数理统计期中

- 总体又称母体：由与所研究的问题有关的所有个体组成

  样本：从总体中抽取的一部分个体
- 样本空间：样本 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 可能取值的全体
- 样本的两重性：既可以看成具体的数，又可以看成随机变量
- 抽样：从总体中按一定方式抽取样本的行为
- 简单随机抽样
  - 代表性：同等机会
  - 独立性：相互独立（每一个个体取值不影响其它）

  ↓获得

  简单随机样本：(1) $X_1,\cdots X_n$ 相互独立

  (2) $X_1,\cdots,X_n$ 同分布

* 有放回的抽样是简单随机抽样，当总体多或抽样少时也可把无放回抽样当成简单随机抽样

- 统计模型：研究该问题时所抽取样本的分布
- 参数：出现在样本分布中的未知常数

  参数空间：参数取值的范围

  样本分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$
- 统计推断：从总体中抽取一定大小的样本去推断总体的概率分布的方法
- 统计量：样本的函数/样本算出的量 $\longrightarrow$ 也有两重性
- 均值 $\bar{X}$，方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$：

  1. $X\longrightarrow Y=aX+b$，则 $\bar{Y}=a\bar{X}+b$，$S_Y^2=a^2S_X^2$

  2. $\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$　3. $E(S^2)=\sigma^2=D(X)$
- k 阶原点矩 $a_{n,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=\overline{X^k}$

  k 阶中心矩 $m_{n,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$
- X 和 Y 的协方差 $S_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$

· 变异系数 $\nu = \frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}$, $\hat{\nu} = \frac{S_n}{\bar{X}}$

· 样本偏度

样本峰度

· 经验分布函数 $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i)$

记 $Y_i = I_{(-\infty,x]}(X_i)$ ，则 $P(Y_i=1)=F(x)$, $P(Y_i=0)=1-F(x)$

且 $Y_1,\cdots,Y_n$ iid $\sim b(1,F(x)) \Rightarrow$ ~~由于~~ $nF_n(x)=\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim b(n,F(x))$

$$P(F_n(x)=\frac{k}{n}) = P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = k) = \binom{n}{k}[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$$

· 格里汶科定理： $P(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x)-F(x)|=0)=1$

（总之，$F_n \xrightarrow{P} F$, $F_n \to F$ a.s. , $F_n \to F$ 一致 a.s.）

正态:

- $X_1,\cdots,X_n$ iid, $X_k\sim N(a_k,\sigma_k^2)$, $T=\sum_k c_k X_k$

$\Rightarrow T\sim N(\mu,\tau^2)$, $\mu=\sum_k c_k a_k$, $\tau^2=\sum_k c_k^2\sigma_k^2$

(Pf: $\varphi_k(t)=E(e^{itX_k})=e^{ia_kt-\frac{1}{2}t^2\sigma_k^2}$

$\Rightarrow \varphi_T(t)=\prod_{k=1}^{n}E[e^{i(c_kt)X_k}]=\prod_{k=1}^{n}e^{ic_ka_kt-\frac{1}{2}c_k^2t^2\sigma_k^2}=e^{i\mu t-\frac{1}{2}t^2\tau^2}$)

Cor: $\bar{X}\sim N(a,\sigma^2/n)$

- $\bar{X}\sim N(a,\sigma^2/n)$, $(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$, $\bar{X}$与S^2独立

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt n} & \cdots & \frac{1}{\sqrt n}\\ & * & \end{pmatrix}$ 正交阵, 令 $Y=AX$, 则 $Y_1=\frac{1}{\sqrt n}\sum X_i=\sqrt n\bar{X}$

$\sum Y_i^2=\sum X_i^2$

$(n-1)S^2=\sum_i(X_i-\bar{X})^2=\sum_i X_i^2-n\bar{X}^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-Y_1^2=\sum_{i=2}^{n}Y_i^2$

$Y_1,\cdots,Y_n$ iid, $Y_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$

$\mu_i=a\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=a\sqrt n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt n}a_{ik}=0 \Rightarrow Y_i\sim N(0,\sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=2}^{n}Y_i^2 \perp Y_1/\sqrt n=\bar{X}$

次序统计量: 对于 $X_1,\cdots,X_n$ iid $\sim F$

- $X_{(m)}\to F_m(x)=P(X_{(m)}\le x)=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}[F(x)]^i[1-F(x)]^{n-i}$

$f_m(x)=\frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}[F(x)]^{m-1}[1-F(x)]^{n-m}f(x)$

- $(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})\to g(y_1,\cdots,y_n)=n!f(y_1)\cdots f(y_n)I(y_1<y_2<\cdots<y_n)$
- $(X_{(i)},X_{(j)}),i<j\to f_{ij}(x,y)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x)]^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j}f(x)f(y)I_{(x<y)}$
- $X_{(j)}-X_{(i)},j>i\to g_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_{ij}(r,z)dz$

$g_{ij}(r,z)$用$f_{ij}(x,y)$转化来 $\begin{cases}r=y-x\\ z=x\end{cases}$

• $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ x,y>0$

$\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$

• Γ分布 $f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{(x>0)}$

• χ分布 $\chi_n^2 \Leftrightarrow \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}I_{(x>0)}$

$n=1,2$  $n\geq 3$ 

$n=2$ $\chi_2^2 \Leftrightarrow exp(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \Gamma(1,\frac{1}{2})$

Actually, $\Gamma(1,\lambda)\Leftrightarrow exp(\lambda)$

• χ_n^2 特征函数为 $\varphi(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

$\xi\sim\chi_n^2 \Rightarrow E(\xi)=n,\ D(\xi)=2n$

$Z_1\sim\chi_n^2,\ Z_2\sim\chi_m^2,\ Z_1\perp Z_2 \Rightarrow Z_1+Z_2\sim\chi_{m+n}^2$

• t分布：$X\sim N(0,1),\ Y\sim\chi_n^2,\ X\perp Y \Rightarrow T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t_n$

$t_n(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},\ -\infty<x<+\infty$

(1、求 $\sqrt{Y/n}$ 密度函数 2、利用 $f_Z(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,g(xt)h(t)dt$ $(Z=\frac{X\sim g(x)}{Y\sim h(x)})$)

• $E(T^r)$ 只有在 $r<n$ 时存在

$n\geq 2$ 时，$E(T)=0$；$n\geq 3$ 时，$D(T)=\frac{n}{n-2}$ ($n=2$ 时方差不存在)

$n=1$ 时，Cauchy分布 $t_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，期望方差均不存在

• F分布：$X\sim\chi_m^2,\ Y\sim\chi_n^2,\ X\perp Y \Rightarrow F=\frac{X/m}{Y/m}\sim F_{m,n}$

• $Z\sim F_{m,n}\Leftrightarrow \frac{1}{Z}\sim F_{n,m}$

$T\sim t_n \Rightarrow T^2\sim F_{1,n}$

$F_{m,n}(1-\alpha)=\frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}$ $\left(P\left(\frac{X/m}{Y/n}<F_{m,n}(1-\alpha)\right)=\alpha=P\left(\frac{Y/n}{X/m}>F_{n,m}(\alpha)\right)\right)$

· 当样本容量 $n\to\infty$ 时一个统计量或推断方法的性质称为大样本性质；固定，小样本性质

· $X_1,\cdots,X_n$ iid $\sim F$　a_F,σ_F 分别总体均值和方差

- Kolmogorov 强大数定律 $\bar{X}\to a_F$ a.s. $(n\to\infty)$
- Lindeberg 中心极限定律：$\sqrt{n}(\bar{X}-a_F)/\sigma_F \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$
- Slutsky 引理：$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X,\ Y_n\xrightarrow{P}c \Rightarrow X_n\& Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X_n\& c$

　　($\&$: $+,-,\times,/$)

· 指数族：$f(x,\theta)=C(\theta)\,e^{\sum_{i=1}^{k}Q_i(\theta)T_i(x)}\,h(x)$

　其中 $C(\theta)>0$，$h(x)>0$，$C(\theta),Q_i(\theta)$ 定义在 Θ 上 $T_i(x),h(x)$ 定义在 $\mathcal{X}$ 上

· 指数族的支撑集 $G(x)=\{x: f(x,\theta)>0\}=\{x: h(x)>0\}$ 与 θ 无关.

　　$\longrightarrow$ 若 $G(x)$ 与 θ 有关，则不为指数族

自然形式 $f(x,\theta)=C^*(\theta)\,e^{\sum_{i=1}^{k}\theta_iT_i(x)}\,h(x)$

自然参数空间 $\Theta^*=\{(\theta_1,\cdots\theta_n): \int_{\mathcal{X}} f(x,\theta)dx<\infty\}$

实际计算：换元、反解、求范围+代入

· 在指数族自然形式下，自然参数空间为凸集

· 充分统计量
- 定义：$P_\theta(X=x|T=t)$ 与 θ 无关 / $f(x|t)=\dfrac{f(x,t)}{f_T(t)}$
- 因子分解：$f(x,\theta)=g(t(x),\theta)\cdot h(x)$

· 若 $T(X)$ 为充分，φ 为单值可逆函数，则 $\varphi(T)$ 亦为充分

· 完全统计量：设 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta)\mid\theta\in\Theta\}$ 为一分布族，Θ 是参数空间.

设 $T=T(X)$ 为一统计量，若对 $\forall$ 满足 $E_\theta[\varphi(T(X))]=0,\forall\theta$ 的 $\varphi(T(X))$

都有 $P_\theta(\varphi(T(X))=0)=1,\forall\theta$，则称 $T(X)$ 是一完全统计量

· T 完全，g 可测 $\Rightarrow$ $g(T)$ 完全

· 判断：

求分布列/密度函数

非指：$E_\theta(\varphi(T))=0$ $\Downarrow$ $\varphi(T)=0$ a.s. P_θ

指：化为自然形式 $\Downarrow$ 有内点

· 证不完全，找 $\varphi(T)$ s.t. $E_\theta(\varphi(T))=0,\forall\theta$，但 $\varphi(T)$ 并不 a.s. $=0$

e.g. $X_i\sim U(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$，$(X_{(1)},X_{(n)})$ 不是完全统计量

$Y_i=X_i-(\theta-\frac{1}{2})\sim U(0,1)$ 与 θ 无关

$Z=X_{(n)}-X_{(1)}=Y_{(n)}-Y_{(1)}$ 与 θ 无关

找常数 a,b, s.t. $P(Z<a)=P(Z>a)>0$

令 $\varphi(t)=\begin{cases}1 & Z<a\\ -1 & Z>a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

则 $E_\theta(\varphi(T))=0,\forall\theta$，但 $\varphi(t)\neq 0$

· 有界完全统计量：对任何满足 $E_\theta(\varphi(T))=0,\forall\theta$ 的有界(a.s.) $\varphi(T)$

均有 $\varphi(T)=0$ a.s. P_θ

· Basu. 若参数>1，记得 fix one.

例题.

1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ iid $\sim b(1,p)$, $0<p<1$, 求 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 分布.

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \bar{X}^2 = \bar{X} - \bar{X}^2 = \bar{X}(1-\bar{X})$$

$$P(\bar{X} = \tfrac{k}{n}) = P(n\bar{X} = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n$$

① $n = 2l+1$:

$$P(S_n^2 = \tfrac{k}{n}(1-\tfrac{k}{n})) = P(\bar{X} = \tfrac{k}{n}) + P(\bar{X} = \tfrac{n-k}{n})$$
$$= \binom{n}{k}\left(p^k(1-p)^{n-k} + p^{n-k}(1-p)^k\right), \quad k=0,1,\cdots,l$$

② $n = 2l$:

$$P(S_n^2 = \tfrac{k}{n}(1-\tfrac{k}{n})) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(p^k(1-p)^{n-k} + p^{n-k}(1-p)^k\right), & k=0,1,\cdots,l-1 \\ \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, & k=l \end{cases}$$

2. $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, $X_1 \perp X_2 \Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \perp Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$

且 $Y_1 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$, $Y_2 \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$

3. $X_1, \cdots, X_m$ iid $\sim N(a, \sigma^2)$, $Y_1, \cdots, Y_n$ iid $\sim N(b, \sigma^2)$ 两组样本独立. $S^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right]$

证明 $(\bar{X}, \bar{Y}, S^2)$ 为充分完全统计量

(注:如果证出来的不完全等同于 $(\bar{X}, \bar{Y}, S^2)$, 再说一句有可测函数)

4. $X_1, \cdots, X_n$ iid $\sim U(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$, $0<\theta<\infty$, 证: $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 充分但不完全

算期望时记得标准化一下.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month

DATE Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

· 点估计：设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从某个总体中抽取的样本，$\hat{g}(X)=\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$ 是样本的函数，用 $\hat{g}(X)$ 作为 $g(\theta)$ 的估计，称为点估计.

· 优良性：

1. 无偏性：$E_\theta(\hat{g}(X))=g(\theta)$，$\theta\in\Theta$

渐近无偏性：$\lim_{n\to\infty} E_\theta(\hat{g}_n(X))=g(\theta)$，$\theta\in\Theta$

无偏性含义：无系统偏差

要求估计量大量重复使用，在多次重复使用下给出接近真值 $g(\theta)$ 的估计

$E(S^2)=\sigma^2$

2. 有效性：$\hat{g}_1(X)$，$\hat{g}_2(X)$ 均为 $g(\theta)$ 的无偏估计，

$D_\theta(\hat{g}_1(X))\leq D_\theta(\hat{g}_2(X))$，一切 $\theta\in\Theta$

且至少存在一个 $\theta\in\Theta$ 使不等号严格成立则

$\hat{g}_1(X)$ 比 $\hat{g}_2(X)$ 有效.

3. 相合性，弱相合：$\forall\theta\in\Theta$ 及 $\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|\hat{g}_n(X)-g(\theta)|\geq\varepsilon)=0$

强相合：$\forall\theta\in\Theta$，$P_\theta(\lim_{n\to\infty}\hat{g}_n(X)=g(\theta))=1$

r 阶矩相合：$\forall\theta\in\Theta$，$r>0$，$\lim_{n\to\infty} E_\theta|\hat{g}_n(X)-g(\theta)|^r=0$

r=2 时，均方相合估计

强 $\Rightarrow$ 弱

r $\Rightarrow$ 弱 ($\forall r$ fixed)

矩估计.

· 样本k阶原点矩 $a_{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$, $k=1,2,\cdots$

样本k阶中心矩 $m_{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$, $k=2,3,\cdots$

· 总体k阶原点矩 $\alpha_k=E(X^k)$

总体k阶中心矩 $\mu_k=E[X-EX]^k$

· α_k用a_{nk}估计 $\longrightarrow$ 特别, $\alpha_1=EX$用$\bar{X}$

μ_k用m_{nk}估计 $\longrightarrow$ 特别, $\mu_2=E(X-EX)^2=D(X)$用S_n^2

· 矩法: $g(\theta)=G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k;\mu_1,\cdots,\mu_s)$, 用$a_{ni},m_{nj}$代替即得$\hat{g}(X)$

$\hat{g}(X)$为$g(\theta)$的矩估计量.

实际操作: 算$E(X),E(X^2),D(X)$[不行再往高了算]

$\longrightarrow$ 反解出$\theta=\cdots$ / $g(\theta)=\cdots$

$\longrightarrow$ 把矩估计量样本代进去.

· 矩估计强相合

$G\in C$

$a_{nk}\xrightarrow{a.s.}\alpha_k$ $\quad m_{nk}\xrightarrow{a.s.}\mu_k$ $\quad G(a_{ni};m_{nj})\xrightarrow{a.s.}G(\alpha_i;\mu_j)$

· 相合渐近正态估计(CAN估计)

$\hat{g}_n(X)$是$g(\theta)$的弱相合估计且 $\exists A_n(\theta),B_n(\theta)$ $(B_n(\theta)>0)$ s.t.

$$\frac{\hat{g}_n(X)-A_n(\theta)}{B_n(\theta)}\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,1)$$

极大似然估计

· 似然函数：对于 $f(x,\theta)$，当 x 固定时把 $f(x,\theta)$ 看成 θ 的函数 $L(\theta,X)$

对数似然函数：$l(\theta,X)=\ln L(\theta,X)$

· 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从参数分布族 $\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ 中抽取的简单随机样本，$L(\theta,X)$ 是似然函数，若 $\exists\ \hat{\theta}^*=\hat{\theta}^*(X)$ 满足

$$L(\hat{\theta}^*,X)=\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta,X),\ x\in\mathcal{X}$$

则称 $\hat{\theta}^*(X)$ 为 θ 的极大似然估计 (MLE)

· 方法：

1. $\dfrac{\partial l(\theta,X)}{\partial\theta_i}=0,\ i=1,\cdots,k$
   - 指数族：只需说解在 $\mathring{\Theta}$ 内
   - 非指数族：还要说只有唯一解

2. 从定义出发（比如 $U(0,\theta)$）

· 极大似然估计可表为充分统计量 $T=T(X)$ 的函数

一致最小方差无偏估计(UMVUE)

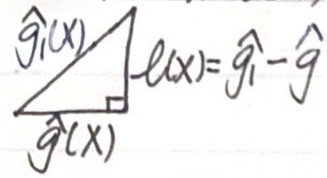
· 均方误差: $E_\theta[\hat{g}(X)-g(\theta)]^2$ (MSE)

· 可估参数: 参数的无偏估计存在
　(函数)(函数)

· $g^*(X)$为$g(\theta)$的一个无偏估计,若对$g(\theta)$的任一无偏估计$\hat{g}(X)$
有 $D_\theta(g^*(X)) \le D_\theta(\hat{g}(X))$, $\forall \theta \in \Theta$
则称$g^*(X)$是$g(\theta)$的UMVUE

· $T=T(X)$充分统计量, $\hat{g}(X)$是$g(\theta)$的一个无偏估计
则$h(T)=E(\hat{g}(X)|T)$是$g(\theta)$的无偏估计,且$D_\theta(h(T)) \le D_\theta(\hat{g}(X))$, $\forall\theta$
等号成立 $\Leftrightarrow$ $\hat{g}(X)=h(T)$ a.s. P_θ

· $\hat{g}(X)$无偏估计, $D_\theta(\hat{g}(X))<\infty$, 对任何满足"$E_\theta l(X)=0, \forall\theta$"的$l(X)$
必有 $Cov(\hat{g}(X), l(X)) = E_\theta(\hat{g}(X) \cdot l(X))=0$, $\forall\theta$
则$\hat{g}(X)$是UMVUE,反之也成立.



Cor: 把X换成$T=T(X)$充分统计量

Steps: 靠灵感得一个无偏估计、算$D_\theta(\hat{g}(X))<\infty$、验证$E_\theta l(X)=0, \forall\theta$
　的$l(X) \perp \hat{g}(X)$ (有时候就直接是$l(X)=0$ a.s.)

(L-S)
· $T=T(X)$充分完全统计量, $\hat{g}(T(X))$无偏,则$\hat{g}(T(X))$是$g(\theta)$的唯一UMVUE

Steps: 1.找无偏估计$\varphi(X)$ 2.找充分完全 3. $E[\varphi(X)|T]=h(T)$
　　1.找充分完全 2.找$\delta(T)$无偏

→ 指数族直接化自然形式

C-R下界 $\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$, 其中 $I(\theta)=E_\theta\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]^2$

效率 $e_g(\theta)=\frac{(g'(\theta))^2/nI(\theta)}{D_\theta(\hat{g}(X))} \in (0,1]$

↓
有效估计

将1,2,⋯,2m配为m对的方法数

$X \sim N(0,1)$

$EX^{2n-1}=0 \quad E|X|^{2n-1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n-2)!! \quad EX^{2n}=(2n-1)!!$

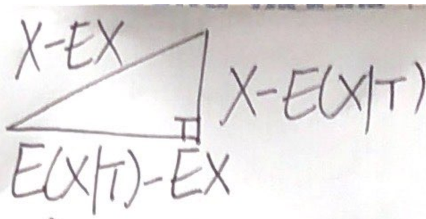
$P=\begin{pmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$N(\mu,\Sigma) \rightarrow \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}|\Sigma|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

$\chi_n^2 \longleftrightarrow \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) \qquad X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$

$\exp(\lambda) \longleftrightarrow \Gamma(1,\lambda) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n\alpha,\lambda)$

$\psi(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-\alpha} \qquad \bar{X} \sim \Gamma(n\alpha,n\lambda)$



求证：$Cov(E(X|T)-EX, X-E(X|T))=0$.

<u>Proof</u>: $Cov(E(X|T)-EX, X-E(X|T))$

$$= \cancel{Cov}\, E[(E(X|T)-EX)\cdot(X-E(X|T))]$$
$$= E\{E[(E(X|T)-EX)\cdot(X-E(X|T))|T]\}$$
$$= E\{(E(X|T)-EX)\cdot \underbrace{E[(X-E(X|T))|T]}_{=0}\}=0$$

复习：1. 概念能默写（各种各样的概念，包括CAN、强/弱相合性等.

2. 矩估计、极大似然估计会算

3. 二元正态密度函数要知道

4. UMVUE一定要会算（例题习题都得会）.
<其中涉及条件概率/条件期望时要会算，
二元正态取条件可以用结论（见习题课讲义week4最下面）>

5. 充分/完全 会判断&证明（包括不完全的证明） 尤其是指数族的自然形式 内点、

6. 用Basu记得：如果参数多，先fix无关的.

7. C-R下界定义要知道（让你算可能性不高）.

8. 细心刷掉习题&例题.