周三讲的题

王若言（数学科学学院，PB21010441）

这些题也就是看个乐呵，同学们复习的时候是汪老师的课堂讲稿为主，作业为辅。把课堂讲稿弄懂了可以 almost surely 薄纱期末。

0.1

判断敛散性

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\cos x}}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|+1}{x^2+1} dx$

解：(1) 对 $\forall x > 1, x\sqrt{x^2+\cos x}/x^2 = \sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}} \to 1, x \to +\infty$. 故 $\frac{1}{x\sqrt{x^2+\cos x}} \sim \frac{1}{x^2}$ ，而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 枚敛，由比较判别法该积分收敛。

(2) $\frac{|\sin x|+1}{x^2+1} \leq \frac{2}{x^2+1}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+1} dx = \pi < +\infty$ 收敛。由比较判剖法该积分收敛。

0.2

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 是否收敛？如果收敛，指明是否绝对收敛。

解：当 $x \to 0$ 时 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \to 0$,所以 0 不是瑕点,不妨考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 收剑性. 讨 $\forall A > 1, \left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos A - \cos 1| \leq 2$, 放 $\int_1^{+\infty} \sin x dx$ 有界且 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调下降趋于，故由 Dirichlet 判别法原秘分收敛。

而 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$ ，同理 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}} dx$ 收敛而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ 发散，由比较划别法 $\int_1^{+\infty} \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \Big| \, dx$ 发散 α 。

即原积分条件收敛。

0.3

计算

(1) $\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

解: (1) 注意到 $1+\alpha$ 在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 上连续，$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $(x,\alpha)\in[0,1+\alpha]\times\mathbb{R}$ 上连续，

故 $\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2)$t=x^4$,

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\int_0^1\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})\overset{\text{余元公式}}{=}\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

0.4

讨论 $\int_0^{+\infty}ue^{-ux}dx$ 在 (0.1) 和 $(1,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解: 设 $\mu(A)=\sup_{u\in E}\left|\int_A^{+\infty}ue^{-xu}dx\right|$. A>0. 进一步间化得 $\mu(A)=\sup_{u\in E}e^{-Au}$.

当 $E=(0,1):\mu(A)=e^{-A\cdot 0}=1\xrightarrow{A\to+\infty}0$ ，故该积分在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

当 $E=(1,+\infty):\mu(A)=\lim_{u\to+\infty}e^{-Au}=0$. 故该积分在 $(1,+\infty)$ 一致收敛。

0.5

设 f 为 $\mathbb{R}$ 连续函数，$\exists A>0$. 使得 $|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}$

（1）证明: $\forall u\in\mathbb{R},\hat{f}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt$ 均收敛

（2）若当 $|u|\to\infty$ 时，$\hat{f}(u)=O(|u|^{-1-\alpha})$，其中 $0<\alpha<1$。求证 $\exists M>0$, 使得

$$\forall x.h\in\mathbb{R}.|f(x+h)-f(x)|\le M|h|^\alpha$$

.

解: (1). 由 $|f(t)e^{-int}|\le|f(t)|\le\frac{A}{t^2+1}$ 与 $\int_0^\infty\frac{1}{t^2+1}dt$ 存在

及 Weierstrass 判别知 $\hat{f}(u)$ 存在

(2). 分段进行估计: $f(x+h)-f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(u)e^{iux}-\hat{f}(u)e^{iu(x+h)}du$. 我们只需估计 $(\cos u(x+h)-\cos ux)\hat{f}(u)$ 的积分大小。事实上只需考虑 $(\int_{\frac{1}{h}}^{+\infty}+\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}})(\cos u(x+h)-\cos ux)\hat{f}(u)du$.

而利用 $\cos u(x+h)-\cos ux=-2\sin u\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{4h}{2}$

有 $\left|\int_{\mathbb{R}}(\cos u(x+h)-\cos ux)\hat{f}(u)du\right|\le 4\left|\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}\sin\frac{uh}{2}\hat{f}(u)du\right|+8\int_{\frac{1}{h}}^{+\infty}\frac{c}{|u|^{1+\alpha}}du$

同时界须注意在 $\left[\frac{1}{h},\frac{1}{h}\right]\hat{f}(u)$ 有界即可

0.6

计算

$$\int_{\Gamma} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

其中 Γ 为顺时针方向的单位圆周。

解. 不能直接用 Green 公式:

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

在原点处 P, Q 的偏导数不连续, 故不能直接使用 Green 公式。设 $D_\varepsilon = B_1(0) \backslash B_\varepsilon(0), \varepsilon < 1$, 在 D_ε 中 P, Q 有连续的偏导数, 设其边界的正向定为沿正向左边为区域内部, 故由 Green 公式,

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0,$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x = 2\pi,$$

$$\int_{\Gamma} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\left(\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right) = -2\pi.$$

0.7

设函数 $f(x,y)$ 在整个平面上具有连续的二阶偏导数, 且满足 $f(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2+y^2, \Gamma : x^2+y^2 = 1$ 为单位圆周。

(1) 证明:

$$\int_0^t f_x(x(u),y(u))x'(u) + f_y(x(u),y(u))y'(u)\mathrm{d}u = f(x(t),y(t)) - f(x(0),y(0)).$$

(2) 求曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

解. (1) 设 $g(u) = f(x(u),y(u))$, 则

$$g'(u) = f_x(x(u),y(u))x'(u) + f_y(x(u),y(u))y'(u),$$

故

$$\begin{aligned}&\int_0^t f_x(x(u),y(u))x'(u) + f_y(x(u),y(u))y'(u)\mathrm{d}u \\ =&\int_0^t g'(u)\mathrm{d}u = g(t) - g(0) = f(x(t),y(t)) - f(x(0),y(0)).\end{aligned}$$

(2) 对每一个 (x,y), 给定参数曲线 $(tx,ty), t:0\to 1$. 由 (1),

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=\int_0^1 f_1(tx,ty)x+f_2(tx,ty)y\ \mathrm{d}t,$$

代入曲线积分，并记 $u=tx, v=ty$, 由 Green 公式 ($\int_\Gamma (P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 其中 n 是曲线 Γ 上点的单位外法向量)

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s &= \int_\Gamma\int_0^1 f_u(u,v)x+f_v(u,v)y\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\ \mathrm{d}t\int_\Gamma \nabla f(tx,ty)\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\ \mathrm{d}t\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\partial}{\partial x}f_u(tx,ty)+\frac{\partial}{\partial y}f_v(tx,ty)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\iint_{x^2+y^2\le 1} tf_{uuu}(tx,ty)+tf_{vv}(tx,ty)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 t^3\ \mathrm{d}t\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

注: 在微分方程中会学到调和函数的性质。令 $g(x,y)=f(x,y)-\frac{x^4+y^4}{12}$, 则 $\Delta g=0$. 由调和函数的平均值定理,

$$0=2\pi g(0,0)=\int_\Gamma g(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma f(x,y)-\frac{x^4+y^4}{12}\ \mathrm{d}s.$$

有

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma\frac{x^4+y^4}{12}\ \mathrm{d}s=\frac{\pi}{8}.$$

0.8

设 L 圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 方向为逆时针方向, $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\oint_L -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x+xf(y)\mathrm{d}y=2\pi$$

求 $f(x)$.

解: 记

$$P=-\frac{y}{f(x)},\quad Q=xf(y),$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{f(x)},\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=f(y),$$

记 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\le 1\}\,,\partial D=L$, 由 Green 公式及对称性得

$$\oint_L P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}+f(y)+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
$$\ge\frac{1}{2}\iint_D 4\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2\sigma(D)=2\pi$$

当且仅当

$$f(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)\equiv 1$$

时, 上式等号成立. 故

$$f(x)\equiv 1,\quad x\in D$$

0.9

设 $\rho(x,y,z)$ 是原点到椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的任一点 (x,y,z) 处的切平面的距离, 计算积分:

$$\int_S\frac{d\sigma}{\rho(x,y,z)}$$

解: (法一) 所给椭球在点 (x,y,z) 处的切面方程 (我们用 (X,Y,Z) 表示切面上的点) 是

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$$

由椭球方程可知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 它可表示为

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z-1=0$$

原点 O 到此切面的距离

$$\rho=\rho(x,y,z)=\frac{|(x/a^2)\cdot 0+(y/b^2)\cdot 0+(z/c^2)\cdot 0-1|}{\sqrt{(x/a^2)^2+(y/b^2)^2+(z/c^2)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4}}$$

椭球在点 (x, y, z) 处的单位法向量是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4}}\left(\frac{x}{a^2}i + \frac{y}{b^2}j + \frac{z}{c^2}k\right) \\ &= \rho\left(\frac{x}{a^2}i + \frac{y}{b^2}j + \frac{z}{c^2}k\right)\end{aligned}$$

其中 i, j, k 是单位基向量. 在 Gauss 公式

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

中选取

$$\boldsymbol{F} = \frac{x}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{b^2}\boldsymbol{j} + \frac{z}{c^2}\boldsymbol{k}$$

则有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \rho\left(x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4\right) = \rho/\rho^2 = 1/\rho$, 因此

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\mathrm{d}S}{\rho(x,y,z)} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V &= \int_V \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\mathrm{d}V \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\cdot \text{ 椭球体积} \\ &= \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\end{aligned}$$

(法二) 切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

有

$$\frac{1}{\rho(x,y,z)} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

(1) $z > 0$ 时, $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, 则

$$
\begin{aligned}
f_x = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z},\quad f_y &= -\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z},\\
\mathrm{d}\sigma &= \frac{c^2}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,\\
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho(x,y,z)} &= \frac{c^2}{z}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,\\
&= \left[\frac{c^2}{z}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{z}{c^2}\right]\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

作变换

$$
\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}
$$

有 $u=\sqrt{1-r^2}$, $\quad \mathrm{d}u=\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\ \mathrm{d}r$, $\quad r^2=1-u^2$, 则

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho(x,y,z)} = \left[\frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right)+\frac{\sqrt{1-r^2}}{c}\right]\cdot abr\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta
$$

$$
\begin{aligned}
I &= abc\int_0^1\frac{r^3\ \mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2a^2}+\frac{1-\cos 2\theta}{2b^2}\right)\mathrm{d}\theta + 2\pi\frac{ab}{c}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ \mathrm{d}r\\
&= \pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^1\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u+\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{c^2}\\
&= \frac{2}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)
\end{aligned}
$$

(2) 由对称, $z<0$ 和 $z>0$ 相等.

故

$$
\int_S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho(x,y,z)} = \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).
$$