习题参考答案

习题1.1：

1. 利用有理数域四则运算直接反证即可.

以 $a+b$ 为例，假设 $a+b\in\mathbb{Q}$，则 $b=(a+b)-a\in\mathbb{Q}$ 这与 $b\notin\mathbb{Q}$ 矛盾！

2. 对于 $\forall a,b\in\mathbb{Q}$，且 $a<b$，有 $(b-a)\frac{\sqrt{2}}{2}+a\in(a,b)$，而由1知 $(b-a)\frac{\sqrt{2}}{2}+a$ 为无理数

注：实际上2的命题等价于0与1之间存在无理数

3. 反证法，假设 $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$，则 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ 其中 p,q 为互质整数，$q\neq 0$.

从而 $p^2=2q^2\Rightarrow 2\mid p^2\Rightarrow \underline{2\mid p}\Rightarrow 4\mid p^2\Rightarrow 4\mid 2q^2\Rightarrow 2\mid q^2\Rightarrow \underline{2\mid q}$

与 p,q 互质矛盾！

$\sqrt{3}$ 同理可证

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 可转化为证 $\sqrt{6}$ 为无理数

4. 仿照书本P2即可.

$0.24\dot{9}=\frac{1}{4}$ $\quad 0.\dot{3}7\dot{5}=\frac{125}{333}$ $\quad 4.\dot{5}1\dot{8}=4\frac{518}{999}=\frac{4514}{999}=\frac{122}{27}$

5. (1) 若 $s\neq 0$，则 $\sqrt{2}=\frac{-r}{s}\in\mathbb{Q}$ 矛盾，故 $s=0$，从而 $r=0$

(2) 由第1道习题知 $s\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow s=0$；$t\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow t=0$

若 $t=0$，由(1)知 $r=s=0$；若 $s=0$，则同(1)理可得 $r=t=0$.

若 $t\neq 0$ 且 $s\neq 0$，则 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0$ 可化为 $\sqrt{6}=\frac{r^2-2s^2-3t^2}{2st}\in\mathbb{Q}$ 矛盾！

6. 数学归纳法.

注意：$t\neq 0$ 且 $s\neq 0$ 的反面不是 $t=s=0$

$n=1$ 时显然.

假设对 $n-1$ 成立，则 $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)(1+a_n)=1+a_n+(1+a_n)\sum_{i=1}^{n-1}a_i$

这里用了 $a_i>-1$ 的条件（不然不等号要反向）

$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_n}$ 由于符号相同，故为正.

$\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

7. $|a|<1,|b|<1\Rightarrow(a^2-1)(b^2-1)>0\Rightarrow a^2b^2+1>a^2+b^2\Rightarrow a^2b^2+2ab+1>a^2+2ab+b^2$

$\Rightarrow(1+ab)^2>(a+b)^2\Rightarrow\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1\Rightarrow\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$

习题1.2

1.(1) $\forall\varepsilon$, 取 $N=\left[\frac{5-15\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1$, $\forall n>N$, $\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$

(3) $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right]+1$ / $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$

2. $\forall\varepsilon>0$, 对 $c=\frac{\varepsilon}{M}$, $\exists N$, $\forall n>N$, 有 $|a_n-a|<Mc=\varepsilon$

4. 注意到 $\big||a_n|-|a|\big|<|a_n-a|$ 即可.

反例: $a_n=(-1)^n$

三问显然.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, |a_n|<\varepsilon$, 则 $|a_nb_n|<M\varepsilon$

7.(2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}5\left(1-\frac{2}{2k}\right)+1=6\\ \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}5\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)-1=4\end{array}\right\}\Rightarrow \{a_n\}$ 发散.

8.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}$

(3) $a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(n+1)/2}\right)=\frac{1\times\cancel{4}}{\cancel{2}\times3}\cdot\frac{\cancel{2}\times\cancel{5}}{\cancel{3}\times\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}\times6}{4\times\cancel{5}}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-q)(1+q)\cdots(1+q^{2^n})}{1-q}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}\overset{|q|<1}{=\!=}\frac{1}{1-q}$

(很多人把 2^n 看成了 $2n$)

9. $a_n=\frac{1}{2^n}$ / $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ / ...

13. 令 $c_n=a_n-b_n\longrightarrow a-b$ $(n\to\infty)$ 则 $a>b\Rightarrow a-b>0\xrightarrow[n\text{充分大}]{\text{定理1.4 }\S1.2}c_n>0\Rightarrow a_n>b_n$ (n 充分大)

反过来:假设 $a<b$, 则由刚刚讨论和 $a_n>b_n$ (当 n 充分大时), 这是矛盾!

(逆否)

第1问如果从定义证, 取 $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$ 即可

第2问有些人取 $\varepsilon=\min\left\{a-\frac{a_n+b_n}{2}, \frac{a_n+b_n}{2}-b\right\}$, 然后推 $a-\varepsilon\geqslant b+\varepsilon\Rightarrow a-\varepsilon\geqslant b-\varepsilon\Rightarrow a\geqslant b$

但这里 ε 可能为负!

$\left(a_n=\frac{1}{n}, b_n=\frac{1}{n^2}, a=b=0\right)$

补充内容&习题:

1.一些你以后可能会用到的东西:

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　　$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$　　$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

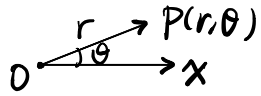
(2) 双曲函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

性质: · $\cosh^2x-\sinh^2x=1$

· 反函数 $\operatorname{arcsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$\operatorname{arccosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\operatorname{arctanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

(3) 极坐标系 

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　　$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}$

(4) Bernoulli inequality: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}x_i$ ($n\in\mathbb{N}^+$, $x_i>-1$ 且同号)

2nd version: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)>1+\sum_{i=1}^{n}x_i$ ($n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^+$, $x_i>-1$ 且同号不为0)

(5) 均值不等式: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　$(a,b>0)$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\leq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\quad(a_i>0,\forall i=1,\cdots,n)$$

等号成立 $\Leftrightarrow a_1=\cdots=a_n$

(6) Cauchy-Schwarz inequality (discrete version) $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$　$(x_i,y_i\in\mathbb{R})$

等号成立 $\Leftrightarrow$ x_i 与 y_i 对应成比例

(7) 三角不等式 $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

☆证明题常用套路 (e.g. $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$)

2. 极限的定义与说明

极限: 设 $\{a_n\}$ 是给定数列. 若 $\exists a\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时,

有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 此时称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限.

注：(1) $N=N(\varepsilon)$，即N与ε有关.

(2) 我们只关心ε充分小的一面，故可取$0<\varepsilon<1$等.

(3) 实际证明中，证出$|a_n-a|<M\varepsilon$或$|a_n-a|\le\varepsilon$或$|a_n-a|\le M\varepsilon$即可(M常数)

3. 做题必备定理.

Thm1：收敛数列极限唯一，且有限多项值改变不会影响收敛性与极限.

Thm2：$\{a_n\}$收敛于a $\Leftrightarrow$ 它的任意子列收敛于a

Thm3：$a_n\to a, b_n\to b\ (n\to\infty)$，则

(i) n充分大时$a_n<b_n \Rightarrow a\le b$

(ii) $a<b \Rightarrow n$充分大时$a_n\le b_n\ (a_n<b_n)$

注：·(i)左边可以是$a_n\le b_n$

·(ii)左边不可以是$a\le b$

Thm4：(夹逼准则) n充分大时$a_n\le c_n\le b_n$，且$a_n\to a, b_n\to a\ (n\to\infty)$

则$c_n\to a\ (n\to\infty)$ ※计算题很常用

Thm5：单调有界数列必收敛 ※证明题很常用

Thm6 (Stolz) $\frac{*}{\infty}$：b_n严格$\uparrow\to+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

$\frac{0}{0}$：$a_n\to0$，b_n严格$\downarrow\to0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

注：·$\frac{*}{\infty}$对a_n不作要求 ·逆定理均不成立，如$a_n=(-1)^n$，$b_n=n$

"$\frac{0}{0}$型"证明：只证$A\in\mathbb{R}$情形.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0$ $\forall n\ge N_0$，有 $A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon$

由b_n严格$\downarrow\to0$知$b_n-b_{n-1}<0$

故$(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})$

上式对$n=N+1, N+2, \cdots, N+p$ ($\forall N\ge N_0$, $\forall p\ge1$)均成立，各式相加，

得$(A+\varepsilon)(b_{N+p}-b_N)<a_{N+p}-a_N<(A-\varepsilon)(b_{N+p}-b_N)$

$$\Rightarrow A-\varepsilon<\frac{a_{N+p}-a_N}{b_{N+p}-b_N}<A+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{N+p}-a_N}{b_{N+p}-b_N}-A\right|<\varepsilon$$

令$p\to\infty$，得$\left|\frac{a_N}{b_N}-A\right|<\varepsilon$ 得证 □

4. 补充习题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ · $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{n^2+n}=1$ (展到λ_n^3)

法一：令$\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n \Rightarrow n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$

$$\Rightarrow \lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0 \text{ as } n\to\infty$$

法二：$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\underbrace{1\cdot1\cdots}_{n-2个}\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}<\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}=1+\frac{2\sqrt{n}-2}{n}\longrightarrow 1$ as $n\to\infty$

(2) $P_n>0$, $\frac{P_n}{P_1+\cdots+P_n}\to 0$, $a_n\to a\ (n\to\infty)$，则$\frac{P_1a_n+P_2a_{n-1}+\cdots+P_na_1}{P_1+\cdots+P_n}\to a\ (n\to\infty)$

$$\left|\frac{P_1a_n+\cdots+P_na_1}{P_1+\cdots+P_n}-a\right|\le\underbrace{\left|\frac{P_1(a_n-a)+\cdots+P_{n-N}(a_{N+1}-a)}{P_1+\cdots+P_n}\right|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\left|\frac{P_{n+1-N}(a_N-a)+\cdots+P_n(a_1-a)}{P_1+\cdots+P_n}\right|}_{<NM\varepsilon\ (其中|a_n|\le M)}$$

(3) $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n重根式)，问：$\{a_n\}$是否收敛，若收敛给出极限。

归纳法易证$0<a_n\le2$及$a_{n+1}>a_n\Rightarrow$收敛

$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 令$n\to\infty$，$a=\sqrt{2+a}\Rightarrow a=2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$

利用$\frac{2}{\frac{1}{1+k/n^2}+1}\le\sqrt{(1+\frac{k}{n^2})\cdot1}\le\frac{1+\frac{k}{n^2}}{2}$夹逼.

(5) 讨论$a_n=\sqrt[n]{1+b^n+(b^2/2)^n}$ ($b>0$)的极限

① $0<b\le1$，$a_n\to1$ ② $1<b<2$，$a_n=b\sqrt[n]{(\frac{1}{b})^n+1+(\frac{b}{2})^n}\to b$

③ $b\ge2$，$a_n=\frac{b^2}{2}\cdot\sqrt[n]{(\frac{2}{b^2})^n+(\frac{2}{b})^n+1}\to\frac{b^2}{2}$

key：考虑b与$\frac{b^2}{2}$相对大小

(6) 已知 $a_n \to a\ (n\to\infty)$，求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}}$ (Stolz)

(7) 设 m 是取定的正整数，记 $I_n=\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^m}-\frac{n}{m+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

通分后用Stolz，再分子分母二项式展开，只需确定 n^{m-1} 的系数比.

(8) $(\ln n)^{\ell} << n^k << a^n << n! < n^n\ (k,\ell>0,\ a>1)$

5. 集合论 & 实数理论

(1) 可数集合 & 不可数集合:

- 先介绍双射(一一对应)：设映射 $f: X\to Y,\ x\mapsto y$

  单射: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

  满射: $f(X)=Y\ /\ \forall y\in Y,\ \exists x\in X,\ s.t.\ f(x)=y$

  双射: 既单又满 (此时存在逆映射 f^{-1}，且 f^{-1} 亦为双射)

- 无限集合 X. 若存在双射 $f: X\to\mathbb{N}$，则 X 为可数集合，否则不可数集

  Thm: 若存在满射 $g:\mathbb{N}^+\to X$，则 X 为可数集

  Thm: 可数个可数集之并为可数集

  Thm: $2^{\mathbb{N}}$ 为不可数集 $(2^{\mathbb{N}}=\{A\mid A\subset\mathbb{N}\})$ Pf: $V=\{k: k\notin U_k\}$

  Thm: $\mathbb{Q}$ 可数集，$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 不可数集

(2) 等价关系

S 为非空集合，R 为 $S\times S$ 的非空子集.

Def: 称 R 为 S 上等价关系，若 R 满足:

(i) 自反性: 若 $u\in S$，则 $(u,u)\in R$

(ii) 对称性: 若 $(u,v)\in R$，则 $(v,u)\in R$

(iii) 传递性: 若 $(u,v)\in R,\ (v,w)\in R$，则 $(u,w)\in R$.

对 $u,v\in S$，若 $(u,v)\in R$，则称在等价关系 R 下 u,v 等价，记为 $u\sim v$.

例. $S=\{0,1\}$，$R_1=\{(0,1)\}$，$R_2=\{(0,1),(1,0)\}$，$R_3=\{(0,0),(1,1)\}$

$R_4=2^S$，哪些是 S 上等价关系?

例. $S=\mathbb{R}$，$R_1=\{(a,b)\mid a=b+1$ 或 $a=b-1$ 或 $a=b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ 不是等价关系

$R_2=\{(a,b)\mid \exists k\in\mathbb{Z}\ s.t.\ a=b+k,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ 是等价关系

Notation: $[a]=\{b\in S\mid a\sim b\}$ 称为 a 的等价类，其中任一元素称为代表元

$S/\sim\ =\{[a]\mid a\in S\}$ 为 S 上等价类集合.（或写作 S/R）

例. $S=\mathbb{N}$，$R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid \frac{a-b}{2}\in\mathbb{Z}\}$ 易验证 R 为等价关系

$\{1,3,5,\cdots\}$ 和 $\{2,4,6,\cdots\}$ 为两个等价类集合

$S/R=\{\{1,3,\cdots\},\{2,4,\cdots\}\}=\{$奇数, 偶数$\}$

Properties. $\forall a,b\in S$，$[a]=[b]$ 或 $[a]\cap[b]=\phi$

(3) 实数的定义.

$S=\{$有理数 Cauchy 列全体$\}$

$R=\{(\{x_n\},\{y_n\})\mid \forall\varepsilon,\exists N,\forall n>N,|x_n-y_n|<\varepsilon,\ \{x_n\},\{y_n\}\in S\}$ 可验证此为等价关系

$\mathbb{R}\triangleq S/\sim$ 它的元素 x（$\{x_n\}$ 的等价类集合），称为实数

$\{x_n\}$ 称为 x 的代表元，记 $x\sim\{x_n\}$，称 x 中任意代表元 $\{x_n\}$ 收敛到 x

运算: $x\sim\{x_n\}$，$y\sim\{y_n\}$　加法: $x+y\sim\{x_n+y_n\}$

（Q: 加法定义良定么? ① $\{x_n+y_n\}$ 是 Cauchy 列吗? ② 与代表元选取有关么?）

减、乘、除类似定义

有理数稠密: $\forall x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon,\exists y\in\mathbb{Q},\ s.t.\ |x-y|<\varepsilon$

Pf: 设 $\{x_n\}$ 为 x 的代表元

$\forall\varepsilon,\exists N,\forall m,n>N,|x_m-x_n|<\varepsilon$

令 $y=x_n$，则 $|x_m-y|<\varepsilon,\ \forall m>N \Rightarrow |x-y|<\varepsilon$

6. 2011-2012 B1 第一次小测 部分解答

1. $\forall \varepsilon>0$, 取 $N=[(\frac{1}{\varepsilon}+2)/4]+1$, $\forall n>N$, $\left|\frac{n}{2n+\sin n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sin n}{2(2n+\sin n)}\right|<\frac{1}{4n-2}<\varepsilon$

3. (1) $n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}-\sqrt{n})=\frac{n^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}\sim\frac{n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{n}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}=\frac{x^2+2}{x+1}\longrightarrow\frac{3}{2}$ as $x\to 1$.

(3) $3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3(1+(\frac{2}{3})^n)^{\frac{1}{n}}<3(1+(\frac{2}{3})^n)\longrightarrow 3$

(4) $(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=[1+(1-\cos x)]^{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}\sim\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\longrightarrow\sqrt{e}$

4. $a_n>0\Rightarrow S_n\uparrow$ 且 $S_n>0$

$a_{n+1}\leq b a_n\leq b^2 a_{n-1}\leq\cdots\leq b^n a_1\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leq a_1(1+b+\cdots+b^{n-1})<\frac{a_1}{1-b}$

则S_n单调有界，从而收敛.

5. 用数学归纳法不难证明 $0<a_{n+1}<a_n\leq 1$, $n=1,2,\cdots\Rightarrow\{a_n\}$收敛.

不妨设极限为a，令$n\to\infty$，有 $a=\frac{a+\sin a}{2}\Rightarrow a=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$

6. $a=\sup E$ 且 $a\notin E\Rightarrow\forall\varepsilon_1>0$, $\exists x_1\in E$ s.t. $a-\varepsilon_1<x_1<a$

对于 $\varepsilon_2=\frac{a-x_2}{2}$, $\exists x_2\in E$ s.t. $a-\varepsilon_2<x_2<a$

注意这里不能是$a-x_2$

重复上述过程得到$\{x_n\}$且$x_n\uparrow\uparrow$ 两个↑表为"严格增"

下证 $x_n\longrightarrow a$ as $n\to\infty$:

$|x_n-a|<\frac{|x_{n-1}-a|}{2}<\cdots<\frac{|x_1-a|}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}}\longrightarrow 0$ as $n\to\infty$