. EIT 问题的有限元表达

定义在区域Ω下，Σ为边界，u为区域内的电压，e_l为电极区域。完备电极下的 CEM 方程如下：

$$\Omega: \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \text{in } \Omega$$

$$\Gamma_2: \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, (\text{无电极区})$$

$$\Gamma_2': \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = -J_n，(\text{电极注入区域})$$

$$\Gamma_3:\ u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = u_l，(\text{测量电极区})$$

则泛函表达为

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma(\nabla u)^2\, dxdy - \int_{\Gamma_2'} \frac{1}{z_l} (\frac{1}{2} u^2 - u_l u) d\Gamma_2'$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} u_j \int_{\Omega} \sigma\big(\nabla N_j \quad \cdot \nabla N_i \quad\big) d\Omega + \int_{\Sigma} J_n N_i d\Sigma$$

$$\int_{\Gamma^e} J_n N_i d\Sigma = \frac{I}{\triangle^e} \int_{\Gamma^e} N_i d\Gamma^e = -I/2$$

$$S_{i,j} = \int_{\Omega} \sigma\big(\nabla N_j \quad \cdot \nabla N_i \quad\big) d\Omega, F_i = -\int_{\Sigma} J_n N_i d\Sigma, SU = F$$

所以 F∈ $\mathbb{R}^{n*1}$为[1 -1,0,0,0,0]的向量。 S ∈ $\mathbb{R}^{n*n}$为整体系数矩阵， n 为节点个数.

. EIT 逆问题

利用有限元方法（FEM）建立人体模型，EIT 重建问题可以转化为如下的最优化为题，选择合适的 x 使得 F(x)最小

$$\hat{x} = \ arg \min_{x} \{ \|y - Jx\|_p^p + \lambda \|\phi(x)\|_q^q \}$$

其中$y \in \mathbb{R}^{n_M}$ 两帧图像之间的电压差，其中n_M为电压测量次数。$\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_N}$是用于成像的阻抗变化，$n_N$为模型中有限元个数。$J \in \mathbb{R}^{n_M * n_N}$ is the jacobian；在我们的设备中$n_M = n_E n_V = 16 * 13 = 208$；其中$\lambda$ is the hyper parameter，正则化项$\phi(x)$的选取十分关键，可以把一些先验知识通过$\phi(x)$加入到最优化的过程中。$\phi(x)$一般可以表达为$\phi(x) = Lx$的形式。 L的选取有很多种方法，例如NOSER, Tikhonov, Laplace, exponential covariance, Gaussian HPF and time smooth prior等。zeroth-order Tikhonov regularization方法$L = I$为单位阵。NOSRE方法中L为对角阵[1]，定义如下式所示：

$$[L^T L]_{i,i} = [J^T J]_{i,i}$$

p, q能够采用不同的组合。如果$p = q = 2$为 Tikhonov regularization， 可以直接采用 One step Gauss-Newton 方法求解:

$$\hat{x} = Ry = [(J^T J + \lambda^2 L^T L)^{-1} J']\mathrm{y}$$

GREIT 也是一种基于 L2-L2 的方法[2]，它首先建立了规范化的成人和婴儿的胸部 FEM 模型，定义了衡量图像质量的若干准则，提出了一种基于大量仿真数据扰动的方法来获得重构矩阵的框架。L2-L2 的方法为一种线性方法，有限元模型确定以后R是固定的，因此直接通过$\hat{x} = R\mathrm{y}$获得图像，计算速度很快，目前的实时成像系统一般采用这种方法。

Wang 的研究中，$p = 2, q = 1, \phi(x) = x$。这是一种$\ell_2\ell_1$的方法，由于$\|\phi(x)\|_1^1$不可导，需要采用迭代方法来求解。Wang 采用了 Split Bregman iterative algorithm（SB）算法[3]，并与 A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm (FISTA))[4]和 interior-point 方法 [5]进行了对比。论文采用 492 有限元的模型，SB 算法进行一次求解的运算时间为 0.2364s（单个正则化参数），比 FIST 和 IP 方法更为快速。论文同时与 TV 和$\ell_2\ell_2$方法进行了对比，结果 L2-L1 的方法具有更高的精度。

Mamatjan 提出了 primal-dual interior point method (PDIPM) algorithm 对来解决 L1 范式求解问题，该方法可以求解各种范式组合[6] 。The computation time (CPU time) for an increasing number of iterations was calculated, where it took 1.4 s for$\ell_1\ell_2$, 2.3 s for$\ell_2\ell_1$. $\ell_2\ell_2$ took the least computation time (0.9 s), while$\ell_1\ell_1$ took the most computation time (5.7 s) based on the stable solution that they produced. The results showed that an ℓ_1 solution is not only more robust to unavoidable measurement errors in a clinical setting, but. it also provides high contrast resolution on organ boundaries.

Borsic 提出了一种Total variation (TV)正则化的方法[7]，TV定义如下公式所示，其中k代表边的编号，标号为$m(k)$和$n(k)$有限元(elements)的共同边为k，边的长度为l_k。$L_k = [0,0,0, l_k, 0,0, -l_k, \ldots]$，$L_k \in \mathbb{R}^{n_N}$，为矩阵化后的结果。TV公式的物理意义可以这么理解：如果两个有限元相邻，而且公共边的长度很长，那么我们希望这两个有限元的差值较小。

$$\phi(x) = \mathrm{TV}(\mathrm{x}) = \sum_k l_k \left| x_{m(k)} - x_{n(k)} \right| = \sum_k |L_k x|$$

TV 方法转化为如下的最优化问题$L = [L_1^T, \ldots L_k^T, \ldots, L_{n_K}^T]^T$，$L \in \mathbb{R}^{n_K n_N}$，可以看出 TV 方法的正则项为 L1-norm。Javaherian 提出了 TVAL3 方法来加速 L2-TV 性能[8]，该方法基于 ADMM 方法。

还有一些其他的方法，例如Ranade and Gharpure [9]提出了一种局部松弛正则化(locally relaxing regularization)方法来提高图像的尖锐特征。Liu, Khambampati [10]提出了一种基于参数化水平集的方法能够显著的提高成像质量。

Integrated EIT

tidal volume，end-expiratory lung volume change (△EELV), compliance, ventilation delay, and over distension/collapse images were performed。Clinically useful parameters were successfully extracted including anterior/posterior ventilation ratio (A/P ratio), center of ventilation (CoVx , CoVy), global inhomogeneity (GI), coefficient of variation (CV), ventilation delay and percentile of overdistension/collapse[11].

程序实现：

令N_n为有限元节点数,N_e为有限元个数,N_E为电极个数，总共进行N_E次刺激,每次刺激有$N_v = N_E - 3$次测量电压，总测量次数$N_m = N_E N_v$ 。$\sigma \in \mathbb{R}^{N_e}$为有限元的电阻值，$U \in \mathbb{R}^{N_n}$为节点电压。

首先计算系统矩阵S：

$$\mathrm{S}_{i,j} = \int_{\Omega} \sigma(\nabla N_j \cdot \nabla N_i)d\Omega$$

实际计算时，先获得∇N_i^e矩阵，$\mathrm{e} = 1,2, \dots N_e, i = 1,2, \dots N_n$。对于2D模型$\nabla N_i^e$为二维数组，对于3D模型$\nabla N_i^e$为三维数组。在eidor中采用system_mat_fields计算获得∇N_i^e矩阵，存储为$F_c \in \mathbb{R}^{2N_n * N_e}$，该矩阵存储了$\nabla N_i^e$的数值。随后利用$F_c$和σ利用计算系统矩阵S。计算方式为$S = F_c' * kron(\sigma，2) * F_c$，$\mathrm{S} \in \mathbb{R}^{N_n * N_n}$。随后计算矩阵$F \in \mathbb{R}^{N_n}$。如下所示：

$$\mathrm{F}_i = -\int_{\Sigma} J_n N_i d\Sigma$$

依据推导F只有激励电极处该值为1或者-1，其他为0。这样可以依据公式$SU = F$求得节点电压分布U：U = left_divide(S,F)。

前向模型求解：（system_mat_1st_order）

1）采用 system_mat_fields 计算获得 $2N_n * N_e$的矩阵 FC，这个矩阵只和有限元模型相关。

2）把N_e*1 的 elem_data 扩展为 2048*1，利用 spdiags 变为稀疏对角阵 ES

3）E= FC’*ES*FC、s_mat=1/2*(E.’ + E)， 获得 s_mat 为N_n*N_n的系统矩阵S。

4）通过有限元公式可知：S*U=F，其中 U（545*1）为节点电压，F（545*1）为电流源激励矩阵，F 中只有电流刺激的地方为 1/-1,其他的为 0。

5）U = left_divide(S,F)；获得前向的电压

6）针对16个电流刺激，可以计算获得16个电压分布

对于逆问题，首先需要求解jacobian矩阵J。矩阵J的计算首先需要计算∇N_i^e,获得F_c矩阵。随后令Y为电极电压，对于第i次刺激可以得到公式$F_c' * x * F_c * \mathrm{Y}_k = F_k$。随后可以计算获得$J_{ij}^k = \left.\frac{\partial [Y_k]_i}{\partial [x]_j}\right|_{\sigma_r}, i = 1,2, \dots N_v, j = 1,2, \dots N_n$。$J_{ij}^k$公式代表如下意义：在第$k$次刺激模式下，如果$[x]_j$变化一定数值$\sigma_r$会导致$[Y_k]_i$变化多少。重复$N_E$次上述过程，并排列好后可以获得整个jacobian矩阵$J \in \mathbb{R}^{[N_E N_v] * N_n}$。$J$的计算采用的jacobian_adjoint函数计算。随后可以用正则化的方法求解图像$\hat{x}$。

$$\hat{x} = arg \min_x \{\|\mathrm{y} - \mathrm{J}x\|^2 + \lambda^2 \|Lx\|^2\}$$

```
img_bkgnd= calc_jacobian_bkgnd( inv_model );
J = calc_jacobian( img_bkgnd);
RtR = calc_RtR_prior( inv_model );
W   = calc_meas_icov( inv_model );
hp  = calc_hyperparameter( inv_model );
RM  = left_divide((J'*W*J +  hp^2*RtR),J'*W);
```

获得了RM后，第一点的电压为vh,后一点的电压为vi. 需要计算他们之间的差分图像。

1） 调用calc_difference_data函数计算差分值，计算有两种方式，一种为直接相减，第二种为归一化差分dva = vi./vh-1

2） 计算有限元上的阻抗变化：elem_data = imdl.solve_use_matrix.RM*dva;

3） 调用show_slices(imr)显示图像，这个函数做了如下工作。

   1、 调用coarse2fine进行插值 imr.fwd_model.coarse2fine* elem_data。elem_data的数据长度和imr.fwd_model.elems的长度不一样，我的理解是计算时只计算了一部分有限元的数值，需要通过插值函数来还原出所有有限元的数据。

   2、 调用calc_slices获得64*64的图像数据。取某一个剖面的有限元的阻抗图像。

   3、 然后进行渲染后，获得最终画出来的图像。

4） elem_ptr = mdl_slice_mapper(fwd_model, 'elem');

已知：RM，vi，vh，coarse2fine，elem_ptr 就可以计算了

```
dva = vi(vh~=0)./vh(vi~=0)-1;
elem_data = imdl.solve_use_matrix.RM* dva;
elem_data = imr.fwd_model.coarse2fine*elem_data;
elem_ptr = mdl_slice_mapper( imr.fwd_model, 'elem' );
backgnd= NaN;
n_images= size(elem_data,2);
rval= backgnd*ones(size(elem_data)+[1,0]);
rval(2:end,:) = elem_data;
rimg= reshape( rval(elem_ptr+1,:), [size(elem_ptr), 1]);
img_out1 = calc_colours( rimg, img);  % 颜色映射
image(img_out1);
```

附录

1. 格林公式

利用变分法，E-L方程和格林公式，可以把偏微分方程，例如laplace方程和poisson方程转化为积分方程。其中格林公式主要解决边界条件问题。设如下泛函

$$I(u) = \iint_{\Omega} F\big(x, y, u(x,y), u_x, u_y\big)\, dxdy + \int_{\Sigma} G(s, u, u_s) ds$$

其E-L方程为：

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_y}\right) = 0$$

$$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{u}_s}\right)\right)\right|_{\Sigma} = 0$$

l1-norm 求解

1、ADMM

ADMM 算法代码见\EIT\code\matlab\ADMM

Matlab中对于tall arrays 数据，lasso回归采用 Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)方法求解.对于如下问题求解如下问题：

$$\underset{x,z}{arg\ min}\{f(x)+g(z)\}, sub.to\ \ Ax+Bz=C$$

ADMM方法用采用如下步骤求解：

$$Step1: x^{k+1}=\underset{x}{arg\ min}\left\{f(x)+\frac{\rho}{2}\|Ax^k+Bz^k-c+u^k\|_2^2\right\}$$

$$Step2: x^{k+1}=\underset{z}{arg\ \min}\left\{g(z)+\frac{\rho}{2}\|Ax^k+Bz^k-c+u^k\|_2^2\right\}$$

$$Step3: u^{k+1}=u^k+\ Ax^{k+1}+Bz^{k+1}-c$$

其中u^k为scaled dual variable，或者Lagrange multiplier， ρ 为Lagrangian parameter。

对于Generalized Lasso回归$\underset{x}{arg\ \min}\left\{\frac{1}{2}\|\mathrm{b}-\mathrm{A}x\|^2+\lambda\|Fx\|_1^1\right\}$，令$f(x)=\|\mathrm{b}-\mathrm{A}x\|^2, g(z)=\lambda\|Fz\|_1^1$。

$$\hat{x}=\ \underset{x}{arg\ \min}\left\{\frac{1}{2}\|\mathrm{b}-\mathrm{A}x\|^2+\lambda\|z\|_1^1\right\}, \mathrm{sub.to}\ Fx-z=0$$

第一步，固定z^k，u^k,求解最优的x^{k+1}

$$\underset{x}{arg\ min}\left\{\frac{1}{2}\|\mathrm{b}-\mathrm{A}x\|^2+\frac{\rho}{2}\|x^k-z^k+u^k\|_2^2\right\}$$

$$\mathrm{A}'Ax-\mathrm{A}'b+\rho F'Fx+\rho F'(u^k-z^k)=0$$

$$x^{k+1}=(\mathrm{A}'A+\rho F'F)^{-1}(\mathrm{A}'b+\rho F'(z^k-u^k))$$

第二步，固定x^{k+1}，u^k，求解最优的z^{k+1}

$$\underset{z}{arg\ min}\left\{\lambda\|z\|_1^1+\frac{\rho}{2}\|x^k-z^k+u^k\|_2^2\right\}$$

对于 l1-norm 求解，引入了 soft thresholding operator 函数S_k

$$S_k(\mathrm{a})=\begin{cases}a-k, & a>k\\ 0, -k<a<k & \\ a+k, & a<k\end{cases}$$

得到

$$z^{k+1}=S_{\lambda/\rho}(Fx^{k+1}+u^k)$$

第三步：

$$u^{k+1}=u^k+(Fx^{k+1}-z^{k+1})$$

所以 ADMM 方法主要用于 L2-L1 范式。

2、IRN

首先采用 Half-Quadratic（HQ）来解决非 2 范式的最小化问题，由 HQ 技术可以得到下式，其中$0 < p < 2$。这里$\alpha = \frac{p}{2-p}$， $\varepsilon = \frac{2^{\frac{2}{2-p}}}{(2-p)*p^{\frac{p}{2-p}}}$，当$v^* = \frac{p}{2}|t|^{p-2}$时，函数达到极小值[19]。$vt^2$为 2 次，$\frac{1}{\varepsilon v^\alpha}$为非二次，所以叫做半二次。

$$|t|^p = \min_{v>0}\{vt^2 + \frac{1}{\varepsilon v^\alpha}\}, \qquad \varepsilon > 0, \alpha > 0 \tag{4}$$

HQ 算法已经被证明了与线性梯度迭代之间的等效性，同时也可以很方便的扩展到多个约束条件的正则化中。对于单个约束条件的正则化问题的来说，

$$\min_x \left\{\frac{1}{q}\|Ax-b\|_q^q + \frac{\lambda}{p}\|Lx\|_p^p\right\} \tag{5}$$

式中，L为约束条件对应的正则算子，λ为对应的正则化参数，q-th 和p-th 表示对应的范数，

使用极小交替法（alternating minimization iterative procedure），可以得到：

$$W_F{}^{k+1} = diag\left(\left|Ax^k - b\right|^{q-2}\right) \tag{6}$$

$$W_{R_i}^{k+1} = diag\left(\left|Lx^k\right|^{p-2}\right) \tag{7}$$

$$x^{k+1} = \min_x\left\{\left\|\left(W_F{}^{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}(Ax^k - b)\right\|_2^2 + \left\|\left(W_R{}^{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}Lx^k\right\|_2^2\right\} \tag{8}$$

最小均方问题(8)对应的正规方程为：

$$\left(A^TW_F^{k+1}A + \lambda L^TW_R^{k+1}L\right)x^{k+1} = A^TW_F^{k+1}b \tag{9}$$

求解方程(9)就可以得到x^{k+1}，按照上述迭代关系，，IRN 算法流程如下：

算法 2.1
输入：A， 传递矩阵， L，正则矩阵， λ为正则参数
输出：x^*
1. $x^0 = (A^TA + \lambda L^TL)^{-1}A^Tb \ or \ x^0 = \tilde{x}$
2. $\boldsymbol{while}\ k = 0,1,2\ldots,n\ \ \boldsymbol{do}$
3. $compute\ W_F^{k+1}\ and\ W_R^{k+1}\ by\ (9)\ and (10)$
4. $compute\ \ x^{k+1}\ by$ solving the linear system (12)
5. $\boldsymbol{if}\ \ \boldsymbol{norm}(\ x^{k+1} -\ x^k\ )/\boldsymbol{norm}(\ x^k) < tol,\ \boldsymbol{break};\ \ \boldsymbol{endif}$
6. $\boldsymbol{end\ while}$
7. $x^* = x^{k+1}$

IRN 算法代码见\EIT\code\matlab\IRN

3、PDIPM 算法

参考文献：

1. Cheney, M., et al., *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem.* International Journal of Imaging systems and technology, 1990. **2**(2): p. 66-75.
2. Adler, A., et al., *GREIT: a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images.* Physiological measurement, 2009. **30**(6): p. S35.
3. Wang, J., et al., *Split Bregman iterative algorithm for sparse reconstruction of electrical impedance tomography.* Signal Processing, 2012. **92**(12): p. 2952-2961.
4. Beck, A. and M. Teboulle, *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems.* SIAM journal on imaging sciences, 2009. **2**(1): p. 183-202.
5. Kim, S., et al., *An interior-point method for large-scale $$\ell _1 $$ ℓ_1-regularized least squares.* IEEE J. Sel. Top. Signal Process. **1**(4).
6. Mamatjan, Y., et al., *An experimental clinical evaluation of EIT imaging with ℓ_1 data and image norms.* Physiological measurement, 2013. **34**(9): p. 1027.
7. Borsic, A., et al., *Total variation regularization in electrical impedance tomography.* 2007.
8. Javaherian, A., et al., *An accelerated version of alternating direction method of multipliers for TV minimization in EIT.* Applied Mathematical Modelling, 2016. **40**(21-22): p. 8985-9000.
9. Ranade, N.V. and D.C. Gharpure, *Enhancing sharp features by locally relaxing regularization for reconstructed images in electrical impedance tomography.* Journal of Electrical Bioimpedance, 2019. **10**(1): p. 2-13.
10. Liu, D., A.K. Khambampati, and J. Du, *A parametric level set method for electrical impedance tomography.* IEEE transactions on medical imaging, 2017. **37**(2): p. 451-460.
11. Jang, G.Y., et al., *Integrated EIT system for functional lung ventilation imaging.* Biomedical engineering online, 2019. **18**(1): p. 83.
12. Dai, T. and A. Adler. *Electrical Impedance Tomography reconstruction using ℓ_1 norms for data and image terms*. in *2008 30th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. 2008. IEEE.