

Numpy 基础

Table of Contents

第一章 数组	3
1.1 创建数组	3
1.2 数组运算效率	6
1.3 数组的索引	7
第二章 数组方法	9
2.1 聚合与统计方法	9
2.2 形状操作方法	11
2.3 排序和搜索方法	12
2.4 数组的数学运算	12
第三章 Random 子库	15
3.1 例, t 分布的厚尾特征	15
3.2 例, 中心极限定理	16
3.3 通用函数	19
3.4 例: 通用函数	19
3.5 例: 洛伦茨曲线和基尼系数	21
3.6 基尼系数	23

本部分简要介绍 Numpy 的基础用法，并用几个例子说明随机数生成器的作用。

第一章 数组

1.1 创建数组

有许多种方法创建数组，下面是一些简单的例子，使用 `np.array()` 函数，将列表、元组转化为数组：

```
import numpy as np

a = np.array([1, 2, 3, 4])
print(a)
```

```
[1 2 3 4]
```

注意，与列表不同，Numpy 数组只能包含相同类型的数据，下面的例子中，`np.array()` 函数自动将列表中的整数转换为浮点数：

```
b = np.array([3.14, 4, 2, 3])
b
```

```
array([3.14, 4. , 2. , 3. ])
```

列表总是一维的，Numpy 数组可以是多维的，例如下面的例子使用：

```
data = np.array([[1.5, -0.1, 3],
                 [0, -3, 6.5]])
data
```

```
array([[ 1.5, -0.1,  3. ],
```

```
[ 0. , -3. ,  6.5]])
```

数组 `data` 是二维数组，可以查看属性 `ndim` 和 `shape`:

```
data.ndim
data.shape
```

```
(2, 3)
```

可以对 `data` 进行通常的数学运算:

```
print(data * 10)
print(data + data)
```

```
[[ 15.  -1.  30.]
 [  0. -30.  65.]]
[[ 3.  -0.2  6. ]
 [ 0.  -6.  13. ]]
```

Numpy 也有函数来生成一些特定格式的数组, 如表 Table 1.1 所示:

Table 1.1: Numpy 中生成数组的函数

函数名	描述
<code>array</code>	将输入数据（列表、元组、数组或其他序列类型）转换为 <code>ndarray</code> ，可以自动推断或显式指定数据类型；默认会复制输入数据
<code>asarray</code>	将输入转换为 <code>ndarray</code> ，如果输入已经是 <code>ndarray</code> ，则不会进行复制
<code>arange</code>	类似于内置的 <code>range</code> ，但返回的是 <code>ndarray</code> 而不是列表
<code>ones</code> , <code>ones_like</code>	生成给定形状和数据类型的全 1 数组； <code>ones_like</code> 以另一个数组为模板，生成相同形状和数据类型的全 1 数组
<code>zeros</code> , <code>zeros_like</code>	类似于 <code>ones</code> 和 <code>ones_like</code> ，但生成的是全 0 数组
<code>empty</code> , <code>empty_like</code>	通过分配新内存创建新数组，但不会像 <code>ones</code> 和 <code>zeros</code> 那样填充值

函数名	描述
<code>full</code> ,	生成给定形状和数据类型的数组，所有值都设置为指定的
<code>full_like</code>	“填充值”； <code>full_like</code> 以另一个数组为模板，生成相同形状和数据类型的填充值数组
<code>eye,identity</code>	生成单位矩阵（对角线为 1，其余为 0）

下面是一些例子：

```
zeros = np.zeros(10)
print(zeros)
ones = np.ones((2,3), dtype=float)
print(ones)
# 生成零矩阵
idents = np.identity(3)
print(idents)

evens = np.arange(0, 20, 2)
print(evens)
grids = np.linspace(0, 1, 21)
print(grids)
```

```
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

```
[[1. 1. 1.]
```

```
 [1. 1. 1.]]
```

```
[[1. 0. 0.]
```

```
 [0. 1. 0.]
```

```
 [0. 0. 1.]]
```

```
[ 0  2  4  6  8 10 12 14 16 18]
```

```
[0.   0.05 0.1  0.15 0.2  0.25 0.3  0.35 0.4  0.45 0.5  0.55 0.6  0.65
 0.7  0.75 0.8  0.85 0.9  0.95 1.   ]
```

Numpy 中 `random` 子库包含丰富的生成随机数的函数，用来生成数组进行模拟运算。如 `np.random.normal()` 可以生成正态分布随机数、`np.random.randint()` 用来生成随机整数：

```
# 生成正态分布
nums_norm = np.random.normal(loc=0, scale=1, size=(4, 3))
print(nums_norm)
nums_int = np.random.randint(low=1, high=11, size=(2, 10))
print(nums_int)
```

```
[[-0.68826162 -0.18377553  1.1458363 ]
 [ 0.74602491  0.18517515  0.49801547]
 [ 0.06051134 -0.66286487  0.63258733]
 [-0.4223384  -0.61099094 -0.21211755]]
[[5 9 5 8 2 9 9 9 9 5]
 [3 2 9 1 9 2 3 9 7 8]]
```

1.2 数组运算效率

数组采用的是向量化操作，运算速度比列表要快许多。让我们通过一个简单的例子来直观感受两者的速度差异：对一百万个元素的集合求平方运算，一种使用列表推导式，一种采用数组。

```
import numpy as np
import time
#
list_data = list(range(1000000))
array_data = np.arange(1000000)

# 使用列表推导式进行运算
start_time = time.time()
list_result = [x ** 2 for x in list_data]
end_time = time.time()
print(f"Time: {end_time - start_time} s")

# 使用 NumPy 的向量化运算
start_time = time.time()
```

```
array_result = array_data ** 2
end_time = time.time()
print(f"Time: {end_time - start_time} s")
```

Time: 0.05298352241516113 s

Time: 0.0018782615661621094 s

可见列表方式运算耗费的时间是数组运算的几十倍。

1.3 数组的索引

注意索引与列表一样，从 0 开始，在选择元素时不包括右侧。

```
z = np.array((1,2,3,4,5))
z[0]
z[0:2]
z[-1]
z[::2]
z[::-1]
```

array([5, 4, 3, 2, 1])

2 维数组用类似行和列的方式进行切片：

```
z = np.array([[1,2],
              [3, 4]])
z[0, 0]
z[0, :]
z[:, 1]
```

array([2, 4])

第二章 数组方法

数组方法众多，

2.1 聚合与统计方法

这些方法用于对数组中的数据进行汇总计算，返回一个单一的值或一个较小的数组。例如：

- `arr.sum()`: 计算数组所有元素的总和，默认是所有值之和；
- `arr.mean()`: 计算数组元素的平均值。
- `arr.min()`, `arr.max()`: 找出数组中的最小值和最大值。
- `arr.std()`, `arr.var()`: 计算数组的标准差和方差。
- `arr.argmin()`, `arr.argmax()`: 返回数组中最小值或最大值所在的索引。

要注意在 2D 数组时,参数 `axis = 0` 按列求和(默认),或 `arr.sum(axis=1)` 按行求和。

```
import numpy as np
np.random.seed(123)
x = np.random.normal(loc=0, scale=1, size=(100, 2))
x.sum(axis=0)
x.mean(axis=0)
x.std(axis=0)
```

```
array([0.98109429, 1.10461422])
```

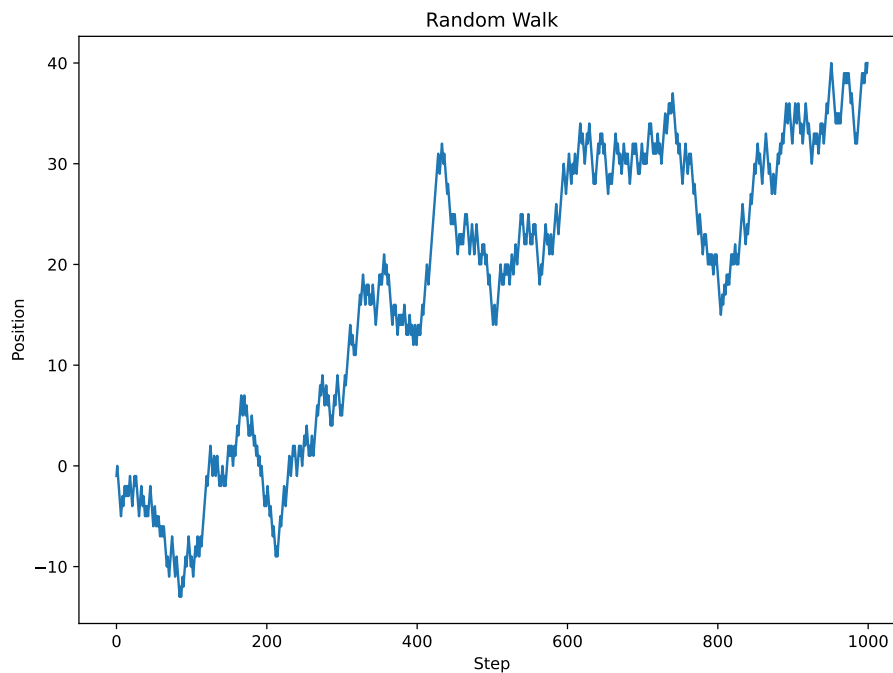
要寻找最大/小值所处的位置，可以使用：

```
x[x.argmax(axis=0)]
```

```
array([[2.39236527, 0.41291216],  
       [0.71226464, 2.59830393]])
```

另外，累积求和或乘积也是常见的运算。下面是一个简单随机游走过程。假设独立的随机变量， Z_1, Z_2, \dots, Z_n ，每一个变量分别有 50% 的概率取值 1 或 -1。设 $S_0 = 0$ ， $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ 是一个简单随机游走过程。

```
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
np.random.seed(123)  
n_steps = 1000  
steps = np.random.choice([-1, 1], size=n_steps)  
walk = np.cumsum(steps)  
#  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))  
ax.plot(walk)  
ax.set_title('Random Walk')  
ax.set_xlabel('Step')  
ax.set_ylabel('Position')  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```



2.2 形状操作方法

这些方法用于改变数组的形状或维度，但通常不会改变数组中的数据。

- `arr.reshape(shape)`: 返回一个具有新形状的数组，但原始数组不变。例如，`arr.reshape(2, 3)`。
- `arr.T`: 返回数组的转置。这是一个属性，而非方法，但功能上属于形状操作。
- `arr.flatten()`: 返回一个一维数组的副本。
- `arr.transpose()`: 也是返回数组的转置，与 `arr.T` 类似。

```
arr = np.arange(12).reshape(3, 4)
arr.T
```

```
array([[ 0,  4,  8],
       [ 1,  5,  9],
       [ 2,  6, 10],
```

```
[ 3,  7, 11]])
```

2.3 排序和搜索方法

这些方法用于对数组进行排序或查找特定元素:

- `arr.sort()`: 对原始数组进行就地排序。
- `np.sort(arr)`: 返回一个已排序的数组副本, 不改变原始数组。
- `arr.argsort()`: 返回排序后元素的索引, 而不是排序后的值。
- `np.where()`: 这是一个函数, 但常用于搜索操作。它根据条件返回满足条件的元素的索引。

```
np.where(arr>4, "High", "Low")
```

```
array([[ 'Low', 'Low', 'Low', 'Low'],  
       [ 'Low', 'High', 'High', 'High'],  
       [ 'High', 'High', 'High', 'High']], dtype='<U4')
```

2.4 数组的数学运算

注意, 运算符 `+`, `-`, `*`, `/` 和 `**`, 都是逐元素运算。例如:

```
a = np.array([1,2,3,4])  
b = np.array([5,6,7,8])  
a + b  
a * b  
a + 10  
a * 10  
# 2D array  
A = np.ones((2,2))  
B = np.ones((2,2))  
A + B  
A+10
```



```
A * B
(A+1) ** 2
```

```
array([[4., 4.],
       [4., 4.]])
```

可以使用 `@` 或 `np.dot()` 进行矩阵乘法。如果是向量则计算内积。

```
A = np.array([[1,2],
               [3,4]])
B = np.array([[5,6],
               [7,8]])

A@B
#or
np.dot(A,B)
#
b = np.array([0, 1])
A@b
```

```
array([2, 4])
```

一个常用的矩阵运算是特征根和特征向量：

$$Ae = \lambda e$$

Numpy 线性代数子库中的 `eig()` 函数可以计算特征根和对应的特征向量：

```
A = np.array([[1, 2],
               [3, 4]])
eig, vec = np.linalg.eig(A)
#print(eig)
print(vec[:, 0])
```

```
[-0.82456484  0.56576746]
```

主要与第 i 个特征根对应的特征向量是特征向量矩阵的第 i 列，`vec[:,i]`。

第三章 Random 子库

Numpy 中有大量的与随机数生成器有关的函数。

3.1 例, t 分布的厚尾特征

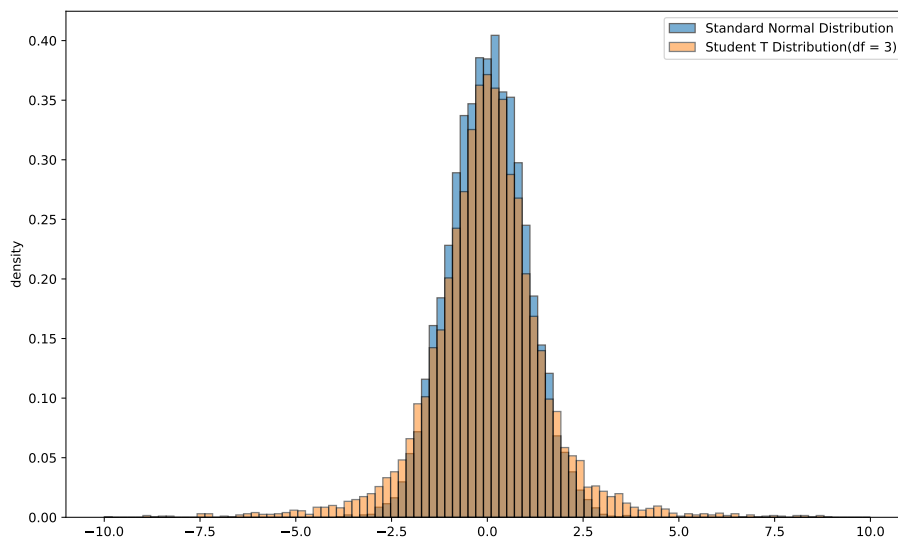
下面是一个例子比较了 t 分布的厚尾特征, 随机抽取了标准正态分布和 t 分布的随机数, 绘制直方图。如果不设定随机种子数, 因此每次运行结果会略有不同。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10000
normal_data = np.random.randn(N)
t_data = np.random.standard_t(df=3, size=N)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
bins = np.linspace(-10, 10, 100)
ax.hist(normal_data, bins=bins, density=True,
        edgecolor="black", alpha=0.6, label='Standard Normal Distribution')
ax.hist(t_data, bins=bins, density=True,
        edgecolor="black", alpha=0.5, label='Student T Distribution(df = 3)')
ax.set_xlabel('value')
ax.set_ylabel('density')
```

```
ax.legend()  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```



3.2 例，中心极限定理

中心极限定理 (Central Limit Theorem, CLT) 是概率论中一个非常强大的定理。它指出，当从任何形状的总体中抽取足够大的独立同分布 (i.i.d.) 样本时，这些样本均值的分布将近似于正态分布，无论原始总体分布如何。样本量越大，近似程度越好。

在 Figure 3.1 中，我们将通过以下步骤来模拟验证 CLT：

- 选择一个非正态分布的总体：比如，一个指数分布或均匀分布，它们的形状都不是钟形的。
- 设置样本参数：定义每次抽样的样本大小 (`sample_size`) 和重复抽样的次数 (`num_samples`)。
- 重复抽样并计算均值：从总体中抽取 `num_samples` 次样本，每次抽取 `sample_size` 个数据点，并计算每次抽样的平均值。

- 可视化: 绘制样本均值的直方图, 并与原始总体分布的直方图进行对比。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

population_size = 1000000
sample_size = 30
num_samples = 10000
np.random.seed(123)

population_data = np.random.exponential(
    scale=2.0, size=population_size)
# population_data_uniform = np.random.uniform(
#     low=0.0, high=10.0, size=population_size)

sample_means = []
for _ in np.arange(num_samples):
    sample = np.random.choice(
        population_data, size=sample_size,
        replace=True)
    sample_means.append(np.mean(sample))
sample_means = np.array(sample_means)
#
fig, ax = plt.subplots(nrows = 2, ncols= 1,  figsize=(12, 12))
ax[0].hist(population_data,
    bins=50, density=True,
    color='skyblue', edgecolor='black', alpha=0.7)

ax[0].set_xlabel('value')
ax[0].set_ylabel('Density')
ax[0].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

ax[1].hist(sample_means,
```

```
bins=50, density=True,  
color='lightcoral', edgecolor='black', alpha=0.7)  
ax[1].set_ylabel('Density')  
ax[1].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)  
  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```

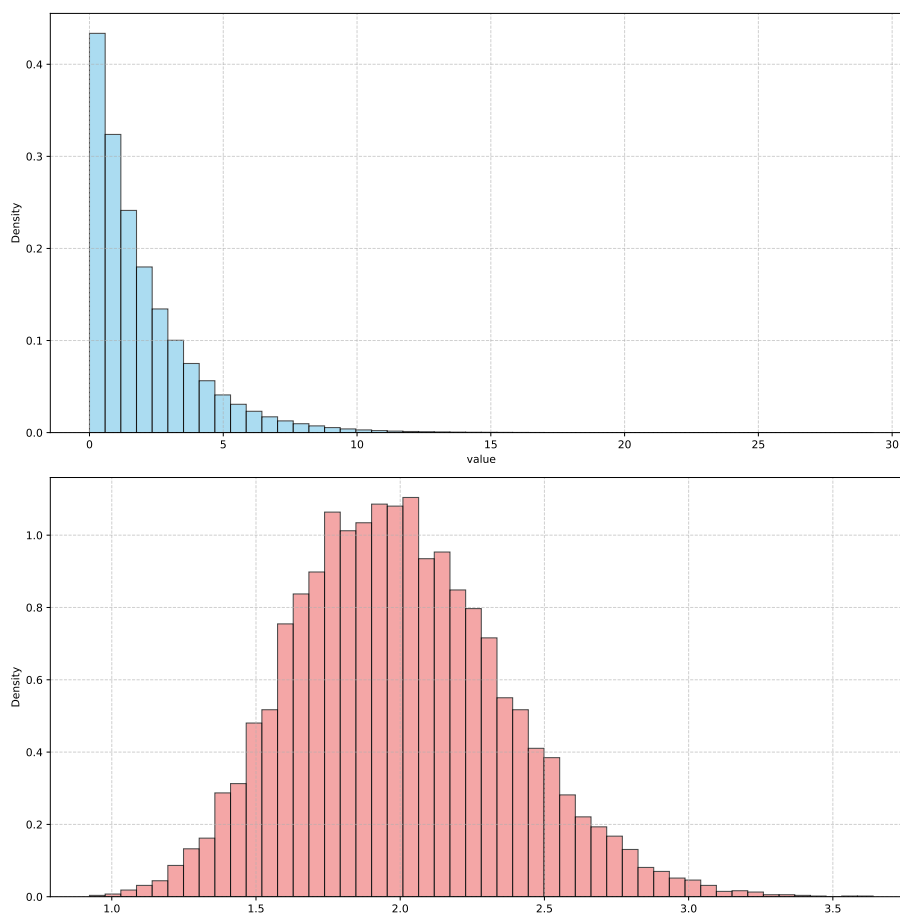


Figure 3.1: Central limit theorem

3.3 通用函数

Numpy 中许多函数是通用函数 (universal functions)，是一种在 ndarray 数据中进行逐元素操作的函数，大多数数学函数属于此类。

例如 `np.cos()` 函数：

```
np.cos(1.0)
np.cos(np.linspace(0, 1, 3))
```

```
array([1.          , 0.87758256, 0.54030231])
```

例如，我们想计算 $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{4}{5}$ ：

```
np.arange(5) / np.arange(1, 6)
```

```
array([0.          , 0.5          , 0.66666667, 0.75          , 0.8          ])
```

Table 3.1: Numpy 中算术运算符和函数

运算符	对应的 ufunc	描述	示例
+	np.add	加法	$1 + 1 = 2$
-	np.subtract	减法	$3 - 2 = 1$
-	np.negative	一元取反	-2
*	np.multiply	乘法	$2 * 3 = 6$
/	np.divide	除法	$3 / 2 = 1.5$
//	np.floor_divide	向下取整除法	$3 // 2 = 1$
**	np.power	幂运算	$2 ** 3 = 8$
%	np.mod	取模/余数	$9 \% 4 = 1$

3.4 例：通用函数

考察最大化函数 $f(x, y)$ 在区间 $[-a, a] \times [-a, a]$ 上的最大值：

$$f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2}$$

令 $a = 3$ 。我们定义一个函数，然后生成数组，计算对应的 z -值，通过栅格（grid）搜索最大值（等于 1）。

```
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

import matplotlib.pyplot as plt

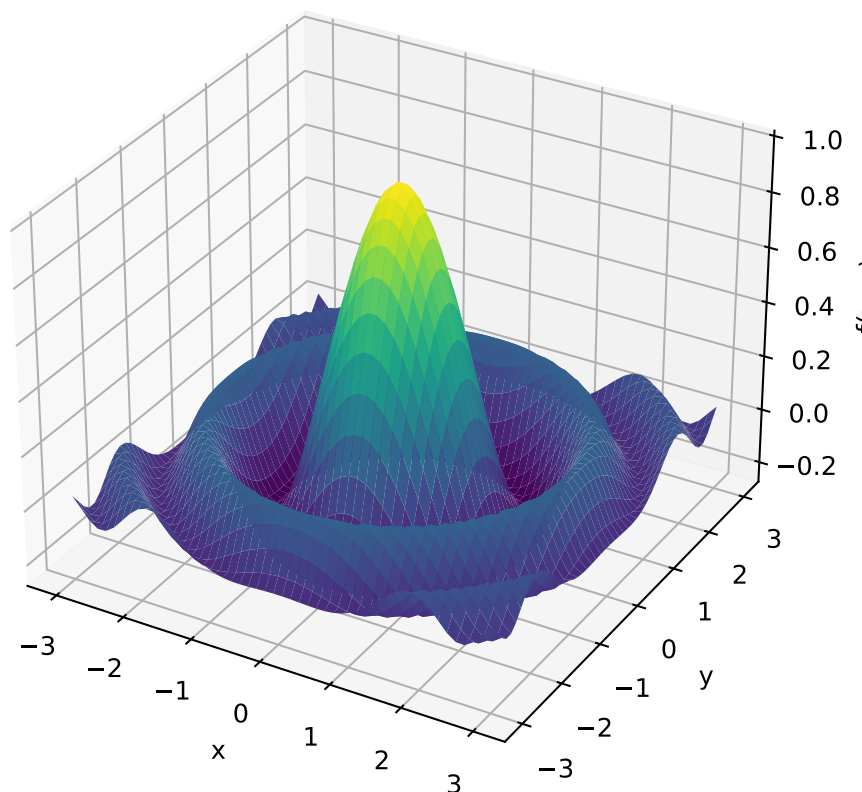
def f(x, y):
    return np.cos(x**2 + y**2) / (1 + x**2 + y**2)

grid = np.linspace(-3, 3, 50)
x, y = np.meshgrid(grid, grid)
z = f(x, y)

# 最大值
max_value = np.max(z)
print(" 函数的最大值:", max_value)

# 绘制 3D 图像
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(x, y, z, cmap='viridis')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('f(x, y)')
plt.show()
```

函数的最大值: 0.9925310162998334



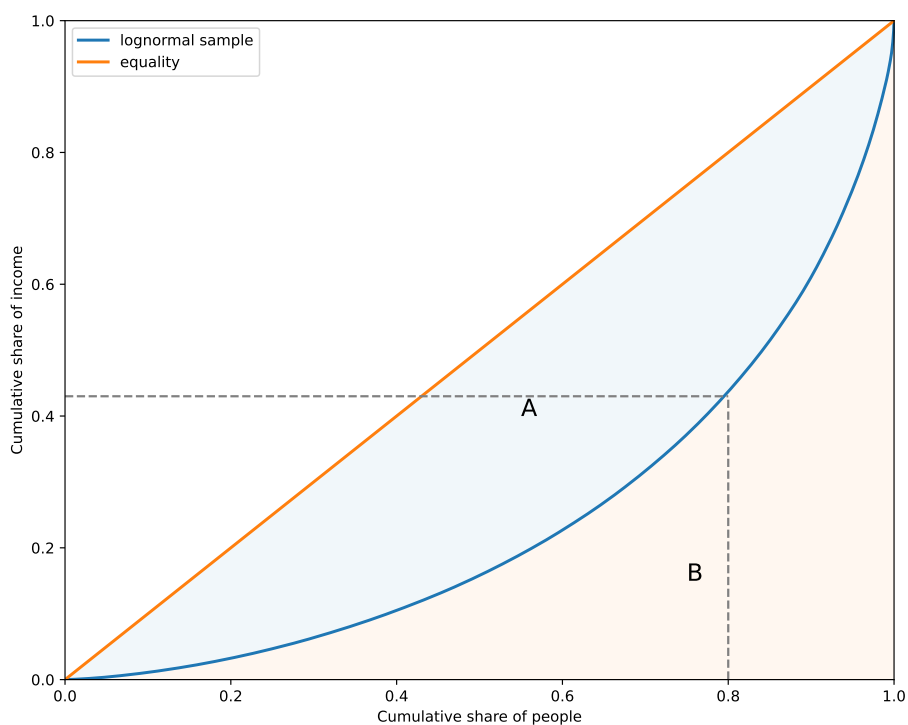
3.5 例：洛伦茨曲线和基尼系数

这个例子里，定义了两个函数，用来计算洛伦茨曲线和基尼系数。

```
import numpy as np # 载入 numpy 库
def lorenz_curve(y):
    n = len(y)
    y = np.sort(y) # 从小到大排序
    s = np.zeros(n + 1) # 生成 n+1 个数值零
    s[1:] = np.cumsum(y) # 从第 2 个数（索引 1）累计求和，使第一个数据点为 (0, 0)
    cum_people = np.linspace(0, 1, n + 1)
```

```
cum_income = s / s[n] # s[n] 为最后的值, 即所有值的和  
return cum_people, cum_income
```

```
n = 2000  
np.random.seed(1)  
sample = np.exp(np.random.randn(n))  
f_vals, l_vals = lorenz_curve(sample)  
#  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 8))  
ax.plot(f_vals, l_vals, label=f'lognormal sample', lw = 2)  
ax.plot([0, 1], [0, 1], label='equality', lw = 2)  
ax.fill_between(f_vals, l_vals, f_vals, alpha=0.06)  
ax.fill_between(f_vals, l_vals, np.zeros_like(f_vals), alpha=0.06)  
ax.vlines([0.8], [0], [0.43], linestyle='--', colors='gray')  
ax.hlines([0.43], [0], [0.8], linestyle='--', colors='gray')  
ax.set_xlim((0,1))  
ax.set_ylim((0,1))  
ax.text(0.55, 0.4, "A", fontsize=16)  
ax.text(0.75, 0.15, "B", fontsize=16)  
ax.set_xlabel('Cumulative share of people')  
ax.set_ylabel('Cumulative share of income')  
ax.legend()  
plt.show()
```



3.6 基尼系数

从图形上看，基尼系数

$$G = \frac{A}{A + B}$$

实际应用中常采用的公式为：

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|}{2n^2 \bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|}{2n^2 \sum_{i=1}^n x_i}$$

```
def gini(x):
    n = len(x)
    x_1 = np.reshape(x, (n, 1))
    x_2 = np.reshape(x, (1, n))
    g_sum = np.sum(np.abs(x_1 - x_2))
    return g_sum / (2 * n * np.sum(x))
```

```
# 模拟对数正态数据
np.random.seed(1)
k = 5
sigmas = np.linspace(0.2, 4, k)
n = 2000
ginis = []
for sigma in sigmas:
    mu = -sigma ** 2 / 2
    y = np.exp(mu + sigma * np.random.randn(n))
    ginis.append(gini(y))

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 8))
ax.plot(sigmas, ginis,
        marker = 'o', label='simulated', lw = 2)
ax.set_xlabel('Standard deviation')
ax.set_ylabel('Gini coefficient')
ax.legend()
plt.show()
```

