機器人視覺 HW4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　唐宇正 R07522537

1. Camera Calibration

為了能夠相機校正，需要取得相機內外部的參數，空間中的一個點(世界座標)透過外部參數矩陣([R|T])轉換為相機座標(相機座標)，再透過內部參數矩陣(k,f)轉換為影像上的點。

此題要使用 Tsai's method 來求取外部參數以及內部參數。

流程如下:

(1) 因為題目已經定義了世界座標的位置，顧可以透過其取得影像上每個點位於現實空間中的座標(Xw,Yw)，並且也可從影像上取得需要校正的影像點，此處選擇以棋盤格的每格格子的形心做為校正點，校正點的影像座標透過 matlab 的 regionprops 來取得。

(2) 透過題目給的影像資訊以及相機資訊如下:

Image size: Nfx=752pixels, Nfy=480pixels

Sensor: Ncx=608pixels, Ncy=391pixels

此處單位選擇使用 mm

故 dx=4.5/Ncx, dy=2.9/Ncy

dx'=Ncx/Nfx*dx, dy'=Ncy/Nfy*dy

Wx=229pixels, Wy=62pixels;

相機座標中心: Cx=Nfx/2, Cy=Nfy/2

此處選擇五個點作為校正點，使用 Xd=(Xf+Wx-Cx)*dx', Yd=(Yf+Wy-計算出該五點的 Xdi 以及 Ydi。

接著即可代入 A*mu=b 的矩陣，透過 mu 可以求得 Sr，並根據 mu 的參數的關係，將 Sr 代入對應的 Ty^2 的公式，即可求得 Ty^2。

(3) 接著需要判斷 Ty 的正負號，此處需要選擇一個離相機座標中心越遠越好的點，此處選擇棋盤最右上角的校正點最為判斷依據。使用該點之世界座標(Xw,Yw)，並根據 r1=((Ty^-1)*r1)*Ty...依此類推，計算出 x=r1*Xw+r2Yw+Tx, y=r4Xw+r5Yw+Ty，接著判斷其與世界座標 Xw 與 Yw 的關係，若 x 與 Xw 同號且 y 與 Yw 同號，則 Ty>0，除此之外，Ty<0。

(4) 判斷 r1*r4+r2*r5 的正負號，令 s 為絕對值為 1，並且與其異號，接者代入 paper(14a)得到 R 矩陣。

(5) 因應公式 A'*x'=b'之中變數為 f, fk1,Tz 三個，故此處選擇三個校正點並根據 A'*x'=b'的公式內容將對應之 R 矩陣元素、各校正點之 Xd,Yd 及世界座標代入即可求出三變數。

(6) 判斷 f 之正負，若 f>0，則此組解即為解，若 f<0，則 R(1,3),R(2,3),R(3,1),R(3,2)變號，並重新計算(5)(6)步驟。

此處得到 f=7.7946mm,　k1=-0.0011,

R=[0.8909 0.4442 0.0947;0.4260 -0.7448 -0.5136; -0.1576 0.4979 -0.8528], T=[-63.8457; 15.5502; 881.6329]

Ty^2=241.8089 mm^2

比較得到的解與題目給的數據 Ty^2=252.81mm^2, f=7.9mm

有略小的誤差，此處推測其可能為影像的預處理後造成 matlab 函數 regionprops 在尋找棋盤格形心做為校正點時產生誤差，在許多繁雜的計算過程中，由於位數以及程式計算精度的關係，使得計算後的結果與實際有些誤差，但整體仍為一個相對精準的值。

2. Robot Eye-on-Hand Calibration

Hc1, Hc2, Hc3, Hg12, Hg23 為題目數據提供已知。

(1)

由 Hcij=Hcj*inv(Hci)可得：

Hc12=Hc2*inv(Hc1)=

[0.0014 0.9462 -0.3234 -0.7123;
-0.7118 -0.2262 -0.6650 5.6223;
-0.7024 0.2312 0.6732 -1.7535;
0 0 0 1]

Hc23=Hc3*inv(Hc2)=

[-0.0020 -0.2783 0.9605 -4.4035;
0.4624 0.8514 0.2476 -1.3322;
-0.8867 0.4446 0.1269 5.4301;
0 0 0 1]

又 Hcij
=[Rcij , Tgi;
0 0 0 , 1];

故 Rc12=

[0.0014 0.9462 -0.3234
-0.7118 -0.2262 -0.6650;
-0.7024 0.2312 0.6732];

Tc12=
Transpose([-0.7123 5.6223 -1.7535])

Rc23=

[-0.0020 -0.2783 0.9605;
0.4624 0.8514 0.2476;
-0.8867 0.4446 0.1269]

Tc23=

Transpose([-4.4035   -1.3322   5.4301]);

同理可得 Rg12,Rg23,Tg12,Tg23

(2)

透過公式 Theda=arccos((r11+r22+r33-1)/2)可以分別算出 Rc12,Rc23,Rg12,Rg23 的 Theda

Theda_Rc12=arccos((0.0014-0.2262+0.6732-1)/2) = 1.8502(radius)

Theda_Rc23=arccos((-0.0020+0.8514+0.1269-1)/2) = 1.5826(radius)

Theda_Rg12= arccos((-0.2264+0.0020+0.6728-1)/2) = 1.8502(radius)

Theda_Rg23= arccos((0.8502+0.0041+0.1333-1)/2) = 1.5770(radius)

接著判斷其 Theda 是否為 0 或 pi，若是，則 n=[0;0;0], 若不為 0 或 pi，則 n=[n1;n2;n3]=[r32-r23;r13-r31;r21-r12]/2/sin(Theda);

將各矩陣對應之值代入得:

n_Rc12=[0.2312+0.665 ; -0.3234+0.7024 ; -0.7118-0.9462]/2/sin(Theda_Rc12)=
[0.4661   ;   0.1971   ;   -0.8625]

n_Rc23=[0.4446-0.2476 ; 0.9605+0.8867 ; 0.4624+0.2783]/2/sin(Theda_Rc23)=
[0.0985   ;   0.9237   ; 0.3703]

n_Rg12=[-0.7025+0.3241 ; 0.6651+0.2319 ; -0.9460-0.7116]/2/sin(Theda_Rg12)=
[-0.1969   ;   0.4666   ; -0.8623]

n_Rg23=[-0.8845-0.9605 ; -0.2442+0.4470 ; 0.2782+0.4664]/2/sin(Theda_Rg23)=
[-0.9225   ;   0.1014   ; 0.3723]

使用公式 Pr=2*sin(0.5*Theda)*[n1 ; n2 ; n3]求得各 Pr

Pc12=2*sin(0.5*Theda_Rc12)*n_Rc12=[0.7446   ;   0.3149   ;   -1.3777]

Pc23=2*sin(0.5*Theda_Rc23)*n_Rc23=[0.1401   ;   1.3140   ;   0.5268]

Pg12=2*sin(0.5*Theda_Rg12)*n_Rg12=[-0.3145   ;   0.7454   ;   -1.3774]

Pg23=2*sin(0.5*Theda_Rg23)*n_Rg23=[-1.3087   ;   0.1438   ;   0.5282]

用 paper 中的(8)(10)計算 Rg12,Rg23 並驗證與上面求得之答案是否相同，
式子如 paper 所示，此不贅述，在這邊的做法為使用(8)算出 Rg12_check_8 以及 Rg23_check_8，使用(10)算出 Rg12_check_10 以及 Rg23_check_10，
並將它們分別與上面求得的 Rg12 以及 Rg23 相減，看其各元素的差異，結果如下圖所示:

```
Check_Rg12_by_8 =

   1.0e-15 *

   -0.0278   -0.2220         0
   -0.2220    0.0278   -0.1665
    0.0833   -0.2220    0.8882
```

```
RCheck_Rg23_by_8 =

   1.0e-15 *

   -0.2220    0.1110    0.0833
    0.0555   -0.0520   -0.2220
    0.0555   -0.1110   -0.2498
```

```
Check_Rg12_by_10 =

   1.0e-15 *

   -0.8604   -0.6661   -0.1110
    0.2220   -0.7772   -0.3886
    0.3608   -0.2220    0.1110
```

```
Check_Rg23_by_10 =

   1.0e-15 *

    0.2220    0.0555    0.1110
    0.1110    0.4770         0
    0.0555   -0.3331    0.3053
```

從圖上可以看出來，四個結果的各元素值相差在極微小的範圍，近乎於零，故可知前面所得到之 Rg12 與 Rg23 是與(8)(10)算出來的值是一樣的，檢查結果為正確。

(3)

用 paper 的流程求 Pcg, [Rcg], Tcg

首先先求得 Pcg’=[Pcg’_x Pcg’_y Pcg’_z]，利用下列關係式

(Pgij+Pcij)*Pcg’=Pcij-Pgij;

因為(Pgij+Pcij)為 singular，故此式需要至少兩組參數才可以解，此處使用 Pc12, Pc23, Pg12, Pg23 代入，代入後使用最小平方法找出相對應的 Pcg’三個元素，過程如下:

((Pg12(2)+Pc12(2))*Pcg_prime(3)-(Pc12(3)+Pg12(3))*Pcg_prime(2)-(Pc12(1)-Pg12(1)))^2+((Pg12(3)+Pc12(3))*Pcg_prime(1)-(Pc12(1)+Pg12(1))*Pcg_prime(3)-(Pc12(2)-Pg12(2)))^2+((Pg12(1)+Pc12(1))*Pcg_prime(2)-(Pc12(2)+Pg12(2))*Pcg_prime(1)-(Pc12(3)-Pg12(3)))^2+((Pg23(2)+Pc23(2))*Pcg_prime(3)-(Pc23(3)+Pg23(3))*Pcg_prime(2)-(Pc23(1)-Pg23(1)))^2+((Pg23(3)+Pc23(3))*Pcg_prime(1)-(Pc23(1)+Pg23(1))*Pcg_prime(3)-(Pc23(2)-Pg23(2)))^2+((Pg23(1)+Pc23(1))*Pcg_prime(2)-(Pc23(2)+Pg23(2))*Pcg_prime(1)-(Pc23(3)-Pg23(3)))^2

此為其的均方誤差值的函數，接著透過 matlab 內建函數 fmincon 來尋找其最小值與相對應的 Pcg’的三元素，得到 Pcg'=[0.000975481032713686 ; 0.00108700981276671 ; 0.996600801124493];

接著將得到的 Pcg’代入公式 Pcg=2*Pcg’/(1+abs(Pcg’)^2)^0.5

得 Pcg=[0.00138188441880774 ; 0.00153987814522102 ; 1.41180307218691]

再透過 paper 的(10)式可以求得 Rcg=
[0.00340485706944483 -0.999992068884098 0.00206618422187282;
0.999994196817714 0.00340508787952242 -3.70753982456562e-06;
-0.000115235553992832 0.00206580382292078 0.999997859585376]

接著再透過公式 (Rgij-I)*Tcg=Rcg*Tcij-Tgij 求得 Tcg，此處一樣需要兩組參數來代入並且使用最小平方法才能求解，同樣使用 Tc12, Tc23, Tg12, Tg23, Rg12, Rg23 來代入，展開後如下:

((Rg12(1)-1)*Tcg(1)+Rg12(4)*Tcg(2)+Rg12(7)*Tcg(3)-(Rcg(1)*Tc12(1)+Rcg(4)*Tc12(2)+Rcg(7)*Tc12(3)-Tg12(1)))^2+((Rg23(1)-1)*Tcg(1)+Rg23(4)*Tcg(2)+Rg23(7)*Tcg(3)-(Rcg(1)*Tc23(1)+Rcg(4)*Tc23(2)+Rcg(7)*Tc23(3)-Tg23(1)))^2+((Rg12(2))*Tcg(1)+(Rg12(5)-1)*Tcg(2)+Rg12(8)*Tcg(3)-(Rcg(2)*Tc12(1)+Rcg(5)*Tc12(2)+Rcg(8)*Tc12(3)-Tg12(2)))^2+((Rg23(2))*Tcg(1)+(Rg23(5)-1)*Tcg(2)+Rg23(8)*Tcg(3)-(Rcg(2)*Tc23(1)+Rcg(5)*Tc23(2)+Rcg(8)*Tc23(3)-Tg23(2)))^2+((Rg12(3))*Tcg(1)+(Rg12(6))*Tcg(2)+(Rg12(9)-1)*Tcg(3)-(Rcg(3)*Tc12(1)+Rcg(6)*Tc12(2)+Rcg(9)*Tc12(3)-Tg12(3)))^2+((Rg23(3))*Tcg(1)+(Rg23(6))*Tcg(2)+(Rg23(9)-1)*Tcg(3)-(Rcg(3)*Tc23(1)+Rcg(6)*Tc23(2)+Rcg(9)*Tc23(3)-Tg23(3)))^2

此為其均方誤差的函數，同樣使用 matlab 內建函數 fmincon 來求得其最小值以及相對應的 Tcg，此處求得 Tcg=
[-0.4924 ; -0.6927 ; -0.4055]

此處求得的值與題目給的做比較，Pc12 是與題目給的題是相符合的，但 Tcg 的 z 項的值有 0.0004 的誤差，這裡推斷是前面在進行反三角函數計算時，得到的弧度值是程式四捨五入過(小數點後面太多位數)，所以導致值有極小的誤差，但不影響整體結果。