

基于几何模型的多波束测线设计问题

摘要

多波束测深是海洋测绘的重要技术。本文主要研究了多波束测深在海底为坡面时的覆盖宽度模型、重叠率模型，并建立规划模型设计不同海域中测线的布设方案。

对于**问题一**，本文建立了覆盖宽度和重叠率的**平面几何模型**。首先提出覆盖宽度 W 和海底坡角 α 、换能器开角 θ 、水深 D 之间存在关系 $W = W(D, \alpha, \theta)$ ，运用正弦定理和其他几何关系确定覆盖宽度模型。接着利用基于 **Dice 指数** 提出的更一般化的重叠率定义，通过平面几何知识和覆盖宽度模型得到相邻测线之间的重叠率模型。最后将具体参数代入上述模型，使用 MATLAB 求解覆盖宽度 W 和重叠率 η 。

对于**问题二**，相较于问题一增加了新变量 β ：测线方向与海底坡面法向在水平面上的投影的夹角。基于问题一的模型，本文建立多方向测深的覆盖宽度模型 $W = W(D, \alpha, \beta, \theta)$ 。本文将立体几何问题转化为平面几何问题，从而得到新坡面 $\gamma(\alpha, \beta)$ 和 $\gamma'(\alpha, \beta)$ ，将原模型转换为问题一的模型： $W = W(D(\gamma'), \gamma, \theta)$ ，在坡面 γ 上讨论覆盖宽度 W ，在坡面 γ' 上计算水深 D 。求解时，先根据几何关系分析 β 为锐角时的具体模型，接着使用**共线和对称的转换**得到其他角度下的具体模型。最后将给定参数代入多方向测深的覆盖宽度模型，解出测量船的多波束覆盖宽度 W 。

对于**问题三**，需要为海底地形为坡面的矩形待测海域设计最优测线布设方案。本文先以西南角为原点建立平面直角坐标系，利用问题二的多波束覆盖宽度模型得到测线覆盖边界的直线方程。接着通过**蒙特卡洛方法**求解测线覆盖面积和相邻测线的重叠面积。在此基础上，本文以最短的测线总长度为目标，以实现全覆盖以及相邻条带之间的重叠率满足 10% ~ 20% 为约束条件建立**单目标规划模型**。为了降低决策空间的复杂度，本文分别讨论平行和扇形的布设方案，采用**遍历算法**，固定 β ，再使用**贪心算法**设计测线，得到最佳测线布设方案：最优方向角 $\beta^* = 90^\circ$ ，对应的测线的总长度为 96304m。

对于**问题四**，需要对有先验数据的海底地形不规则的待测海域设计测线。首先通过**二次多项式拟合**海底地形的曲面，得到海底曲面方程。接着通过**解析几何方法**求解出测线上任意一点处多波束的覆盖范围。在此基础上以最小漏测率、重叠率 > 20% 的部分长度最小和测线总长度最小为目标建立**多目标规划模型**，通过**线性加权化简**规划目标，使用贪心算法求解，遍历 β 得到最佳布设方案中测线的总长度为 43463m，最优方向角 $\beta^* = 72^\circ$ ，漏测海域百分比为 4.71%，重叠率超过 20% 的总长度为 0m。

关键词： 几何模型 Dice 指数 蒙特卡洛方法 贪心算法 多目标规划模型

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

海洋测绘研究湖泊及毗邻陆地的地理空间信息，作为一个测绘科学技术的重要分支，相比于陆地测绘，因其受到海洋环境的影响与常规测量技术在海洋中的限制，声学探测成为了主要的技术手段。

单波束测深就是一种利用声波传播特性来测量水体深度的技术。测量船向海底发射声波信号，记录声波从发射到接收的时间，计算出海水的深度。单波束测深由于单点发射的限制，相邻测线之间没有测量数据，测量效果不佳。

多波束测深系统由单波束测深发展而来，通过发射广角度声波和定向接收换能器阵，得到条带式的高密度水深数据，从而绘制出沿航线的一定宽度的海底三维地形，具有高分辨率、高精度、高效率的特点。

1.2 问题重述

多波束测深数据条带的覆盖宽度与换能器开角、水深有关，相邻条带之间一般有10% ~ 20% 的重叠率，使得数据完整而测量又相对便利。由于海底地形起伏不定，应当合理设置测线之间的间隔，使得条带之间的重叠率相对合理，不至于漏测影响测量效果或重叠过多降低测量效率。

问题一：若海底坡度为 α ，建立多波束测深系统覆盖宽度以及条带之间的重叠率的模型，并在换能器开角、坡度、中心点海水深度与测线距海域中心点距离确定时计算海水深度、覆盖宽度、重叠率。

问题二：若海底坡面法向量和测线在水平面上的投影夹角为 β ，建立条带覆盖宽度的模型，并在投影夹角、换能器开角、坡度、中心点海水深度与测线距海域中心点距离确定时计算条带覆盖宽度。

问题三：在确定待测海域长宽、换能器开角、坡度、中心点海水深度的情况下，设计一组将待测海域全覆盖、测量长度最短、条带重叠率符合要求的测线。

问题四：在待测海域已有单测线测深数据的情况下，布设尽可能全覆盖、总长度短、重叠率低的多波束测量的测线，并给出漏测海域百分比、测线总长度和重叠率超过要求的总长度。

二、问题分析

2.1 问题一分析

问题一首先定义覆盖宽度并结合 **Dice 指数** 的思想定义测线是否平行、海底是否平坦的四种情况下更一般化的重叠率。结合题目，覆盖宽度模型需要解决的是覆盖宽度 W 与海底坡度 α 、换能器开角 θ 、水深 D 的关系问题，即求解 $W = W(D, \alpha, \theta)$ 。第一步运用平面几何知识，根据三角函数和正弦定理得到多波束换能器的覆盖宽度表达式，建立覆盖宽度的模型。接着通过开始定义的重叠率，同样运用三角函数和正弦定理得到结合 Dice 指数思想的条带重叠率模型。

2.2 问题二分析

相比于问题一，问题二增加了测线方向与海底坡面法向量投影的角度 β ，覆盖宽度模型改为了覆盖宽度 W 与夹角 β 、海底坡度 α 、换能器开角 θ 、水深 D 四个变量的关系问题： $W = W(D, \alpha, \beta, \theta)$ 。对于每一个夹角 β 的测线，都可以将其理解为在一个坡度为 γ 的新坡面上的测线，新坡面的坡度与原坡面的夹角 β 和海底坡度 α 有关，即 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ 。通过三余弦定理和三角函数等立体几何知识得到新坡面的坡度和测线在新坡面处的水深，从而转化为问题一模型。

2.3 问题三分析

要对于确定的矩形待测海域设计一组最优测线，本文先根据海洋测深相关专业知识确定测线为直线形式。接下来需要设计测线与海底坡面法向量投影的角度，也就是测线的排列，本文分别考虑了平行排布和扇形排布。对于每一根测线，本文通过覆盖边界曲线表示其覆盖区域并使用蒙特卡洛模拟的思想求得测线覆盖面积和相邻测线之间的重叠面积。在此基础上，建立以最短的测线总长度为规划目标，测线在海域内、全覆盖和总重叠率合规为约束条件建立单目标规划模型，并使用贪心算法求解。

2.4 问题四分析

问题四的待测海域地形不规则，基于已有单波束测深数据，本文通过二次多项式拟合海底地形的曲面，得到海底曲面方程。接着通过几何方法求解出测线上任意一点处的测量船只在海底的覆盖范围，进而可以得到测线的覆盖边界和覆盖范围。在此基础上，以最小的漏测率、重叠率 $> 20\%$ 部分的总长度最小和测线总长度最小为规划目标建立多目标规划模型。

三、模型假设

1. 假设船体积大小可以忽略，可将船和接收换能器整体看成一个质点。
2. 假设多波束测深系统在某一时刻发出的波束能够被全部接收，并且波束足够多，能得到波束覆盖区域内的全部地形。
3. 假设开展测量前已经进行了横摇、纵倾和艏向偏差等相应参数的校正，设备能够正常运行，不存在系统误差。
4. 假设测量船在驶出矩形海域后不会中断多波束的发射与接收，仍然会继续探测海底地形。

四、符号说明

符号	说明	单位
W	多波束测深所得条带的覆盖宽度	m
S	条带在水平面上的投影面积	m^2
l_i	第 i 条测线	——
D	测量船处水深	m
d	相邻平行测线之间间距	m
η	多波束测深所得条带之间的重叠率	%
α	海底坡面与水平面夹角	rad
β	海底坡面法向量和测线在水平面上的投影夹角	rad
θ	换能器开角	rad

五、问题一模型建立与求解

5.1 指标定义

5.1.1 覆盖宽度 W

定义某一时刻多波束换能器在与航线垂直的平面内所发射出的所有波束能够探测到的海底地形在水平面上的投影宽度为覆盖宽度 W , 如图1.

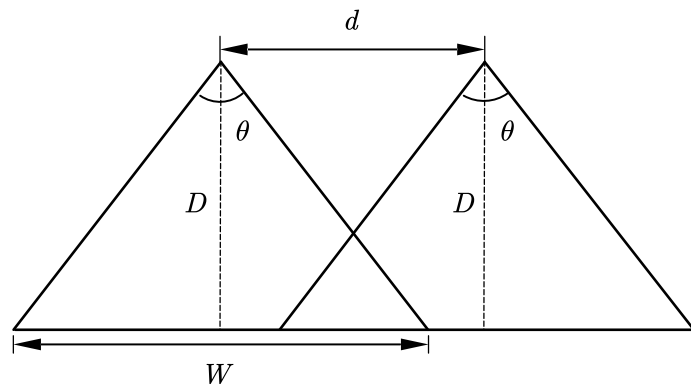


图 1 测线平行、地形平坦时重叠率示意图

5.1.2 重叠率 η

(1) 测线平行时且地形平坦

如图1，由题干可知，相邻条带之间的重叠率 η 为

$$\eta = 1 - \frac{d}{W} \quad (1)$$

(2) 测线平行而地形不平坦

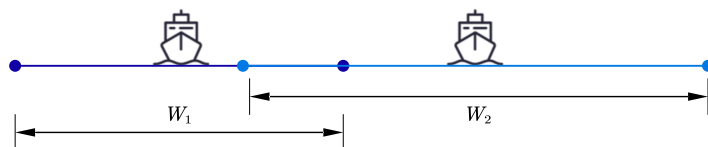


图 2 测线平行而地形不平坦时重叠率示意图

由于相邻两条测线的覆盖宽度不同，见图2。上述公式不再适用。故希望能够定义更一般化的重叠率，定义的要求有：

- 符合重叠率的思想，即衡量两对象之间的重合程度；
- 不会与题干给出的重叠率公式相矛盾。

Dice 指数 (图3) 是一种常用于定义两对象相似度的指标，常用于评价图像分割算法的好坏。本文结合 Dice 指数的思想，定义重叠率为：

$$\eta = \frac{2|W_1 \cap W_2|}{|W_1| + |W_2|} \quad (2)$$

(3) 测线不平行

条带之间互相不平行，难以通过测线某一点的切面图的重叠率代表两条带的整体重叠率。由此需要定义全局重叠率，通过两条带之间重叠面积与两条带面积之和表示，同

样基于 Dice 指数的思想，得到重叠率的计算公式：

$$\eta = \frac{2|S_1 \cap S_2|}{|S_1| + |S_2|} \quad (3)$$

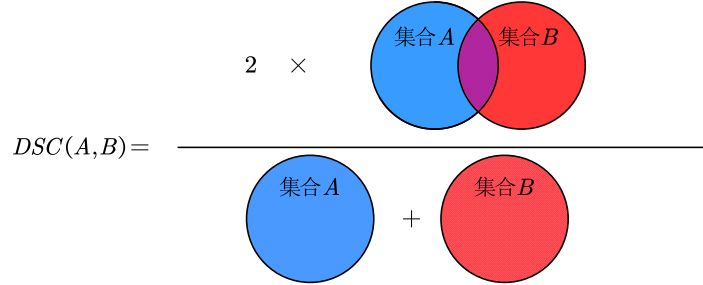


图 3 Dice 指数公式

综上所述，基于 Dice 指数思想定义的不同情况下的重叠率为：

表 1 不同情况下的重叠率

重叠率		海底	
		平坦	不平坦
测线	平行	公式1	公式2
	不平行	全局重叠率公式3	

5.2 多波束测深的覆盖宽度模型

关于海底坡度、换能器开角、水深确定时的覆盖宽度问题，可以视作覆盖宽度 W 与海底坡度 α 、换能器开角 θ 、水深 D 的关系问题：

$$W = W(D, \alpha, \beta) \quad (4)$$

由图4可知某一时刻多波束换能器在与航线垂直的平面内所发射出的所有波束能够探测到的海底地形在水平面上的投影宽度覆盖宽度 $W = (d_1 + d_2) \cos \alpha$ 。其中 d_1, d_2 分别为测线两侧的条带宽度。

对于边 d_1 的长度，根据正弦定理可得：

$$\frac{d_1}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\theta}{2} \right)} \quad (5)$$

解得

$$d_1 = \frac{D \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{D \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \quad (6)$$

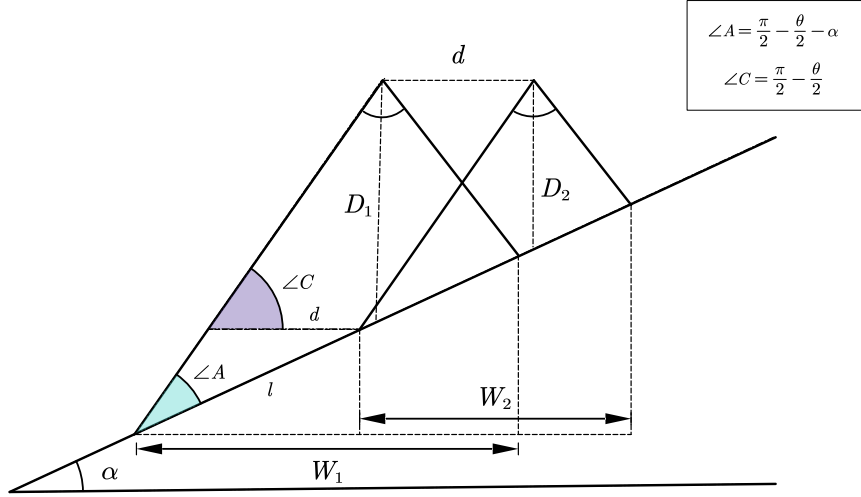


图 5 覆盖率模型示意图

利用公式11计算两条带的重叠部分：

$$|W_1 \cap W_2| = W_1 - l \cos \alpha = W_1 - \frac{d \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cos \alpha \quad (12)$$

最后得到的重叠率为：

$$\eta = \frac{2|W_1 \cap W_2|}{W_1 + W_2} = \left[W_1 - \frac{d \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \right] \cdot \frac{1}{W_1 + W_2} \quad (13)$$

其中 W_1, W_2 可利用公式8计算得到：

$$\begin{cases} W_1 = W(D_1, \alpha, \theta) \\ W_2 = W(D_2, \alpha, \theta) \end{cases} \quad (14)$$

综合式子13和14，可求得重叠率 η 与两测线深度的关系：

$$\eta(D_1, D_2) = \left[W(D_1, \alpha, \theta) - \frac{d \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \right] \cdot \frac{1}{W(D_1, \alpha, \theta) + W(D_2, \alpha, \theta)} \quad (15)$$

5.4 模型的求解

将题中所给的换能器开角 θ 、坡度 α 、中心点海水深度 D 和测量船距海域中心点距离 s 代入上述模型，使用 MATLAB 软件编程求解，具体结果见表2。代码见附录 C，所得结果如下并填入附件 result1.xlsx。

分析结果可知，随着测量船距中心点距离数值的增加：

1. 海水深度和覆盖宽度逐渐有规律的减小，即 $W \propto D$ ，这与推导得到的公式8相符合。

表 2 问题一结果

$s(\text{m})$	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
$D(\text{m})$	90.949	85.712	80.474	75.237	70	64.763	59.526	54.288	49.051
$W(\text{m})$	315.71	297.53	279.35	261.17	242.99	224.81	206.63	188.45	170.27
$\eta(\%)$	—	34.637	30.518	25.844	20.496	14.316	7.0951	-1.455	-11.738

2. 与前一条测线的重叠率也逐渐减小,这也符合常识,因为测量船距中心点距离数值 s 增加时,海水深度减小,测线的覆盖宽度减小,那么测线之间的重叠部分也就会减小。同时注意到最后两条测线的重叠率出现了负数,这是因为海水深度过浅时,相邻条带并未重合,出现了漏测的情况,应当尽量避免。

六、问题二模型建立与求解

该问中测线在与坡面法向量水平投影成角度 β 的方向,可以通过将测线转化到一个新的坡面上,测线方向与新坡面等深线平行。通过原坡面的夹角 β 和海底坡度 α 表示新坡面坡度即可转化为上问。

6.1 多方向测线的覆盖宽度模型

相比于第一问的覆盖宽度模型,本文新增加了变量 β ,覆盖宽度模型改为了覆盖宽度 W 与夹角 β 、海底坡度 α 、换能器开角 θ 、水深 D 四个变量的关系问题: $W = W(\alpha, \beta, \theta, D)$.

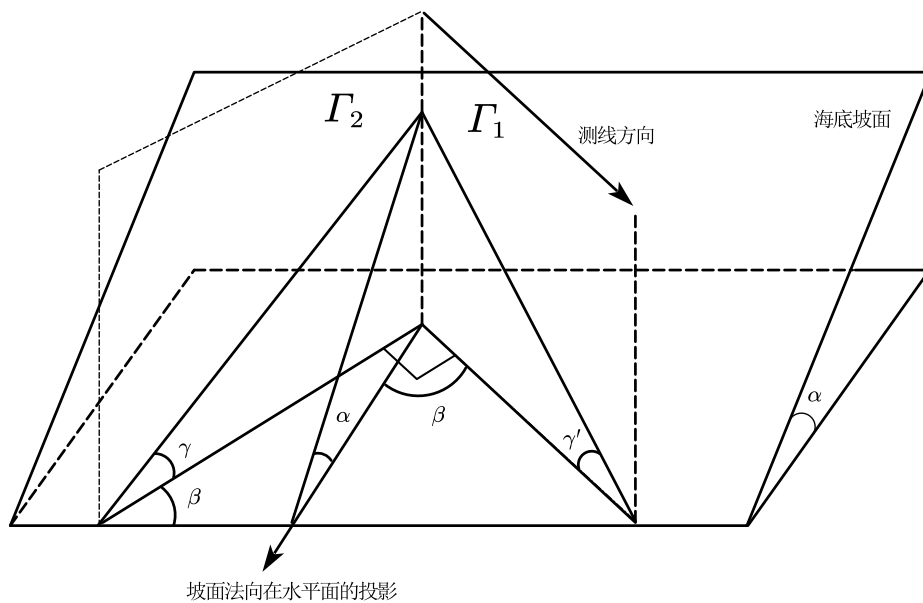


图 6 β 为锐角时的情况

为了计算当测线方向夹角为 β 时某时刻的覆盖宽度，我们做出某一时刻的示意图6，从图上我们可以得到以下信息：

1. 测线为一在平面 Γ_1 上的水平直线，要计算不同时刻船所在点的水深，平面 Γ_1 截取原斜面形成新斜面 γ' ，因此水深只取决于新斜面 γ' 和测量船距海域中心点距离 s ；
2. 某时刻发射的所有波束都在垂直航迹的平面 Γ_2 上，平面 Γ_2 截取原斜面形成新斜面 γ ，因此可在新斜面 γ 上讨论覆盖宽度问题；
3. 对于同一测线，两个新斜面的坡度 γ 和 γ' 不会随测量船距海域中心点距离 s 改变而改变。

因此，我们可以将问题转换为问题一中的模型：

$$W = W(D, \alpha, \theta) \longleftarrow W = W(D(s, \gamma'), \gamma, \theta) = W(D, \alpha, \beta, \theta) \quad (16)$$

其中新斜面坡度 γ 和 γ' 由原斜面坡度 α 以及测线方向夹角 β 决定。

6.1.1 β 为锐角

以 β 为锐角时，讨论该模型的建立方法。当 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时，如图6所示，由立体几何中边的关系可以得到：

$$\begin{cases} \tan \gamma' = \tan \alpha \cos \beta \\ \tan \gamma = \tan \alpha \sin \beta \end{cases} \quad (17)$$

代入问题一所得的覆盖宽度模型得到：

$$W = D \sin \frac{\theta}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\theta}{2} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{\theta}{2} \right) \right] \cos \gamma = \frac{2D \cos^2 \gamma \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\gamma} \quad (18)$$

其中水深公式为

$$D = D_0 + \tan \gamma' \cdot s \quad (19)$$

6.1.2 其他情况

(1) β 的共线转换

当 $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 时 (如图8)，对于任意一条方向与坡面法向量投影的夹角为 β 的测线，其测线方向的反向延长线总会形成另一条与之共线的测线，共线测线与坡面法向量投影的夹角角度为锐角 β' 。根据共线性和三角函数变换可知：

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta - \pi \\ \tan(\beta - \pi) &= \tan \beta \end{aligned}$$

将 $\beta \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 代入式17，得到的两个新坡面的坡度 γ 和 γ' 与测线方向夹角为 β' 时相同，唯一不同的是一个沿着新斜面 γ' 法向量在水平面的投影方向前进，一个沿着法

向量在水平面的投影方向后退，即改变的是水深的公式：

$$D = D_0 - \tan \gamma' \cdot s \quad (20)$$

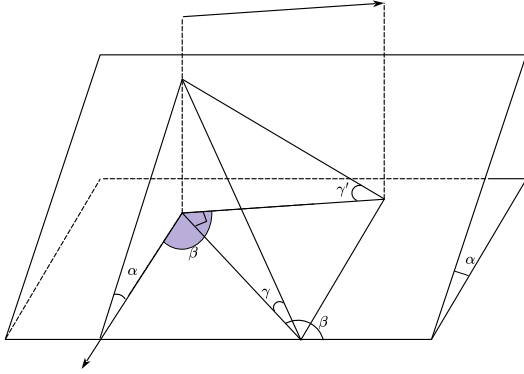


图 7 $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$ 的情况

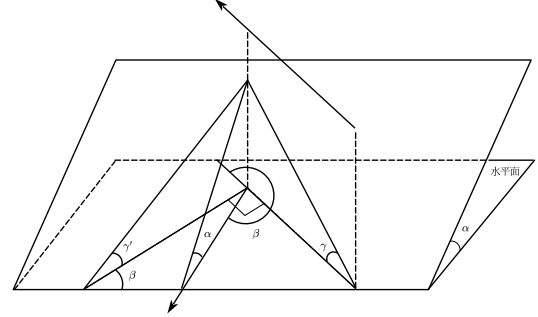


图 8 $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 的情况

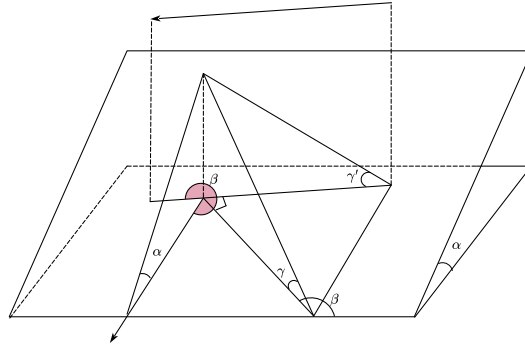


图 9 $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 的情况

(2) β 的对称转换

当 $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 时 (如图9)，对于任意一条方向与坡面法向量投影的夹角为 β 的测线，其以坡面法向量投影为对称轴的测线总是与坡面法向量投影形成锐角 β' 。根据对称性可知： $\beta' = 2\pi - \beta$ 。

而 β' 的覆盖宽度实际上与 β 的覆盖宽度对于法向量投影对称。由对称性可知， β' 的覆盖宽度实际上与 β 相同。将 β' 代入式17，得到 $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 时的覆盖宽度模型。

(3) β 的对称和共线转换

当 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 时 (如图7)，可以首先通过对称变换，得到一个 $\pi < \beta' < \frac{3}{2}\pi$ ，接着通过共线变换，得到一个锐角 β'' ，并有： $\beta'' = \pi - \beta$ 。将 β'' 代入式17，得到 β 的通过对称和共线转换的覆盖宽度模型。

6.1.3 多方向测线的覆盖宽度模型的汇总

综上所述，并单独考虑特殊情况 ($\beta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$)，侧线方向夹角为 β ，测量船距海域中心点距离 s ，其覆盖宽度 W 计算公式如下：

$$W = \begin{cases} \frac{2(D_0 + \tan \gamma' \cdot s) \cos^2 \gamma \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\gamma}, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \\ \frac{2(D_0 - \tan \gamma' \cdot s) \cos^2 \gamma \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\gamma}, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\beta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) : \begin{cases} \tan \gamma' = \tan \alpha \cos \beta \\ \tan \gamma = \tan \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) : \begin{cases} \tan \gamma' = -\tan \alpha \cos \beta \\ \tan \gamma = -\tan \alpha \sin \beta \end{cases}$$

根据三角函数性质最终化简为

$$W = \frac{2(D_0 + \tan \gamma' \cdot s) \cos^2 \gamma \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\gamma}, \beta \in [0, 2\pi) \quad (22)$$

6.2 模型的求解

将题中所给的换能器开角 θ 、坡度 α 、中心点海水深度 D 和测量船距海域中心点距离 s 代入上述模型，使用 MATLAB 软件编程求解，代码见附录 C，所得结果如下并填入附件 result2.xlsx。分析结果可知：

1. s 改变一个单位， β 与 $\pi + \beta$ 的改变量相同，这符合共线变换模型；
2. s 相同时， β 总与 $2\pi - \beta$ 的结果相同，这符合对称变换模型。

表 3 问题二结果（部分）

覆盖宽度/m	$s/\text{海里}$							
	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
$\beta/^\circ$	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16
	135	416.12	380.45	344.77	309.1	273.42	237.75	202.08
	225	416.12	380.45	344.77	309.1	273.42	237.75	202.08
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16

七、问题三模型建立与求解

要对于确定的矩形待测海域设计一组最优测线，本文欲以最短的测线总长度为目标建立单目标规划模型，需要考虑测线的形状、覆盖范围边界曲线、覆盖面积、相邻测线的重叠面积和这组测线的排布。

7.1 模型准备

7.1.1 测线布局

对于规则海域，相关的海域测量技术标准指出，应当尽可能的采取**直线测线**，以平行于等深线的方向排列，合理设计测线间隔使得结果分辨率高且操作经济便捷。对于地形突变导致漏测时，应该增设测线补测。而在遇到障碍物如河道的拐角时，可以采取扇形排布的方法。

7.1.2 覆盖边界曲线

以矩形待测海域的西南角为原点，平行于海平面建立坐标系。我们可以得到各个坐标点处的水深：

$$D(x, y) = -\tan \alpha \cdot x + (2 \times 1852 \tan \alpha + 110) \quad (23)$$

对于任意一条经过点 (x_i, y_i) ，与坡面法线向量投影的夹角也即与 x 轴的夹角为 β 的测线 l_i ，可以表示为：

$$l_i : y = \tan \beta (x - x_i) + y_i \quad (\beta \neq \frac{\pi}{2}) \quad (24)$$

其中点 (x_i, y_i) 满足

$$|2y_i - x_i| + |2y_i + x_i - 4 \times 1852| = 4 \times 1852 \quad (25)$$

即点 (x_i, y_i) 在矩形海域边界上。

该测线上某一点 (x, y) 对应的两侧条带宽度分别为 d_1, d_2 。由前文可知

$$\begin{aligned} d_1(x) &= D \sin \frac{\theta}{2} \sin^{-1}(\frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\theta}{2}) \cos \gamma \\ &= \frac{-\tan \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma(\beta))} \cdot x + \frac{(2 \times 1852 \tan \alpha + 110) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma(\beta))} = ax + b \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} d_2(x) &= \frac{D(x) \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma(\beta))} \\ &= \frac{-\tan \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma(\beta))} \cdot x + \frac{(2 * 1852 \tan \alpha + 110) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma(\beta))} = cx + d \end{aligned} \quad (27)$$

点 (x', y') 为点 (x, y) 在宽度 d_1 一侧覆盖边界直线上的对应点。

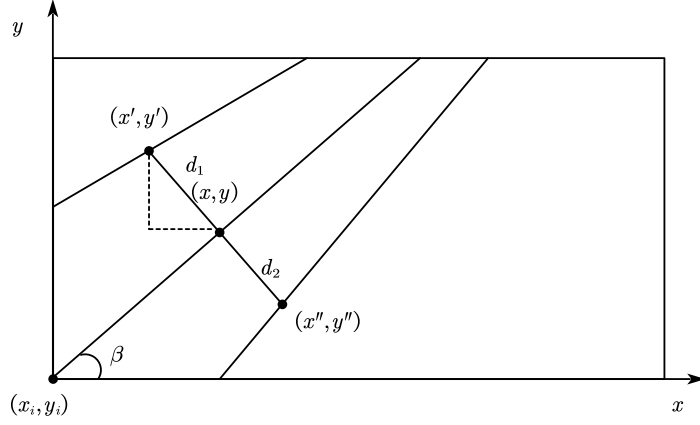


图 10 覆盖边界曲线方程的计算

由几何关系可以得到：

$$\begin{cases} x' = x - d_1 \sin \beta = (1 + a \sin \beta)x - b \sin \beta \\ y' = y + d_1 \cos \beta = (\tan \beta_i - a \cos \beta)x + y_i - \tan \beta_i x_i + b \cos \beta \end{cases} \quad (28)$$

联立直线方程24并消去参数 x ，得到一条覆盖边界曲线 $\Psi_1 : f_1(x, y) = 0$.

$$\Psi_1 : \frac{x' + b \sin \beta}{1 + a \sin \beta} = \frac{y' - y_i + \tan \beta_i x_i - b \cos \beta}{\tan \beta_i - a \cos \beta} \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} a = \frac{-\tan \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma(\beta))} \\ b = \frac{(2 \times 1852 \tan \alpha + 110) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma(\beta))} \end{cases} \quad (30)$$

同理可得到另一条覆盖边界曲线 $\Psi_2 : f_2(x, y) = 0$.

$$\Psi_2 : \frac{x'' - d \sin \beta}{1 + c \sin \beta} = \frac{y'' - y_i + \tan \beta_i x_i + d \cos \beta}{\tan \beta_i - c \cos \beta} \quad (31)$$

从而得到结论：当海底地形为坡面时，直线测线的覆盖边界是两条直线。

7.1.3 蒙特卡洛法求覆盖面积和重叠面积

一条测线对应的两条覆盖边界直线与矩形海域围成的多边形即为该测线测深的覆盖区域，多边形面积即为该测线的覆盖面积。

由于 β 和点 (x_i, y_i) 变化时，多边形的形状难以确定，本文使用蒙特卡洛的思想求解覆盖面积。蒙特卡洛的原理是随机抽样，其算法步骤如下：

Algorithm 1: 蒙特卡洛法求面积

Input: 矩形海域方程: $|2y - x| + |2y + x - 4 \times 1852| = 4 \times 1852$

两条直线方程 $\Psi_1: f_1(x, y) = 0, \Psi_2: f_2(x, y) = 0$

随机生成点的个数 N

Output: 两条覆盖边界直线与矩形海域围成区域的面积 S

```
1 for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do
2   /* 随机产生矩形海域内的点  $(x_i, y_i)$  */
3    $x_i = \text{random}(0, 4 \times 1852)$ ;
4    $y_i = \text{random}(0, 2 \times 1852)$ ;
5   if  $f_1(x_i, y_i) \cdot f_2(x_i, y_i) < 0$  then
6      $n \leftarrow n + 1$ ;
7   end
8 end
9  $S = (4 \times 1852) \times (2 \times 1852) \cdot n / N$ 
```

7.2 测线布设的单目标规划模型

目标函数:

以最短的测线组总长度为规划目标建立规划模型, 目标函数为:

$$\min \sum_{i=1}^n \text{length}(l_i) \quad (32)$$

其中 l_i 表示第 i 根测线, n 为布设的测线总条数, $\text{length}(l_i)$ 表示第 i 条测线的长度。

约束条件:

1. 测线必定经过海域边界上某个点:

$$|2y_i - x_i| + |2y_i + x_i - 4 \times 1852| = 4 \times 1852, i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

2. 测线的覆盖面积应该覆盖整个海域:

$$\bigcup_{i=1}^n S_i = S_{\text{海域}} \quad (34)$$

3. 相邻测线的重叠率应该在 10% ~ 20% 之间:

$$\eta(S_i, S_{i+1}) \in [10\%, 20\%], i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (35)$$

如果不对测线的角度作相应规定, 每条测线各有方向, 难以求解精确最优解。为了降低决策空间的复杂度, 本文接着对测线的排布加以约束。结合有关测量规程, 分平行和扇形的情况进行讨论。

7.2.1 平行布设测线

测线之间相互平行时，每条测线的 β 相同，因此增加了约束条件

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \beta_i = \beta_j \quad (36)$$

7.2.2 扇形布设测线

扇形的一组测线应该满足所有的测线 l_i 相交于一点，也就是扇形的圆心点 (x_0, y_0) ：

$$\exists (x_0, y_0), f_i(x_0, y_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

当扇形的圆心点取无穷远点，此时扇形布设为平行布设，即扇形布设包含了平行布设，相比之下，扇形布设的决策空间复杂度更高，约束更小，得到的最优解更接近精确最优解。

7.2.3 扇形布设模型求解

如果要进行扇形布设，首先要确定扇形中心点 (x_0, y_0) ，然后确定一组方向角 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ，其单目标规划模型为

目标函数：

$$\min \sum_{i=1}^n \text{length}(l_i) \quad (38)$$

约束条件：

$$\text{s.t.} \begin{cases} |2y_i - x_i| + |2y_i + x_i - 4 \times 1852| = 4 \times 1852 \\ \bigcup_{i=1}^n S_i = S_{\text{海域}} \\ \eta(S_i, S_{i+1}) \in [10\%, 20\%], i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \beta_i = \langle (x_i - x_0, y_i - y_0), (1, 0) \rangle, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (39)$$

考虑到该单目标模型决策空间复杂度过高，且由于本题海域地形是规则的坡面，使用平行布局就能得到一个近似最优解，故本文采用平行布局方案。

7.3 平行测线的规划模型的求解

7.3.1 基于平行布设的单目标规划模型

平行布设的目标函数与扇形布设相同，约束条件增强为：

$$\text{s.t.} \begin{cases} |2y_i - x_i| + |2y_i + x_i - 4 \times 1852| = 4 \times 1852 \\ \bigcup_{i=1}^n S_i = S_{\text{海域}} \\ \eta(S_i, S_{i+1}) \in [10\%, 20\%], i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \beta_i = \beta_0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (40)$$

7.3.2 直观分析

注意到测线的覆盖宽度 W 与横坐标坐标 x 和测线方向角 β 之间存在以下关系：

$$\begin{aligned} W &= D \sin \frac{\theta}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\theta}{2} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{\theta}{2} \right) \right] \cos \gamma \\ &= \frac{2[-\tan \alpha \cdot x + (2 \times 1852 \tan \alpha + 110)] \cos^2 \gamma(\beta) \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\gamma(\beta)} \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $\tan \gamma = \tan \alpha \sin \beta$. W 对 β 求偏导 (求导结果见附录 B)，置偏导结果为 0，

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \quad (42)$$

该结果表明，在其他条件一定时，测线方向角 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时，即沿着平行于等深线的方向，覆盖面积 W 取到极大值。

因此要使得测量长度最短，直观上要使每条测线的覆盖范围大从而尽量减少测线的数量，所以选取方向角时要沿着平行于等深线的方向；另一方面，本题的矩形海域东西宽、南北窄，不考虑坐标对测线覆盖范围的影响，测线平行于等深线的排布会增加布设的测线数量但同时每条测线长度增大，从而使得测量总长度基本不变。

综上所述，我们从直观上分析得出结论：最优方向角 $\beta^* \in (\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2}]$, ϵ 是一个较小的角度。

7.3.3 基于贪心算法求解模型

使用贪心思想时首先要确定初始解，也就是第一条测线的位置。由问题一的结果可以得到，覆盖面积 $S \propto$ 水深 D . 对于平行测线，要使总长度最短，测线数量需要尽可能少，重叠率也就要尽可能小。所以需要让水深最深的西侧的测线重叠面积最小，也就是由西向东、从左往右布设测线。此后布设的测线之间的重叠率也应当尽可能小。

那么一组平行测线的布设过程如下：

Step1: 确定 β 的值, 范围是 $0 \sim \frac{\pi}{2}$;

Step2: 从左往右开始布设, 最左侧的测线的左覆盖边界应该与矩形海域左侧边界重合或过矩形海域顶点;

Step3: 后一根测线与前一根测线的重叠率 $\eta = 10\%$;

Step4: 重复步骤 2、3, 当整片矩形海域处于某一条测线的右覆盖边界的一侧时布设结束。

以 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时为例, 以下是算法流程图。

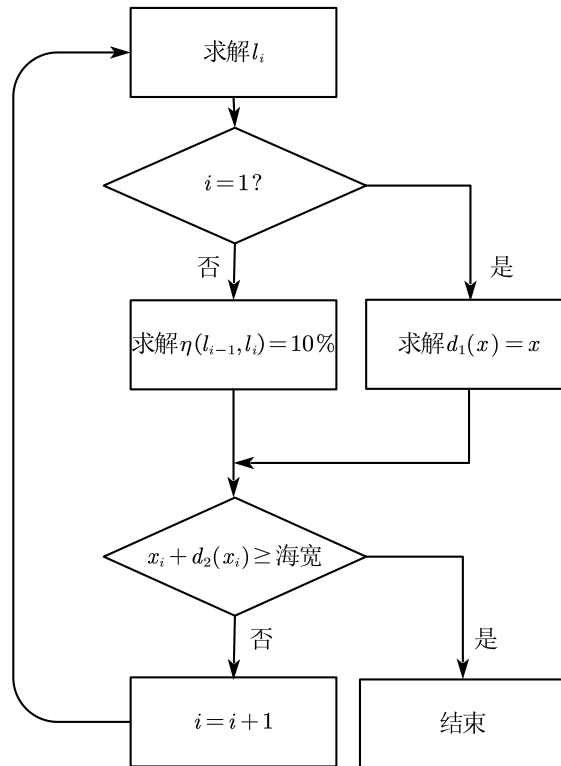


图 11 平行布局算法流程图

由第二问的结果可知, 根据共线性和对称性, 只需考虑 $0 < \beta < \pi/2$ 时测线的排布。

遍历所有的 β 计算量大, 可能会需要很长的时间才能得到最优解, 因此本文逐步调整步长:

1. 先以 10° 为步长分别搜索得到 10 个角度下的测线最短长度, 由于测线总长度连续变化, 其中长度最短的两组相邻 β 值之间是最优解所在;

2. 以 1° 为步长遍历上述两组相邻 β 值, 测线总长度最短时的 β 就是平行直线排布方案的最佳测线方向。

通过调整步长遍历 β , 得到测线总长度最短时 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 最短总长度为 96304m, 这符合我们的直观分析。测线排布方案如图12, 测线具体方程见附录 B.

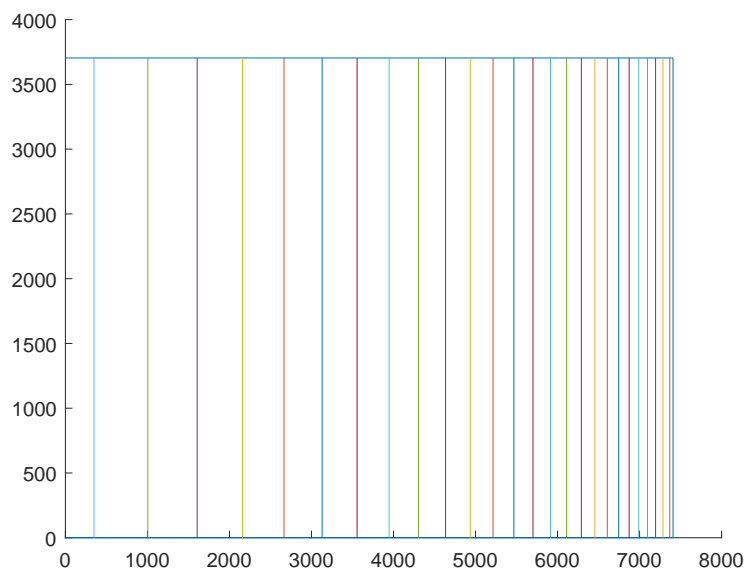


图 12 平行排布最优方案

八、问题四模型建立与求解

问题四的待测海域海底地形不再规则，结合单波束测深数据，首先分析海底地形，提出多目标规划模型布设测线。

8.1 基于先验数据的待测海域的地形分析

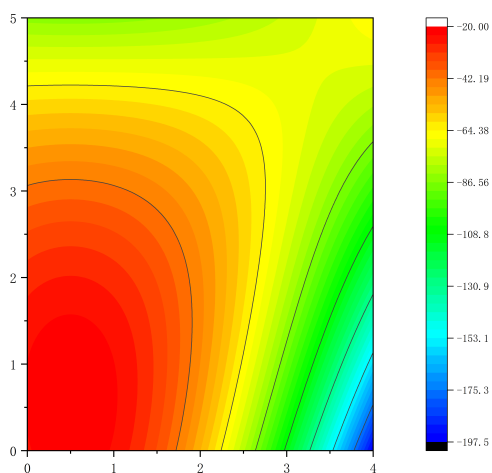


图 13 待测海域等深线图

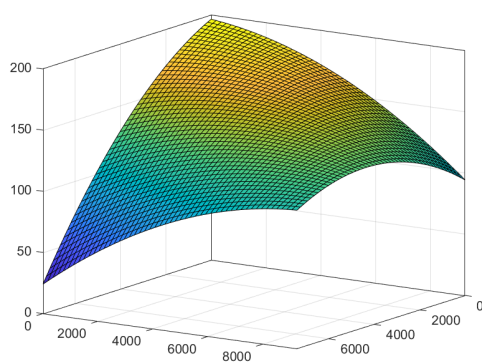


图 14 待测海域海底地形图

根据等高线图，海底是不平坦的。

以矩形海域西南角为原点建立坐标系，设海平面 $z_p = 200$. 考虑用二次多项式对海

底的形状进行拟合，得到的函数为：

$$z = 196.8 - 0.009503x - 0.002425y - 1.866 \times 10^{-6}x^2 - 2.799 \times 10^{-6}xy - 9.33 \times 10^{-7}y^2$$

拟合优度 $R^2 = 0.9648$, 拟合效果好。

8.2 海底不规则时的覆盖模型

如图15所示，测量船以直线在海平面上行驶，对于测线所在直线可以表示为：

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = z_p \end{cases} \quad (43)$$

海底的曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 也就是拟合得到的方程。

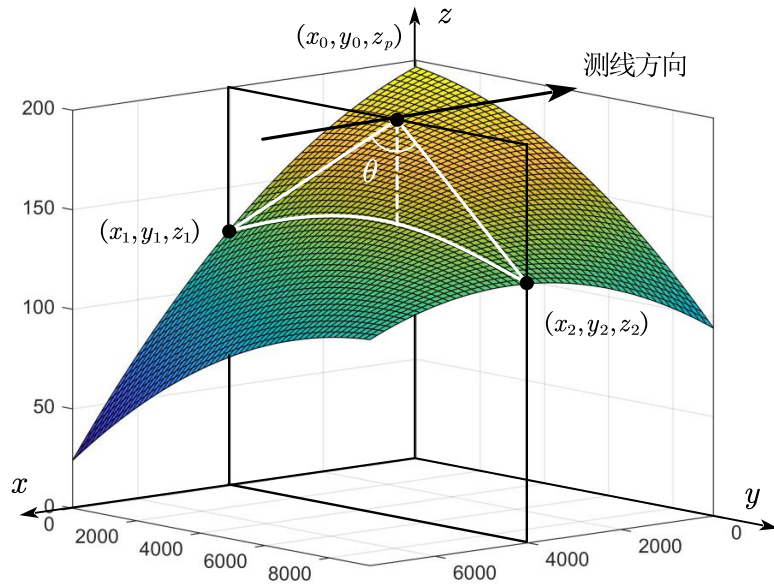


图 15 海底不规则时的覆盖范围

对于测线上一点 (x_0, y_0, z_p) , 已知

$$\text{直线法向量: } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0 \right)$$

$$\text{直线方向向量: } \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}, 0 \right)$$

可以得到该点处与测线垂直的平面方程：

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(y - y_0) = 0 \quad (44)$$

通过联立曲面方程和垂直平面方程可以得到垂直平面与曲面相交形成的曲线方程：

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(y - y_0) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

在该点处的覆盖范围，假设两端点分别是 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ，两点满足

$$\begin{cases} \langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_p - z_1), (0, 0, 1) \rangle = \theta \\ \langle (x_0 - x_2, y_0 - y_2, z_p - z_2), (0, 0, 1) \rangle = \theta \end{cases} \quad (46)$$

联立直线方程，并消去参数 x_0, y_0 即可得到覆盖边界曲线方程。

8.3 不规则海域测线布设的多目标规划模型

测深系统由 n 条相互平行的测线组成，所有测线的斜率均为 k_0 ，定义：

$$k_0 = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (47)$$

各自经过的海域边界点为 (x_i, y_i, z_p) 。

目标函数：

定义漏测率 ζ ，表示漏测海区占总待测海域面积的百分比。 $cross(l_i, l_j)$ 表示两条测线重叠区域中超过 20% 部分的总长度。

$$\begin{cases} \min \zeta = \left(1 - \frac{\bigcup_{i=1}^n S_i}{S_{\text{海域}}} \right) \times 100\% \\ \min \sum_{i=1}^{n-1} cross(l_i, l_{i+1}) \\ \min \sum_{i=1}^n length(l_i) \end{cases} \quad (48)$$

查阅海底测绘相关文献可知一般的多波束换能器的开角 θ 应该满足 $\theta \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi]$ 。

约束函数：

$$\text{s.t.} \begin{cases} \theta \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi] \\ |4y_i - 5x_i| + |4y_i + 5x_i - 20 \times 1852| = 20 \times 1852, i = 1, 2, \dots, n \\ k_i = k_0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (49)$$

8.4 模型的求解

求解时不考虑船在航行时开角 θ 会发生改变，即确定 θ 大小为 120° 。

采用类似问题三的贪心算法，根据覆盖宽度利用率最大的原则，从右往左布设，求解步骤为

Step1: 确定测线斜率 k_0 ;

Step2: 从右往左布设测线，第一条测线的右覆盖边界应该与矩形海域左侧边界重合或过矩形海域顶点；

Step3: 后一根测线与前一根测线的重叠率 $\eta = 20\%$ ；

Step4: 重复步骤 2,3, 当整片矩形海域处于某一条测线的左覆盖边界的一侧时布设结束。

同样逐步缩小步长遍历 k ，使用 MATLAB 求解，代码见附录 C。

开角 θ	最优斜率 k_0^*	测线的总长度/m	漏测率/%	重叠率超过 20% 部分总长度/m
120°	3.08	4.3463×10^4	4.71	0

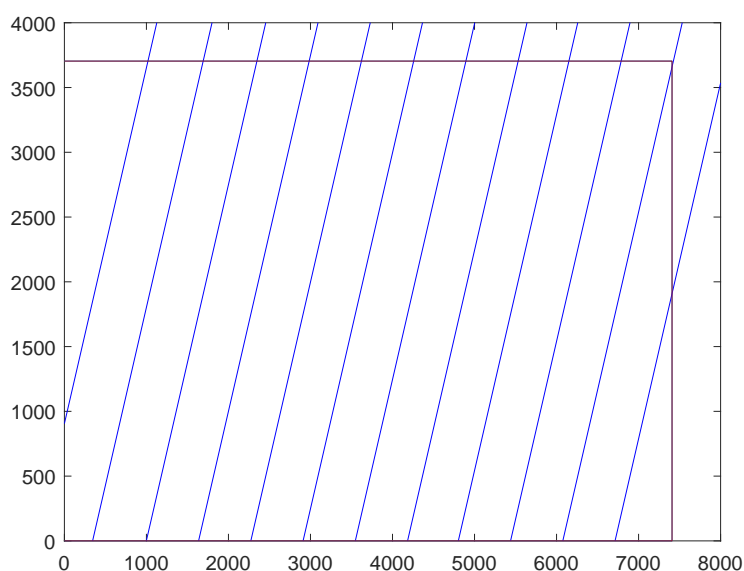


图 16 测线排布最优方案 (俯视图)

九、模型的优缺点分析

9.1 模型的优点

- 本文中的覆盖宽度模型通过几何意义推导和严格的数学证明而来，得到的结果准确、误差小；
- 对于重叠率的定义引进了 Dice 指数的思想，适用于普遍的情况，具有创新型和泛用性；
- 问题二、三、四的覆盖宽度模型建立在问题一模型的基础上，仅增加和改变了相应变量，使得全文模型思路清晰，具有整体性。

9.2 模型的缺点

- 第三问的单目标规划模型采用蒙特卡洛模拟求解，结果可能具有一定的随机性；
- 使用贪心算法布设平行射线时，结果可能会受到初始解的影响，且只能得到近似全局最优解。

9.3 模型的改进

本题问题三、问题四是测线的实际布设问题，开放度较高，精确解难以求得，提出以下几种模型的改进思路。

- **多扇形布设模型：**对于问题三的单目标规划模型进行扇形布设时，可以将扇形的数量推广至 n 个，扇形的个数越多，总体布设的决策空间复杂度更高，约束更小，得到的近似全局最优解就更优。同时也要考虑到扇形数量增加时，实际测量操作会更加复杂，需要对扇形数量进行合理的控制。
- **自适应开角模型：**求解问题四的多目标规划模型时，对于没有规定的换能器开角，本文采取了全局开角，将所有测线开角设为同一定值。实际情况下，可以灵活采取自适应开角，测量船在测量不同区域时可以随时根据不同的情况选择合适的开角，使得测量结果的分辨率高，操作又经济便捷。
- **测线为曲线的情况：**设计问题四的海底形状不规则的海域的测线布设方案时，本文只考虑了一组平行排布的直线测线，实际情况下，可以采用一组平行于海底等深线的曲线测线。曲线测线的规划问题约束更小，更能得到全局最优解。平行于等深线的测线符合第三问的理论结果： $\beta = 90^\circ$ 是最优角度，同时也与相关文献中推荐的布设方案吻合。

参考文献

- [1] 申家双, 葛忠孝, 陈长林. 我国海洋测绘研究进展 [J]. 海洋测绘, 2018, 38(4):11.DOI:CNKI:SUN:HYCH.0.2018-04-001.
- [2] 韩中庚. 数学建模方法及其应用 [M]. 高等教育出版社,2009.
- [3] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用 [M]. 国防工业出版社,2011.
- [4] 刘雁春, 肖付民. 海道测量学概论 [M]. 北京: 测绘出版社,2006
- [5] 王启, 刘胜旋. 多波束测深数据采集质量监控方法探讨 [J]. 地理空间信息,2021,19(07):81-84+7.

附录 A 支撑材料列表

文件夹名	文件名	含义
图片	figure	图片
数据	Result1.xlsx	问题一结果
	Result2.xlsx	问题二结果
代码	1 q1.m	问题一主程序
	2 q2.m	问题二主程序
	Chongdie.m	相邻测线重叠面积求解
	Findjiaodian.m	线与矩形交点求解
	3 Mianjizhanbi.m	相邻测线覆盖面积求解
	Q3xie.m	问题三一般情况平行排布求解
	Q3zhi.m	问题三特殊情况垂直于等深线排布求解

附录 B 结果部分

2.1 问题一结果

表 4 问题一结果

测线距中 心点的距 离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海 水 深 度/m	90.949	85.712	80.474	75.237	70	64.763	59.526	54.288	49.051
覆 盖 宽 度/m	315.71	297.53	279.35	261.17	242.99	224.81	206.63	188.45	170.27
与前一条 测线重叠 率/%	——	34.637	30.518	25.844	20.496	14.316	7.0951	-1.455	-11.738

2.2 问题二结果

表 5 问题二结果

覆盖宽度/m	s/海里							
	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
$\beta/^\circ$	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.1	273.42	237.75	202.08
	180	415.69	365.29	314.89	264.5	214.1	163.7	113.3
	225	416.12	380.45	344.77	309.1	273.42	237.75	202.08
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16

2.3 问题三结果

2.3.1 求偏导结果

$$\frac{2ac \cos(b) \cos(g)(\sin(2g) \cos(g) - \sin(g)(b + \cos(2g)))}{(c^2 \sin^2(b) + 1) (b + \cos(2g))^2}$$

其中

$$\begin{cases} a = 2D \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ b = \beta \\ c = \tan \alpha \\ g = \gamma \end{cases}$$

roots:

$$2c^2 \cos(2g) \cos^2(\pi n) + \pi c^2 \cos^2(\pi n) + 2\pi c^2 n \cos^2(\pi n) + 2 \cos(2g) + 2\pi n + \pi \neq 0, \quad \boxed{b = \pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.3.2 测线布设结果

表 6 测线布设方程

x=348.8	x=1004.9	x=1606.7	x=2158.8	x=2665.3	x=3129.9	x=3556.1
x=3947.1	x=4305.7	x=4634.8	x=4936.6	x=5213.5	x=5467.5	x=5700.5
x=5914.2	x=6110.3	x=6290.2	x=6455.2	x=6606.5	x=6745.4	x=6872.8
x=6989.6	x=7096.8	x=7195.2	x=7285.4	x=7368.1		

2.4 问题四

表 7 测线布设方程

$y = kx + 907.25$	$y = kx - 491.13$	$y = kx - 1941.46$	$y = kx - 3296$
$y = kx - 4686.93$	$y = kx - 6052.87$	$y = kx - 7430.37$	$y = kx - 8840$
$y = kx - 10540.27$	$y = kx - 11894.57$	$y = kx - 13193.10$	$y = kx - 14624.29$

附录 C 代码部分

q1.m

```

1 clear
2 alfa=1.5/180*pi %海底角度
3 D(5)=70; %海域中心点深
4 seta=120/180*pi; %测量张角
5 d=200;
6 for i=1:4
7     D(5-i)=D(5)+i*200*tan(alfa);
8 end
9 for i=1:4
10    D(i+5)=D(5)-i*200*tan(alfa);
11 end
12 D %海深
13 for i=1:9
14    j1=pi/2-alfa-seta/2;
15    d1=D(i)/sin(j1)*sin(seta/2);
16    j3=pi/2+alfa-seta/2;
17    d2=D(i)/sin(j3)*sin(seta/2);
18    w=d1+d2; %斜面长
19    kd(i)=w*cos(alfa); %宽度
20    if i>1
21        weng=d/sin(j1)*cos(seta/2); %?部分
22        cd=(kd(i-1)/cos(alfa)-weng)*cos(alfa); %重叠斜面
23        fgl(i)=cd/(kd(i)+kd(i-1))*2;
24    end
25 end

```

```

26 kd
27 fgl*100
28 xlswrite('111',fgl*100)
29 xlswrite('222',kd)
30 xlswrite('333',D)

```

q2.m

```

1 clear
2 beta=0:pi/4:2*pi;
3 alfa=1.5/180*pi;
4 D0=120;
5 s=(0:0.3:2.1)*1852;
6 seta=2/3*pi;
7 for i=1:length(beta)
8     for j=1:length(s)
9         gama_ = atan(tan(alfa)*cos(beta(i)));
10        gama = atan(tan(alfa)*sin(beta(i)));
11        w(i,j) = 2*(D0+tan(gama_)*s(j))*cos(gama)^2*sin(seta)/(cos(seta)+cos(2*gama));
12    end
13 end
14 xlswrite('444',w)

```

chongdie.m

```

1 function bili=chongdie(xi,yi,xii,yii,beta) %alfa seta 确定 求重叠面积
2
3 alfa=1.5/180*pi;
4 seta=120/180*pi;
5 beta_ = atan(tan(beta)/cos(alfa));
6 gama = asin(sin(beta_)*sin(alfa));
7
8 a = tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
9 b = (2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
10 c = tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
11 d = (2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
12
13 jishuqi=0;
14 MMM=50000;
15 for i=1:MMM
16     x999=rand*4*1852;
17     y999=rand*2*1852;
18     xx=x999;
19     yy=y999;
20
21     fc11=(xx+b*sin(beta))/(1+a*sin(beta))*(tan(beta)-a*cos(beta))-(-yii+tan(beta)*xii-b*cos(beta))-yy;
22
23
24     fc22=(xx-d*cos(beta))/(1+c*sin(beta))*(tan(beta)-c*cos(beta))-(-yi+tan(beta)*xi+d*cos(beta))-yy;
25     if fc22*fc11<=0
26         jishuqi=jishuqi+1;
27     end
28 end
29 bili=jishuqi/MMM;
30 end

```

mjzb.m

```

1  function bili=mianjizhanbi(xi,yi,beta) %alfa seta 确定
2
3  alfa=1.5/180*pi;
4  seta=120/180*pi;
5  beta_ =atan(tan(beta)/cos(alfa));
6  gama=asin(sin(beta_)*sin(alfa));
7
8  a=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
9  b=(2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
10 c=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
11 d=(2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
12
13 jishuqi=0;
14 MMM=50000;
15 for i=1:MMM
16     x999=rand*4*1852;
17     y999=rand*2*1852;
18     xx=x999;
19     yy=y999;
20
21     fc11=(xx+b*sin(beta))/(1+a*sin(beta))*(tan(beta)-a*cos(beta))-(-yi+tan(beta)*xi-b*cos(beta))-yy;
22
23
24     fc22=(xx-d*cos(beta))/(1+c*sin(beta))*(tan(beta)-c*cos(beta))-(-yi+tan(beta)*xi+d*cos(beta))-yy;
25     if fc22*fc11<=0
26         jishuqi=jishuqi+1;
27     end
28 end
29 bili=jishuqi/MMM;
30 end

```

findjiaodian.m

```

1  findjiaodian.m
2  function [xx,yy]= findjiaodian(fc0)
3  syms x
4
5  jx1=double(subs(fc0,x,0));
6  jx2=double(solve(4*1852==fc0));
7  jx3=double(solve(0==fc0));
8  jx4=double(subs(fc0,x,5*1852));
9  xx(1:4)=[0,jx2,jx3,5*1852];
10 yy(1:4)=[jx1,4*1852,0,jx4];
11
12 for ifind=1:4
13     if xx(ifind)>4*1852|xx(ifind)<0|yy(ifind)>2*1852|yy(ifind)<0
14         xx(ifind)=-999;
15         yy(ifind)=-999;
16     end
17 end
18 xx(xx== -999)=[ ];
19 yy(yy== -999)=[ ];
20 End
21 6.Q3xie.m

```

```

22 beta=(30)/180*pi
23
24 clearvars -except beta
25 beta
26 alfa=1.5/180*pi;
27 seta=120/180*pi;
28 beta_=(atan(tan(beta)/cos(alfa)));
29 gama=asin(sin(beta_)*sin(alfa));
30
31 a=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
32 b=(2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
33 c=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
34 d=(2*1852*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
35 %偏上边界方程
36 syms xi x yi
37 fc1=(x+b*sin(beta))/(1+a*sin(beta))*(tan(beta)-a*cos(beta))-(-yi+tan(beta)*xi-b*cos(beta));
38 subs(fc1,x,0);
39
40 xxi=(solve(subs(fc1,x,xi)==yi,xi));
41 y0=double(solve(subs(fc1,[x,xi],[0,xxi])==2*1852));
42 x0=double(subs(xxi,yi,y0)); %求解第一条线
43 hold on
44 xlim([0 6*1852])
45 ylim([0 3*1852])
46 plot([0,4*1852,4*1852,0],[0,0,2*1852,2*1852]) %长方形边框
47 xi=x0;
48 yi=y0;
49 [fc1,fc2]=qiubianjie(xi,yi,beta); %求边界方程
50 shangbianjie{1}=fc1;
51 xiabianjie{1}=fc2;
52 fcx(1)=x0;
53 fcy(1)=y0;
54 %fplot(fc1)
55 fplot(tan(beta)*(x-xi)+yi)
56 %fplot(fc2)
57
58 %mianjizhanbi(xi,yi,beta) %求面积占总体的比例
59
60 for i=2:9999 %检索合适的x, y
61 yzong=[fcy(i-1):-50:-99999];
62 xzong=[repelem(0,length(yzong))];
63 for bianli=1:length(yzong)
64 xi=xzong(i);
65 yi=yzong(bianli);
66 [fc1,fc2]=qiubianjie(xi,yi,beta); %求边界函数
67 if subs(fc1,x,0)>subs(xiabianjie{i-1},x,0)||...
68 double(solve(fc1==4*1852))<double(solve(xiabianjie{i-1}==4*1852))
69 scd=chongdie(fcx(i-1),fcy(i-1),xi,yi,beta);% x0是前一条线
70 %重叠率
71 cdlv=scd*2/(mianjizhanbi(xi,yi,beta)+mianjizhanbi(fcx(i-1),fcy(i-1),beta));
72 end
73 if cdlv>=0.1&&cdlv<=0.2
74 cdlv
75 break
76 end
77

```

```

78 end
79 shangbianjie{i}=fc1;
80 xiabianjie{i}=fc2;
81 fcx(i)=xi;
82 fcy(i)=yi;
83 %fplot(fc1)
84 fplot(tan(beta)*(x-xi)+yi)
85 %fplot(fc2)
86 if double(subs(fc2,x,4*1852))<=0
87 break
88 end
89 end
90
91 for iii=1:length(fcx)%计算每段长度
92 clear xx yy
93 syms x
94 fc0=tan(beta)*(x-fcx(iii))+fcy(iii);
95 jx1=double(subs(fc0,x,0));
96 jx2=double(solve(2*1852==fc0));
97 jx3=double(solve(0==fc0));
98 jx4=double(subs(fc0,x,4*1852));
99 xx(1:4)=[0,jx2,jx3,4*1852];
100 yy(1:4)=[jx1,2*1852,0,jx4];
101 for i=1:4
102 if xx(i)>4*1852|xx(i)<0|yy(i)>2*1852|yy(i)<0
103 xx(i)=-999;
104 yy(i)=-999;
105 end
106 end
107 xx(xx==-999)=[];
108 yy(yy==-999)=[];
109 luxianzongchangdu(iii)=((xx(1)-xx(2))^2+(yy(1)-yy(2))^2)^0.5;
110 end
111 sum(luxianzongchangdu)
112 hold off
113
114 luxianzongchangdu

```

q3zhi.m

```

1 clear
2 D=120;
3 alfa=1.5/180*pi;
4 seta=120/180*pi;
5
6 hold on
7 xlim([0 6*1852])
8 ylim([0 3*1852])
9 plot([0,4*1852,4*1852,0],[0,0,2*1852,2*1852]) %长方形边框
10
11 syms x
12 D_=D-tan(alfa)*(x-2*1852);
13 d1=D_*sin(seta/2)/sin(pi/2-alfa-seta/2);
14 d2=D_*sin(seta/2)/sin(pi/2+alfa-seta/2);
15 xx(1)=double(solve(d2==4*1852-x)) %记录x坐标

```

```

16
17 i=1;
18 DD=D-tan(alfa)*(xx(i)-2*1852);
19 dd1(i)=DD_*sin(seta/2)/sin(pi/2-alfa-seta/2); %记录x对应d1
20 dd2(i)=DD_*sin(seta/2)/sin(pi/2+alfa-seta/2); %记录x对应d2
21
22 for i=2:9999
23
24     xx(i)=double(solve((dd1(i-1)+d2-(xx(i-1)-x))/(dd1(i-1)+d2)*2==0.1));
25     DD=D-tan(alfa)*(xx(i)-2*1852);
26     dd1(i)=DD_*sin(seta/2)/sin(pi/2-alfa-seta/2);
27     dd2(i)=DD_*sin(seta/2)/sin(pi/2+alfa-seta/2);
28     plot([xx(i),xx(i)],[0,2*1852])
29
30     if xx(i)-dd1(i)<=0
31         disp('从高到低')
32         i
33         break
34     end
35 end

```

q4_jieguo.m

```

1 beta=(74)/180*pi
2 clearvars -except beta imm fglv zongcd chongdiecd
3
4 beta;
5 alfa=0.0104; %经过拟合的alfa角度
6 seta=120/180*pi;
7 beta_=atan(tan(beta)/cos(alfa));
8 gama=asin(sin(beta_)*sin(alfa));
9 xmax=4*1852;
10 ymax=5*1852;
11
12 a=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
13 b=(xmax/2*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2-gama);
14 c=tan(alfa)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
15 d=(xmax/2*tan(alfa)+110)*sin(seta/2)/cos(seta/2+gama);
16 %偏上边界方程
17 syms xi x yi
18 fc1=(x+b*sin(beta))/(1+a*sin(beta))*(tan(beta)-a*cos(beta))-(-yi+tan(beta)*xi-b*cos(beta));
19 subs(fc1,x,0);
20
21 xxi=(solve(subs(fc1,x,xi)==yi,xi));
22 y0=double(solve(subs(fc1,[x,xi],[0,xxi])==ymax));
23 x0=double(subs(xxi,yi,y0));%求解第一条线
24 hold on
25 xlim([0 6*1852])
26 ylim([0 7*1852])
27
28 %plot([0,xmax,xmax,0],[0,0,ymax,ymax]) %长方形边框
29 xi=x0;
30 yi=y0;
31 [fc1,fc2]=qiubianjie(xi,yi,beta); %求边界方程
32 shangbianjie{1}=fc1;

```

```

33 xiabianjie{1}=fc2;
34 fcx(1)=x0;
35 fcy(1)=y0;
36 %fplot(fc1)
37 %fplot(tan(beta)*(x-xi)+yi)
38 %fplot(fc2)
39
40 %mianjizhanbi(xi,yi,beta) %求面积占总体的比例
41
42 for i=2:9999 %检索合适的x, y
43 yzong=[fcy(i-1):-50:-99999];
44 xzong=[repelem(0,length(yzong))];
45 for bianli=1:length(yzong)
46 xi=xzong(i);
47 yi=yzong(bianli);
48 [fc1,fc2]=qiubianjie(xi,yi,beta); %求边界函数
49 if subs(fc1,x,0)>subs(xiabianjie{i-1},x,0)||...
50 double(solve(fc1==4*1852))<double(solve(xiabianjie{i-1}==4*1852))
51 scd=chongdie(fcx(i-1),fcy(i-1),xi,yi,beta);% x0是前一条线
52 %重叠率
53 cdlv=scd*2/(mianjizhanbi(xi,yi,beta)+mianjizhanbi(fcx(i-1),fcy(i-1),beta));
54 end
55 if cdlv>=0.1&&cdlv<=0.2
56 cdlv
57 break
58 end
59
60 end
61 shangbianjie{i}=fc1;
62 xiabianjie{i}=fc2;
63 fcx(i)=xi;
64 fcy(i)=yi;
65 %fplot(fc1)
66 %fplot(tan(beta)*(x-xi)+yi)
67 %fplot(fc2)
68 if double(subs(fc2,x,4*1852))<=0
69 break
70 end
71 end
72
73 for iii=1:length(fcx)%计算每段长度
74 clear xx yy
75 syms x
76 fc0=tan(beta)*(x-fcx(iii))+fcy(iii);
77 jx1=double(subs(fc0,x,0));
78 jx2=double(solve(5*1852==fc0));
79 jx3=double(solve(0==fc0));
80 jx4=double(subs(fc0,x,4*1852));
81 xx(1:4)=[0,jx2,jx3,4*1852];
82 yy(1:4)=[jx1,5*1852,0,jx4];
83 for i=1:4
84 if xx(i)>4*1852||xx(i)<0||yy(i)>5*1852||yy(i)<0
85 xx(i)=-999;
86 yy(i)=-999;
87 end
88 end

```



```

89 xx(xx==--999)=[];
90 yy(yy==--999)=[];
91 luxianzongchangdu(iii)=((xx(1)-xx(2))^2+(yy(1)-yy(2))^2)^0.5;
92 end
93 sum(luxianzongchangdu)
94 hold off
95
96 luxianzongchangdu
97
98 for imm=1:100
99     for i=1:length(luxianzongchangdu)
100         bianyi(i)=rand>=0.5;
101     end
102     bianyi
103
104
105     baoliu=find(bianyi==1);
106     by=find(bianyi==0);
107     nfcx=bianyi.*(fcx);
108     nfcx(by)=[];
109     nfcy=bianyi.*(fcy);
110     nfcy(nfcy==0)=[];
111     nlxcd=bianyi.*(luxianzongchangdu);
112     nlxcd(nlxcd==0)=[];
113     for i=1:length(nfcy)
114         nsbj(i)=shangbianjie{baoliu(i)};
115     end
116     for i=1:length(nfcy)
117         nxbj(i)=xiabianjie{baoliu(i)};
118     end
119
120     zcd=sum(nlxcd);
121     cdcd=0;
122     for i=1:length(nfcy)-1
123         if subs(nxbj(i),x,0)<subs(nsbj(i+1),x,0)||...
124             double(solve(nxbj(i)==4*1852))>double(solve(nsbj(i+1)==4*1852))
125             scd=chongdie(nfcx(i),nfcy(i),nfcx(i+1),nfcy(i+1),beta);% x0是前一条线
126             %重叠率
127             cdlv=scd*2/(mianjizhanbi(fcx(i+1),fcy(i+1),beta)+mianjizhanbi(fcx(i),fcy(i),beta));
128             %重叠长度;
129             cdcd=(nlxcd(i)+nlxcd(i+1))/2*cdlv/0.4+cdcd;
130         end
131     end
132     fgl=1-sum(nlxcd)/sum(luxianzongchangdu);
133     mubiao(imm)=fgl+zcd/100000+cdcd/10000;
134     end
135     fglv(imm)=fgl;
136     zongcd(imm)=zcd;
137     chongdiecd(imm)=cdcd;
138     end
139     [xiwiq,saka]=sort(mubiao)
140     mubiao
141     74
142     fglv(86)+0.20
143     zongcd(86)
144     chongdiecd(86)

```