

中国科学技术大学2018-2019学年第一学期
(数学分析(B1))期末考试试卷, 2019年1月11日

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

答题时不要超过此线
密封线

一、(本题 10 分) 设 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

解 e^x 的幂级数展开为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开为 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
根据级数的 Cauchy 乘积, 有

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(..... 6 分)

根据幂级数的知识, 应有 $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. 故,

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(..... 10 分)

解法2 显然在 0 的一个小邻域内, $f(x)$ 有任意阶导数. 对 $(1-x)f(x) = e^x$ 两边求 n 阶导数, 得

$$(1-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = e^x.$$

特别有

$$f^{(n)}(0) = 1 + nf^{(n-1)}(0). \quad (\text{..... 6 分})$$

注意到 $f(0) = 1$, 利用上式可归纳可证明

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(..... 10 分)

二、(本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分和不定积分

- (1) $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$; (2) $\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1} dx$;
(3) $\int_0^1 x \arctan x dx$; (4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.
解 (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) dx = x - \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \\&= x - \frac{1}{2} \int (\ln(1+e^{2x}))' dx \\&= x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)} dx \\&= \int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{2(x+1)^2} \right] dx \\&= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C\end{aligned}$$

注意, 不写常数 C 扣 1 分.

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \arctan x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4}.\end{aligned}$$

(4) 作变换 $t = \sqrt{x-1}$, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)t} \cdot 2t dt = 2 \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

密封线 答题时不要超过此线

三、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $(1+x^2)y'' + 2xy' = x$ 的通解.

解 原方程可写为 $((1+x^2)y')' = x$. 故,

$$(1+x^2)y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

因此

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{C_0}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{C_0}{1+x^2}.$$

故,

$$y = \frac{1}{2}x + C_1 + C_2 \arctan x.$$

(2) 求 $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ 的通解.

解 相应的齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 有两个实根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$. 故, 齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 显然 $y = x$ 是原方程的一个特解. 故, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x.$$

四、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^\pi x f(|\cos x|) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx.$$

证明

$$\int_0^\pi x f(|\cos x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(|\cos x|) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x f(|\cos x|) dx.$$

对上式右边第二个积分作变换 $t = \pi - x$, 得

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x f(|\cos x|) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - t) f(|\cos t|) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(|\cos t|) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x) f(|\cos x|) dx. \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\pi x f(|\cos x|) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx.$$

五、(本题 10 分) 研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是否一致收敛.

解 函数 $u_n(x) = \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 的导数为 $u'_n(x) = \frac{(x-1)(2-(x-1)\ln n)}{n^x}$, 当 $n \geq 2$ 时, 它在 $(1, 1 + \frac{2}{\ln n})$ 为正, 在 $(1 + \frac{2}{\ln n}, +\infty)$ 为负. 因此 $u_n(x)$ 在 $x = 1 + \frac{2}{\ln n}$ 取最大值

$$\frac{4}{n^{1+\frac{2}{\ln n}} \cdot \ln^2 n} < \frac{4}{n \ln^2 n}.$$

因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛, 所以根据 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

注意, 只写出一致收敛的结论而不证明, 或证明完全错误都得 2 分.

六、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

解 设 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 1. 当 $x = 1$ 和 $x = -1$ 时, 该幂级数显然收敛. 故, 收敛区域为 $[-1, 1]$. (..... 4 分)

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. 则 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. 故, $f(x) = -\ln(1-x)$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x) - \frac{1}{x} (f(x) - x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{x} \right) f(x) + 1 \\ &= \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1. \end{aligned}$$

(..... 10 分)

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

密封线 答题时不要超过此线

七、(本题 10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n^2}, \quad (n \geq 2).$$

试证明 (1) $\frac{a_n n \ln n}{a_{n+1}(n+1) \ln(n+1)} < 1 + \frac{1}{n^2}$; (2) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 因为 $\ln(1 + \frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1}$ ($n \geq 2$), 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

令 $c_n = (n \ln n) a_n$, 则从上式可得

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n^2}.$$

..... (5 分)

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2}, \quad (n \geq 3).$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leq \ln c_n, \quad (n \geq 3).$$

即,

$$a_n \geq \frac{e^c}{n \ln n}, \quad (n \geq 3).$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, 所以由上式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

..... (10 分)

八、（本题 10 分）设 f 是 \mathbb{R} 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)|^2 \leq |x - y|.$$

求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|f'(x)|^3 < 3f(x)$.

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 $|f'(x)|^3 < 3f(x)$ 成立. 记 $h = (f'(x))^2$. 并设 $h \neq 0$.

若 $f'(x) < 0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned} 0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t) dt \\ &= f(x) + \int_x^{x+h} (f'(t) - f'(x)) dt + f'(x)h \\ &\leq f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^{\frac{1}{2}} dt + f'(x)h \\ &= f(x) + \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h. \end{aligned}$$

故

$$\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h + f(x) > 0. \quad (\text{..... 5 分})$$

将 $h = (f'(x))^2$ 代入上式, 即得

$$|f'(x)|^3 < 3f(x).$$

若 $f'(x) > 0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned} 0 < f(x-h) &= - \int_{x-h}^x f'(t) dt + f(x) \\ &= \int_{x-h}^x (f'(x) - f'(t)) dt - f'(x)h + f(x) \\ &\leq \int_{x-h}^x (x-t)^{\frac{1}{2}} dt - f'(x)h + f(x) \\ &= \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} - f'(x)h + f(x). \end{aligned}$$

将 $h = (f'(x))^2$ 代入上式, 仍得

$$|f'(x)|^3 < 3f(x).$$

总之, 始终有 $(f'(x))^3 < 3f(x)$. 证毕. (10 分)