Thi Online - Tính đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm số

Câu 1: ***(10 Điểm)***

Tính đạo hàm $f^{(50)}(x)$ **với** $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^{5x+2}$.

Xem lời giải

Giải. Ta có:

$$f^{(50)}(x) = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^{k}(2x^2 + x + 1)^{(k)}(e^{5x+2})^{(50-k)}.$$

$$= 5^{50}(2x^2 + x + 1)e^{5x+2} + 50(4x + 1)5^{49}e^{5x+2} + 1225.4.5^{48}e^{5x+2}.$$

Câu 2: ***(10 Điểm)***

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. **Tính** $f^{(100)}(0)$.

Xem lời giải

Giải. Ta có $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

Suy ra

$$f^{(100)}(x) = 2\left[(-1)^{100}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\tfrac{1}{2}-99\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-100}\right]$$

$$-\left[(-1)^{100}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\tfrac{1}{2}-99\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-100}\right]$$

$$= \frac{3.5\ldots199}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{3.5\ldots.197}{2^{100}}(1-x)^{\frac{197}{2}}.$$

Do đó $f^{(100)}(0) = \frac{3.5\ldots197}{2^{100}}(199.2 + 1) = 399\frac{(197)!!}{2^{100}}$, trong đó
$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\ldots5.3.1; (2n)!! = 2n(2n-2)\ldots6.4.2.$

Câu 3: ***(10 Điểm)***

Tính $f^{(100)}(x)$ **biết** $f(x) = x^2\cos x$.

Xem lời giải

Giải. Ta có:

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(100-k)}$$

$$= x^2\cos(x + \tfrac{100\pi}{2}) + 100.2x.\cos(x + \tfrac{99\pi}{2}) + 4950.2.\cos(x + \tfrac{98\pi}{2})$$

$$= x^2\cos x + 200x\sin x - 9900\cos x.$$

Câu 4: ***(10 Điểm)***

Tính đạo hàm cấp cao $y^{(5)}(x)$ **của hàm số** $y = \ln(2x^2 - x)$.

Xem lời giải

Giải. Ta có: $y' = \frac{4x-1}{2x^2-x} = \frac{4x-1}{x(2x-1)} = \frac{4}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = \frac{4}{2x-1} - \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x}$.

Vậy $y^{(5)}(x) = \left(\frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x}\right)^{(4)} = 2\frac{2^4(-1)^4 4!}{(2x-1)^5} + \frac{(-1)^4 4!}{x^5} = 24\left(\frac{32}{(2x-1)^5} + \frac{1}{x^5}\right)$.

Câu 5: ***(10 Điểm)***

Tính đạo hàm cấp cao $f^{(100)}(0)$ **của hàm số** $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$.

Xem lời giải

Giải. Ta có:

$$f(x) = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right).$$

$$f^{(100)}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{(-1)^{100}100!}{\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}} - \frac{(-1)^{100}100!}{\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}}\right)$$

$$f^{(100)}(0) = \frac{100!}{\sqrt{3}i}\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}} - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}}\right) = \frac{100!}{\sqrt{3}i}(-\sqrt{3}i) = -100!$$

Bước cuối bạn đọc thay dạng lượng giác số phức vào để rút gọn.

Câu 6: ***(10 Điểm)***

Tính đạo hàm cấp cao $y^{(99)}(0)$ **của hàm số** $y = \arcsin x$.

Xem lời giải

Giải. Ta có:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)y' = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow -2xy' + (1-x^2)y'' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -xy'$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

Do đó $((1-x^2)y'' - xy')^{(n)} = 0$ và

$$(1-x^2)y^{(n+2)}(x) - n.2x.\,y^{(n+1)}(x) - n(n-1)y^{(n)}(x) - xy^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) = 0.$$

$$\Rightarrow y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0) \Rightarrow y^{(99)}(0) = 97^2y^{(97)}(0) = \ldots = (97.95...3.1)^2y'(0) = (97!!)^2.$$

Chú ý $97!! = 97.95.93...3.1$

<u>Câu 7:</u> ***(10 Điểm)***

Tính đạo hàm cấp cao $y^{(100)}(x)$ **của hàm số** $y = x^2\ln(2x-3)$.

Xem lời giải

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} y^{(100)}(x) &= x^2(\ln(2x-3))^{(100)} + C_{100}^{1}.2x(\ln(2x-3))^{(99)} + C_{100}^{2}.2(\ln(2x-3))^{(98)} \\ &= x^2.\frac{(-1)^{99}.2^{100}.99!}{(2x-3)^{100}} + 200x.\frac{(-1)^{98}.2^{99}.98!}{(2x-3)^{99}} + 9900.\frac{(-1)^{97}.2^{98}.97!}{(2x-3)^{98}}. \end{aligned}$$