第34讲：多变量积分复习与小结

(一) 积分四大公式及其统一

(1). Green公式：设 $P(x,y), Q(x,y)\in C^1(D)$，D是xoy平面中分段光滑有向曲线L围成的有界闭区域，则

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad (☆_1).$$

其中，$L=\partial D$是D的正向边界曲线.

(2). Gauss公式：设 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$，$\Omega$是$R^3$中由分片光滑有向曲面$\Sigma$围成的有界闭区域，则

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \quad (☆_2)$$

其中，$\Sigma=\partial\Omega$是Ω的外法边界曲面.

(3). 狭义的Stokes公式：设 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$，有向曲面$\Sigma\subset\Omega$，$\Gamma=\partial\Sigma$，且$\Gamma$的正向与$\Sigma$的正侧(向)成右手系，$\Sigma$光滑，则有.

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS$$

(式3)

在(式2)中，记：$(dydz,dzdx,dxdy)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=\vec{n}dS=\vec{dS}$；$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$，则Gauss公式的向量式为：$\oiint_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iiint_{\Omega}(\nabla\cdot\vec{A})dxdydz$ (式4)

称$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\triangleq div(\vec{A})$为$\vec{A}$的散度，它的物理意义为单位时间、单位体积内$\Omega$中的流量源密度.

在(式3)中，记$(dx,dy,dz)=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1)ds=\vec{\tau}ds=\vec{ds}$（有向弧微元），记$(dydz,dzdx,dxdy)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=\vec{n}dS=\vec{dS}$（有向面积微元），则Stokes公式的向量式为：

$\oint_{\partial\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\iint_{\Sigma}\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})dS$，称$\nabla\times\vec{A}=rot(\vec{A})$为$\vec{A}$的 (式5)

旋度. 由于微分向量算子$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$具有线性性质，故梯度$\nabla u$，散度$\nabla\cdot\vec{A}$及旋度$\nabla\times\vec{A}$都具有线性性质.

(二)、

(1°). $\nabla(c_1u+c_2v)=c_1\nabla u+c_2\nabla v$, $u,v\in C^1(\Omega)$;

(2°). $\nabla\cdot(c_1\vec{A}+c_2\vec{B})=c_1\nabla\cdot\vec{A}+c_2\nabla\cdot\vec{B}$, $\vec{A},\vec{B}\in C^1(\Omega)$.

(3°). $\nabla\times(c_1\vec{A}+c_2\vec{B})=c_1\nabla\times\vec{A}+c_2\nabla\times\vec{B}$, $\vec{A},\vec{B}\in C^1(\Omega)$.

(4). Newton-Leibniz公式: $\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$. 成立

(5). 统一的Stokes公式:

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega \qquad (\bigstar).$$

在($\bigstar$)中，令 $\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，称此时的ω为一阶(次)外微分形式. 则 $d\omega=dP(x,y)dx+dQ(x,y)dy$ (微分算子的线性性质). 而 $dP(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy$, $dQ(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy$

$\Rightarrow d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)dy$, 由$\begin{cases}dxdx=0\\dydy=0\\dxdy=-dydx\end{cases}$

$\Rightarrow d\omega=\frac{\partial P}{\partial y}dydx+\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$

$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. 记$\Omega=D$. 则 $\partial\Omega=\partial D=L$, 故($\bigstar$)

可改写为: $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_L Pdx+Qdy=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\Omega}d\omega$;

在(式2)中，记 $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$，称它为 ω 的二次(阶)外微分形式，则

$d\omega = dPdydz + dQdzdx + dRdxdy$，而 $\begin{cases} dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \\ dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \\ dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz. \end{cases}$

利用 $dxdx = dydy = dzdz = 0$，$dxdy = -dydx$，$dydz = -dzdy$，$dzdx = -dxdz$

$\Rightarrow d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dydz + (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz)dzdx + (\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz)dxdy = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$，从而(式2)可改写为：

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

在(式3)中，记 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，称它为 ω 的一次(阶)外微分形式，则

$d\omega = dPdx + dQdy + dRdz = (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dx + (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz)dy + (\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz)dz$，利用 $\begin{cases} dxdx = dydy = dzdz = 0; \\ dxdy = -dydx \\ dxdz = -dzdx \\ dydz = -dzdy \end{cases}$

$\Rightarrow d\omega = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

从而(5.3)可改写成：$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$，

其中，$\Omega=\Sigma$，$\partial\Omega=\partial\Sigma=\Gamma$.

在(5.4)中，记 $\omega=F(x)$，称此时的 ω 为0次(形)外微分形式，则 $d\omega=dF(x)$，记 $\Omega=[a,b]$，则 $\partial\Omega=a$ 或 b.

此时，N—L公式可改写为：$\int_{\Omega}d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega=F(x)\Big|_a^b$

综上所述，Green公式、Gauss公式、狭义的Stokes公式及N—L公式可统一为：$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$

称 $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$ 为统一的或广义的Stokes公式。

广义的Stokes公式：$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$ 还可以推广到更高维的线性空间中去。

(三).例题：

第一类曲线、曲面积分及所有的重积分(含定积分)在一定条件下，若具有奇偶对称性，其结论可以为

"偶倍奇零"。

例1：计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^4}$，

Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧.（$a>0$ 常数）.

解：∵在Σ上有 $x^2+y^2+z^2=a^2$. ∴ $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy}{(a^2)^4}$

$=\dfrac{1}{a^8}\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$. 利用Gauss公式可知.

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=-\oiint\limits_{\Sigma^-}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy\overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz\overset{\text{奇偶对称性}}{=\!=\!=\!=\!=}-3\times8\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Ω_1是球体Ω：$x^2+y^2+z^2\le a^2$ 在第一卦限部分，作球面坐标变换：

$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$. 且 $r\in[0,a]$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

则 $\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^a(r^2)r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi$

$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^a r^4dr\right)=\frac{\pi}{2}\times1\times\frac{a^5}{5}=\frac{\pi}{10}a^5$

∴ $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=-3\times8\times\frac{\pi}{10}a^5=-\frac{12}{5}\pi a^5$

故 $I=-\frac{12}{5}\pi a^5/a^8=-\dfrac{12\pi}{5a^3}$.

注：此题不能对 $P=\frac{x^3}{(x^2+y^2+z^2)^4}$，$Q=\frac{y^3}{(x^2+y^2+z^2)^4}$，$R=\frac{z^3}{(x^2+y^2+z^2)^4}$ 直接用Gauss公式，因为Σ所围的球体Ω：$x^2+y^2+z^2\le a^2$ 中存在 P,Q,R 的奇点 $O(0,0,0)$。

第二类曲面积分中，奇偶对称性却表现为"偶零奇倍"

例2，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，

Σ是上半球面：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$，常数。

解：设 $I_1=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz$，$I_2=\iint\limits_{\Sigma}y^2dzdx$，$I_3=\iint\limits_{\Sigma}z^2dxdy$。

在 I_1 中，设 Σ_1,Σ_2 分别为Σ的前侧：$x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$ 及Σ的后侧：$x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2}$，Σ_1,Σ_2 在 yz 平面的投影域为 $\begin{cases}y^2+z^2\le a^2\\ z\ge 0\end{cases}$，记作 D_{yz}，则 $I_1=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}x^2dydz=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dydz+\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dydz$

$$=(+1)\iint\limits_{D_{yz}}\left(+\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2dydz+(-1)\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2dydz=0.$$

同理，在 I_2 中，设 Σ_3,Σ_4 分别为Σ的右侧：$y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$ 及Σ的左侧：$y=-\sqrt{a^2-x^2-z^2}$，Σ_3,Σ_4 在 xz 平面的投影域记为 D_{xz}，则

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_3}y^2dzdx+\iint\limits_{\Sigma_4}y^2dzdx=(+1)\iint\limits_{D_{xz}}\left(\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)^2dzdx+(-1)\iint\limits_{D_{xz}}\left(-\sqrt{a^2-x^2-z^2}\right)^2dzdx$$

$$=0,$$

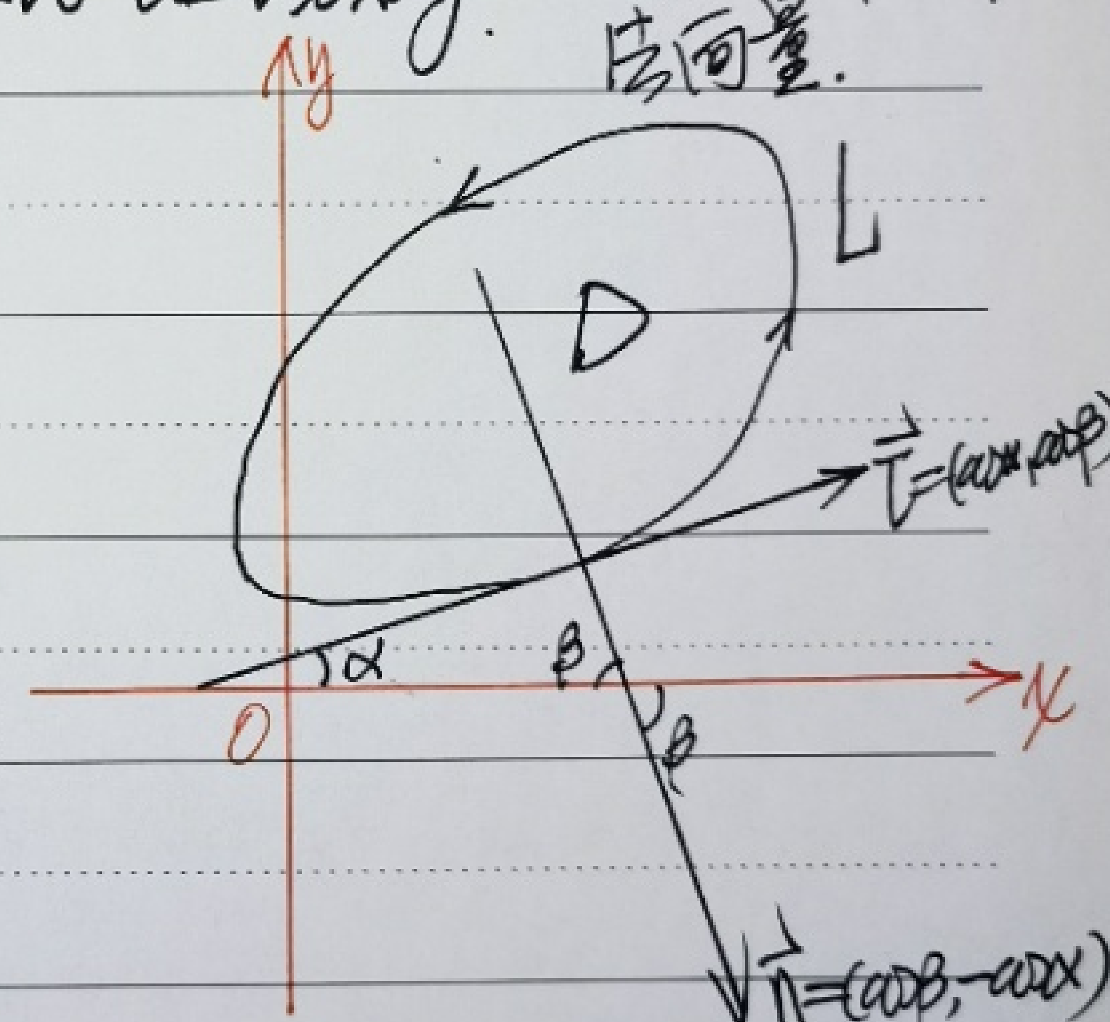
而 $I_3 = +\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (\sqrt{a^2-x^2-y^2})^2 dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a (a^2-r^2) r dr\right] d\theta = \frac{\pi}{2}a^4$.

故 $I = I_1+I_2+I_3 = 0+0+\frac{\pi}{2}a^4 = \frac{\pi}{2}a^4$.（"解法(五)"）

例3：(P×11.3/7(3))：设D是xoy平面中由分段光滑的闭曲线L围成的区域. $u(x,y), v(x,y)\in C^2(D)$，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子. 证明下列平面上的第二Green公式：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)ds = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)dxdy.$$

$\vec{n}$是L的单位外法向量.



证：$\because \oint_L v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds = \oint_L v\,\nabla u\cdot\vec{n}\,ds$

$= \oint_L v(u'_x,u'_y)\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)ds$

$= \oint_L (u'_x\cdot v, u'_y\cdot v)\cdot(\cos\beta ds, -\cos\alpha ds)$

$= \oint_L (vu'_x, vu'_y)\cdot(dy,-dx)$

$= \oint_L (-vu'_y)dx + (vu'_x)dy \xlongequal{\text{Green}} \iint_D \left(\frac{\partial(vu'_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-vu'_y)}{\partial y}\right)dxdy$

$= \iint_D [v(u''_{xx}+u''_{yy}) + u'_x\cdot v'_x + u'_y\cdot v'_y]dxdy = \iint_D (v\Delta u + \nabla u\cdot\nabla v)dxdy$, (*1)

交换 u, v 的位置得：

$$\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\iint_D(u\Delta v+\nabla v\cdot\nabla u)dxdy \quad (\text{式}2).$$

(式1)−(式2)，有：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds=\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)dxdy$$

其中，$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=(u'_x,u'_y)$，$\nabla v=(v'_x,v'_y)$.

$\Delta u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{xx}+u''_{yy}$，$\Delta v=v''_{xx}+v''_{yy}$.

(三) 作业：

(1). 本讲的例1、例2； (2) EX11.3/7(1)、(2)、(3).

(四). 第35讲：Fourier（傅利叶）级数及其应用