) $\quad \Lambda(f) = f(u), \quad \underbrace{\forall f \in C[a,b]^*}$

$\exists!\ v_f \in BV_0[a,b]$ s.t.

$f(u) = \int_a^b u\, dv_f, \quad \forall u \in C[a,b]$

且 $\|v_f\|_{BV} = \|f\|$

令 $c = \frac{a+b}{2}$. 考虑

$$F_c : C[a,b]^* \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto v_f(c+0) - v_f(c-0)$$

$$\Rightarrow \quad |F_c(f)| \le V_a^b(\nu_f) = \|\nu_f\|_{BV} = \|f\|$$

$$\Rightarrow \quad F_c \in C[a,b]^{**}$$

$$\overset{\text{by }(*)}{\Longrightarrow} \quad \exists\, u_c \in C[a,b] \quad \text{s.t.}$$

$$(**) \qquad F_c(f) = \underbrace{f(u_c)} , \quad \forall f \in C[a,b]^*$$

$$= \int_a^b u_c \, d\nu_f$$

令 $\nu(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t u_c(s)\, ds$

$$\Rightarrow \quad \nu \in BV_0[a,b] \qquad (\because \nu \in C^1[a,b])$$

令 $f_\nu(u) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b u \, d\nu , \quad u \in C[a,b]$

$$\Rightarrow \quad f_\nu \in C[a,b]^*$$

且 $F_c(f_\nu) = 0 \qquad (\because \nu$ 连续$)$

$$\Rightarrow \quad 0 = F_c(f_\nu) = \int_a^b u_c \, d\nu = \int_a^b u_c^2(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad u_c \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad F_c = 0 \text{ , 矛盾}$$

<u>Thm</u> (Banach) X^* 可分 $\Rightarrow$ X 可分

(Note: 逆命题不成立. 例: L^1 可分但 L^∞ 不可分)

<u>Pf</u>: <u>Step 1</u> X^* 中单位球面 S_1^* 可分

X^* 可分 $\Rightarrow \exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \overset{\text{dense}}{\subset} X^*$

不妨设 $f_n \ne 0$, $\forall n$.

令 $g_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$

$\forall\, g \in S_1^*$, $\exists\, f_{n_k} \to g$

$$\Rightarrow \quad \|g - g_{n_k}\| \le \|g - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\|$$

$$= \|g - f_{n_k}\| + \left\| (\|f_{n_k}\| - 1)\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} \right\|$$

$$= \|g - f_{n_k}\| + \big|\, \|f_{n_k}\| - 1 \,\big|$$

$$\to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

Step 2 $\quad \exists\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$ s.t.

$$\overline{\operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})} = X$$

注意 $\quad \displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |g_n(x)| = \|g_n\| = 1$

$\Rightarrow \quad \exists\, x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ s.t.

$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}$$

Claim $\quad \operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \overset{\text{dense}}{\subset} X$

假设不然 , $\exists\, x_0 \in X \setminus \overline{\operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$

$\overset{\text{HBT}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, f \in X^*$, $\|f\| = 1$ s.t.

$f\left(\overline{\operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}\right) = 0$ 而 $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{\operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})})$

$$> 0$$

$$\Rightarrow \quad \|g_n - f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |g_n(x) - f(x)|$$

$$\ge |g_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{= 0}| > \frac{1}{2}$$

与 step 1 中 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{dense}}{\subset} S_1^*$ 矛盾

Step 3 $\underbrace{\operatorname{span}^{\mathbb{Q}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}_{\text{可数集}} \overset{\text{dense}}{\subset} X$

(模仿之前 Thm：对 Hilbert 空间，可分 ⟺ 有可数 O.N.B. 的证明)

Thm：当 $1 \le p < \infty$ 时 $L^p[0,1]$ 可分

Pf $\underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{2^n-1} r_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} \;\middle|\; r_k \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}}_{\text{可数集}} \overset{\text{dense}}{\subset} L^p[0,1]$

(Wheeden-Zygmund, Real Analysis)

Thm $L^\infty[0,1]$ 不可分

Pf 假设 $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{dense}}{\subset} L^\infty[0,1]$

$\Rightarrow \forall t \in (0,1)$, $\exists f_{n_t} \in B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$

而 $\operatorname{dist}(\chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]}) = 1$ if $t \neq s$

$\Rightarrow$ 不同的 $B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$ 互不相交.

$\Rightarrow \varphi: (0,1) \to \mathbb{N}$, $t \mapsto n_t$ 是单射

$\Rightarrow (0,1)$ 至多可数. 矛盾.

Thm $L^1[0,1]$ 不自反

Pf HW: (Hint：利用 $\begin{cases} X^* \text{可分} \Rightarrow X \text{可分} \\ L^\infty \text{不可分} \end{cases}$

共轭算子

Thm $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$T \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow \exists\, T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ s.t.

$(T^* f)(x) = f(Tx)$, $\forall f \in Y^*, \forall x \in X$

T^* 称为 T 的共轭算子

进而，映射 $* : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ 是线性等距嵌入

$T \mapsto T^*$

Pf 设 $f \in Y^*$，定义映射 $\Lambda_f : X \to \mathbb{K}$

$x \mapsto f(Tx)$

$\Rightarrow |\Lambda_f(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\,\|Tx\| \leq \|f\|\,\|T\|\,\|x\|$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow \Lambda_f \in X^*$ 且 $\|\Lambda_f\| \leq \|f\|\,\|T\|$.

定义映射 $T^* : Y^* \to X^*$

$f \mapsto \Lambda_f$

$\Rightarrow T^*$ 线性且

$\|T^* f\| = \|\Lambda_f\| \leq \|T\|\,\|f\|$, $\forall f \in Y^*$

$\Rightarrow T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ 且 $\|T^*\| \leq \|T\|$.

而 $\forall x \in X$，不妨设 $Tx \neq 0$

$\overset{HBT}{\Longrightarrow} \exists f \in Y^*$, $\|f\| = 1$ s.t.

$f(Tx) = \|Tx\|$.

$\Rightarrow \|Tx\| = |f(Tx)| = |(T^* f)(x)|$

$\leq \|T^* f\|\,\|x\| \leq \|T^*\|\,\|f\|\,\|x\|$

$= \|T^*\|\,\|x\|$

$$\Rightarrow \quad \|T\| \leq \|T^*\|$$

例： $T: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$x \longmapsto Ax \quad \text{with } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\Rightarrow \quad T^*: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$$

$$y \mapsto \overline{A^t}\, y$$