座位号:________ 考场:________ 所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

密封线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学 2018-2019 学年第一学期
(数学分析(B1) 期中考试试卷, 2018 年 11 月 18 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

一、(本题 8 分) 叙述题:

1. 用 $\varepsilon-N$ 语言表述"数列 $\{a_n\}$ 不以实数 a 为极限"。
2. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述"函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续"。

二、(本题 16 分) 求下列数列或函数极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln^2(n+1)-\ln^2 n\right)=0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x=\dfrac{1}{e}$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right)=-\dfrac{e}{2}$.

三、(本题 16 分) 计算下面的导数:

1. $\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\sin x}$;
2. $\left(\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$;
3. $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. $(xe^x)^{(n)}=(x+n)e^x$.

四、(本题 15 分) 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$, $n=1,2,\cdots$。求证:数列 $\{a_n\}$ 收敛,并求其极限。

证明　因为 $a_1=1$, 所以由递推式可知 $\{a_n\}$ 为正数列。且

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}},\ n>1.$$

由此可知 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增,$\{a_{2n}\}$ 单调递减,且 $a_{2n-1}<a_{2n}$. 故,$\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 都收敛。设 $a_{2n-1}\to a$, $a_{2n}\to b$. 则有

$$a=1+\frac{1}{b},\quad b=1+\frac{1}{a}.$$

因而 $a=b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 这说明 $\{a_n\}$ 收敛且极限为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

五、(本题 15 分) 求证: $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, $(x>0)$.

证明　设 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$. 因为

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\quad f''(x)=-\sin x+x>0,(x>0),$$

所以 $f'(x)$ 严格递增。由 $f'(0)=0$, 得 $f'(x)>0,(x>0)$. 这说明 $f(x)$ 严格递增。再由 $f(0)=0$, 得 $f(x)>0$, $(x>0)$.

六、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 若对一切 $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

求证：存在且只存在一个 $x_0 \in (0,1]$ 使 $f(x_0)=\frac{1-x_0}{x_0}$.

证明 设 $g(x)=1-xf(x)-x$. 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。因为 $g(0)=1>0, g(1)=-f(1) \leqslant 0$, 由介值定理可知存在 $x_0 \in (0,1]$ 使得 $g(x_0)=0$, 即, $f(x_0)=\frac{1-x_0}{x_0}$. 若还有不同的 $x_1 \in (0,1]$ 满足 $f(x_1)=\frac{1-x_1}{x_1}$. 则

$$\left|\frac{1-x_1}{x_1}-\frac{1-x_0}{x_0}\right|<|x_1-x_0|.$$

这推出 $x_0x_1>1$ 与 $x_0, x_1 \in (0,1]$ 矛盾!

七、(本题 15 分) 设非常数的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数, 且满足

$$|f''(x)| \leqslant |f'(x)|.$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调。

证明 情形1：若 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无零点，则根据 Darboux 定理可知 $f'(x)$ 恒为正或恒为负，这说明 $f(x)$ 严格单调。 (......... 5 分)

情形2：若 $f'(x)$ 有零点，可设 $f(x_0)=0$. 记 $g(x)=f(x+x_0)-f(x_0)$. 则 $g(0)=g'(0)=0$. $g(x)$ 满足 $|g''(x)| \leqslant |g'(x)|$. 令

$$h_1(x)=\left(e^{-x}g'(x)\right)^2.$$

则

$$h_1'(x)=2e^{-2x}\left(g'(x)g''(x)-(g'(x))^2\right) \leqslant 0.$$

这说明 $h_1(x)$ 单调递减。注意到 $h_1(0)=0$. 可知 $h_1(x) \leqslant 0,\ (x>0)$. 但由定义可知 $h_1(x) \geqslant 0$. 故，$h_1(x)=0,\ (x \geqslant 0)$. 再令

$$h_2(x)=\left(e^{-x}g'(-x)\right)^2.$$

类似，可得 $h_2(x)=0,\ (x \geqslant 0)$. 因此， $g'(x)=0,\ x \in (-\infty,+\infty)$. 这说明 $g(x)$ 为常数，因而 $f(x)$ 为常数。这与条件不符。于是情形 2 不能发生。 (......... 10 分)