## . EIT问题的有限元表达

定义在区域下，为边界，为区域内的电压，为电极区域。完备电极下的CEM方程如下：

则泛函表达为

所以F为[1 -1,0,0,0,0]的向量。 为整体系数矩阵， n为节点个数.

## . EIT逆问题

利用有限元方法（FEM）建立人体模型，EIT重建问题可以转化为如下的最优化为题，选择合适的x使得F(x)最小

其中 两帧图像之间的电压差，其中为电压测量次数。是用于成像的阻抗变化，为模型中有限元个数。 is the jacobian；在我们的设备中；其中 is the hyper parameter, 正则化项的选取十分关键，可以把一些先验知识通过加入到最优化的过程中。一般可以表达为的形式。 的选取有很多种方法，例如NOSER, Tikhonov, Laplace, exponential covariance, Gaussian HPF and time smooth prior等。zeroth-order Tikhonov regularization方法为单位阵。NOSRE方法中为对角阵[1]，定义如下式所示：

能够采用不同的组合。如果为Tikhonov regularization，可以直接采用One step Gauss-Newton方法求解：

GREIT也是一种基于L2-L2的方法[2]，它首先建立了规范化的成人和婴儿的胸部FEM模型，定义了衡量图像质量的若干准则，提出了一种基于大量仿真数据扰动的方法来获得重构矩阵的框架。L2-L2的方法为一种线性方法，有限元模型确定以后是固定的，因此直接通过获得图像，计算速度很快，目前的实时成像系统一般采用这种方法。

Wang的研究中，。这是一种的方法，由于不可导，需要采用迭代方法来求解。Wang采用了Split Bregman iterative algorithm（SB）算法[3]，并与A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm (FISTA))[4]和interior-point方法 [5]进行了对比。论文采用492有限元的模型，SB算法进行一次求解的运算时间为0.2364s（单个正则化参数），比FIST和IP方法更为快速。论文同时与TV和方法进行了对比，结果L2-L1的方法具有更高的精度。

Mamatjan 提出了primal-dual interior point method (PDIPM) algorithm对来解决L1范式求解问题，该方法可以求解各种范式组合[6] 。The computation time (CPU time) for an increasing number of iterations was calculated, where it took 1.4 s for, 2.3 s for. took the least computation time (0.9 s), while took the most computation time (5.7 s) based on the stable solution that they produced. The results showed that an solution is not only more robust to unavoidable measurement errors in a clinical setting, but. it also provides high contrast resolution on organ boundaries.

Borsic 提出了一种Total variation (TV)正则化的方法[7]，TV定义如下公式所示，其中代表边的编号，标号为和有限元(elements)的共同边为，边的长度为。，，为矩阵化后的结果。TV公式的物理意义可以这么理解：如果两个有限元相邻，而且公共边的长度很长，那么我们希望这两个有限元的差值较小。

TV方法转化为如下的最优化问题，，可以看出TV 方法的正则项为L1-norm。Javaherian提出了TVAL3方法来加速L2-TV性能[8]，该方法基于ADMM方法。

还有一些其他的方法，例如Ranade and Gharpure [9]提出了一种局部松弛正则化(locally relaxing regularization)方法来提高图像的尖锐特征。Liu, Khambampati [10]提出了一种基于参数化水平集的方法能够显著的提高成像质量。

## Integrated EIT

tidal volume，end-expiratory lung volume change ( △EELV), compliance, ventilation delay, and over distension/collapse images were performed。Clinically useful parameters were successfully extracted including anterior/posterior ventilation ratio (A/P ratio), center of ventilation ( CoVx , CoVy ), global inhomogeneity (GI), coefficient of variation (CV), ventilation delay and percentile of overdistension/collapse[11].

## 程序实现：

令为有限元节点数,为有限元个数,为电极个数，总共进行次刺激,每次刺激有次测量电压，总测量次数 。为有限元的电阻值，为节点电压。

首先计算系统矩阵：

实际计算时，先获得矩阵，。对于2D模型为二维数组，对于3D模型为三维数组。在eidor中采用system\_mat\_fields计算获得矩阵，存储为，该矩阵存储了的数值。随后利用和利用计算系统矩阵。计算方式为，。随后计算矩阵。如下所示：

依据推导只有激励电极处该值为1或者-1，其他为0。这样可以依据公式求得节点电压分布：U = left\_divide(S,F)。

前向模型求解：（system\_mat\_1st\_order）

1）采用system\_mat\_fields 计算获得 的矩阵 FC, 这个矩阵只和有限元模型相关。

2）把\*1的elem\_data 扩展为2048\*1，利用spdiags变为稀疏对角阵ES

3）E= FC’\*ES\*FC , s\_mat=1/2\*(E.’ + E)， 获得s\_mat 为\*的系统矩阵。

4）通过有限元公式可知：S\*U=F，其中U（545\*1）为节点电压，F（545\*1）为电流源激励矩阵，F中只有电流刺激的地方为1/-1,其他的为0。

5）U = left\_divide(S,F); 获得前向的电压

6）针对16个电流刺激，可以计算获得16个电压分布

对于逆问题，首先需要求解jacobian矩阵。矩阵的计算首先需要计算获得矩阵。随后令为电极电压，对于第次刺激可以得到公式。随后可以计算获得。公式代表如下意义：在第次刺激模式下，如果变化一定数值会导致变化多少。重复次上述过程，并排列好后可以获得整个jacobian矩阵。的计算采用的jacobian\_adjoint函数计算。随后可以用正则化的方法求解图像。

img\_bkgnd= calc\_jacobian\_bkgnd( inv\_model );

J = calc\_jacobian( img\_bkgnd);

RtR = calc\_RtR\_prior( inv\_model );

W = calc\_meas\_icov( inv\_model );

hp = calc\_hyperparameter( inv\_model );

RM = left\_divide((J'\*W\*J + hp^2\*RtR),J'\*W);

获得了RM后，第一点的电压为vh,后一点的电压为vi. 需要计算他们之间的差分图像。

1. 调用calc\_difference\_data函数计算差分值，计算有两种方式，一种为直接相减，第二种为归一化差分dva = vi./vh-1
2. 计算有限元上的阻抗变化：elem\_data = imdl.solve\_use\_matrix.RM\*dva;
3. 调用show\_slices(imr)显示图像，这个函数做了如下工作。
   1. 调用coarse2fine进行插值 imr.fwd\_model.coarse2fine\* elem\_data。elem\_data的数据长度和imr.fwd\_model.elems的长度不一样，我的理解是计算时只计算了一部分有限元的数值，需要通过插值函数来还原出所有有限元的数据。
   2. 调用calc\_slices获得64\*64的图像数据。取某一个剖面的有限元的阻抗图像。
   3. 然后进行渲染后，获得最终画出来的图像。
4. elem\_ptr = mdl\_slice\_mapper( fwd\_model, 'elem' );

已知：RM，vi，vh, coarse2fine, elem\_ptr 就可以计算了

dva = vi(vh~=0)./vh(vi~=0)-1;

elem\_data = imdl.solve\_use\_matrix.RM\* dva;

elem\_data = imr.fwd\_model.coarse2fine\*elem\_data;

elem\_ptr = mdl\_slice\_mapper( imr.fwd\_model, 'elem' );

backgnd= NaN;

n\_images= size(elem\_data,2);

rval= backgnd\*ones(size(elem\_data)+[1,0]);

rval(2:end,:) = elem\_data;

rimg= reshape( rval(elem\_ptr+1,:), [size(elem\_ptr), 1]);

img\_out1 = calc\_colours( rimg, img); % 颜色映射

image(img\_out1);

## 附录

### 格林公式

利用变分法，E-L方程和格林公式，可以把偏微分方程，例如laplace方程和poisson方程转化为积分方程。其中格林公式主要解决边界条件问题。设如下泛函

其E-L方程为：

### l1-norm求解

#### ADMM

ADMM算法代码见\EIT\code\matlab\ADMM

Matlab中对于tall arrays 数据，lasso回归采用 Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)方法求解.对于如下问题求解如下问题：

ADMM方法用采用如下步骤求解：

其中为scaled dual variable，或者Lagrange multiplier ， 为Lagrangian parameter。

对于Generalized Lasso回归，令。

第一步，固定，,求解最优的

第二步，固定，，求解最优的

对于l1-norm求解，引入了soft thresholding operator函数

得到

第三步：

所以ADMM方法主要用于L2-L1范式。

#### 2、IRN

首先采用Half-Quadratic（HQ）来解决非2范式的最小化问题，由HQ技术可以得到下式，其中。这里，当时，函数达到极小值[19]。为2次，为非二次，所以叫做半二次。

|  |  |
| --- | --- |
|  | （4） |

HQ算法已经被证明了与线性梯度迭代之间的等效性，同时也可以很方便的扩展到多个约束条件的正则化中。对于单个约束条件的正则化问题的来说，

|  |  |
| --- | --- |
|  | （5） |

式中，为约束条件对应的正则算子，为对应的正则化参数，-th和-th表示对应的范数，

使用极小交替法（alternating minimization iterative procedure），可以得到：

|  |  |
| --- | --- |
|  | （6） |
|  | （7） |
|  | （8） |

最小均方问题(8)对应的正规方程为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | （9） |

求解方程(9)就可以得到，按照上述迭代关系，，IRN算法流程如下：

|  |
| --- |
| 算法2.1  输入：， 传递矩阵， ，正则矩阵， 为正则参数  输出： |

IRN算法代码见\EIT\code\matlab\IRN

#### 3、PDIPM算法

## 参考文献：

1. Cheney, M., et al., *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem.* International Journal of Imaging systems and technology, 1990. **2**(2): p. 66-75.

2. Adler, A., et al., *GREIT: a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images.* Physiological measurement, 2009. **30**(6): p. S35.

3. Wang, J., et al., *Split Bregman iterative algorithm for sparse reconstruction of electrical impedance tomography.* Signal Processing, 2012. **92**(12): p. 2952-2961.

4. Beck, A. and M. Teboulle, *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems.* SIAM journal on imaging sciences, 2009. **2**(1): p. 183-202.

5. Kim, S., et al., *An interior-point method for large-scale $$\ell \_1 $$ ℓ1-regularized least squares.* IEEE J. Sel. Top. Signal Process. **1**(4).

6. Mamatjan, Y., et al., *An experimental clinical evaluation of EIT imaging with ℓ1 data and image norms.* Physiological measurement, 2013. **34**(9): p. 1027.

7. Borsic, A., et al., *Total variation regularization in electrical impedance tomography.* 2007.

8. Javaherian, A., et al., *An accelerated version of alternating direction method of multipliers for TV minimization in EIT.* Applied Mathematical Modelling, 2016. **40**(21-22): p. 8985-9000.

9. Ranade, N.V. and D.C. Gharpure, *Enhancing sharp features by locally relaxing regularization for reconstructed images in electrical impedance tomography.* Journal of Electrical Bioimpedance, 2019. **10**(1): p. 2-13.

10. Liu, D., A.K. Khambampati, and J. Du, *A parametric level set method for electrical impedance tomography.* IEEE transactions on medical imaging, 2017. **37**(2): p. 451-460.

11. Jang, G.Y., et al., *Integrated EIT system for functional lung ventilation imaging.* Biomedical engineering online, 2019. **18**(1): p. 83.

12. Dai, T. and A. Adler. *Electrical Impedance Tomography reconstruction using ℓ 1 norms for data and image terms*. in *2008 30th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. 2008. IEEE.