第一周作业答案

于俊骜

2024 年 3 月 3 日

习题 8.1

6

证明.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)=-\frac{3}{2}$$

□

9

(1)

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\mathbf{a},\mathbf{b})=3$$

(2)

$$|(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+3\mathbf{b})|^2=100|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=300$$

10

证明. 由对称性，只需证一个等号。事实上

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\Longrightarrow\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{0}\Longrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}=0\Longrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

□

12

证明.

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\left(1-\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})\right)=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

□

14

对于 $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=(4,-6,12)$，我们有

$$|\mathbf{c}|=\sqrt{16+36+144}=14$$

进而

$$\cos\alpha=\frac{(\mathbf{c},\mathbf{i})}{|\mathbf{c}|}=\frac{2}{7}\qquad\cos\beta=\frac{(\mathbf{c},\mathbf{j})}{|\mathbf{c}|}=-\frac{3}{7}\qquad\cos\gamma=\frac{(\mathbf{c},\mathbf{k})}{|\mathbf{c}|}=\frac{6}{7}$$

17

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,3,4)\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(1,3,4)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$$

即 A,B,C 共线。

23

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(2,-2,-3)\times(4,0,6)|=\frac{1}{2}|(-12,-24,8)|=14$$

26

由

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-2\neq0$$

知不共面。

习题 8.2

1

(1)

如图，该平面与三个坐标轴夹角相同。

(2)

如图，该平面与 x 轴垂直。

(3)

如图，该平面与 z 轴垂直。

(4)

如图，该平面与 Oyz 平面平行。

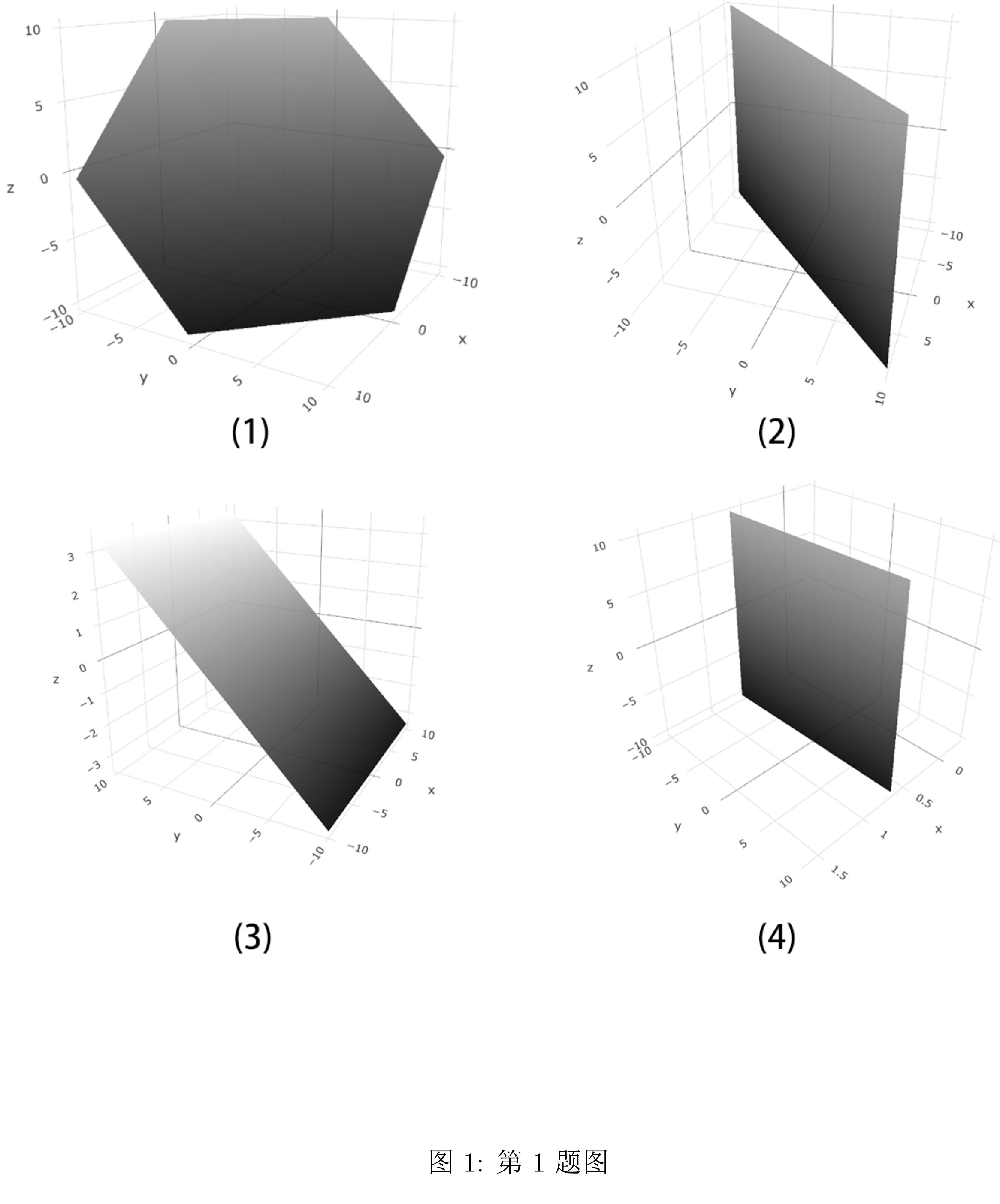

图 1: 第 1 题图

2

设平面方程为 $ax+bx+c+d=0$，则

$$\begin{cases} 2a-b+3c+d=0 \\ 3a+b+2c+d=0 \\ 3a-b+4c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=c \\ d=0 \end{cases}$$

于是所求平面的方程为

$$x-y-z=0$$

3

由题，该平面的一个法向量为 $(1,1,1)$，因此可设平面方程为 $x+y+z+d=0$，带入 $(5,-7,9)$ 得 $d=-2$。因此所求平面的方程为

$$x+y+z-2=0$$

6

不难得到平面方程为

$$x=-5$$

7

(1)

由题，法向量为 $\mathbf{n}_1=(2,-1,1),\mathbf{n}_2=(1,1,2)$，因此

$$\theta=\arccos\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

(2)

由题，法向量为 $\mathbf{n}_1=(2,1,2),\mathbf{n}_2=(3,-4,0)$，因此

$$\theta=\arccos\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\arccos\frac{2}{15}$$

14

(1)

由题，该平面有法向量 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,1)$，因此，可设方程为 $x-3y+z+d=0$。再带入 A,B 中点 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2})$，得到

$$2x-6y+2z-7=0$$

15

(1)

两平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 2), \mathbf{n}_2 = (0, 1, -3)$，则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-2, 3, 1)$$

因此直线方程为

$$(x, y, z) = (0, 2, 4) + t(-2, 3, 1)$$

16

截得题中直线的两平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -1), \mathbf{n}_2 = (3, -5, 2)$，则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -7, -19)$$

为其方向向量。进一步，可求得直线上一点 $(1, 0, -2)$。因此，其参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -2 - 19t \end{cases}$$

18

(1)

两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (5, -3, 3) \times (3, -2, 1) = (3, 4, -1)$$
$$\mathbf{b} = (2, 2, -1) \times (3, 8, 1) = (10, -5, 10)$$

因此夹角为

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\pi}{2}$$

19

(1)

错题。

20

(2)

两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (4, 1, -3) \times (0, 0, 1) = (1, -4, 0)$$
$$\mathbf{b} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$$

得到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，因此垂直。

进一步，联立四个方程知，存在交点 $(-2,-1,5)$。

21

(1)

直线的方向向量为

$$\mathbf{a}=(3,-2,0)\times(3,0,-1)=(2,3,6)$$

平面的法向量为 $\mathbf{n}=(6,15,-10)$，因此夹角为

$$\varphi=\arcsin\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{a}|}=\arcsin\frac{3}{7}$$

22

(1)

由题，直线的方向向量为 $\mathbf{a}=(1,2,-1)$。取直线上的点 $P(0,1,0)$，则线段 PP_0 在直线上的投影长度为

$$\left|\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right|=0$$

因此 PP_0 就是垂线段，长度为 $|\overrightarrow{PP_0}|=\sqrt{3}$。

23

(1)

两直线的方向向量分别为 $\mathbf{a}=(4,-3,1),\mathbf{b}=(-2,9,2)$。分别取两直线上一点 $A(9,-2,0),B(0,-7,2)$，由

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{AB}=245\neq 0$$

知两直线异面。

因此，两直线距离为

$$d=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}=7$$

29

由题，可设所求点为 $(6a,2a,-9a)$，将它与原点连线的中点坐标代入平面方程，解得 $a=-2$。因此所求对称点为 $(-12,-4,18)$。

30

设所求点的坐标为 (a,b,c)，将它与 $(1,2,3)$ 连线的中点坐标代入直线方程，得到

$$b=-3a+3 \qquad c=-2a+1$$

直线的方向向量为 $(1,-3,-2)$，故进一步地有

$$0=(1,-3,-2)\cdot((a,b,c)-(1,2,3))=14a \Longrightarrow a=0$$

因此所求对称点为 $(0,3,1)$。