Chapter 4 随机变量列的收敛

§1. <u>定义</u>(几乎处处收敛) 设$\{X_n\}_{n\geq1}$与X为定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下的一列实值 r.v.s

如果 $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\})=1$，则称 $X_n\xrightarrow{a.e.}X$，$n\to\infty$

<u>引理</u>：$X_n\xrightarrow{a.e.}X\ \ n\to\infty\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(\{|X_n-X|>\varepsilon,\ i.o.\})=0$

$$\left(\Longleftrightarrow\mathbb{P}(\varlimsup_{n\to\infty}\{|X_n-X|>\varepsilon\})=0\right)$$

证明：$X_n\xrightarrow{a.e.}X\Longleftrightarrow\mathbb{P}(\Omega_0)=1$，其中 $\Omega_0\triangleq\{\omega\in\Omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\}$

$\forall\omega^*\in\Omega_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega^*)=X(\omega^*)$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists m(\omega^*)\geq1,\ \forall n\geq m(\omega^*)$，有 $|X_n(\omega^*)-X(\omega^*)|\leq\varepsilon$

故 $\omega^*\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|\leq\varepsilon\}$

事实上就有 $\Omega_0\subset\varliminf\limits_{n\to\infty}\{|X_n-X|\leq\varepsilon\}$

$\Leftrightarrow 1=\mathbb{P}(\Omega_0)\leq\mathbb{P}(\varliminf\limits_{n\to\infty}\{|X_n-X|\leq\varepsilon\})$

$\Leftrightarrow 0=\mathbb{P}(\Omega_0^c)\geq\mathbb{P}(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\{|X_n-X|>\varepsilon\})$

反过来可以证 $\Omega_0=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty}(A_n^{\varepsilon_k})^c$

$\{\varepsilon_k\}_{k\geq1}$ 一列正数列且 $\varepsilon_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$

注：$\forall\varepsilon>0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)<+\infty\ \xrightarrow[\text{Lemma I}]{\text{Borel-Catelli}}\ X_n\xrightarrow{a.e.}X$

* 强大数定律：$X_1,\cdots,X_n\cdots$ iid 且 $E[X_1]=\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow\dfrac{\sum_{i=1}^nX_i}{n}\xrightarrow{a.e.}\mu$，$n\to\infty$ *

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)<+\infty\ (\forall\varepsilon>0)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)=0$

<u>定义</u>：设$\{X_n\}_{n\geq1}$和X为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列实值 r.v.s，如果

$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\longrightarrow0,\ n\to\infty$，称$X_n$依概率收敛到$X$，记$X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X,\ n\to\infty$

<u>注</u>：$(\mathbb{R},|\cdot|)\Rightarrow(S,\|\cdot\|)$ 赋范空间

$X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\Longleftrightarrow\mathbb{P}(\|X_n-X\|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \forall\varepsilon>0$

例. $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X,\ Y_n\xrightarrow{\mathbb{P}}Y$，其中$X_n,Y_n,X,Y$均为实值 r.v.

则 $(X_n,Y_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}(X,Y)$?

$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(\|(X_n,Y_n)-(X,Y)\|>\varepsilon)=\mathbb{P}(|X_n-X|^2+|Y_n-Y|^2>\varepsilon^2)$

$\leq\mathbb{P}(|X_n-X|^2>\frac{\varepsilon^2}{2})+\mathbb{P}(|Y_n-Y|^2>\frac{\varepsilon^2}{2})$

$=\mathbb{P}(|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{\sqrt2})+\mathbb{P}(|Y_n-Y|>\frac{\varepsilon}{\sqrt2})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

<u>引理</u>：$X_n\xrightarrow{a.e.}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$

证：$X_n \xrightarrow{a.e.} X \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{|X_n-X|>\varepsilon\})=0$

$$0=\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}}|X_n-X|>\varepsilon) \overset{\text{Fatou}}{\geq} \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)$$

故 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)=0$，即 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

<u>引理</u>：$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow$ 对任意 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 的子列 $\{X_{n_k}\}_{k\geq1}$ 都存在一个几乎处处收敛到 X 的子列 （列紧）

证明：1. 假设 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$，则 $\forall \varepsilon>0$，$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(|X_{n_k}-X|>\varepsilon)=0$

于是 $\forall p\geq1$，从 $\{X_{n_k}\}_{k\geq1}$ 子列 $\{X_{n_{k_p}}\}_{p\geq1}$ 使其满足 $\mathbb{P}(|X_{n_{k_p}}-X|>\varepsilon)\leq 2^{-p}$

因此 $\sum_{p=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_{n_k}-X|>\varepsilon)\leq\sum_{p=1}^{\infty}2^{-p}<\infty$

$\Rightarrow X_{n_{k_p}} \xrightarrow{a.e.} X$，$p\to+\infty$

2. 假设存在 $\{X_{n_{k_p}}\}_{p\geq1}$ 使 $X_{n_{k_p}} \xrightarrow{a.e.} X$，$p\to+\infty$

（反证法）假设 X_n 不依概率收敛到 X，故有

$\exists \varepsilon>0, \delta>0$, s.t. $\mathbb{P}(|X_{n_k}-X|>\varepsilon)>\delta$

由于 $X_{n_k} \xrightarrow{a.e.} X \Rightarrow X_{n_{k_p}} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 故与上不等式矛盾

<u>习题</u>：$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n\to\infty$，$\lim_{a\to+\infty}\sup_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|>a)=0 \Rightarrow X_nY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n\to+\infty$

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)=\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon, |X_n|>a)+\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon, |X_n|\leq a)$

$$\leq \sup_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|>a)+\mathbb{P}(|Y_n|>\tfrac{\varepsilon}{a})$$

$$\overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)\leq\sup_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|>a)+0$$

$$\overset{a\to+\infty}{\Longrightarrow} \overline{\lim_{n\to+\infty}}\mathbb{P}(|X_nY_n|>\varepsilon)=0$$

$$\Rightarrow X_nY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

<u>定义</u>：设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 及 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列实值 r.v.s 满足 $X_n\in L^p(\mathcal{F})$，$X\in L^p(\mathcal{F})$，$p\geq1$

如果 $E[|X_n-X|^p]\longrightarrow0$，$n\to+\infty$，则称 $X_n \xrightarrow{L^p} X$，$n\to\infty$

<u>引理</u>：(i) $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 且 $|X_n|\leq Y$ a.e.，$\forall n\geq1$，其中 $Y\in L^p(\mathcal{F}) \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$

证明：(i) $\forall\varepsilon>0$，$\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\dfrac{E[|X_n-X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) 由于 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$，$\forall\varepsilon>0$，$\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

另一方面，注意到 $\forall \varepsilon>0$, $\{|X|>Y+\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega}\subset\{|X_n-X|>\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega}$

其中 $\tilde{\Omega}\triangleq\{|X_n|\le Y, \forall n\ge 1\}$

(事实上，$\forall \omega\in\{|X|>Y+\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega}\Rightarrow\begin{cases}|X(\omega)|\ge Y(\omega)+\varepsilon\\ |X_n(\omega)|\le Y(\omega), \forall n\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\\ |X_n(\omega)|\le Y(\omega), \forall n\ge 1\end{cases}$

$\Rightarrow \omega\in\{|X_n-X|>\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega}$)

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{|X|>Y+\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega})\le\mathbb{P}(\{|X_n-X|>\varepsilon\})\cap\tilde{\Omega}\le\mathbb{P}(|X_n-X|\ge\varepsilon)$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathbb{P}(\{|X|>Y+\varepsilon\}\cap\tilde{\Omega})=0\\ \text{又 } \mathbb{P}(\tilde{\Omega})=1\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{P}(|X|>Y+\varepsilon)=1\Rightarrow\mathbb{P}(|X|\le Y)=1$, i.e. $|X|\le Y$ a.e.

于是 $E[|X_n-X|^p]=E[|X_n-X|^p 1_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}}]+E[|X_n-X|^p 1_{\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}}]$

$\overset{(x+y)^p\le 2^p(x^p+y^p),\ x,y\ge 0}{\le}\varepsilon^p\mathbb{P}(|X_n-X|<\varepsilon\})+2^p E[(|X_n|^p+|X|^p)1_{\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}}]$

$\le\varepsilon^p+2^p E[Y^p 1_{\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}}]$

$\left.\begin{array}{l}\text{注意到 } Y\in L^p(\mathcal{F}), \text{即 } E[Y^p]<+\infty\\ A_n\triangleq\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}\Rightarrow\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{array}\right\}\Rightarrow E[Y^p 1_{A_n}]\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}E[|X_n-X|^p]<\varepsilon^p$

由 ε 任意性，$\lim_{n\to\infty}E[|X_n-X|^p]=0$

引理. (1) $\left.\begin{array}{l}X_n\xrightarrow{a.e.}X\\ X_n\xrightarrow{a.e.}Y\end{array}\right\}\Rightarrow X=Y$ a.e.

(2) $\left.\begin{array}{l}X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\\ X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}Y\end{array}\right\}\Rightarrow X=Y$ a.e.

(3) $\left.\begin{array}{l}X_n\xrightarrow{L^p}X\\ X_n\xrightarrow{L^p}Y\end{array}\right\}\Rightarrow X=Y$ a.e.

证明: (1) $\left.\begin{array}{l}\text{设 } \Omega_1=\{\omega: \lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\}\\ \Omega_2=\{\omega: \lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)=Y(\omega)\}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{P}(\Omega_1)=\mathbb{P}(\Omega_2)=1\Rightarrow\mathbb{P}(\Omega_1\cap\Omega_2)=1$

$\Omega_1\cap\Omega_2\subset\{\omega: X(\omega)=Y(\omega)\}\Rightarrow\mathbb{P}(\Omega_1\cap\Omega_2)\le\mathbb{P}(X=Y)\Rightarrow X=Y$ a.e.

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X-Y|\ge\varepsilon)=\mathbb{P}(|X-X_n+X_n-Y|\ge\varepsilon)$

$$\le \mathbb{P}(|X-X_n|>\tfrac{\varepsilon}{2})+\mathbb{P}(|X_n-Y|>\tfrac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

(3) $E[|X-Y|^p]=E[|X-X_n+X_n-Y|^p]$

$$\le 2^{p-1}\{E[|X-X_n|^p]+E[|X_n-Y|^p]\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

§2. 定义(依分布收敛):

设$\{X_n\}_{n\ge1}$和X为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列实值r.v.s, $F_n(x)\triangleq\mathbb{P}(X_n\le x)$, $F(x)\triangleq\mathbb{P}(X\le x)$, $x\in\mathbb{R}$

如果 $F_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}F(x)$, $\forall x\in C_F$, 其中$C_F=\{x\in\mathbb{R}: x为F的连续点\}$

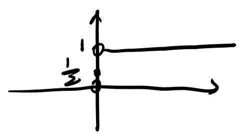
则 $X_n\xrightarrow{d}X$, $n\to\infty$ (或 $F_n\Rightarrow F$)

注: 如果$\{X_n\}_{n\ge1}$及X的取值为S(拓扑空间), 则设$\mathbb{P}_{X_n}$, $\mathbb{P}_X$为其分布(概率测度)

$\mathbb{P}_{X_n}\Rightarrow\mathbb{P}_X$ (概率测度的弱收敛)

例. 设 $F_n(x)\triangleq\dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$, $n\ge1$, $x\in\mathbb{R}$, 则$\forall n\ge1$, $F_n(x)$是一个分布函数

于是, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\tilde{F}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac12, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$



$\tilde{F}(x)$不是分布函数

取 $F(x)=1_{[0,+\infty)}(x)\longrightarrow$ 分布函数 $\quad C_F=\{x: x\ne0\}$

且$\forall x\in C_F$, $F_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x)$ $\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$

定理: $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$

$X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}C$(常数)$\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{d}C$

§3. Skorokhod 表示定理 IMPORTANT

定理: 设$\{X_n\}_{n\ge1}$和X为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列实值r.v.s并且$X_n\xrightarrow{d}X$, 则

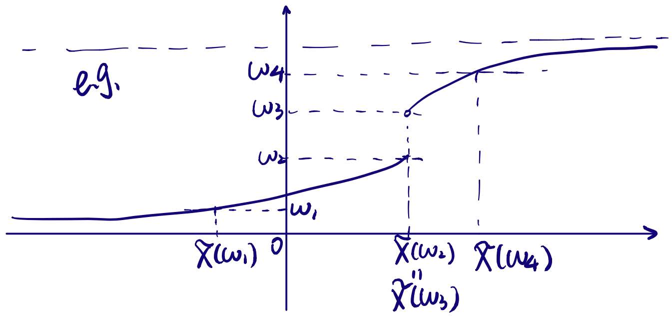
存在一个概率空间$(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}})$, 在该概率空间下, 存在一列r.v.s$\{\tilde X_n\}$和$\tilde X$

满足 $\tilde X_n\overset{d}{=}X_n$, $\forall n\ge1$, $\tilde X\overset{d}{=}X$, 且 $\tilde X_n\xrightarrow{a.e.}\tilde X$ under $\tilde{\mathbb{P}}$ (i.e. $\tilde{\mathbb{P}}(\lim\limits_{n\to\infty}\tilde X_n=\tilde X)=1$)

注: X_n, X 取值为(S,d)(此空间为Polish空间), 在此下, 该定理仍成立

证明: 定义 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal F},\tilde{\mathbb P})=((0,1],\mathcal B_{(0,1]},m)$ m: Lebesgue测度

$\forall \omega\in\tilde\Omega=(0,1]$, 定义 $\tilde X(\omega)\triangleq\inf\{x\in\mathbb R: F(x)\ge\omega\}$, 其中 $F(x)\triangleq\mathbb P(X\le x)$



则 $\omega\mapsto\tilde X(\omega)$ 是单增函数

$\Rightarrow \tilde X(\omega)$ 是 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal F},\tilde{\mathbb P})$ 上 r.v.

另外一方面, $\tilde X(\omega)\le x \iff F(x)\ge\omega$

(事实上, 若 $\tilde X(\omega)\le x$, 则 $\exists x_0\le x$ s.t. $F(x_0)\ge\omega$, 由于 $F\uparrow$, 故 $F(x)\ge F(x_0)\ge\omega$

若 $F(x)\ge\omega$, 则 $\tilde X(\omega)\le x$ (定义))

于是, $\tilde F(x)\triangleq\tilde{\mathbb P}(\tilde X\le x)=\tilde{\mathbb P}(\{\omega\in\tilde\Omega:\tilde X(\omega)\le x\})$

$=\tilde{\mathbb P}(\{\omega\in\tilde\Omega: F(x)\ge\omega\})$

$=m(\{\omega\in(0,1]:F(x)\ge\omega\})$

$=m((0,F(x)])=F(x)=\mathbb P(X\le x) \Rightarrow \tilde X\overset{d}{=}X$

设 $F_n(x)\triangleq\mathbb P(X_n\le x)$, 同理, $\forall\omega\in\tilde\Omega$, 定义 $\tilde X_n(\omega)\triangleq\inf\{x\in\mathbb R:F_n(x)\ge\omega\}$

因此 $\tilde X_n\overset{d}{=}X_n$

下证 $\tilde X_n\xrightarrow{a.e.}\tilde X$ under $\tilde{\mathbb P}$

$\forall\omega\in\tilde\Omega$ 以及 $\varepsilon>0$, 则存在 $x\in C_F$, 使 $\tilde X(\omega)-\varepsilon<x<\tilde X(\omega)$

由 $\tilde X(\omega)>x\Rightarrow F(x)<\omega$ 又因为 $X_n\xrightarrow{d}X\overset{x\in C_F}{\Longrightarrow}F_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x)$

故存在 $M_1\ge1$, s.t. $\forall n>M_1$, $F_n(x)<\omega\Rightarrow\tilde X_n(\omega)>x$

于是, $\forall n>M_1$ 时, $\tilde X(\omega)-\varepsilon<x<\tilde X_n(\omega)\Rightarrow\varliminf_{n\to\infty}\tilde X_n(\omega)\ge\tilde X(\omega)$

$\forall\omega'>\omega$ 及 $\varepsilon>0$, 存在 $y\in C_F$, s.t. $\tilde X(\omega')<y<\tilde X(\omega')+\varepsilon$

由 $\tilde X(\omega')<y\Rightarrow F(y)>\omega'>\omega$

$y\in C_F$, $X_n\xrightarrow{d}X\Rightarrow F_n(y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}F(y)$

则存在 $M_2\ge1$, s.t. $\forall n>M_2$ 时, $F_n(y)>\omega\Rightarrow\tilde X_n(\omega)\le y$

因此, $\forall n>M_2$, $\tilde X_n(\omega)\le y<\tilde X(\omega')+\varepsilon\Rightarrow\varlimsup_{n\to\infty}\tilde X_n(\omega)\le\tilde X(\omega')$

总之,有 $\tilde{X}(\omega)\le \varliminf_{n\to\infty}\tilde{X}_n(\omega)\le \varlimsup_{n\to\infty}\tilde{X}_n(\omega)\le \tilde{X}(\omega')$

于是,$\forall \omega\in C_{\tilde{X}}$,令 $\omega'\downarrow\omega$,则 $\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_n(\omega)=X(\omega)$

$\tilde{\mathbb{P}}(C_{\tilde{X}}^c)=m(C_{\tilde{X}}^c)=0 \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_n=\tilde{X})=1$,即 $\tilde{X}_n\xrightarrow{a.e.}\tilde{X}$ under $\tilde{\mathbb{P}}$

<u>定理</u>(连续映射定理):设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测函数,以及 $D_g\triangleq\{x\in\mathbb{R}: x为g的不连续点\}$.

如果 $\mathbb{P}(X\in D_g)=0$,则 (i) $X_n\xrightarrow{a.e.}X \Rightarrow g(X_n)\xrightarrow{a.e.}g(X)$

(ii) $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X \Rightarrow g(X_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}g(X)$

(iii) $X_n\xrightarrow{d}X \Rightarrow g(X_n)\xrightarrow{d}g(X)$

证明:(i) $\{X\notin D_g\}\cap\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\}\subset\{\lim_{n\to\infty}g(X_n)=g(X)\}$

事实上,$\forall\omega^*\in$左边 $\Rightarrow X(\omega^*)\notin D_g$ and $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega^*)=X(\omega^*)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}g(X_n(\omega^*))=g(X(\omega^*))$

因此 $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}g(X_n)=g(X))\ge\mathbb{P}(X\notin D_g,\lim_{n\to\infty}X_n=X)$

$=\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}X_n=X)-\mathbb{P}(X\in D_g,\lim_{n\to\infty}X_n=X)$

$=\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1$

(ii) $\forall\varepsilon>0,\delta>0$,定义 $B_\delta^\varepsilon\triangleq\{x\notin D_g:\exists y\ s.t.\ |x-y|\le\delta \text{ and } |g(x)-g(y)|>\varepsilon\}$

故 $B_\delta^\varepsilon\downarrow\phi$,$\delta\downarrow0$

因此 $\mathbb{P}(|g(X_n)-g(X)|>\varepsilon)\le\underbrace{\mathbb{P}(X\in B_\delta^\varepsilon)}_{\to0 \text{ as } \delta\to0}+\underbrace{\mathbb{P}(X\in D_g)}_{=0}+\underbrace{\mathbb{P}(|X_n-X|>\delta)}_{\to0 \text{ as } n\to\infty}$

(iii) 由于 $X_n\xrightarrow{d}X$,用Skorokhod表示定理,存在$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}})$以及$\tilde{X},\tilde{X}_n$, s.t.

$\tilde{X}_n\overset{d}{=}X_n$, $\tilde{X}\overset{d}{=}X$, $\tilde{X}_n\xrightarrow{a.e.}X$ under $\tilde{\mathbb{P}}$

注意到 $\left.\begin{array}{l}\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}\in D_g)\overset{\tilde{X}\overset{d}{=}X}{=\!=}\mathbb{P}(X\in D_g)=0\\ \tilde{X}_n\xrightarrow{a.e.}\tilde{X} \text{ under } \tilde{\mathbb{P}}\end{array}\right\}\overset{(i)}{\Longrightarrow} g(\tilde{X}_n)\xrightarrow{a.e.}g(\tilde{X})$ under $\tilde{\mathbb{P}}$

$\Rightarrow g(\tilde{X}_n)\xrightarrow{d}g(\tilde{X})$ under $\tilde{\mathbb{P}}$,即 $\forall x\in C_{\tilde{F}_g}$,有 $\tilde{F}_{g,n}(x)\longrightarrow\tilde{F}_g(x)$, $n\to\infty$

其中 $\tilde{F}_g(x)\triangleq\tilde{\mathbb{P}}(g(\tilde{X})\le x)$, $\tilde{F}_{g,n}(x)\triangleq\tilde{\mathbb{P}}(g(\tilde{X}_n)\le x)$

另外,$\tilde{F}_g(x)=\underbrace{\mathbb{P}(g(X)\le x)}_{\triangleq F_g(x)}$ $[\because g(\tilde{X})\overset{d}{=}g(X)]$

$$\tilde{F}_{g,n}(x) = \underbrace{\mathbb{P}(g_n(X) \le x)}_{\triangleq F_{g,n}(x)} \quad [\because g(\tilde{X}_n) \overset{d}{=} g(X_n)]$$

$C_{\tilde{F}_g} = C_{F_g}$，故

$$F_{g,n}(x) \to F_g(x),\ n \to +\infty,\ x \in C_{F_g} \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

注: $\left.\begin{matrix} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \end{matrix}\right\} \overset{CMT}{\Longrightarrow} \begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X+Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY \\ X_n / Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X/Y \end{cases}$

事实上, $\left.\begin{matrix} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \end{matrix}\right\} \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$

取 $g(x,y) = x \pm y / xy / x/y \overset{CMT}{\Longrightarrow} g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X, Y)$

- $\left.\begin{matrix} X_n \xrightarrow{d} X \\ Y_n \xrightarrow{d} C \end{matrix}\right\} \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (X, C)$，$C$为常数

(如果C不是常数，则一般不成立)

§4. 概率测度的弱收敛 (weak convergence)

定义: 设S为拓扑空间，$\mathcal{B}_S$表示S上的Borel-σ代数.

已知$\{\mu_n\}_{n\ge1}$和μ为$(S, \mathcal{B}_S)$上一列概率测度.

如果 $\mu_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(f)$，$\forall f \in C_b(S)$ $\quad$ $C_b(S)$: S上有界连续函数全体

其中 $\mu_n(f) \triangleq \int_S f \, d\mu_n$，$\mu(f) = \int_S f \, d\mu$ (有的书把$\mu(f)$写成$\langle \mu, f \rangle$)

则称μ_n弱收敛到μ，记$\mu_n \Rightarrow \mu$

定义 (Borel 概率测度): 设S为拓扑空间以及$\mathcal{B}_S$为其Borel-σ代数. 如果μ为$\mathcal{B}_S$上的概率测度，称μ为Borel 概率测度.

以后记 $\mathcal{P}(S) \triangleq \{\mu: \mathcal{B}_S \to [0,1] : \mu$为概率测度$\}$

注: • 设$\{x_n\}_{n\ge1}$为一列实数列且 $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \mathbb{R}$，$\delta_{x_n}, \delta_x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \Rightarrow \delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$，$n \to +\infty$

事实上，$\forall f \in C_b(\mathbb{R})$，$\delta_{x_n}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, \delta_{x_n}(dy) = f(x_n)$

$\delta_x(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, \delta_x(dy) = f(x)$

$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$，即 $\delta_{x_n}(f) \to \delta_x(f)$

- 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 和 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下 S-值 r.v.s，则 $\mathbb{P}_{X_n}, \mathbb{P}_X \in \mathcal{P}(S)$

$(\mathbb{P}_{X_n} \triangleq (X_n)_{\#}\mathbb{P},\ \mathbb{P}_{X_n}(B) \triangleq \mathbb{P}(X_n^{-1}(B)),\ \forall B \in \mathcal{B}_S,\ \mathbb{P}_X \triangleq X_{\#}\mathbb{P})$

$$\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X \iff \mathbb{P}_{X_n}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}_X(f),\ \forall f \in C_b(S)$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)],\ \forall f \in C_b(S)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X_n \Rightarrow X)$$

$$\Updownarrow$$

$$F_n(x) \Rightarrow F(x),\ \forall x \in C_F \iff X_n \xrightarrow{d} X$$

$f(x) \leq \liminf\limits_{y\to x} f(y)$ or $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in S: f(x) \leq \alpha\}$ 是闭集

<u>引理</u>：设 (S,d) 度量空间以及 $f: S \to \mathbb{R}$ 为一个非负下半连续函数(LSC)

则存在一列非负 Lip-函数(一致连续) f_k 满足：$f_k(x) \nearrow f(x)$，$x \in \mathbb{R}$

证明：$\forall x \in S$，定义 $f_k(x) \triangleq \inf\limits_{y\in S}\{f(y) + k d(x,y)\}$，$k \geq 1$，则 $0 \leq f_k(x) \leq f(x) + k d(x,x) = f(x)$

$|f_k(x) - f_k(y)| \leq L d(x,y)$，$\forall x,y \in S$（自己验证）

注：设 $C \subset S$ 开集，则 1_C 是 LSC 函数且 1_C 非负有界，则存在一列非负有界 Lip 函数 $\{f_k\}_{k\geq 1}$

使 $f_k(x) \nearrow_{k\to+\infty} 1_C(x)$，$\forall x \in S$

<u>引理</u>：设 $D \subset S$ 闭集，则存在一列非负有界 Lip 函数 $\{g_k\}_{k\geq 1}$ 使 $g_k(x) \downarrow 1_D(x)$，$\forall x \in S$

证明：$\forall x \in S$，定义 $d(x,D) = \inf\limits_{y\in D} d(x,y)$

$x \mapsto d(x,D)$ 是 Lip-函数

$d(x,D) = 0 \xLeftrightarrow{D为闭集} x \in D$

$\forall x \in S$，定义 $g_k(x) \triangleq \left\{1 - \dfrac{d(x,D)}{\frac{1}{k}}\right\}^+ = \{1 - k d(x,D)\}^+$

注：$f_k \in C_b(S)$，$g_k \in C_b(S)$

<u>定理</u>：设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 和 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列实值 r.v.s，则 $X_n \xrightarrow{d} X \iff \mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$

左边定义为 $F_n(x) \to F(x), \forall x \in C_F$，右边定义为 $\forall f \in C_b(\mathbb{R}), E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

证明：($\Rightarrow$) 假设 $X_n \xrightarrow{d} X$，应用 Skorokhod 表示定理，则存在 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}})$ 以及

其下的 r.v.s $\tilde{X}_n, \tilde{X}$ 满足 (i) $\tilde{X}_n \overset{d}{=} X_n$ (ii) $\tilde{X} \overset{d}{=} X$ (iii) $\tilde{X}_n \xrightarrow{a.e.} \tilde{X}$ under $\tilde{\mathbb{P}}$

故 $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$，用 BCT 得 $\tilde{E}[f(\tilde{X}_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{E}[f(\tilde{X})]$，$\tilde{E}$ 表示对应 $\tilde{\mathbb{P}}$ 的数学期望

由 (i) $\Rightarrow E[f(X_n)] = \tilde{E}[f(\tilde{X}_n)]$

由(ii) $\Rightarrow E[f(X)] = E[f(X)]$

$\Rightarrow E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[f(X)], \forall f \in C_b(\mathbb{R})$

$(\Leftarrow)$ 假设 $\forall f \in C_b(\mathbb{R}), E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$

注意到 $F_n(x) \triangleq \mathbb{P}(X_n \le x) = E[1_{(-\infty,x]}(X_n)], x \in \mathbb{R}$

$F(x) \triangleq \mathbb{P}(X \le x) = E[1_{(-\infty,x]}(X)], x \in \mathbb{R}$

另外一方面, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 存在一列非负有界 Lip 函数 $\{f_k^{\pm}\}$ s.t.

$f_k^+(x) \underset{k\to\infty}{\downarrow} 1_{(-\infty,\alpha]}(x)$, $f_k^-(x) \underset{k\to\infty}{\uparrow} 1_{(-\infty,\alpha)}(x)$, $f_k^{\pm} \in C_b(\mathbb{R}), \forall k \ge 1$

故 $1_{(-\infty,\alpha)}(X_n) \ge f_k^-(X_n)$

$\mathbb{P}(X_n < \alpha) \ge E[f_k^-(X_n)]$

$\varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < \alpha) \ge E[f_k^-(X)]$

$\varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < \alpha) \ge \lim_{k\to+\infty} E[f_k^-(X)] \overset{MCT}{=} E[1_{(-\infty,\alpha)}(X)]$

$F(\alpha-) = \mathbb{P}(X < \alpha) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < \alpha) \le \varliminf_{n\to\infty} F_n(\alpha)$

此外, $f_k^+(X_n) \ge 1_{(-\infty,\alpha]}(X_n) \Rightarrow E[f_k^+(X_n)] \ge \mathbb{P}(X_n \le \alpha) = F_n(\alpha)$

$\xRightarrow{n\to+\infty} E[f_k^+(X)] \ge \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\alpha)$

$\xRightarrow{k\to+\infty} E[1_{(-\infty,\alpha]}(X)] \ge \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\alpha)$

$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\alpha) \le \mathbb{P}(X \le \alpha) = F(\alpha)$

于是, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $F(\alpha-) \le \varliminf_{n\to\infty} F_n(\alpha) \le \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\alpha) \le F(\alpha)$

故 $\forall \alpha \in C_F$, $F(\alpha) = F(\alpha-)$, 则 $\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha)$, $\alpha \in C_F$

注: X_n C.F. $\Phi_{X_n}(\theta) \triangleq E[e^{i\theta X_n}], \theta \in \mathbb{R}$

X C.F. $\Phi_X(\theta) \triangleq E[e^{i\theta X}], \theta \in \mathbb{R}$

$X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \Phi_{X_n}(\theta) \to \Phi_X(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R}$ (反过来要加 $\Phi_X(\theta)$ 在 $\theta=0$ 处连续的条件)

$X_n \xrightarrow{d} X \overset{\forall f \in C_b(\mathbb{R})}{\Longleftrightarrow} E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

取 $f(x) = \begin{matrix} \cos\theta x \\ \sin\theta x \end{matrix} \in C_b(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{matrix} E[\cos(\theta X_n)] \to E[\cos(\theta X)] \\ E[\sin(\theta X_n)] \to E[\sin(\theta X)] \end{matrix} \Rightarrow E[e^{i\theta X_n}] \to E[e^{i\theta X}]$

定理(portmanteau定理):

设(S,d)为度量空间，$\mu_n\in\mathcal{P}(S)$，$\mu\in\mathcal{P}(S)$，则以下条件等价：

(i) $\mu_n\Rightarrow\mu$ $[\forall f\in C_b(S),\ \mu_n(f)\to\mu(f)]$

(ii) 设$UC_b(S)\triangleq\{f:S\to\mathbb{R}: f$是有界一致连续$\}$，$\forall f\in UC_b(S)$，$\mu_n(f)\to\mu(f)$

(iii) 设$D\subset S$闭集，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(D)\le\mu(D)$

(iv) 设$C\subset S$开集，$\mu(C)\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(C)$

(v) 设$A\in\mathcal{B}_S$且A是μ-连续集，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$

（其中A为μ-连续集$\Leftrightarrow\mu(\partial A)=0$，$\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$）

注：条件(ii)可换成(ii)'：$Lip_b(S)\triangleq\{f:S\to\mathbb{R}: f$有界Lip函数$\}$，$\forall f\in Lip_b(S)$，$\mu_n(f)\to\mu(f)$

证：(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(i)

- (i)$\Rightarrow$(ii)：显然，$Lip_b(S)\subset UC_b(S)\subset C_b(S)$

- (ii)$\Rightarrow$(iii)：假设(ii)成立，则$\forall f\in UC_b(S)$，$E[f(X_n)]\to E[f(X)]$
  [(ii)'$\Rightarrow$(iii)]

  由引理，存在一列非负有界Lip函数(一致连续)，$\{f_k\}_{k\ge1}$满足$f_k(x)\downarrow 1_D(x)$，D是闭集

  $\mu(D)=\mu(1_D)=\int 1_D d\mu\overset{MCT}{=}\lim\limits_{k\to+\infty}\int f_k d\mu$

  注意到$f_k\in UC_b(S)$[$f\in Lip_b(S)$]，则

  $\mu(D)=\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k d\mu=\lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}\int f_k d\mu_n)\overset{f_k\ge1_D}{\ge}\lim\limits_{k\to\infty}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int 1_D d\mu_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(D)$

- (iii)$\Leftrightarrow$(iv) （自证，取补即可）

- (iii)+(iv)$\Rightarrow$(v)：由于A为μ-连续集，则有$\mu(\bar{A})=\mu(\mathring{A})$

  由于$\bar{A}$闭集，用(iii)，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(\bar{A})\le\mu(\bar{A})$

  由于$\mathring{A}$开集，用(iv)，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(\mathring{A})\ge\mu(\mathring{A})$

  $\Rightarrow\mu(\mathring{A})\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(A)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(A)\le\mu(\bar{A})\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$

- (v)$\Rightarrow$(i)：需证$\forall f\in C_b(S)$，$\mu_n(f)\to\mu(f)$

  - $S=\mathbb{R}$. 定义$F_n(x)\triangleq\mu_n((-\infty,x])$，$x\in\mathbb{R}$ 　分布函数

    $F(x)\triangleq\mu((-\infty,x])$，$x\in\mathbb{R}$

    $\forall\alpha\in C_F=\{x\in\mathbb{R}: F(x)=F(x-)\}=\{x\in\mathbb{R}:\mu(\{x\})=0\}\Rightarrow\mu(\{\alpha\})=0$

定义 $A \triangleq (-\infty, \alpha],\ \alpha \in C_F \Rightarrow \partial A = \{\alpha\} \Rightarrow \mu(\partial A) = 0$

$\Rightarrow A$ 为 μ-连续集 $\overset{(v)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$

因此 $\forall \alpha \in C_F,\ \lim_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha) \Rightarrow F_n \Rightarrow F \Leftrightarrow \mu_n \Rightarrow \mu$

$(X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow P_{X_n} \Rightarrow P_X)$

• (S, d) 一般度量空间，下证 $\forall f \in C_b(S),\ \mu_n(f) \to \mu(f)$

$f \in C_b(S) \Rightarrow f: S \to \mathbb{R}$ 有界连续函数 $\Rightarrow \|f\|_\infty \triangleq \sup_{x\in S} |f(x)| < \infty$

定义 push forward probab. measure $\quad \nu \triangleq f_\# \mu$

即 $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \nu(B) = (f_\# \mu)(B) = \mu(\{x \in S: f(x) \in B\})$

因此 $\nu: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ 是概率测度

另外，$\forall a < -\|f\|_\infty$ 及 $b > \|f\|_\infty$，则 $\nu((a,b)^c) = 0$

进一步，有 $\exists a = s_0 < s_1 < s_2 \cdots < s_m = b$ (对某个 $m \geq 2$) 满足：

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ s_i - s_{i-1} < \varepsilon,\ i = 1, \cdots, m$

(ii) $\nu(\{s_i\}) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, m$ (因为 ν 是有限测度)

再定义：$A_i \triangleq f^{-1}([s_{i-1}, s_i)),\ i = 1, \cdots, m$，故 $A_i \cap A_j = \phi\ (\forall i \neq j)$ 且 $S = \bigcup_{i=1}^m A_i$

另外 $\mu(\partial A_i) \leq \mu(f^{-1}(\{s_{i-1}\})) + \mu(f^{-1}(\{s_i\})) = \nu(\{s_{i-1}\}) + \nu(\{s_i\}) = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1, \cdots, m,\ A_i$ 为 μ-连续集 $\overset{(v)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_i) = \mu(A_i),\ \forall i = 1, \cdots, m$

下面定义 $h(x) \triangleq \sum_{i=1}^m s_{i-1} 1_{A_i}(x),\ x \in S$ (S 上简单函数)

$$= \sum_{i=1}^m s_{i-1} 1_{\{s_{i-1} \leq f(x) < s_i\}} \leq \sum_{i=1}^m f(x) 1_{A_i}(x) = f(x) \underbrace{\sum_{i=1}^m 1_{A_i}(x)}_{1_S(x)}$$

$$= f(x) = \sum_{i=1}^m f(x) 1_{\{s_{i-1} \leq f(x) < s_i\}}$$

$$< \sum_{i=1}^m s_i 1_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^k (s_i - s_{i-1} + s_{i-1}) 1_{A_i}(x) < \varepsilon + h(x)$$

总结：$\forall x \in S,\ h(x) \leq f(x) < h(x) + \varepsilon$

因此 $|\mu_n(f) - \mu(f)| \leq |\mu_n(f - h)| + |\mu_n(h) - \mu(h)| + |\mu(f - h)|$

$$\leq \mu_n(|f - h|) + |\mu_n(h) - \mu(h)| + \mu(|f - h|)$$

$$\leq \varepsilon \mu_n(S) + \varepsilon \mu(S) + \|\mu_n(h) - \mu(h)\|$$

注意到 $|\mu_n(h) - \mu(h)| = |\mu_n(\sum_{i=1}^m s_{i-1} 1_{A_i}) - \mu(\sum_{i=1}^m s_{i-1} 1_{A_i})|$

$$\overset{\text{由}\mu(f)\text{和线性性}}{\le} \sum_{i=1}^{n} |S_{i-1}| \underbrace{|\mu_n(A_i)-\mu(A_i)|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} |\mu_n(f)-\mu(f)| \le 2\varepsilon$$

由 ε 任意性 $\Rightarrow |\mu_n(f)-\mu(f)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

定义：设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 和 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列 S-值 r.v.s（(S,d) 是度量空间）

如果 $\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$ as $n\to\infty$

则称 X_n 依分布收敛到 X，记 $X_n \xrightarrow{d} X$，$n\to\infty$

注：$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall f\in C_b(S),\ \mathbb{P}_{X_n}(f) \to \mathbb{P}_X(f) \Leftrightarrow \forall f\in C_b(S),\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

partmanteau 定理（随机变量形式）：

设 (S,d) 度量空间以及 $\{X_n\}_{n\ge1}$，X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列 S-值 r.v.s，则以下等价：

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$，即 $\forall f\in C_b(S),\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

(ii) $\forall f\in UC_b(S),\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

(ii)' $\forall f\in Lip_b(S),\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$

(iii) $\forall D\subset S$ 闭集，$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\in D) \le \mathbb{P}(X\in D)$

(iv) $\forall C\subset S$ 开集，$\mathbb{P}(X\in C) \le \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\in C)$

(v) $\forall A\in\mathcal{B}_S$，且 $\mathbb{P}(X\in\partial A)=0$，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\in A) = \mathbb{P}(X\in A)$

$Lip_b(S) \triangleq \{f: S\to\mathbb{R} : f$ 是有界李普希兹函数$\}$

$\forall f\in Lip_b(S)$，定义 $\|f\|_{Lip} \triangleq \sup\limits_{\substack{x\neq y\\ x,y\in S}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$

习题：$\left.\begin{array}{l} |X_n-Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \\ X_n \xrightarrow{d} X \end{array}\right\} \Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X$

证：由 partmanteau 定理，只需证 $\forall f\in Lip_b(S),\ E[f(Y_n)] \to E[f(X)]$

事实上，$|E[f(Y_n)]-E[f(X)]| \le |E[f(Y_n)]-E[f(X_n)]| + |E[f(X_n)]-E[f(X)]|$

注意到 $X_n \xrightarrow{d} X \xRightarrow{\text{partmanteau}} |E[f(X_n)]-E[f(X)]| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

另外, $\forall \varepsilon>0$,

$$|E[f(Y_n)]-E[f(X_n)]| \le E[|f(Y_n)-f(X_n)|]$$
$$= E[|f(Y_n)-f(X_n)|1_{|Y_n-X_n|\le\varepsilon}] + E[|f(Y_n)-f(X_n)|1_{|Y_n-X_n|>\varepsilon}]$$
$$\le \|f\|_{Lip} E[|Y_n-X_n|1_{|Y_n-X_n|\le\varepsilon}] + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_n-X_n|>\varepsilon)$$
$$\longrightarrow 0$$

<u>Slutzky定理</u>: 设$\{X_n\}_{n\ge1}, \{Y_n\}_{n\ge1}, X$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列实值r.v.s, 则

$$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{d} X \\ Y_n \xrightarrow{d} C\ (C\text{为常数}) \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n,Y_n) \xrightarrow{d} (X,C)$$

由连续映射定理
$X_n \pm Y_n \xrightarrow{d} X \pm C$
$\quad\; \times\ /\qquad\;\; \times\ /$

证明: 为证$(X_n,Y_n)\to(X,C)$, 只需证明$\forall f\in C_b(\mathbb{R}^2)$, $E[f(X_n,Y_n)]\to E[f(X,C)]$

<u>step1</u>: 证$(X_n,C)\xrightarrow{d}(X,C)$

$\Leftrightarrow E[f(X_n,C)]\to E[f(X,C)]$

定义$g(x)\triangleq f(x,c) \Rightarrow g\in C_b(\mathbb{R})$

$X_n\xrightarrow{d}X \Rightarrow E[g(X_n)]\to E[g(X)]$ 即$E[f(X_n,C)]\to E[f(X,C)]$

<u>step2</u>: 证$|(X_n,Y_n)-(X_n,C)|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$: $Y_n\xrightarrow{d}C\Rightarrow Y_n\xrightarrow{\mathbb{P}}C$

事实上, $|(X_n,Y_n)-(X_n,C)|=|(0,Y_n-C)|=|Y_n-C|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$

由Step1, 2及上面习题, $(X_n,Y_n)\xrightarrow{d}(X,C)$

§5、概率测度的胎紧性 (tightness of probab. measure)

<u>定义</u>(概率测度的tightness): 设S为拓扑空间及$\mu\in\mathcal{P}(S)$.

如果$\forall\varepsilon>0$, 存在$K=K_\varepsilon\subset S$为紧集, s.t. $\mu(K^c)\le\varepsilon$, 则称μ为tight (胎紧)
$(\mu(K)>1-\varepsilon)$

注: $\cdot\ \forall\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$是tight.

事实上, 由概率测度连续性 $\lim\limits_{M\to+\infty}\mu([-M,M]^c)=0$

即$\forall\varepsilon>0$, $\exists M_\varepsilon>0$, s.t. $\mu(K_{M_\varepsilon}^c)\le\varepsilon$, $K_{M_\varepsilon}=[-M_\varepsilon,M_\varepsilon]\subset\mathbb{R}$ compact

· $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$是tight.

事实上，$\lim_{M\to+\infty}\mu(\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>M\})=0$

<u>定理</u>：设(S,d)是polish空间(完备可分度量空间)，则$\mu\in\mathcal{P}(S)$是tight

证明：由S为可分的，存在一个可数稠密子集$D=\{d_1,d_2,\cdots\}$

使$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_\delta(d_i)$，$\forall\delta>0$

于是$1=\mu(S)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{i=1}^{n}B_\delta(d_i))=\sup_{n\ge1}\mu(\bigcup_{i=1}^{n}B_\delta(d_i))$

于是$\forall m\ge1,\exists n_m\ge1$, s.t. $\mu(\bigcup_{i=1}^{n_m}B_{\frac{1}{m}}(d_i))>1-\varepsilon\cdot2^{-m}$，$\forall\varepsilon>0$

定义$K\triangleq\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n_m}\overline{B_{\frac{1}{m}}}(d_i)$ 闭集.

另外，取$\frac{1}{m}<\delta$ (即$m>\delta^{-1}$)，则$K\subset\bigcup_{i=1}^{n_m}B_\delta(d_i)$，故K is totally bounded

再由X完备，K compact

$$\mu(K^c)=\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}[\bigcup_{i=1}^{n_m}\overline{B_{\frac{1}{m}}}(d_i)]^c)$$
$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\mu([\bigcup_{i=1}^{n_m}\overline{B_{\frac{1}{m}}}(d_i)]^c)$$
$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\mu([\bigcup_{i=1}^{n_m}B_{\frac{1}{m}}(d_i)]^c)$$
$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon\cdot2^{-m}=\varepsilon$$

定义(一致胎紧 uniform tightness). 设 S 为拓扑空间以及 $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(S)$. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\triangleq K_\varepsilon\subset S$ 紧集, 使 $\sup\limits_{\mu\in\mathcal{M}}\mu(K^c)\leq\varepsilon$, 则称 $\mathcal{M}$ 为<u>一致胎紧</u>

<u>注</u>: · $\{\mu_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(S)$, 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K=K_\varepsilon$ 紧 s.t. $\sup\limits_{n\geq1}\mu_n(K^c)\leq\varepsilon$, 则称 $\{\mu_n\}$ 一致胎紧

· 设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下的一列 S-值 r.v.s, 如果 $\{\mathcal{P}_{X_n}\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(S)$ 为一致胎紧

则称 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 是一致胎紧的.

例. 设 (S,d) 是 polish 空间, 则 $\forall\mu\in\mathcal{P}(S)$ 为胎紧的. 现在设 $\mu_n\in\mathcal{P}(S)$, $n=1,2,\cdots,N$ (有限数).

则 $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ 是一致胎紧的.

事实上, $\left.\begin{array}{l}\forall n=1,\cdots,N,\ \mu_n\in\mathcal{P}(S)\\ (S,d)\ \text{polish 空间}\end{array}\right\}\Rightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists K^{(n)}\subset S$ 紧集, s.t. $\mu_n([K^{(n)}]^c)\leq\varepsilon$

故取 $K=\bigcup\limits_{n=1}^N K^{(n)}$, 有 $\sup\limits_{n\geq1}\mu_n(K^c)\leq\varepsilon$

例. 设 $\{\mu_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$, 如果有 $\lim\limits_{M\to+\infty}\sup\limits_{n\geq1}\mu_n([-M,M]^c)=0$, 则 $\{\mu_n\}_{n\geq1}$ 为一致胎紧的.

事实上, $[-M,M]\subset\mathbb{R}$ 紧, $\forall M>0$. 由已知条件 $\forall\varepsilon$, $\exists M$, s.t. $\sup\limits_{n\geq1}\mu_n([-M,M]^c)\leq\varepsilon$

例. 设 $\{\mu_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 如果有 $\lim\limits_{M\to+\infty}\sup\limits_{n\geq1}\mu_n(\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>M\})=0$, 则 $\{\mu_n\}_{n\geq1}$ 一致胎紧

习题. 设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列 $\mathbb{R}^n$-值 r.v.s 满足 $\underbrace{\sup\limits_{n\geq1}E[|X_n|]<+\infty}_{(\text{一致 }L^1\text{-有界})}$, 则 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 一致胎紧.

事实上, 我们需证 $\{\mathcal{P}_{X_n}\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 为一致胎紧. 定义 $K_M\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq M\}$, $\forall M>0$.

注意到 $\sup\limits_{n\geq1}\mathcal{P}_{X_n}(K_M^c)=\sup\limits_{n\geq1}\int_{\mathbb{R}^n}1_{K_M^c}(x)\mathcal{P}_{X_n}(dx)=\sup\limits_{n\geq1}\int_\Omega 1_{K_M^c}(X_n(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$

$$=\sup_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|>M)\leq\sup_{n\geq1}\frac{1}{M}E[|X_n|]=\frac{1}{M}\sup_{n\geq1}E[|X_n|]\xrightarrow[M\to+\infty]{}0$$

$\Rightarrow\{\mathcal{P}_{X_n}\}_{n\geq1}$ 一致胎紧的.

例. 设 $C([0,1]:\mathbb{R})\triangleq\{f(t):[0,1]\to\mathbb{R}: f\text{ 连续}\}$, 故 $C([0,1]:\mathbb{R})=C_b([0,1]:\mathbb{R})$

定义 $\|f\|_\infty\triangleq\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$ (一致范数/最大值范数)

定义 $d_\infty(f,g)\triangleq\|f-g\|_\infty$, $\forall f,g\in C([0,1]:\mathbb{R})$, 则 $(S,d)=(C([0,1]:\mathbb{R}),d_\infty)$ 是 polish 空间.

$\forall f\in C([0,1]:\mathbb{R})$, 定义 $|f|_{0,\alpha}\triangleq\|f\|_\infty+\sup\limits_{\substack{s,t\in[0,1]\\ t\neq s}}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$, $\alpha\in(0,1]$

再定义 $C^{0,\alpha}([0,1]:\mathbb{R})\triangleq\{f\in C([0,1]:\mathbb{R}):|f|_{0,\alpha}<+\infty\}$, 则称 $C^{0,\alpha}([0,1]:\mathbb{R})$ 为 α-Hölder 连续函数空间.

· 设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列 $C([0,1]:\mathbb{R})$ 值 r.v.s 且 $\lim\limits_{M\to+\infty}\sup\limits_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|_{0,\alpha}>M)=0$ ($\exists\alpha\in(0,1]$)

则 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 是一致胎紧的.

事实上，需证：$\forall \varepsilon>0$，$\exists K\subset S$ 紧集，s.t. $\sup\limits_{n\geq 1} P_{X_n}(K^c)\leq \varepsilon$

→ B是紧的

定理（Ascoli定理）：设 E 是 Banach 空间以及 $B\subset C([0,1]:E)$，则 B 是相对紧

当且仅当 (i) $\forall t\in[0,1]$，$B(t)\triangleq\{f(t):f\in B\}\subset E$ 是相对紧的

(ii) B 是等度连续（即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$\forall t,s\in[0,1]$，$|t-s|<\delta$，有 $\sup\limits_{f\in B}|f(t)-f(s)|<\varepsilon$）

[equi-continuity]

定理（Arzela-Ascoli）：设 $B\subset C([0,1]:\mathbb{R})$ 且满足 (i) B 是逐点有界（即 $\forall t\in[0,1]$，$B(t)\triangleq\{f(t):f\in B\}$ 有界）

(ii) B 是等度连续的

则 B 是相对紧的。

证明：$\forall M>0$，定义 $K_M\triangleq\{f\in C([0,1]:\mathbb{R}):|f|_{0,\alpha}\leq M\}$，则 $K_M\subset C([0,1]:\mathbb{R})$ 是相对紧的。

事实上，$\forall f\in K_M$，$|f|_{0,\alpha}\leq M$，则 $\|f\|_\infty+\sup\limits_{\substack{t,s\in[0,1]\\t\neq s}}\dfrac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}\leq M$

因此，(1) $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|\leq M\Rightarrow K_M(t)\triangleq\{f(t):f\in K_M\}$ 是有界的，$\forall t\in[0,1]$

(2) $\sup\limits_{\substack{t,s\in[0,1]\\t\neq s}}\dfrac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}\leq M\Rightarrow|f(t)-f(s)|\leq M|t-s|^\alpha$

$\Rightarrow\sup\limits_{f\in K_M}|f(t)-f(s)|\leq M|t-s|^\alpha\Rightarrow K_M$ 是等度连续的

故 $\overline{K_M}\subset S\triangleq C([0,1]:\mathbb{R})$ 是紧的。

于是，$\sup\limits_{n\geq1}P_{X_n}(\overline{K_M}^c)\leq\sup\limits_{n\geq1}P_{X_n}(K_M^c)=\sup\limits_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|_{0,\alpha}>M)\xrightarrow[M\to+\infty]{}0$

$\Rightarrow\{P_{X_n}\}_{n\geq1}$ 是一致胎紧的。

例. $\forall p\geq1$，定义 $L^p([0,1]:\mathbb{R})\triangleq\{f(t):[0,1]\to\mathbb{R}:\int_0^1|f(t)|^pdt<+\infty\}$

定义 $\|f\|_{L^p([0,1])}\triangleq(\int_0^1|f(t)|^pdt)^{\frac{1}{p}}$，$\forall f\in L^p([0,1]:\mathbb{R})$

定义 $d_p(f,g)=\|f-g\|_{L^p([0,1])}$

设 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列 $L^p([0,1]:\mathbb{R})$-值 r.v.s 满足

(i) $\sup\limits_{n\geq1}E[\int_0^1|X_n(t)|dt]<+\infty$ (ii) $\exists C,\alpha>0$ 及 $\delta\in(0,1)$，s.t. $\sup\limits_{n\geq1}E\left[\sup\limits_{h\in(0,\delta)}\int_0^{1-h}|X_n(t+h)-X_n(t)|^pdt\right]\leq C\cdot\delta^\alpha$

则 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为一致胎紧.

定理：设 E 为 Banach 空间，以及 $B\subset L^p([0,1]:E)$，则 B 为相对紧的当且仅当

(i) $\forall 0\leq t_1<t_2\leq1$，$B(t_1,t_2)\triangleq\{\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt:f\in B\}\subset E$ 是相对紧的

(ii) $\lim\limits_{h\to0}\sup\limits_{f\in B}\int_0^{1-h}|f(t+h)-f(t)|_E^pdt=0$

证明: $\forall \tilde{C}, \tilde{\alpha}, \tilde{\delta} \in (0,1)$ 及 $\tilde{M}>0$, 定义

$$K_{\tilde{C},\tilde{\alpha},\tilde{\delta},\tilde{M}} \triangleq \left\{ f\in L^p([0,1]:\mathbb{R}) : \int_0^1 |f(t)|dt \le \tilde{M} \text{ and } \sup_{h\in(0,\tilde{\delta})} \int_0^{1-h} |f(t+h)-f(t)|^p dt \le \tilde{C}\tilde{\delta}^{\tilde{\alpha}} \right\}$$

则 $K_{\tilde{C},\tilde{\alpha},\tilde{\delta},\tilde{M}} \subset L^p([0,1]:\mathbb{R})$ 是相对紧的.

事实上, $\forall f\in \tilde{K}$, 则

(i) $\int_0^1 |f(t)|dt \le M \Rightarrow \forall\, 0\le t_1<t_2\le 1$, $\tilde{K}(t_1,t_2) \triangleq \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt : f\in \tilde{K} \right\} \subset \mathbb{R}$ 是相对紧的.

(ii) 有 $\sup_{h\in(0,\tilde{\delta})} \int_0^{1-h} |f(t+h)-f(t)|^p dt \le \tilde{C}\tilde{\delta}^{\tilde{\alpha}}$

$$\Big\downarrow \tilde{\delta}\to 0$$

$$0$$

则 $\tilde{K}\subset L^p([0,1]:\mathbb{R})$ 为相对紧的. 下面考虑

$$\sup_{n\ge1} P_{X_n}(\tilde{K}^c) \le \sup_{n\ge1} P_{X_n}(\tilde{K}^c) \le \sup_{n\ge1} \mathbb{P}\left(\int_0^1 |X_n(t)|dt > \tilde{M}\right) + \sup_{n\ge1} \mathbb{P}\left(\sup_{h\in(0,\tilde{\delta})} \int_0^{1-h} |f(t+h)-f(t)|^p dt > \tilde{C}\tilde{\delta}^{\tilde{\alpha}} \right)$$

$$\le \frac{1}{\tilde{M}} \sup_{n\ge1} E\left[\int_0^1 |X_n(t)|dt\right] + \frac{1}{\tilde{C}\tilde{\delta}^{\tilde{\alpha}}} \underbrace{\sup_{n\ge1} E\left[\sup_{h\in(0,\tilde{\delta})} \int_0^{1-h} |f(t+h)-f(t)|^p dt \right]}_{\le C\delta^{\alpha}\ (\text{取 } \tilde{\delta}=\delta,\ \tilde{\alpha}=\alpha,\ \tilde{C}=C\tilde{M})}$$

$$\le \frac{1}{\tilde{M}} \left[\sup_{n\ge1} E\left[\int_0^1 |X_n(t)|dt\right] + 1 \right] \longrightarrow 0 \text{ as } \tilde{M}\to+\infty$$

例. $D([0,1]:\mathbb{R})$

[右连续] Skorokhod space

定理(Helly Selection定理): 设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为一列分布函数,

则存在一子列$\{F_{n_k}\}_{k\geq 1}$使其满足$F_{n_k} \Rightarrow F$ ($\forall x\in C_F$, $F_{n_k}(x)\to F(x)$, $k\to+\infty$)

其中$F: \mathbb{R}\to[0,1]$, 单增右连续函数

注: $\cdot F:\mathbb{R}\to[0,1]$单增右连续函数称为defective分布函数

$\cdot F_{n_k} \xrightarrow{v} F$ vague convergence

例. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\delta_n\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$. $\delta_n \Rightarrow \delta_\infty$, $n\to+\infty$

$X=n$分布　　$F(x)\triangleq\delta_\infty(-\infty,x]=0$, $x\in\mathbb{R}$

分布函数$F_n(x)=\delta_n(-\infty,x]=I_{[n,+\infty)}(x)$

$\forall K\subset S$紧, $\exists n\geq 1$, s.t. $\delta_n(K)=0$, 则$\{\delta_n\}_{n\geq1}$不一致胎紧

考虑$\{\delta_{\frac1n}\}_{n\geq 1}$, 则$\delta_{\frac1n}([0,1])=1$, $\forall n\geq 1$ $\Rightarrow$ $\{\delta_{\frac1n}\}_{n\geq1}$一致胎紧

且$\delta_{\frac1n} \Rightarrow \delta_0$, $n\to+\infty$

$\Updownarrow$

分布函数$F_n(x)\triangleq 1_{[\frac1n,+\infty)}(x)$　$F(x)\triangleq 1_{[0,+\infty)}(x)$

定理: 设$\{\mu_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$且$\{\mu_n\}_{n\geq1}$一致胎紧

定义$F_n(x)\triangleq\mu_n(-\infty,x]$, $x\in\mathbb{R}$, $n\geq1$, 则存在子列$\{F_{n_k}\}_{k\geq1}\subset\{F_n\}_{n\geq1}$, s.t.

$F_n\Rightarrow F$, 即$\forall x\in C_F$, $F_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}F(x)$, 其中$F$为分布函数

证明: 由Helly Selection定理, 只需证明$F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

事实上, 由于$\{\mu_n\}_{n\geq1}$一致胎紧, 则$\forall\varepsilon>0$, $\exists M=M_\varepsilon>0$, s.t.

$\mu_n([-M,M]^c)\leq\varepsilon$, $\forall n\geq1$

注意到$\mu_n([-M,M])=F_n(M)-F_n((-M)-)$

$\Rightarrow \mu_n([-M,M]^c)=1-F_n(M)+F_n((-M)-)$

$\Rightarrow 1-F_n(M)+F_n((-M)-)\leq\varepsilon$, $\forall n\geq1$

$\Rightarrow 1-F_{n_k}(M)+F_{n_k}((-M)-)\leq\varepsilon$, $\forall k\geq1$

$\Rightarrow 1-F_{n_k}(M)\leq\varepsilon \Rightarrow F_{n_k}(M)\geq1-\varepsilon$

$\Rightarrow \forall x>M$及$x\in C_F$, 有$F_{n_k}(x)\geq F_{n_k}(M)\geq1-\varepsilon$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x)=F(x)$, 则$F(x)\geq1-\varepsilon \Rightarrow F(+\infty)\geq1-\varepsilon$

由 ε 任意性, $F(+\infty)=1$

另外一方面, $F_{n_k}((-M)-)\le\varepsilon$ 同理有 $F(-\infty)=0$

注: 由 Helly Selection 定理, 设 $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$, 则

$\mathcal{M}$ 一致胎紧 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ 是相对紧的(弱拓扑)

§6. Prokhorov 定理

<u>定义</u>(Prokhorov metric) 设 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(S)$, 定义

$$d_p(\mu,\nu)\triangleq\inf\{\varepsilon>0:\mu(B)\le\nu(B^\varepsilon)+\varepsilon,\ \nu(B)\le\mu(B^\varepsilon)+\varepsilon,\ \forall B\in\mathcal{B}_S\}$$

其中 (S,d) 是度量空间, $B^\varepsilon\triangleq\inf\{x\in S: d(x,B)\le\varepsilon\}$, $B\in\mathcal{B}_S$

称 d_p 为 Prokhorov 度量.

<u>定理</u>: 设 (S,d) 为度量空间, 则 $(\mathcal{P}(S),d_p)$ 也是一个度量空间.

证明: step1: 由于 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(S)$, 即 μ,ν 为 $\mathcal{B}_S$ 上概率测度.

则 $[1,+\infty)\subset C_{\mu,\nu}\triangleq\{\varepsilon>0:\mu(B)\le\nu(B^\varepsilon)+\varepsilon,\ \nu(B)\le\mu(B^\varepsilon)+\varepsilon,\ \forall B\in\mathcal{B}_S\}$

$\Rightarrow 0\le d_p(\mu,\nu)\le1$, 即 d_p 为非负有限的

step2: 对称性: 由定义显然

step3: 证 $d_p(\mu,\nu)=0\Leftrightarrow\mu=\nu$.

· 若 $\mu=\nu$. $\forall\varepsilon>0$, $B\subset B^\varepsilon$, $\forall B\in\mathcal{B}_S$

故 $\forall B\in\mathcal{B}_S$, $\mu(B)\le\mu(B^\varepsilon)\le\mu(B^\varepsilon)+\varepsilon\Rightarrow d_p(\mu,\mu)\le\varepsilon\xRightarrow{\varepsilon\text{任意}}d_p(\mu,\mu)=0$

· 若 $d_p(\mu,\nu)=0$.

$0=d_p(\mu,\nu)=\inf C_{\mu,\nu}$, 则存在 $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1}\subset C_{\mu,\nu}$, s.t. $\varepsilon_n\downarrow0$ $n\to+\infty$

由于 $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1}\subset C_{\mu,\nu}\Rightarrow\forall B\in\mathcal{B}_S$, $\mu(B)\le\nu(B^{\varepsilon_n})+\varepsilon_n$, $\nu(B)\le\mu(B^{\varepsilon_n})+\varepsilon_n$

两边令 $n\to+\infty$, 并注意到 $B^{\varepsilon_n}\downarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}B^{\varepsilon_n}=\overline{B}$

由概率测度连续性, $\mu(B)\le\nu(\overline{B})$, $\nu(B)\le\mu(\overline{B})$

故当 B 为闭集 $(B=\overline{B})$, 则 $\mu(B)=\nu(B)$

即有 $\mu(B)=\nu(B)$, $\forall B$ 闭集

$\overset{\text{二入}}{\Longrightarrow} \mu(B)=\nu(B), \forall B\in\mathcal{B}_S \Rightarrow \mu=\nu$

Step4: 三角不等式 $\forall \mu,\nu,m\in\mathcal{P}(S)$, $d_P(\mu,\nu)\le d_P(\mu,m)+d_P(m,\nu)$.

即 $\inf C_{\mu,\nu}\le \inf C_{\mu,m}+\inf C_{m,\nu}$

$\forall \varepsilon_1\in C_{\mu,m}$, $\varepsilon_2\in C_{\nu,m}$, 则 $\forall B\in\mathcal{B}_S$,

$\mu(B)\le m(B^{\varepsilon_1})+\varepsilon_1$, $m(B)\le \mu(B^{\varepsilon_1})+\varepsilon_1$

$\nu(B)\le m(B^{\varepsilon_2})+\varepsilon_2$, $m(B)\le \nu(B^{\varepsilon_2})+\varepsilon_2$

注意到 $\forall B\in\mathcal{B}_S\Rightarrow B^{\varepsilon}\in\mathcal{B}_S$, $\forall\varepsilon>0$, 故

$\mu(B)\le m(B^{\varepsilon_1})+\varepsilon_1\le \nu((B^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2})+\varepsilon_1+\varepsilon_2$

$\nu(B)\le m(B^{\varepsilon_2})+\varepsilon_2\le \mu((B^{\varepsilon_2})^{\varepsilon_1})+\varepsilon_1+\varepsilon_2$

注意到 $(B^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2}\subset B^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, $(B^{\varepsilon_2})^{\varepsilon_1}\subset B^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

故 $\mu(B)\le\nu(B^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})+\varepsilon_1+\varepsilon_2$

$\nu(B)\le\mu(B^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})+\varepsilon_1+\varepsilon_2$

$\Longrightarrow \varepsilon_1+\varepsilon_2\in C_{\mu,\nu}\Rightarrow d_P(\mu,\nu)\le\varepsilon_1+\varepsilon_2$

由 $\varepsilon_1\in C_{\mu,m}$ 及 $\varepsilon_2\in C_{m,\nu}$ 任意性, 得三角不等式

注: (S,d) 是 polish 空间 $\Rightarrow(\mathcal{P}(S),d_P)$ 是 polish 空间

- $d_P(\mu_n,\mu)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ $(\mu_n,\mu\in\mathcal{P}(S))\Leftrightarrow\mu_n\Rightarrow\mu$

$(\Leftarrow)$ 不简单, 证明略.

$(\Rightarrow)$ 由于 $d_P(\mu_n,\mu)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, 则存在 $\varepsilon_n\in C_{\mu_n,\mu}$, $n\ge1$, s.t. $\varepsilon_n\downarrow0$, $n\to+\infty$

由于 $\varepsilon_n\in C_{\mu_n,\mu}\Rightarrow\mu_n(B)\le\mu(B^{\varepsilon_n})+\varepsilon_n$, $\forall B\in\mathcal{B}_S$

两边令 $n\to+\infty$, $\varlimsup_{n\to\infty}\mu_n(B)\le\mu(\bar{B})\Rightarrow$ 对闭集 B, $\varlimsup_{n\to\infty}\mu_n(B)\le\mu(B)$

由 portmanteu 定理, $\mu_n\Rightarrow\mu$

- Warsserstein 度量

<u>定义</u>: 设 (S,d) 为度量空间, $\forall p\ge1$, 定义 $\mathcal{P}_p(S)\triangleq\{\mu\in\mathcal{P}(S):\int_S d(x_0,y)^p\mu(dy)<+\infty, \exists x_0\in S\}$

则称 $\mathcal{P}_p(S)$ 为 <u>Warsserstein 空间</u>

特别地 $S=\mathbb{R}^d$, $x_0=0$. $\int_{\mathbb{R}^d}|x|^d\mu(dx)<+\infty\Leftrightarrow\mu=\mathbb{P}_X$, $E|X|^p<+\infty$

注：$\mathcal{P}_p(S)=\{\mu\in\mathcal{P}(S):\int_S d(y,x)^p\mu(dx)<+\infty,\ \forall y\in S\}$

事实上，$\forall y\in S$，$\int_S d(y,x)^p\mu(dx)\le\int_S[d(y,x_0)+d(x_0,x)]^p\mu(dx)$

$$\le 2^{p-1}\int_S d(y,x_0)^p\mu(dx)+2^{p-1}\int_S d(x_0,x)^p\mu(dx)$$
$$=2^{p-1}d(y,x_0)^p+2^{p-1}\int_S d(x_0,x)^p\mu(dx)<+\infty$$

定义：设 (S,d) 度量空间及 $p\ge1$，$\forall\mu,\nu\in\mathcal{P}_p(S)$，定义

$$W_p(\mu,\nu)\triangleq\left\{\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{S\times S}d(x,y)^p\pi(dx,dy)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

其中 $\Pi(\mu,\nu)\triangleq\{\pi\in\mathcal{P}(S\times S):\pi(A\times S)=\mu(A),\ \pi(S\times B)=\nu(B),\ \forall A,B\in\mathcal{B}_S\}$

则称 W_p 为 p 阶 Warsserstain 度量

注：$\forall\pi\in\Pi(\mu,\nu)$，称 π 为 transportation plan

- W_p 在 $\mathcal{P}_p(S)$ 上的确为一个度量
- $\forall\mu,\nu\in\mathcal{P}_p(S)\Rightarrow W_p(\mu,\nu)<+\infty$

事实上，$\mu\times\nu\in\Pi(\mu,\nu)$ 故 $W_p^p(\mu,\nu)\le\int_{S\times S}d(x,y)^p\mu(dx)\nu(dy)$

$$\le\int_{S\times S}[d(x,x_0)+d(x_0,y)]^p\mu(dx)\nu(dy)$$
$$\le 2^{p-1}\int_{S\times S}d(x,x_0)^p\mu(dx)\nu(dy)+2^{p-1}\int_{S\times S}d(x_0,y)^p\mu(dx)\nu(dy)$$
$$=2^{p-1}\int_S d(x,x_0)^p\mu(dx)+2^{p-1}\int_S d(x_0,y)^p\nu(dy)<+\infty$$

- 定义 $\tilde{\Pi}(\mu,\nu)\triangleq\{(X,Y):(X,Y)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下 $S\times S$-值 r.v. 且 $\mathcal{P}_X=\mu,\ \mathcal{P}_Y=\nu\}$

$\forall(X,Y)\in\tilde{\Pi}(\mu,\nu)$，称 (X,Y) 为 μ,ν 的一个耦合 (Coupling)

故
$$W_p(\mu,\nu)=\left\{\inf_{(X,Y)\in\tilde{\Pi}(\mu,\nu)}\int_{S\times S}d(x,y)^p\mathcal{P}_{(X,Y)}(dx,dy)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left\{\inf_{(X,Y)\in\tilde{\Pi}(\mu,\nu)}E[d(X,Y)^p]\right\}^{\frac{1}{p}}$$

- $p=2$ 时，平方 Warsserstain 度量

例. 设 $(S,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间以及 $\mu\in\mathcal{P}_2(S)$ 和 $a\in S$，

$$W_2^2(\mu,\delta_a)=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\delta_a)}\int_{S\times S}\|x-y\|^2\pi(dx,dy)=\inf_{(X,Y)\in\tilde{\Pi}(\mu,\delta_a)}E[\|X-Y\|^2]\quad(1)$$

注意到 $\tilde{\Pi}(\mu,\delta_a)=\{(X,Y):\text{r.v. 且 }\mathcal{P}_X=\mu,\ \mathcal{P}_Y=\delta_a\}=\{(X,a):\text{r.v. 且 }\mathcal{P}_X=\mu\}$

$\therefore(1)=\inf_{(X,a)\in\tilde{\Pi}(\mu,\delta_a)}E[\|X-a\|^2]=\inf_{(X,a)\in\tilde{\Pi}(\mu,\delta_a)}\int_S\|x-a\|^2\mu(dx)=\int_S\|x-a\|^2\mu(dx)$

考虑 $\inf_{a\in S} W_2^2(\mu,\delta_a)=\inf_{a\in S}\int_S \|x-a\|^2\mu(dx)=\int_S\|x-a^*\|^2\mu(dx)$ —— μ 的方差

其中 $a^*=\int_S x\mu(dx)$

· $p=1$ 时, Kantorovich-Rubinstein 度量 $\forall \mu,\nu\in\mathcal{P}_1(S)$ ((S,d) is polish)

$$W_1(\mu,\nu)=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{S\times S} d(x,y)\pi(dx,dy)$$

K-R对偶公式

$$=\sup_{g\in C^d_{Lip,1}(S)}\int_S g(x)(\mu(dx)-\nu(dx))$$

其中 $C^d_{Lip,1}(S)\triangleq\{g:S\to\mathbb{R}:\|g\|_{Lip}\triangleq\sup_{\substack{x\neq y\\x,y\in S}}\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\leq 1\}$

定理(全变差公式):设 S 为 polish 空间, $\mu,\nu\in\mathcal{P}_1(S)$, 则

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\pi(\{x\neq y\})=\inf_{(X,Y)\in\Pi(\mu,\nu)}\mathbb{P}(X\neq Y)$$

$$=(\mu-\nu)^+(S)=(\mu-\nu)^-(S)$$

$$=\frac{1}{2}|\mu-\nu|_{TV}$$

θ sign-measure

Jordan 分解 $\theta=\theta^+-\theta^-$

全变差测度 $|\theta|\triangleq\theta^++\theta^-$

全变差 $|\theta|_{TV}\triangleq|\theta|(S)$

证明:取 $d(x,y)=1_{x\neq y}$, $x,y\in S$

故 $W_1(\mu,\nu)=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\pi(\{x\neq y\})$

$$\overset{\parallel}{\sup_{g\in C^d_{Lip,1}}}\int_S g(x)(\mu(dx)-\nu(dx))\overset{?}{=}\sup_{f\in D(S)}\int_S f(x)(\mu(dx)-\nu(dx))=\int_S 1(\mu-\nu)^+(dx)$$

$D(S)\triangleq\{f:S\to\mathbb{R}: f 可测且 f\in[0,1]\}$

"?": 注意到若 $d(x,y)=1_{x\neq y}$, 则 $C^d_{Lip,1}(S)\triangleq\{g:S\to\mathbb{R}:\|g\|_{Lip}=\sup_{x\neq y}|g(x)-g(y)|\leq 1\}$

因此, $\forall f\in D(S)\Rightarrow f\in C^d_{Lip,1}(S)\Rightarrow \sup_{f\in D(S)}\int(\ )\leq\sup_{g\in C^d_{Lip,1}(S)}\int(\ )$

另外一方面, $\forall g\in C^d_{Lip,1}(S)\Rightarrow\sup_{x\neq y}|g(x)-g(y)|\leq 1$

定义 $\tilde{g}(x)\triangleq g(x)-\inf_y g(y)$, 故 $\tilde{g}\geq 0$ 且 $\tilde{g}\in D(S)$

因此, $\int_S\tilde{g}\,d(\mu-\nu)=\int_S(g(x)-\inf_y g(y))(\mu(dx)-\nu(dx))=\int_S g(x)(\mu(dx)-\nu(dx))$

$\Rightarrow\int_S g\,d(\mu-\nu)\leq\sup_{f\in D(S)}\int f\,d(\mu-\nu)$, $\forall g\in C^d_{Lip,1}(S)$

习题(协方差不等式):设 (S,d) 为 polish 空间, μ 及 $f:S\to\mathbb{R}_+$, 满足

$\int_S f\,d\mu=1$, 其中 $\mu\in\mathcal{P}_1(S)$, 则 $(\int_S f\,d\mu)(\int_S g\,d\mu)-(\int_S fg\,d\mu)\leq\|g\|_{Lip}W_1(\mu,f\mu)$

其中 g 为 Lip 函数, $(f\mu)(B)\triangleq\int_B f\,d\mu$, $\forall B\in\mathcal{B}_S$

Hint: $E[f(X)]E[g(Y)]-E[f(X)g(Y)]\leq\|g\|_{Lip}W_1(\mu,f\mu)$

$\tilde{g}\triangleq g/\|g\|_{Lip}$ $\quad\int_S f\,d\mu=1$ $\quad$ 用对偶公式

定理(Prokhorov 定理):

设(S,d)为polish空间以及$\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(S)$，则以下结论等价：

(i) $\mathcal{M}$是相对紧的(弱拓扑下仍是相当于列紧的)

(ii) $\mathcal{M}$是一致胎紧的

证明: (ii)$\Rightarrow$(i) $S=\mathbb{R}$时, Helly selection Thm + 一致胎紧性 可证(往前翻几页)

$S\neq\mathbb{R}$比较困难，不证.(要用非紧空间的Riesz表示定理)