第39讲：Fourier级数综述

(一) Fourier级数的复数形式：

设$f(x)$以$2l$的周期且满足Dirichlet收敛定理，$\omega=\frac{\pi}{l}$.

则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{处处}}\begin{cases}f(x), & x\text{是}f\text{的连续点}\\ \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, & x_0\text{是间断点.}\end{cases}$

且a_n, b_n由$f(x)$唯一确定：

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x\,dx, & (n\geq 0)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x\,dx, & (n\geq 1).\end{cases}\quad \text{且}\begin{cases}a_n\longrightarrow 0, & (n\to\infty)\\ b_n\longrightarrow 0, & (n\to\infty).\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+b_n}{n}$都绝对收敛。

依Euler公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. $\forall\theta\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2\\ \sin\theta=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i.\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}-b_n\frac{ie^{in\omega x}-ie^{-in\omega x}}{2}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}\right)$$

令$\frac{a_0}{2}=C_0$，$\frac{a_n-ib_n}{2}=C_{+n}$，$\frac{a_n+ib_n}{2}=\overline{C_{+n}}=C_{-n}$ 则

$$f(x)\sim C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{+n}e^{in\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-in\omega x}$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{+n}e^{in\omega x}+\sum_{n=-\infty}^{-1}C_{n}e^{in\omega x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{in\omega x},\ (\text{式1})$$

(1)

其中，$C_{\pm n}=\frac{a_n \mp i b_n}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos n\omega x \mp i\sin n\omega x)dx$

$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\mp i n\omega x}dx$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ （★2）.

（★1）称为$f(x)$的付氏级数的复数形式．其中，$\cdots, e^{-i2\omega x}$，$e^{-i\omega x}, 1, e^{i\omega x}, e^{i2\omega x}, \cdots$是$[-l,l]$中的正交函数系．

并且$e^{im\omega x}$与$e^{in\omega x}$的内积为：

$(e^{im\omega x}, e^{in\omega x}) \triangleq \int_{-l}^{l} e^{im\omega x}\cdot\overline{e^{in\omega x}}dx=\int_{-l}^{l} e^{i(m-n)\omega x}dx$

$=\begin{cases} 2l, & 当m=n时. \\ 0, & 当m\neq n时. \end{cases}$

复数形式的Fourier级数简洁．且其系数只有一个统一公式（★2）．

因此，在工程数学中，常用$f(x)$的复数形式的Fourier级数。

（三）广义Fourier级数与广义parseval等式：

设$\{e_n(x)\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交系．即$\{e_n(x)\}$两两正交．

且$\|e_n(x)\|\equiv1$，$\forall n\in N^*$．即$\int_a^b e_m(x)e_n(x)dx=\begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n. \end{cases}$

若对$\forall f(x)\in L^2[a,b]$．都有：

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}C_n e_n(x)\xlongequal{均方}f(x)$，$x\in[a,b]$．其中，$C_n=\int_a^b f(x)e_n(x)dx$ （三）.

即帕斯瓦尔等式 $\|f(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\|e_n(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\cdot 1$ 成立，则称函数系 $\{e_n(x)\}$ 是 $L^2[a,b]$ 空间的一组完备的标准正交基。称 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n e_n(x)$ 是 $f(x)$ 的广义傅里叶级数；而 $\|f(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\|e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2$ 是 $f(x)$ 的广义 parseval 等式。

例1. 在 $L^2[-1,1]$ 中，设 $P_n(x)=\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}/2^n\cdot n!$ $(n=0,1,2,\cdots)$

称 $P_n(x)$ 为 n 次勒让德（Legendre）函数，则 Legendre 函数列 $P_0(x),P_1(x),P_2(x),\cdots,P_n(x),\cdots$ 构成 $L^2[-1,1]$ 中的完备正交基。其中，$(P_m(x),P_n(x))=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{2n+1}, & m=n\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$

即 $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$

对 $\forall f(x)\in L^2[-1,1]$，若帕斯 $f(x)$ 的广义傅里叶级数：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}C_n P_n(x)\xlongequal{\text{均方}}f(x),\quad x\in[-1,1].$$

其中，$C_n=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx/\|P_n(x)\|^2$，$(n\geq 0)$.

这里，$f(x)$ 的广义 parseval 等式为：

$$\|f(x)\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2\|P_n(x)\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2\cdot\frac{2}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2C_n^2}{2n+1}\quad(\text{*}1)$$

例2：在$L^2[-l,l]$中，由$f(x)$的复数形式的傅氏级数知，

$\cdots, e^{-i2\omega x}, e^{-i\omega x}, 1, e^{i\omega x}, e^{2i\omega x}, e^{3i\omega x}, \cdots \ (\omega=\frac{\pi}{l})$，

是$L^2[-l,l]$中的完备正交基，$\|e^{in\omega x}\|^2=2l$，（$\forall n\in Z$）

对$\forall f(x)\in L^2[-l,l]$，$f(x)$的广义傅氏级数为：

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x}\xlongequal{\text{均方}}f(x),\ x\in[-l,l].$$

$f(x)$的广义Parseval等式为：

$$\|f(x)\|^2=\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^2\|e^{in\omega x}\|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^2 2l\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^2=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx \qquad (\text{如}2).$$

㈢ n维数组空间V_n中勾股定理的推广：

设$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots,0,1)$

是n维数组空间V_n的一组标准正交基，对$\forall\alpha\in V_n$，设

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，且

$$\|\alpha\|^2=(\alpha,\alpha)=(a_1e_1+\cdots+a_ne_n, a_1e_1+\cdots+a_ne_n)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.\ (\text{如}3).$$

㈣、

(式3) 即是有限维线性空间 L^n 中的勾股定理.

对 $\forall f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$，设

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$，$x \in [-\pi,\pi]$. 则

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \xlongequal{\text{均方}} f(x)$，$x \in [-\pi,\pi]$. $\Rightarrow$

$\frac{a_0}{2\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}$. 即

$\frac{a_0}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}$.

且 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots$ 构成

$L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交基，且是完备的标准正交基. 因此.

$\left\|\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\right)^2dx = \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 即有

$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ (式4)

即 (式4) 表示的 $f(x)$ 的 parseval 等式，是无限维线性空间

$L^2[-\pi,\pi]$ 中的勾股定理.

(式4) 可看作 (式3) 在无限维线性空间中的推广。

(四). 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 $f(x)$ 的傅里叶展开问题

非周期函数

(1°) 先取 $l>0$，在 $[-l,l]$ 上把 $f_l(x)\triangleq f(x)\big|_{[-l,l]}$ 展成付氏级数.（设 $f_l(x)$ 满足Dirichlet收敛Th）：

$$f_l(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xrightarrow[\text{(连续点处)}]{\text{在}f(x)\text{的}}f_l(x),\quad x\in[-l,l].$$

(2°) 再设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积. 即 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right|<+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$ 且 在 $\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ 中，$f(x)$ 逐段光滑.

则在 $f(x)$ 的连续点 x 处，有

$$f_l(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)[\cos n\omega t\cos n\omega x+\sin n\omega t\sin n\omega x]dt$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(t-x)dt \qquad (*_1).$$

令 $\lambda_n=n\omega$ 则 $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=n\omega-(n-1)\omega=\omega=\frac{\pi}{l}\Rightarrow$

$$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\right)\Delta\lambda_n, \qquad (*_2)$$

在 $(*_2)$ 中，令 $l\to+\infty$，则 $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\longrightarrow 0$；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\right)\Delta\lambda_n\longrightarrow\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda$$

即 $$\lim_{l\to+\infty}f_l(x)=f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda$$

$$=\int_{0}^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda \qquad (*_3).$$

其中，$\begin{cases} a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt \\ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt \end{cases}$ (¥4).

此处，$|a(\lambda)|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\cos\lambda t|dt\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$；

$|b(\lambda)|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sin\lambda t|dt\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$.

称(¥3)为函数$f(x)$的付氏积分公式；(¥4)为$f(x)$的付氏积分的系数公式。

由上可知，在任意有限区间$[a,b]$上可积且平方可积的函数$f(x)$，都有$f(x)$付氏级数展开式；而在$(-\infty,+\infty)$中可积且绝对可积的非周期函数$f(x)$，虽然无法用付氏级数表示，但都可用$f(x)$的付氏积分表示。

(五). $f(x)$的付氏级数都是三角级数；反之，三角级数一定是某个$f(x)$的付氏级数吗？

答案是否定的！例如，三角级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$就不是任何函数$f(x)$的付氏级数，设$x\in[a,b]\subset(0,2\pi)$.

证明:(反证法). 若 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 是某个 $f(x)$ 的付氏级数.

则 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$ 应绝对收敛. 即 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 应绝对收敛.

令 $g(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $x\in[2,+\infty)$. 则 $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续,非负.

单减 且 $\int_2^{+\infty}g(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$.

即 $\int_2^{+\infty}g(x)dx$ 发散. 依正项级数的积分判别法,级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 也发散. 与 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 应绝对收敛相矛盾!

故 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 不是任一个 $f(x)$ 的付氏级数。

同理. $f(x)$ 的 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 必是幂级数,

但一个已知的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 却未必是某个 $f(x)$ 的

Taylor 级数, 因为 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $(n\geq 0)$ 未必都能成立!

(六). $(-\infty,+\infty)$ 上非周期函数 $f(x)$ 的付氏积分的另一种

推导方法(设 f 在 $\forall[a,b]$ 中逐段光滑)

(1). 对 $\forall l>0$, 在 $[-l,l]$ 上. 已有 $f(x)$ 的复数形式的付氏

级数: $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{in\omega x}$, $C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-in\omega t}dt\Rightarrow$,

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-in\omega(t-x)}dt,\quad x\in[-l,l].$$

令 $\lambda_n=n\omega$, 则 λ_n 从 $-\infty$ 到 $+\infty$, 且 $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\omega=\frac{\pi}{l}\Rightarrow$

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\lambda_n(t-x)}dt\right)\Delta\lambda_n$$

(2°) 令 $l\to+\infty$, 则

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\right)d\lambda=\begin{cases}f(x), & 若x是连续点,\\ \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, & 否则.\end{cases}\quad(*)$$

(*)式即为$f(x)$的傅氏积分及收敛情况, (*)还可变形为(*3)式

从(*)有: $f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\right)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda$ (*4)

在前一个积分中, 若令 $\lambda=-\tau$, 则 $d\lambda=-d\tau$, 且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\tau(t-x)}dt\,d\tau$$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda$, 代入(*4)式, 有:

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(e^{i\lambda(t-x)}+e^{-i\lambda(t-x)}\right)dt\right)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,2\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda\quad(9).$$

令 $\begin{cases} a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt \\ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt, \end{cases}$ 则在 $f(x)$ 的连续点 x 处，

$f(x)=\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda$，此即 (3) 式。

例题. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非周期函数，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积：$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ $=\int_{-1}^{1}1\,dx=2<+\infty$. 求 $f(x)$ 的傅氏积分，并计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解 (1). ∵ $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，故 $b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$ $=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1\sin\lambda t\,dt=0$，而 $a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\cos\lambda t\,dt=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}$，

(2). $f(x)\sim\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm1 \\ \frac{1}{2}, & x=\pm1.\end{cases}$

(3). 取 $x=1$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{\pi\lambda}d\lambda=\frac{1}{2}$，

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}d(2\lambda)=\frac{\pi}{2}$，令 $2\lambda=x$，则

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，这个反常积分称为 Dirichlet 积分.

利用不同函数 $f(x)$ 的傅氏积分的收敛情况，可以得到很多反常积分的积分值。