中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

hw 13

12.2

1. 将 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a \\ 0 & a\le|x|<\pi\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数。利用 Parseval 等式求

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$

解：计算 Fourier 系数

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx=\frac{2\sin na}{n\pi}$ $b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=\frac{2a}{\pi}$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin na}{n\pi}\cos nx$

① $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx/\pi$ Parserval 等式

直接代入 f 与 a_n, b_n $(\frac{2a}{\pi})^2\cdot\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\sin na}{n\pi})^2=2a/\pi$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi a-a^2}{2}$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx+\cos^2 nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi a-a^2}{2}$

2. $f\in L^2[-\pi,\pi]$，证：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛

证明：由 Bessel 不等式

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\le M_1$

有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le M_2$ $\Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\frac{1}{n^2}\le M_1+M_2$

正项级数有界 $\Rightarrow$ 收敛 ①

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛

扫描全能王 创建

3. $f(x)=\begin{cases}-1 & (-\pi,0)\\ 1 & [0,\pi]\end{cases}$ 求Fourier级数.

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ & $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

解: ① $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0$

$a_n=0$ $\quad b_n=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$ $\quad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

由Parserval等式 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=2$

奇 $b_1=\frac{4}{n\pi}$

偶 $b_2=0$

故有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}=2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

② 考虑 $g=|x|$ $\quad$ ~~g~~ $(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $\quad\square$

8. ① 证明: $P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 为

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2}-2x\frac{dP(x)}{dx}+n(n+1)P(x)=0$$ 的解.

pf: 设 $Q=(x^2-1)^n$ 约去 $\frac{1}{2^n\cdot n!}$ $\quad P=Q^{(n)}$

有 ~~即~~ $P^{(2)}+(n+1)nP=(x^2P(x))'$

$Q^{(n+2)}+(n+1)nQ^{(n)}=\left(x^2Q^{(n+1)}(x)\right)'$ 积分

$Q^{(n+1)}+(n+1)nQ^{(n-1)}=x^2Q^{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $(x^2-1)Q^{(n+1)}=n(n+1)Q^{(n-1)}$ 要得出这个

有 $(x^2-1)Q'=2nxQ$ $\quad$ 求n次导 $\quad$ Leibniz 公式 $(fg)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i f^{(i)}g^{(n-i)}$

~~$(x^2-1)Q^{(n+1)}+2xQ^{(n)}+2xQ^{(n-1)}=2nxQ^{(n)}$~~

~~$(x^2-1)Q$~~

$(x^2-1)Q^{(n+1)}+2nxQ^{(n)}+\frac{2n(n-1)}{2}Q^{(n-1)}$

$=2nxQ^{(n)}+2n^2Q^{(n-1)}$

$\Rightarrow(x^2-1)Q^{(n+1)}=n(n+1)Q^{(n-1)}$ $\quad\square$ $\quad$ ②

扫描全能王 创建

习题 12.3

1. $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ 证明：$x\in(0,\pi)$ 时有 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$ 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

解：$a_n=0$ $b_n=2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$

$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ $x\in(0,\pi)$ 时 $f(x)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

取 $x=\frac{\pi}{2}$ $\sin(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}=(-1)^{k-1}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$

2. ② 积化和差

利用 $\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的展开式证明

4. ① ~~cosax~~ $\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$

有 $\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right)$ 对 $\forall a\notin\mathbb{Z}$ 成立

取 $x=\pi$

$\pi\cot a\pi=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx$

取 $a=\frac{t}{\pi}$ $\cot t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\cdot(-1)^n$

即 $\cot t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$

③

□

② 取 $x=0$ 取 $a=\frac{t}{\pi}$

习题 12.4

1. ② $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x) & |x| \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 　奇函数 $a(\lambda)=0$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_R f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\lambda\xi = \frac{2}{\pi\lambda}(1-\cos\lambda)$$

③ $\frac{1}{\lambda^2+a^2}$ 　Laplace 积分 P332

2. $f(x) = xe^{-a|x|}$

奇函数

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} = -2i\int_0^{+\infty} x e^{-ax}\sin\lambda x dx = -2i I$$

$$I = \int_0^{+\infty} x e^{-ax}\sin\lambda x dx = \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-ax}}{\lambda} d(-\cos\lambda x)$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda}(e^{-ax} - axe^{-ax})dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda}e^{-ax}dx - \int_0^{+\infty}\frac{axe^{-ax}}{\lambda^2}d(\sin\lambda x)$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda}e^{-ax}dx + \int_0^{+\infty}\frac{a\sin\lambda x}{\lambda^2}(e^{-ax} - axe^{-ax})$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x e^{-ax}}{\lambda}dx + \int_0^{+\infty}\frac{a}{\lambda^2}\sin\lambda x e^{-ax} - \frac{a^2}{\lambda^2}I$$

注: ~~$\int_0^{+\infty} e^{\cos bx}$~~ 　$\int_0^{+\infty} e^{ax}\sin bx = \frac{-b}{a^2+b^2}$

$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}$

$$I = \frac{2a\lambda}{(\lambda^2+a^2)^2}$$

5. ② $\frac{2i\beta\lambda}{\pi(\lambda^2+\beta^2)^2}$

扫描全能王 创建

3. $f(x)=e^{-x}$

① 偶开拓 $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos\lambda x=\frac{2}{1+\lambda^2}$

② 奇开拓 $F(\lambda)=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}i$

综合八)

$f\in C'[-\pi,\pi]$ 且 $f'\in L^2$, $|f|\in L^2$。 $f(\pi)=f(-\pi)$ $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

求证: $\int_{-\pi}^{\pi}f'^2dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx$

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)=a\cos x+b\sin x$

证明: 由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2+\cancel{\frac{a_0}{2}}$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx+nb_n\cos nx$$

对 $f'(x)$ 应用 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx$$

"=" 成立 当且仅当 $a_2=a_3=\cdots=0$, $b_i=0$ $i\geqslant2$

故 $f(x)=a\cos x+b\sin x+C$

再由 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=0\Rightarrow C=0$ □

扫描全能王 创建

习题 13-1

一、判断收敛 or 发散

① $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ $\quad \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ 收敛

$(0,1)$ 上有界 $\quad (1,+\infty)$ 上

② $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

0处极限为 0 $\quad (1,+\infty)$ 上有 $\frac{\ln(1+x^2)}{x} > \frac{1}{x}$ 发散

③ $\int_2^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}$

$x \to +\infty$ $\quad \frac{x\ln x}{(1-x^2)^2} \sim \frac{\ln x}{x^3}$ 收敛

④ $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

0附近有界 $\quad (1,+\infty)$ 上 $\sqrt{x} e^{-x} \le x e^{-x}$ 收敛

⑤ $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$

0附近有界 $\quad (1,+\infty)$ 上 $\sim \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}} > \frac{1}{x}$ 发散

⑥ $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln\ln x}$

$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} > \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ 发散

⑦ $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

$I < C\left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x-a}} + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{b-x}}\right)$ 收敛

扫描全能王 创建

⑧ $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \sim \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx$

$\sqrt{1-x}=t \quad x=1-t^2$

$\sim \int_0^1 \ln(1-t^2) \sim \int_0^1 \ln(1-t)dt \sim \int_0^1 \ln t\,dt$

$t\ln t - t\Big|_0^1$ 收敛

⑨ $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$

0附近 有界 1附近 $\sim \int_0^1 x^{-\frac{5}{3}}$ 发散

⑩ $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛

⑪ $\int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{e^{\sin x}-1} \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ 收敛

⑫ $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$ 0附近 $e^x-\cos x \sim 1+x+\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}x^2) \sim x$

发散

⑬ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,d\sqrt{x} = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \ln\sin x^2\,dx$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x^2}{\ln x} = \frac{\frac{\cos x^2\,2x}{\sin x^2}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{x^2}{\sin x^2}=1$

收敛

⑭ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x^2-1)}dx$

$x\to+\infty$时 $\frac{\ln x}{x(x^2-1)} < \frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x^2}$ 收敛

1附近 $\int_1 \sim \frac{\ln x}{x-1} \sim \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}dx$ 0附近 有界 收敛

⑮ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos x}$

0附近 $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ 收敛

$\frac{\pi}{2}$附近 $\sim \int_0^a \frac{1}{\sin x}dx \sim \int_0^a \frac{dx}{x}$ 发散

⑯ $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$.

$p>1$ 收敛

else 发散

扫描全能王 创建

⑰ $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$

~~0附近~~ 0附近 $x^{\alpha-1}$ $\alpha-1 \le -1$ 时 发散

$+\infty$附近 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}\,dx$ $\alpha-2 < -1$ 时 收敛

故 $\alpha \in (0,1)$ 上 收敛 else 发散

~~⑱ $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^M}\,dx$~~

~~$+\infty$附近 $M<-1$ 收敛 $\frac{1}{x^M}$ $M \ge 1$ 收敛~~

~~0附近 $\sim x^{1-M}$ $1-M>-1$ 收敛~~

⑱ $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^M}\,dx$

$+\infty$附近 $\sim \frac{1}{x^M}$ $M>1$ 收敛 $M \in (1,2)$ 收敛

0附近 $\sim \frac{1}{x^{M-1}}$ $M-1<1$ 收敛

⑧

扫描全能王 创建

2. 条件与绝对收敛

① $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 单↓趋于0 $\int_a^b \cos(1-2x)$ 有界 由 Dirichlet 收敛

$\left|\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \sim \frac{|\cos(1-2x)|}{x}$ 发散

② $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} dx$

条件收敛 且不绝对收敛 同①

③ $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln x} dx \sim \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\sin e^x}{x} dx$

条件收敛

④ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\sqrt{x}+1)} dx$

$\left|\frac{\sin x}{x(\sqrt{x}+1)}\right| < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ 绝对收敛

⑤ $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)} dx$

(0,1)上

$\sim \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散

⑥ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p} dx \sim \int_0^{+\infty} t^{p-2} \sin t \, dt$

0附近 $p-2<-1$ 绝对收敛

$p<0$

+∞附近 $p<2$ 由 Dirichlet 条件收敛

$p<1$ 绝对收敛

扫描全能王 创建

3. $f(x)$在$[a,+\infty)$上单调，连续 且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

附： 设$f(x)>0$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists N=\frac{M}{\varepsilon}+a$ 当$x>N$时

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx<M$

由于$(N-a)f(N)<\int_a^N f(x)dx<M$

$f(x)<f(N)<\varepsilon$ □ 注：未用到连续性

4. $f,g\geqslant 0$ 且$\int_0^{+\infty} g(x)dx$ 收敛。$0<x<y$时 有$f(y)\leqslant f(x)+\int_x^y g(t)\,dt$

证：$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

附：法一：设 $\inf_{x\geqslant 0} f(x)=A$

~~$\forall \varepsilon>0$ 由A的定义 $\exists N_1$ $A\leqslant f(N_2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$~~

$\forall \varepsilon>0$ 由于$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛 $\exists N_1$ 当$x,y\geqslant N_1$时

$$\left|\int_x^y g(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 $\inf_{x\geqslant 0} f(x)=A$

① $\exists x_0\in[0,+\infty)$ $f(x_0)=A$ 则对$\forall x>x_0$, $f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)$ 结论成立

② $\forall x\in(0,+\infty)$ $f(x)>A$

则 $\exists \underset{>N_1}{N_2}$ $A\leqslant f(N_2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x>N_2$

故 $\int_{N_2}^x g(t)\,dt\geqslant f(x)-f(N_2)$

$\Rightarrow A<f(x)\leqslant A+\varepsilon$ 对$\forall x>N_2$成立 故结论成

法二： $f(y)-\int_0^y g(t)dt\leqslant f(x)-\int_0^x g(t)\,dt$ 当$0<x<y$时

故 $F(x)=f(x)-\int_0^x g(t)dt$ 单减 且 $F(x)\geqslant-\int_0^x g(t)\,dt$ 有下界

故 F$+\infty$处极限存在，从而f在$+\infty$处极限存在

扫描全能王 创建

5. $f, g \geq 0$ 且 g 单调递减趋于0. $\int_0^{+\infty} fg\,dx < M$.

证: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 0$

Pf: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1$ $x, y > N_1$ 时

$$\int_x^y fg\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$g(t)\int_0^t f(x)\,dx \leq g(t)\int_0^{N_1} f(t)\,dt + \int_{N_1}^{t} fg\,dx$$

$$\leq M_1 \cdot g(t) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\exists N_2 > N_1$ 当 $t > N_2$ 时 $g(t) < \frac{\varepsilon}{2M_1}$

故 $t > N_2$ 时 $g(t)\int_0^t f(x)\,dx < \varepsilon$ □

6. 证明: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ s.t. $x > N$ 时 $|g(x)| < \varepsilon$ ①

且 $\int_N^{+\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon$ ②

$x > 2N$ 时 $\left|\int_0^x f(t)\,g(x-t)\right| \leq \left|\int_0^N f(t)\,g(x-t)\,dt\right| + \left|\int_N^x f(t)\,g(x-t)\,dt\right|$

$$< \varepsilon\left|\int_0^N f(t)\,dt\right| + \max|g|\,\left|\int_N^x f(t)\,dt\right|$$

①

$$= C\varepsilon$$ □

这里要增加 g 在任意闭区间上黎曼可积的条件.

扫描全能王 创建