6. Fourier 分析.

6.1 Fourier 级数.

△ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

△若在 $L^2[a,b]$ 中展开,则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}x$$

其中 $\begin{cases} a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx \\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx \end{cases}$

$[0,l]$ 上

△正弦级数: $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

余弦级数: $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$, $b_n = 0$.

△Bessel 不等式: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$

Parseval 等式: 若 $\|S_n f - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, 则上式中等号成立.

推广: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k)$

应用: 求级数和. (求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$, 考虑对 $|x|$ 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 上展开).

△Riemann-Lebesgue 引理: $f \in L^1[-\pi,\pi] \Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$.

(证明是实变函数内容,无需掌握).

6.2 Fourier 变换.

1° $\begin{cases} F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx \\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda \end{cases}$

3° 余弦变换 $\begin{cases} F_c(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \\ f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda \end{cases}$

2° 正弦变换, $\begin{cases} F_s(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \\ f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \end{cases}$

△性质：1. $F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$

2. $F[f(x)e^{-i\lambda_0 x}]=F[\lambda+\lambda_0]$

3. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (0\le i\le k)}} f^{(i)}(x)=0$，则 $F[f^{(k)}(x)]=(i\lambda)^k F[\lambda]$，$k=0,1,\cdots$

4. $F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$.

本章计算题：

1. Fourier展开：算就完了. 若还要说明收敛性，则利用书上定理.

2. 利用Parseval等式及Fourier展开算级数和.
(比如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$)
(x^2，$[-\pi,\pi]$)　　　(习题).

3. Fourier变换及Fourier积分
(变过去)　　　(变回来，但不一定与原函数一样).

你应该记住并会推：$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$

$$=Re\left[\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}e^{-i\beta x}dx\right]$$

$$=Re\left[\frac{1}{\alpha+i\beta}\right]=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

· 掌握 $f(x)=e^{-\beta x}$，$x\geq 0,\beta>0$，则 $g(x)=e^{-\beta x}\sin\omega_0 x\,/\,e^{-\beta x}\cos\omega_0 x$
都可用频移性直接推，比如 $e^{-\beta x}\sin\omega_0 x=\frac{1}{2i}e^{-\beta x}(e^{i\omega_0 x}-e^{-i\omega_0 x})$

· 掌握 $f(x)=e^{-ax^2}$，$a>0$ 的Fourier变换.

$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx$，$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx$

$$=\frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-ax^2})'e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{i}{2a}(i\lambda)\cdot F(\lambda)=\frac{-\lambda}{2a}F(\lambda)$$

$\Rightarrow F(\lambda)=C\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$ 而 $C=F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\therefore F(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$

7. 广义积分和含参变量积分.

7.1 广义积分收敛性判别.

①比较判别法.(参照函数 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$. $\int_0^a\frac{1}{x^p}dx$)

②等价量法.

③ Cauchy 准则.

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X, \forall A', A''>X$, 有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon$

(常用于证明题;常用来证不收敛).

(由 $\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx \geq \left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|$ 和:绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛)

④ Dirichlet: (i) $\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界 (注意 $\left|\int_a^b \sin x\,dx\right|\leq 2$, $\left|\int_a^b \cos x\,dx\right|\leq 2$)

(ii) $g(x)\downarrow 0$.

⑤ Abel: (i) $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 (ii) $g(x)$ 单调有界.

☆ $a>0$, 对于 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$, 有 $\begin{cases}\text{条件收敛}, & 0<p\leq 1\\ \text{绝对收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & p\leq 0\end{cases}$

☆ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\not\Rightarrow f(x)\xrightarrow{x\to+\infty}0$

7.2 第二积分中值定理.

稍微背一下,证明的话,会是最好的,不会应该也没事.

略.

7.3 含参变量积分.

分常义和广义,一般考广义,此时需证明一致收敛才能交换运算顺序.一般步骤:①求导/化成积分形式 ②证一致收敛 ③交换运算顺序并计算.

记住: $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u du$; $\ln(1+x)=\int_0^1\frac{x}{1+ux}du$

$(e^{-ax}-e^{-bx})/x=\int_a^b e^{-ux}du$

※一致收敛判别

① Cauchy 收敛准则:

$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X=X(\varepsilon), \forall A', A''>X, \forall u\in[\alpha,\beta], \left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right|<\varepsilon.$

② Weierstrass 判别法 [首选].

$|f(x,u)|\le p(x)$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 且 $\int_a^{+\infty} p(x)dx$ 收敛

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

③ Dirichlet: (i) $\int_a^{A} f(x,u)dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界

(ii) $g(x,u)$ 关于 x 单调且一致趋于 0.

(x 充分大时成立即可)

④ Abel: (i) $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛

(ii) $g(x,u)$ 关于 x 单调且一致有界.

8. Euler 积分.

$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0)$

$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x,y>0).$

性质: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ · $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ · $\Gamma\in C^{\infty}(0,+\infty)$

· 余元公式: $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

· $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

· 掌握: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\cos^b x\,dx\ (a,b>0) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^c x\,dx\ (|c|<1)$