目录

各章节的关系如下，Laplace 是一组偏微分方程，我们需要在三类边界条件下，求解 Laplace 方程（第 1 节）。利用变分法和 E-L 方程可以把 Laplace 方程转化为积分方程（第 2 节）。有限元方法把该积分方程进行离散化后，可以进行求解（第 6 节）。

通过选择调和函数（第 3 节），利用 Green 第二公式可以获得 Laplace 方程的基本解，从而获得基于边界的基本积分公式（第 4 节）。边界元方法基于此基本积分公式进行离散化，求解方程（第 7 节）。同时对于简单的球域或者圆域问题可以通过构造不同的 Green 函数获得解析解（第 5 节）。

1 拉普拉斯方程：

$$\Delta \mathrm{u}=\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2}=0$$

第一边界条件 Dirichlet 问题

$$u|_\Sigma=\mathrm{f}$$

第二边界条件 Neumann 问题

$$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\right)\right|_\Sigma=\mathrm{g}$$

第三边界条件问题

$$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}+\sigma u\right)\right|_\Sigma=\mathrm{g}$$

2. 拉普拉斯方程转化为积分方程

利用变分法，E-L 方程和格林公式，可以把偏微分方程，例如 laplace 方程和 poisson 方程转化为积分方程。其中格林公式主要解决边界条件问题。设如下泛函

$$I(u)=\iint_{\Omega} F\left(x,y,u(x,y),u_x,u_y\right)dxdy+\int_{\Sigma} G(s,u,u_s)ds$$

其 E-L 方程为:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_y}\right)=0$$

$$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}_y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{u}_s}\right)\right)\right|_{\Sigma}=0$$

2.1 Dirichlet 问题

设$\mathrm{F}=\ u_x^2+u_y^2\quad \mathrm{G}=\ 0$，则泛函为

$$I(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

2.2 Neumann 问题

该例子为肺阻抗成像的原理。

设$\mathrm{F}=\ u_x^2+u_y^2\quad \mathrm{G}=\ gu$

则泛函为

$$I(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\,dxdy+\int_{\Sigma} guds$$

由 E-L 第一个方程可以推出 $\Delta \mathrm{u}=0$

由 E-L 第二个方程可以推出:

$$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\right)\right|_{\Sigma}=-g$$

2.3 第三边界条件

设$\mathrm{F}=\ u_x^2+u_y^2\quad \mathrm{G}=\frac{1}{2}\sigma u^2-gu$

则泛函为

$$I(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\,dxdy+\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-gu\right)ds$$

由 E-L 第一个方程可以推出 $\Delta \mathrm{u}=0$

由 E-L 第二个方程可以推出：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Sigma}=g$$

如果泛函为如下方程：

$$I(u)=\iint_{\Omega} u_x^2+u_y^2\,dxdy+\int_{\Sigma}\sigma u^2 ds$$

其中 $F=u_x^2+u_y^2$ $G=\sigma u^2$

由 E-L 第一个方程可以推出$\Delta u=0$

由 E-L 第二个方程可以推出：

$$\left(2u_x\frac{dy}{ds}-2u_y\frac{dx}{ds}+2\sigma u\right)\Big|_{\Sigma}=\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Sigma}=0$$

因此 $I(u)$取极小值等价于：

$$\Delta u=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Sigma}=0$$

3. 二维圆和三维球的调和函数

对于三维问题：令$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$， 则$r_x=r^{-1}(x-x_0)$。构造调和函数：$v=\frac{1}{r}$， 可以知道$v_x=-r^{-2}*r^{-1}*(x-x_0)=-r^{-3}*(x-x_0)$。 $v_{xx}=3r^{-4}*r^{-1}*(x-x_0)^2-r^{-3}$。那么$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=3r^{-5}*r^2-3r^{-3}=0$。

对于二维问题：令$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，构造调和函数$v=\ln r$， 可以知道$v_x=r^{-1}*r^{-1}(x-x_0)=r^{-2}*(x-x_0)$。$v_{xx}=-2r^{-3}*r^{-1}*(x-x_0)^2+r^{-2}$。可以推出$v_{xx}+v_{yy}=-2r^{-4}*r^2-2r^{-2}=0$

4. 调和函数的基本积分公式

3.1 格林公式

可得

$$\iiint_{\Omega} u\triangle v dV=\iint_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV, \qquad (3.3)$$

其中

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \frac{\partial}{\partial n}=\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}$$

即△为Laplace算子，而$\frac{\partial}{\partial n}$表示外法向方向导数。通常称(3.3)为Green第一公式。

$$\iiint_{\Omega}(u\triangle v-v\triangle u)dV=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad (3.5)$$

我们称(3.5)式为Green第二公式。Green公式在今后的讨论中要经常用到。

3.2 调和函数的基本积分公式
如果函数u，满足$\Delta u = 0$，则称该函数为调和函数。
对于球域问题的调和函数，构造一个函数

$$v = r_{P_0P}^{-1} = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{-1/2},$$

可以知道函数v除开P_0点外满足$\Delta u = 0$，因此称函数v为调和方程的基本解。利用格林第二公式可以获得调和函数u基本积分公式：

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \left(u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{P_0P}}\right) - \frac{1}{r_{P_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right) dS_P. \tag{3.12}$$

对于圆内的问题，令$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$，构造函数$v = \ln\frac{1}{r}$。利用格林第二公式可以获得基本积分公式：

$$u(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

也就是说任何一点的电压，可以通过边界上的电压u和法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$给出。由于一般情况下边界上的电压$u$和法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$不会同时已知，因此我们还需要通过下面的步骤，来获得拉普拉斯方程的解。

5. 利用格林函数获得拉普拉斯方程的解

由格林第二公式可知：

$$\int_\Sigma g\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial g}{\partial n} ds = 0$$

由于基本积分公式同时存在u和$\frac{\partial u}{\partial n}$，不好计算，因此以再次利用格林第二公式，构造格林函数。所以构造一个调和函数，对于三维问题在边界上满足如下条件：

$$g(P, P_0)|_\Sigma = \frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$$

与基本积分公式相减可以获得：

$$u(P_0) = \int_\Sigma G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} ds$$

其中

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{P_0P}} - g(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{P_0P}} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{P_1P}}\right]$$

同样的理论，对于二维圆内的 Dirichlet 问题，其 Green 函数为：

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{P_0P}} - \ln\frac{R}{r_0 r_{P_1P}}\right)$$

其中$P_0=(r_0,\theta_0)$为圆内一点，$P_1=(r_1,\theta_1)$为P_0的镜像点，他们之间满足$r_0*r_1=R^2,\theta_0=\theta_1$
P 为域内的任意一点，当 P 位于圆上时$G(P,P_0)=0$ 。令 $\eta=\theta-\theta_0$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\mathrm{r=R}}=\left.\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{r}}\right|_{\mathrm{r=R}}=-\frac{1}{2\pi}\left.\left\{\frac{r-r_0\cos\eta}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\eta}-\frac{r_0^2\,r-R^2r_0\cos\eta}{r_0^2\,r^2-2R^2rr_0\cos\eta+R^4}\right\}\right|_{\mathrm{r=R}}$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{R-r_0\cos\eta}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\eta}-\frac{r_0^2\,R-R^2r_0\cos\eta}{r_0^2\,R^2-2R^2Rr_0\cos\eta+R^4}\right\}=$$
$$=-\frac{1}{2\pi R}\left\{\frac{R^2-Rr_0\cos\eta}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\eta}-\frac{r_0^2\,-Rr_0\cos\eta}{r_0^2\,-2Rr_0\cos\eta+R^2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\eta}$$

这样获得圆内的 Dirichlet 问题的解：

$$u(P_0)=\int_\Sigma G\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}}ds=\int_\Sigma -f\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}}ds$$
$$=\frac{1}{2\pi R}\int_\Sigma f\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\eta}ds$$
$$=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta$$

对于圆内的 Neuman 问题$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\right)\right|_\Sigma=f$，其 Green 函数为：

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{P_0P}}+\ln\frac{R}{r_0r_{P_1P}}\right)$$

通过计算可以得到$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}}=-\frac{1}{2\pi R}$，在边界上$G(P,P_0)=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{P_0P}}\right)$

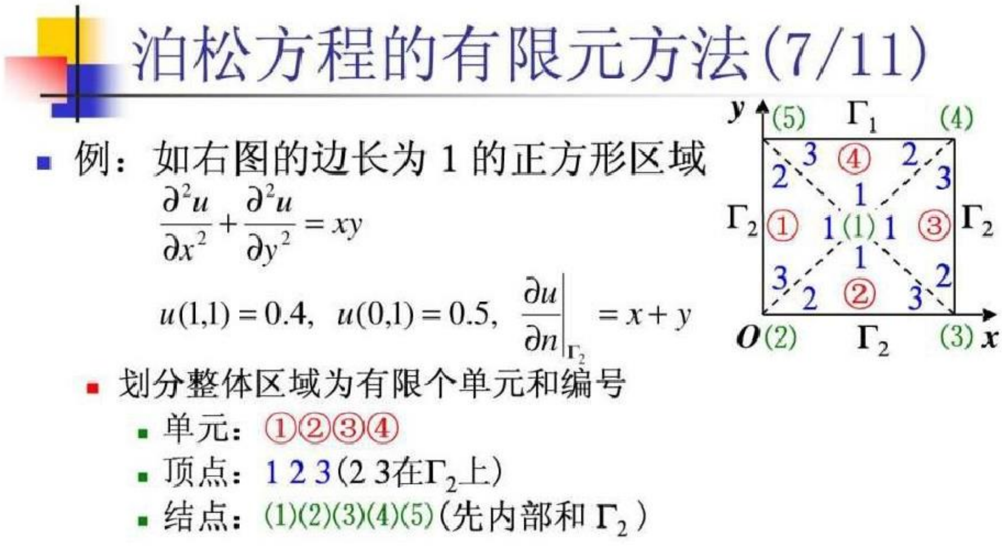
$$u(P_0)=\int_\Sigma G\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}}ds=\int_\Sigma \left[Gf+\frac{u}{2\pi R}\right]ds=\frac{1}{\pi}\int_\Sigma \left[f\ln\frac{1}{r_{P_0P}}+\frac{u}{2R}\right]ds$$

所以对于肺阻抗成像，假设 A 点注入电流，B 点电流流出。考虑法向量的方向，在注入电流区域$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\right)\right|_\Sigma=-J$，在电流流出区域$\left.\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\right)\right|_\Sigma=J$。，

$$u(P_0)=\frac{1}{\pi}\left(-I*\ln\frac{1}{r_{P_0A}}+I*\ln\frac{1}{r_{P_0B}}\right)=\frac{I}{\pi}\left(\ln\frac{r_{P_0A}}{r_{P_0B}}\right)$$

6. 有限元方法

有限元方法以第二章的积分方程为基础，利用离散化方法计算积分。



则对应的泛函为：$I(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\,d\Omega+\iint_{\Omega}fu\,d\Omega-\int_{\Sigma}quds$

对空间进行离散化后，

$$\frac{\partial I}{\partial u_n}=\sum_{i=1}^{e}\frac{\partial I^e}{\partial u_n}$$

对各个变量求值取偏导可以获得多个方程，从而求取最优泛函u：

$$\frac{\partial I}{\partial u_1}=0,\frac{\partial I}{\partial u_2}=0,\ldots\frac{\partial I}{\partial u_n}=0$$

其中 e 为三角形个数，n 为结点个数。对于每个三角形单元利用三角形的线性插值可以获得三角形内任一点的数值

$$u^e(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{3}(a_i^e+b_i^e x+c_i^e y)u_i^e=\sum_{i=1}^{3}N_i^e u_i^e$$

第一项积分

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^e(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial u^e(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y}\right]^2=\frac{1}{4d}\left[\sum_{i=1}^{3}b_i^e u_i^e\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{3}c_i^e u_i^e\right]^2=\frac{1}{4d}\sum_{i,j=1}^{3}(b_i^e b_j^e+c_i^e c_j^e)\,u_i^e u_j^e$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i}\text{的第一项}=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{4d}(b_i^e b_j^e+c_i^e c_j^e)u_j^e\ d\Omega=\sum_{j=1}^{3}u_j^e\int_{\Omega}(\nabla N_j^e\cdot\nabla N_i^e)d\Omega$$

$Z_{i,j}^e=\nabla N_j^e\cdot\nabla N_i^e=\frac{1}{4d}(b_i^e b_j^e+c_i^e c_j^e)$被成为单元矩阵，通过计算可知该图的单元矩阵为

■ 建立单元的矩阵

$$z^1 = z^2 = z^3 = z^4 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

如上题中，对于u_1，它为四个三角形的第一个顶点。

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = \frac{\partial I^1}{\partial u_1} + \frac{\partial I^2}{\partial u_1} + \frac{\partial I^3}{\partial u_1} + \frac{\partial I^4}{\partial u_1}$$

$$= \left(u_1 Z_{1,1}^1 + u_5 Z_{1,2}^1 + u_2 Z_{1,3}^1\right) + \left(u_1 Z_{1,1}^2 + u_2 Z_{1,2}^2 + u_3 Z_{1,3}^2\right)$$

$$+ \left(u_1 Z_{1,1}^3 + u_3 Z_{1,2}^3 + u_4 Z_{1,3}^3\right) + \left(u_1 Z_{1,1}^4 + u_3 Z_{1,4}^4 + u_4 Z_{1,5}^4\right)$$

$$= 4u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5$$

对于u_2，它是三角形 1 的第 3 个顶点，是三角形 2 的第二个顶点

$$\frac{\partial I}{\partial u_2} = \frac{\partial I^1}{\partial u_2} + \frac{\partial I^2}{\partial u_2} = \left(u_1 Z_{3,1}^1 + u_5 Z_{3,2}^1 + u_2 Z_{3,3}^1\right) + \left(u_1 Z_{2,1}^2 + u_2 Z_{2,2}^2 + u_3 Z_{2,3}^2\right) = -u_1 + u_2$$

对于u_3，它是三角形 2 的第 3 个顶点，是三角形 3 的第二个顶点

$$\frac{\partial I}{\partial u_3} = \frac{\partial I^2}{\partial u_3} + \frac{\partial I^3}{\partial u_3} = \left(u_1 Z_{3,1}^2 + u_2 Z_{3,2}^2 + u_3 Z_{3,3}^2\right) + \left(u_1 Z_{2,1}^3 + u_3 Z_{2,2}^3 + u_4 Z_{2,3}^3\right) = -u_1 + u_3$$

所以：

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对于第二项积分：

$$\iint_\Omega fu\, d\Omega = \iint_\Omega f \sum_{j=1}^{3} N_j^e u_j^e\, d\Omega$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i}\text{的第二项} = \iint_\Omega f N_i^e\, d\Omega$$

由$f = xy$可知五个节点的值$f_1 = 0.25, f_2 = 0, f_3 = 0, f_4 = 1, f_5 = 0$。假设三角形的 f 值为常数，等于三个顶点的平均。可以利用如下计算

对于第一个三角形，$r_{f1}^1 = r_{f2}^1 = r_{f3}^1 = -\iint_{\Omega^1} f N_i^e\, d\Omega = -\frac{1}{9}(f_1 + f_2 + f_3)d = 0.25 * \frac{0.25}{9} = -0.007$

对于第三个三角形，$r_f^3 = -\iint_{\Omega^3} f N_i^e\, d\Omega = -\frac{1}{9}(f_1 + f_3 + f_4)d = 0.25 * \frac{1.25}{9} = -0.035$

$$r_f^1 = r_f^2 = -0.007, r_f^3 = r_f^4 = -0.035$$

因此对于第二项

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = \frac{\partial I^1}{\partial u_1} + \frac{\partial I^2}{\partial u_1} + \frac{\partial I^3}{\partial u_1} + \frac{\partial I^4}{\partial u_1} = -0.007 - 0.007 - 0.035 - 0.035 = -0.084$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_2}=\frac{\partial I^1}{\partial u_2}+\frac{\partial I^2}{\partial u_2}=-0.007-0.007=-0.014$$
$$\frac{\partial I}{\partial u_3}=\frac{\partial I^2}{\partial u_3}+\frac{\partial I^3}{\partial u_3}=-0.007-0.035=-0.042$$

对于第三项积分：

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i}\text{的第三项}=\int_\Sigma qN_i^e ds$$

可以采用积分方法计算：对于左端$\int_\Sigma qN_i^e ds=\int_0^L q\frac{x}{L}dx$，对于右端$\int_\Sigma qN_i^e ds=\int_0^L q\frac{L-x}{L}dx$

也可以采用估算方法，利用三角形的中心公式可以知道$\int_\Sigma N_i^e ds=\frac{1}{2}$，假设在边上的 q 为常数，则$\int_\Sigma qN_i^e ds=\frac{1}{4}(q2+q3)$。对于第一个三角形，第一个顶点不在边界上，所以 r_{q1}^1=0. $r_{q2}^1=r_{q3}^1=\frac{1}{4}(q2+q3)=\frac{0+1}{4}=0.25$. 同理对于第三个三角形， r_{q1}^3=0. $r_{q2}^3=r_{q3}^3=\frac{1}{4}(q2+q3)=\frac{2+1}{4}=0.75$。因此可以得到如下矩阵：

$$r_q^1=r_q^2=\begin{bmatrix}0\\0.25\\0.25\end{bmatrix},\quad r_q^3=r_q^4=\begin{bmatrix}0\\0.75\\0.75\end{bmatrix}$$

因此对于第三项

$$\frac{\partial I}{\partial u_1}=\frac{\partial I^1}{\partial u_1}+\frac{\partial I^2}{\partial u_1}+\frac{\partial I^3}{\partial u_1}+\frac{\partial I^4}{\partial u_1}=0$$
$$\frac{\partial I}{\partial u_2}=\frac{\partial I^1}{\partial u_2}+\frac{\partial I^2}{\partial u_2}=\int_0^1 y\frac{1-y}{1}dy+\int_0^1 x\frac{x}{1}dx=0.5\ \text{或者}\ 0.25+0.25=0.5$$
$$\frac{\partial I}{\partial u_3}=\frac{\partial I^2}{\partial u_3}+\frac{\partial I^3}{\partial u_3}=\int_0^1 xxdx+\int_0^1(1+y)(1-y)dy=1\ \text{或者}\ 0.25+0.75=1$$

三项积分结合

$$4u_1-u_2-u_3-u_4-u_5=-0.084+0$$
$$-u_1+u_2=-0.014+0.5$$
$$-u_1+u_3=-0.042+1$$

从而可以解出方程。

对于肺阻抗成像，第二项积分为 0，第三项积分可以如下计算：假设边界注入电流在三角形的一个边上，并垂直于三角形

$$\int_\Sigma qN_i^e ds=-\int_0^L\frac{I}{L}\frac{x}{L}dx=\frac{-I}{2}$$

对于其他与注入电流无关的节点边界为 0

7. 边界元方法

对于二维问题，对于区域内任意一点P_i，基本积分方程为

$$u(P_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds$$

其中$r = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$。

如果P_i在边界上，会出现奇异点。通过在P_i周围构造一个半圆。

$$u(P_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds + \lim_{a\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S^i}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds + \lim_{a\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S^i}\ln\frac{1}{a}*\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} + u(P_i)\frac{1}{\mathrm{a}}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds + \frac{1}{2}u(P_i)$$

所以在边界上

$$\frac{1}{2}u(P_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds$$

我们把边界分为若干的线段，进行离散化。假设在该线段上u和$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}$为常数。令

$$\mathrm{H}_{i,j} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^j}\left(\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds^j, \mathrm{G}_{i,j} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^j}\ln\frac{1}{r}ds^j$$

则

$$u_i + \sum_{j=1}^{n}\mathrm{H}_{i,j}*u_j = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{G}_{i,j}*q_j \qquad , q_j = \frac{\partial u_j}{\partial \mathrm{n}}$$

可以形成 n 个方程，由边界条件可以获得u_j和q_j中的若干项，因此为 n 个方程，n 个未知数。从而可以求取所有的u_i和q_j。

如下所示可以计算获得$\mathrm{H}_{i,j}$和$\mathrm{G}_{i,j}$。

$$\mathrm{H}_{i,i} = 0$$

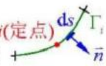
$$G_{i,i} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^i}\ln\frac{1}{r}ds^j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{L/2}\ln\frac{1}{\frac{L}{2}-x}dl + \frac{1}{2\pi}\int_{L/2}^{L}\ln\frac{1}{x-\frac{L}{2}}dl = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{L}{2}}\ln x\,dx$$

$$= \frac{L}{2\pi}\left(1-\ln\frac{L}{2}\right)$$

$$\mathrm{H}_{i,j} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^j}\left(\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds^j = -\frac{1}{2\pi}\int_{L^j}\left(\frac{\partial \ln r}{\partial \mathrm{r}}\right)dL^j = -\frac{1}{2\pi}\int_{L^j}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)dL^j$$

- 对角元 $\boldsymbol{H_{ii}}$ 和 $\boldsymbol{G_{ii}}$ 的计算（定点 $\boldsymbol{i}$ 在 Γ_i 上）

$$H_{ii} = -\pi,\quad G_{ii} = s_i(\ln\frac{s_i}{2} - 1)$$



- 非对角元 $\boldsymbol{H_{ij}}$ 和 $\boldsymbol{G_{ij}}$ 的计算（定点 $\boldsymbol{i}$ 不在 Γ_j 上）

$$H_{ij} = \frac{r_d}{|r_d|}\theta_j,\quad G_{ij} = (s_j - d)\ln r_2 + d\ln r_1 - s_j + |r_d|\theta_j$$

$$\vec{r}_1 = (x_1 - x_i)\vec{i} + (y_1 - y_i)\vec{j}$$
$$\vec{r}_2 = (x_2 - x_i)\vec{i} + (y_2 - y_i)\vec{j}$$
$$\vec{r}_{21} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$
$$s_j = |\vec{r}_{12}|,\quad d = -\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{s_j}$$
$$r_d = \vec{r}_1 \cdot \vec{n},\quad \vec{n} = \frac{(y_2 - y_1)\vec{i} - (x_2 - x_1)\vec{j}}{s_j}$$
$$\theta_j = \arccos\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}$$