利用有限元方法（FEM）建立人体模型，EIT 重建问题可以转化为如下的最优化为题，选择合适的 x 使得 F(x)最小

$$\hat{x} = \ arg\min_{x}\left\{\|y - Jx\|_{\sum_n^{-1}}^2 + \|x - x_0\|_{\sum_x^{-1}}^2\right\}$$

其中$y \in \mathbb{R}^{n_M}$ 两帧图像之间的电压差，其中$n_M$为电压测量次数。 $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_N}$是用于成像的阻抗变化，$n_N$为模型中有限元个数。$J \in \mathbb{R}^{n_M * n_N}$ is the jacobian；在我们的设备中$n_M = n_E n_V = 16 * 13 = 208$；把躯干划分为$n_N = 32 * 32$个有限元。$\sum_n^{-1}$为测量噪声的自相关矩阵，一般情况下可以认为是对角阵，并且$[\sum_n^{-1}]_{i,i}$为常数。$x_0$代表阻抗变化的期望值，对于差分图像$x_0 = 0$。令$\sum_x^{-1} = L^T L$这样可以把上式简化为如下形式：

$$\hat{x} = \ arg\min_{x}\{\|y - Jx\|^2 \ + \lambda^2\|Lx\|^2\ \}$$

其中$\lambda$ is the hyper parameter，$L \in \mathbb{R}^{n_N * n_N}$ is regularization matrix ，也叫 prior matrices。求解可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ -J^T(y - Jx) + \lambda^2 L^T Lx = -J^T y + J^T Jx + \lambda^2 L^T Lx = 0$$

$$\hat{x} = [(J^T J + \lambda^2 L^T L)^{-1} J']y$$

令$R = [(J^T J + \lambda^2 L^T L)^{-1} J']$为EIT重构矩阵。

正则化矩阵$L$的选取十分关键，可以把一些先验知识通过$L$加入到最优化的过程中。正则化矩阵的选择由许多种方法。例如NOSER，Tikhonov，Laplace，exponential covariance，Gaussian HPF and time smooth prior等。zeroth-order Tikhonov regularization方法$L = I$为单位阵。NOSRE方法中$L$为对角阵，$[L^T L]_{i,i} = [J^T J]_{i,i}$ [1]。Borsic 提出了一种Total variation (TV)正则化的方法[2]，TV定义如下公式所示，其中k代表边的编号，标号为$m(k)$和$n(k)$有限元(elements)的共同边为k，边的长度为$l_k$。这个公式的物理意义可以这么理解：如果两个有限元相邻，而且公共边的长度很长，那么我们希望这两个有限元的差值较小。$L_k = [0,0,0, l_k, 0,0, -l_k, \ldots]$为矩阵化后的结果。可以看出TV 方法的正则相为L1-norm。

$$\mathrm{TV}(x) = \ \sum_k l_k \left|x_{m(k)} - x_{n(k)}\right| = \sum_k |L_k x|$$

从而 TV 方法的公式转化为：

$$\hat{x} = \ arg\min_{x}\{\|y - Jx\|^2 \ + \lambda^2\|Lx\|^1\ \}$$

还可以通过范式来改进性能，Dai提出了一种L1-L1 norm的方法[3]，它论文$L$的选取也采用了TV方法。

$$F(x) = \ \ \|(y - Jx)\|^1 \ + \lambda^2\|Lx\|^1$$

超参数$\lambda^2$的选取也特别重要，一般通过L曲线法来逐步优化获得最有的$\lambda^2$。

Ranade and Gharpure [4]提出了一种局部松弛正则化(locally relaxing regularization)方法来提高图像的尖锐特征。Liu，Khambampati [5]提出了一种基于参数化水平集的方法能够显著的提高成像质量。

GREIT 从另外一种思路来解决问题，它首先建立了规范化的成人和婴儿的胸部 FEM 模型，定义了衡量图像质量的若干准则，提出了一种基于大量仿真数据扰动的方法来获得重构矩阵的框架。

1. Cheney, M., et al., *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem.* International Journal of Imaging systems and technology, 1990. **2**(2): p. 66-75.

2. Borsic, A., et al., *Total variation regularization in electrical impedance tomography*. 2007.
3. Dai, T. and A. Adler. *Electrical Impedance Tomography reconstruction using ℓ1 norms for data and image terms*. in *2008 30th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. 2008. IEEE.
4. Ranade, N.V. and D.C. Gharpure, *Enhancing sharp features by locally relaxing regularization for reconstructed images in electrical impedance tomography.* Journal of Electrical Bioimpedance, 2019. **10**(1): p. 2-13.
5. Liu, D., A.K. Khambampati, and J. Du, *A parametric level set method for electrical impedance tomography.* IEEE transactions on medical imaging, 2017. **37**(2): p. 451-460.