目录

1 线性微分方程

Definition 1.0.1 ▶ 线性微分方程

线性微分方程是指形如

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

的微分方程，其中 $a_i(x)$ 和 $f(x)$ 是已知函数，y 是未知函数。

其中 $f(x)$ 被称为非齐次项，当 $f(x) = 0$ 时，方程称为齐次线性微分方程。此时引入算子 $L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$，则线性微分方程可以写为

$$L[y] = f(x)$$

1.1 齐次线性方程

若 $L[y] = 0$，则 $y = 0$ 是方程的一个解。

若

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y^{(i)}(x) = 0 \end{cases}$$

则齐次线性微分方程存在唯一零解。

Technique 1.1.1 ▶ L 算子具有线性性

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

Definition 1.1.2 ▶ 朗斯基行列式

设 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 是 n 个可微函数，则它们的朗斯基行列式定义为

$$\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

可以使用朗斯基行列式判断解是否线性相关。若在区间 $[a, b]$ 内,$\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$,则 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 线性无关；若 $\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$，则 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 线性相关。

朗斯基行列式要么恒为 0，要么恒不为 0。

Definition 1.1.3 ▶ 基本解组

n 阶齐次线性微分方程的“解空间”维数为 n 维，因此设 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 是齐次线性微分方程的 n 个线性无关解，则称它们为该方程的基本解组。

1.2 非齐次线性方程

非齐次线性方程解的结构为齐次线性方程的通解 + 一个特解。

$$y = Y + y^*$$

所以想要求解非齐次线性微分方程就是求出他的齐次通解，再求出特解。

若

$$L[y] = f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

如果 $f(x)$ 不好处理，但可以分拆为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，使得 $L[y] = f_1(x)$ 与 $L[y] = f_2(x)$ 都容易处理。那么 $f(x)$ 对应的 $y^* = y_1^* + y_2^*$。

针对复数

$$L[y] = f(x) = U(x) + \mathrm{i}V(x)$$

则

$$L[u] = U(x)$$
$$L[v] = V(x)$$

1.3 常系数线性微分方程

Definition 1.3.1 ▶ 常系数线性微分方程

常系数线性微分方程是指形如

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)\cdot y = f(x)$$

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为常数时，称为常系数线性微分方程。

1.3.1 齐次常系数线性微分方程的解法

以二阶常系数线性微分方程为例：

$$y'' + py' + qy = 0$$

写出其特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

则该方程的解为

$$y = \begin{cases} c_1\mathrm{e}^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} & \Delta \geq 0 \quad \text{特征方程有两个不等实根} \\ (c_1 x + c_2)\mathrm{e}^{\lambda} & \Delta = 0 \quad \text{特征方程有一个实根} \\ c_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) & \Delta < 0 \quad \text{特征方程有两个共轭复根}\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \end{cases}$$

Example 1.3.2 ▶ 两个实根

设 $y'' + 3y' + 2y = 0$，则特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$，因此通解为

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

Example 1.3.3 ▶ 两个重根

设 $y'' + 2y' + y = 0$，则特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，因此通解为

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

Example 1.3.4 ▶ 共轭负根

设 $y'' + y' + y = 0$，则特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

解得 $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，因此通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

总结一下：

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

的特征方程为 $D(\lambda)$ 且有 s 个互异的实根，λ_1 为 n_1 重根，λ_2 为 n_2 重根，…，λ_s 为 n_s 重根，则通解为

$$\begin{aligned}
y_1 &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \\
y_2 &= c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} x \\
&\vdots \\
y_s &= e^{\lambda_s x} \\
\lambda_j &= \alpha + \mathrm{i}\beta \text{且是} n_j \text{重根} \\
y_j &= (c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n_j} x^{n_j - 1}) e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x)) \quad y = y_1 + y_2 + \cdots + y_s
\end{aligned}$$

1.4 非齐次常系数线性微分方程

以二阶常系数线性微分方程为例：

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1.4.1 f 为多项式与 e 指数相乘

若

$$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

那么

$$y^* = x^k R_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

其中 $R_n(x)$ 是一个 n 次多项式，k 是满足以下条件的最小非负整数：其中

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若特征方程的根均不为}\alpha \\ 1 & \text{若特征方程的根中有一个为}\alpha \\ 2 & \text{若特征方程的根中为二重根且为}\alpha \end{cases}$$

Example 1.4.1 ▸ 非齐次常系数线性微分方程

设 $y'' - 2y' - 3y = (x-5)e^{-x}$，则特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$，因此齐次方程的通解为

$$Y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

对于非齐次项 $(x-5)e^{-x}$，由于特征方程的根中有一个为 -1，因此 $k=1$，所以特解为

$$y^* = xR(x)\mathrm{e}^{-x} = (Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$$

将其代入原方程求解系数 A, B。

1.4.2 f 为多项式与 e 指数相乘再与三角函数相乘

对于

$$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha n}(\cos\beta x)$$

或

$$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha n}(\sin\beta x)$$

则构造

$$F(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$$

那么

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Re}(F(x)) & \text{三角函数为 cos} \\ \mathrm{Im}(F(x)) & \text{三角函数为 sin} \end{cases}$$

。

Example 1.4.2 ▸ f(x) 带有三角函数

$$
\begin{aligned}
y'' + a^2 y &= \cos \alpha x \\
\lambda &= \pm \mathrm{i} a \\
Y &= c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \\
\text{构造} y'' + a^2 y &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \\
y'^{*} &= xA\mathrm{e}^{\alpha x \mathrm{i}} \\
\text{真正的} y^{*} &= \mathrm{Re}(y'^{*})
\end{aligned}
$$

1.5 变系数方程

1.5.1 欧拉方程

Definition 1.5.1 ▸ 欧拉方程

欧拉方程是指形如

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x^2 y' + a_n x^1 y = f(x)$$

的微分方程，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数。

此时做变量代换 $x = e^t$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{x} \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

以二阶为例：

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$$

变为

$$a_0 y'' + (a_1 - a_0) y' + a_2 y = f(e^t) \text{或} f(e^{-t})$$

Example 1.5.2 ▶ 欧拉方程

设 $x^2y'' - 4xy' + 6y = x + x^2\ln x$，令 $x = e^t$，则原式变为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 6y &= e^t + t \cdot e^{2t} \\
Y &= c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \\
y^* &= A\mathrm{e}^t + t(Bt + C)\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}
$$

最后一步：$t = \ln x$