数分B2期中.　　郑序.

※多元函数微分学.

$(\vec{x}\in D)$

△<u>极限</u>: $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x_0}$是D内聚点, $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当$0<\rho(\vec{x},\vec{x_0})<\delta$时,

有$\rho(\vec{f}(\vec{x}),\vec{l})<\varepsilon$, 则称$\vec{f}(\vec{x})$当$\vec{x}\to\vec{x_0}$时有极限$\vec{l}$.

special case: 二重极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$.

☆计算方法: ①变量代换

②两边夹(基本不等式等)　⇒转化为一元情形

③恒等变形

④极坐标变换(要关于θ一致)

证不收敛方法(无极限): 找两条极限不同的路径.

△<u>连续</u>: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当$\vec{x}\in D$, $\rho(\vec{x},\vec{x_0})<\delta$时, 有$\rho(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x_0}))<\varepsilon$,

则称$\vec{f}(\vec{x})$在$\vec{x_0}$处连续.　(孤立点)

Remark1: 定义中无"$0<\rho$"之限制, 故单点集天然连续.

Remark2: 等价定义: (i) Heine: $\forall$以$\vec{x_0}$为极限的点列$\{\vec{x_n}\}$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\vec{f}(\vec{x_n})=\vec{f}(\vec{x_0})$$

(ii) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, $\vec{f}(B_\delta(\vec{x_0}))\subset B_\varepsilon(\vec{f}(\vec{x_0}))$

或$B_\delta(\vec{x_0})\subset\vec{f}^{-1}(B_\varepsilon(\vec{f}(\vec{x_0})))$　(均与D取交)

(iii) 拓扑语言: 开集之原像是开集.

→例1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 沿$y=-x+x^3$趋于$(0,0)$, $\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\dfrac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3}=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^5-3x^3+3x}\to\infty$

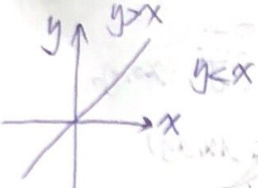
可见, 分子幂次高并不意味着极限为零.

→例2. $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$　⇒可见不能乱交换次序

但若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$存在时有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f$

→例3. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-y}-1}{x-y}, & x>y\\ 1, & x=y\\ \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x<y\end{cases}$ 的连续性.



当 $x>y$ 时,连续;当 $x<y$ 时,连续.

下面考察直线 $y=x$ 上点 (x_0,y_0). $(x_0=y_0)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x>y}} f(x,y) \xlongequal{u=x-y} \lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{u}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x<y}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x<y}}\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y}=\cos x_0$$

由 $\cos x_0=1 \Rightarrow x_0=2n\pi, n\in\mathbb{Z}$.

故 $(2n\pi,2n\pi)$ 连续点,其余 (x,x) 间断点.

△可微: 若 $\exists$ 常数 A,B, s.t. $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \rho\to 0$

(其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$), 则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

△偏导数: $f(x,y_0)$ 在 x_0 处导数称为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数.

即 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

☆

$$\begin{tikzcd}
 & \text{可微} \arrow[dl, shift left] \arrow[dr] & \\
\text{偏导数存在} \arrow[ur, shift left, Rightarrow, "\text{pd连续}"] \arrow[rr, "\text{pd有界}"] & & \text{连续}
\end{tikzcd}$$

(pd = 偏导数)

☆判断是否可微: 若不连续,必不可微

若偏导不存在,必不可微

若既连续又 $\exists$ 偏导,则必须用定义判断

即考察 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y+\varphi(\rho)$ 中,

$\varphi(\rho)$ 是否为 $o(\rho)$ as $\rho\to 0$.

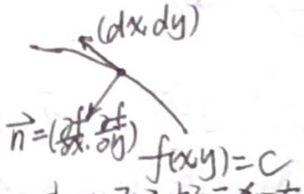
→例4. $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微? 不. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right.$ 取 $\left.y=kx^2\right)$

△ 方向导数：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的变化率

称为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处方向导数，记 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \overset{可微}{=} \nabla f\cdot \vec{l} \quad (|\vec{l}|=1)$$

$$\overset{不可微}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t}$$



☆复合函数偏导数计算：换元，链式法则（能一眼看出来也可不换元，但存在风险）(马虎)

<不难但要耐心一点算>

☆隐函数偏导数计算：链式法则或微分法（二选一，详见"习题课讲义WEEK5(1).pdf"的补充内容）

隐函数存在定理条件：重点是 $F'_y\neq 0$.

→例5：设 $y=f(x+t)$，其中 t 是由 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

法一（链式法则）：$y=f(x+t(x,y))$ ~~两边~~对 x 求导得：

$$\frac{dy}{dx}=f'\cdot\left(1+\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) \xleftarrow{代入}$$

$$y+g(x,t)=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=0\\ 1+\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial t}{\partial x}=\cdots\\ \frac{\partial t}{\partial y}=\cdots\end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}\neq 0.$$

法二（微分法）：
$$\begin{cases}dy=f'\cdot(dx+dt)\\ dy+g'_x dx+g'_t dt=0\end{cases} \Rightarrow dy=\boxed{\quad}\,dx.$$

△ 微分中值定理：$f(x,y)$ 在凸域中可微，则

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h,y_0+\theta h)k \quad \exists\, 0<\theta<1.$$

（构造 $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$ 转化为一元情形来证）

△ Taylor 公式：$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n$

其中 $d^mf(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0,y_0)$，$h=x-x_0$，$k=y-y_0$

→例6. $\sin(x+y^2)$ 在 $(0,0)$ 邻域展开

$=(x+y^2)-\frac{(x+y^2)^3}{3!}+\cdots$

→例7. $\frac{1}{1-x-y+xy}$ 在 $(0,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 邻域展开

(i) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\right)$

(ii) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}[(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}[(y-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]^n\right)$

$=\cdots$

△极值/极值点：$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$，$\forall(x,y)\in B_r(x_0,y_0)$

☆具体计算：step1：$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ → 驻点

step2：$\Delta=AC-B^2=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$

$\begin{cases}A>0,\Delta>0\to\text{严格极小值点}\\ A<0,\Delta>0\to\text{严格极大值点}\\ \Delta<0\to\text{不是极值点}\\ \Delta=0\to\text{需由更高阶Taylor公式确定}\end{cases}$

Remark 1：过(x_0,y_0)点的任一直线上(x_0,y_0)均是极值点，$\nRightarrow(x_0,y_0)$极值点。

反例：$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$沿过$(0,0)$任一直线$y=kx$都是极小值点，

但沿$y=3x^2$和$y=\frac{3}{2}x^2$分别是极小和极大值点。

Remark 2：内部唯一极值点必是最值点 → 必对单变量成立，多变量不成立

反例：$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$在$[-5,5]\times[-1,1]$中，

$(0,0)$是极大值点，但最大值在$x=5,y=0$取到。

Remark 3：极大极小值交替出现 → 多变量不成立

反例：$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$有无穷多个极大值点$(2k\pi,0)$

但无极小值点。

☆条件极值计算：

step1：

设$F(x,y,\lambda)=\underbrace{f(x,y)}_{\text{目标函数}}+\lambda\underbrace{\varphi(x,y)}_{\text{限制条件}}$

$\begin{cases}F_x=0\\ F_y=0\\ F_\lambda=0\end{cases}$ ⇒ 驻点

step2：(判断极大/小)

由于有限制条件，$f(x,y)$变为单变量函数，故只需对单一变量求一、二阶导即可判断。

→例8.求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的隐函数z的极值。

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$

1.找驻点，$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$

两边对x求偏导 $2(x-1)+2(z-2)\frac{\partial z}{\partial x}=0$

两边对y求偏导 $2(y+1)+2(z-2)\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$\xrightarrow{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0}\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=-2\text{或}6\end{cases}$

2.求海森矩阵(或△)

对上述二式，分别对x，y求偏导，代入$(1,-1,-2)/(1,-1,6)$即可。

→例9.在约束$(x-1)^2+y^2-1=0$下，求$z=xy$极值

驻点

1. $M_1(0,0)$ → 不是极值点($(0,0)$两边值有大有小)

$M_2(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$M_3(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

2. $z=xy(x)$，$z'=y(x)+xy'(x)$，$z''=2y'(x)+xy''(x)\Big|_{M_2/M_3}\gtrless 0$

用$(x-1)^2+y^2-1=0\Rightarrow y'(x),y''(x)$

多元函数积分学

△二重积分

计算步骤：①画图，确定积分区域

②选择积分顺序，确定积分上下限

（积不出或不好积时换序积）

Remark：注意利用对称性能化繁为简（先看区域再看函数）

比如，区域关于x轴对称，则 $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,-y)dxdy$

但没把握时老老实实算吧。 $\left(\lim\sum f(\xi_i,\eta_i)\Delta I_{ij}+\lim\sum f(\xi_i,-\eta_i)\Delta I_{ij}\right)$

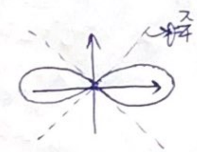
△二重积分变量代换

1° 极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$ 一般先r后θ的顺序（$\int d\theta\int \square dr$）

2° $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=abr$

3° 一般的代换

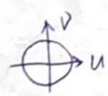
→例10. 求由曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 所围面积.



令 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$ 则曲线化为 $r^4=r^2\cos2\theta$ 或 $r=\sqrt{\cos2\theta}$

$\therefore S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}abr\,dr=\cdots$

→例11. 证明 $\iint_{x^2+y^2\le1} f(ax+by+c)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt$



令 $\begin{cases}u=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y\\ v=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y\end{cases}$ $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=1$

则 $LHS=\iint_{u^2+v^2\le1} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dudv=\int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv=RHS$

△∂D上有瑕点或D为无界域：找 $D_n\subset D_{n+1}\subset\cdots\subset D$

$\iint_D f\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f\,dxdy.$

△三重积分

切片：$\int_{z_1}^{z_2}dz\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdydz$

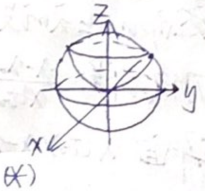
切条：$\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dxdydz$

△变量代换：

1° 柱坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ $|J|=r$ 先r后θ再z $\int dz\int d\theta\int\square\, r\,dr$

2° 球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ $|J|=r^2\sin\theta$ 先r后θ再φ $\int d\varphi\int d\theta\int\square\, r^2\sin\theta\,dr$

→例12. 求 $I=\iiint_V z^2dV$，其中



(i) V：由 $x^2+y^2+z^2=2$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围成，含(0,0,1)

(ii) V：— — — — — — ，含(0,0,−1)

(i) 切条法：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow z=1$ ∴ $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$ (*)

$I_1=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz=\frac{1}{3}\iint_D\left[(2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^3\right]dxdy$

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^6\right]r\,dr\overset{r^2=s}{=}\frac{\pi}{3}\int_0^1\left[(2-s)^{\frac{3}{2}}-s^3\right]ds=\frac{\pi}{3}\left(-\frac{2}{5}(2-s)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{4}s^4\right)\Big|_0^1$

$=\frac{32\sqrt2-13}{60}\pi$

切片法：$I_1=\int_0^1dz\iint_{D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le z\}}z^2dxdy+\int_1^{\sqrt2}dz\iint_{D_z=\{x^2+y^2\le2-z^2\}}z^2dxdy$

$=\pi\int_0^1z^3dz+\pi\int_1^{\sqrt2}(2z^2-z^4)dz=\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_1^{\sqrt2}=\frac{32\sqrt2-13}{60}\pi$

（注意切片法一开始也要计算(*)，所以二者计算基本相同）

(ii) $I_2=\iiint_{\text{整个球}S}z^2dV-I_1$ $\quad (S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le2\})$

而 $\iiint_S z^2dV=\frac{1}{3}\iiint_S(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}r^2\cdot r^2\sin\theta\,dr$

$=\cdots$

→例13. $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x-y^3\right)dV$

$\underset{V}{\iiint} x\,dv=0$ $\underset{V}{\iiint} y^3=0$

△n重积分 记着数学归纳法/递推法.

※空间曲线和曲面.

part1 —— 曲线:

1° $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ $v(t)=\dot{r}(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

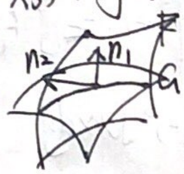
∴单位化切向量为$\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

<然而以上知识算第一、二型积分时比较有用,目前没啥用>

过点切线方程 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$,若$z'(t_0)=0$,则$\begin{cases}\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}\\ z=z_0\end{cases}$

法平面 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

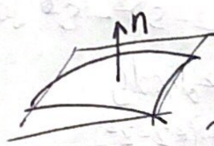
2° $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$



切向量$=n_1\times n_2$
$=(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)$

part2 —— 曲面:

1° $F(x,y,z)=0$



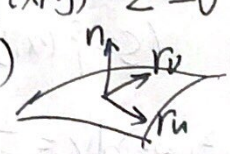
$n=(F_x,F_y,F_z)$

法线方程 $\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$

切平面方程 $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

<special case: $z=f(x,y)\Rightarrow f(x,y)-z=0$>

2° $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$



$n=r_u\times r_v$

附: part2 − 1°中切平面可先算. $dF=0\Rightarrow F_x dx+F_y dy+F_z dz=0$
$\xRightarrow{\text{积分}} F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

附: 曲率$K=\frac{\dot{r}\times\ddot{r}}{|\dot{r}|^3}$ <不是很重要>

部分往年题

1.（2011-2012 第2次小测 6） P32

证明：$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dx_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1 \cdots x_n dx_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}$

$$
\begin{aligned}
LHS &= \int_0^1 x_1 dx_1 \int_{x_1}^1 x_2 dx_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_n dx_n \\
&= \frac{1}{2^n} \int_0^1 dx_1^2 \int_{x_1}^1 dx_2^2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 dx_n^2 \\
&= \frac{1}{2^n} \int_0^1 dt_1 \int_{t_1}^1 dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^1 dt_n \\
&= \frac{1}{2^n} \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \\
&= \frac{1}{2^n} \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_3} t_2 dt_2 \\
&= \frac{1}{2^n} \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_4} \frac{t_3^2}{2!} dt_3 \\
&= \cdots = \frac{1}{2^n \cdot n!}
\end{aligned}
$$

2.（2012-2013 第一次小测 5） P33

设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有二阶偏导数，且二阶偏导数为零.

求证：$\exists\, a,b,c$, s.t. $f(x,y) = ax+by+c$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow f(x,y) = g(x) + h(y) \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow g''(x) = 0 \Rightarrow g(x) = ax + c_1 \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow h''(y) = 0 \Rightarrow h(y) = by + c_2
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow f(x,y) = ax+by+c
$$

3. P33 题6.

$z=z(x,y)$ 由方程 $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$ 所确定的隐函数

φ 一元可微. 求证: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$

$adx+bdy+cdz=2x\varphi'dx+2y\varphi'dy+2z\varphi'dz$

$\Rightarrow (c-2z\varphi')dz=(2x\varphi'-a)dx+(2y\varphi'-b)dy$

由隐函数定理, $c-2z\varphi'\neq 0$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\varphi'-a}{c-2z\varphi'}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\varphi'-b}{c-2z\varphi'}$

$$\therefore (cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cancel{2cxy\varphi'}-2bxz\varphi'-acy+\cancel{abz}}{c-2z\varphi'}$$

$$+\frac{2ayz\varphi'-\cancel{2cxy\varphi'}-\cancel{abz}+bcx}{c-2z\varphi'}=bx-ay$$

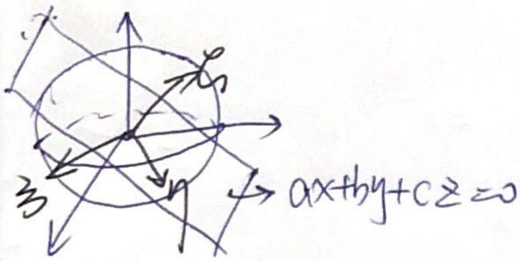
4. P34 题6.

$I_1=\iiint\limits_V \cos x\,dxdydz$ $I_2=\iiint\limits_V \cos(ax+by+cz)\,dxdydz$

V 是 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 且 $a^2+b^2+c^2=1$.

$\begin{cases} x=x \\ y=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases}$ $I_1=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\cos x\cdot r\,dr$

$=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos x\,dx=2\pi\int_0^1(1-x^2)\cos x\,dx=4\pi(\sin 1-\cos 1)$



旋转坐标轴, 使新坐标 $\xi-\eta$ 在 $ax+by+cz=0$ 平面上. $\zeta=ax+by+cz$

则 $I_2=\iiint\limits_V \cos(\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta=I_1$.

P46 6.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，$\sum_{i=1}^n x_i=n$，证明 $\prod_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\le n$

等号成立 $\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=1$

$$f=x_1\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+\lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i-n\right)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\prod_{j\neq i}x_j\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}-\frac{\prod_{j\neq i}x_j}{x_i}+\lambda \\ \quad =\prod_{j\neq i}x_j\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}+\lambda=0 \\ \frac{\partial f}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^n x_i-n=0\end{cases}$$

显然 $\prod_{j\neq k}x_j\sum_{j\neq k}\frac{1}{x_j}=\prod_{j\neq l}x_j\sum_{j\neq l}\frac{1}{x_j}$，$\forall k\neq l$.

$$\Rightarrow x_l\sum_{j\neq k}\frac{1}{x_j}=x_k\sum_{j\neq l}\frac{1}{x_j}$$

$$\Rightarrow 1+x_l\sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}\frac{1}{x_j}=1+x_k\sum_{\substack{j\neq k\\ j\neq l}}\frac{1}{x_j}$$

$$\Rightarrow x_l=x_k.$$

$\therefore \sum_{i=1}^n x_i-n=nx_i-n=0\Rightarrow x_i=1$，$\forall i=1,\cdots,n$