第八周作业

习题3.3.

2. ~~$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$~~

$\because F(1)=F(2)=0$ $\therefore$ 由Fermat 定理 $\exists\ t\in(1,2)$ s.t $F'(t)=0$.

又 $\because F'(1)=0$ $\therefore \exists\ x_0\in(1,t)$ s.t $F''(x_0)=0$ □

4.(1) $\because a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$ $(\xi\in(a,b))$

$\therefore nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$ □

(3) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a\ln a+b\ln b)>\frac{a+b}{2}\ln(\frac{a+b}{2})$

记 $f(x)=x\ln x$ 则 $f'(x)=\ln x+1$ $f''(x)=\frac{1}{x}>0$.

$\therefore f$ 为严格凸函数

$\therefore \frac{1}{2}(f(a)+f(b))>f(\frac{a+b}{2})$ □

7. 不妨设 $f(0)=f(1)=0$. $f(x_1)=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. $f(x_2)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)$

则: ①若 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

则 $f\equiv0$. 显然成立.

②若 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 不全为0.

由 扫描全能王 扫描创建

不妨设 $f(x_1)\neq 0$ 则 $f(x_1)-f(x_2)=|f'(\xi)||x_1-x_2|<|x_1-x_2|$ (*).

①. $x_1<x_2$. 则 $f(1)-f(x_2)=|f'(\xi_2)||1-x_2|\leq|1-x_2|$.

$f(x_1)-f(0)\leq|x_1|$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)\leq|x_1|+|1-x_2|=1-(x_1+x_2)$.

若. $f(x_1)-f(x_2)\geq\frac{1}{2}$ 则

$x_1+x_2\leq\frac{1}{2}$ 且. $x_2-x_1\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}$, $x_1=0$. 与 $f(x_1)\neq 0$ 矛盾!

②. $x_1>x_2$ 则 $f(x_1)-f(1)<1-x_1$.

$f(0)-f(x_2)\leq x_2$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<1-x_1+x_2$.

再由(*)式 知. $f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{2}$ ▨

10. (1). $f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$. ($\xi\in(x,x+1)$).

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=0$.

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. (stolz不可).

13. $\because \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$. ($\xi\in(x_0,x)$).

$\therefore$ 左 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)$. ▨

15. 书上Thm.

18. $\because f(x)-f(0)=f'(\xi)x<f'(x)\cdot x$. ($x>0$).

$\therefore \left(\frac{f}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}(f'x-f)>0$. ▨ (未说 f 二阶可导).

20. 令 $F(x)=(f(x)-f'(x))e^x$.

则 $F'(x)=(f'(x)-f''(x))e^x$. ▨

由 扫描全能王 扫描创建

习题3.4

3. 取 $g(x)=x^2$，则由Cauchy中值定理 $\exists\, \xi\in(a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}. \quad \square$$

4. 取 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$，则由Cauchy中值定理 $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t.

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

5. (1). $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$

(3). -4.

(5). 1　　(7). 0.　　(9). 0.

(11). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2\arctan x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)x-\arctan x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+1-\frac{1}{1+x^2}}{6x^2}=\frac{2}{3}.$

(13). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{(2x-\pi)\ln\tan x}$

而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{(2x-\pi)^2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x}=0.$

(15). $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}=-2.$

习题3.5

1. 归纳法. $n=1,2$ 时显然成立. 设 $n\le k$ 时命题成立.

设 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{k+1}=1$.

取 $\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}$　$(i=1,\cdots,k)$.

则 $f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)=f\left((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)$

$\le(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$

$\le\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$　$\square$

由 扫描全能王 扫描创建

3. easy

5. 设 f 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处 设有 $f'(x)>0$. $(x_1<x_2<\cdots<x_n)$

则 $f'(x)$ 在每个 $[x_i, x_{i+1}]$ 上递增 $\therefore f'(x)$ 在 I 上递增 $\Rightarrow f$ 为凸的.

6. 不妨设 f 在 x_0 左侧凸 右侧凹

则 $f''(x)\geq 0$. $(x<x_0)$ $\quad f''(x)\leq 0$. $(x>x_0)$

又 $\because f''(x)$ 连续 $\therefore f''(x_0)=0$.

7. 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 则 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$.

$\therefore \exists\, \delta>0$ s.t.

$\therefore f''(x)>0$ $(x\in(x_0, x_0+\delta))$ $\quad f''(x)<0$ $(x\in(x_0-\delta, x_0))$.

$\therefore x_0$ 为一拐点

综合习题:

4. 取 $F(x)=e^x f(x)$.

6. $\because f(0)=f(1)$ $\therefore \exists\, \eta\in(0,1)$ s.t. $f'(\eta)=0$.

取 $g(x)=(1-x)^2 f'(x)$. 则 $g(\eta)=g(1)=0$.

$\therefore \exists\, \xi\in(\eta, 1)$. s.t. $g'(\xi)=0 \Longrightarrow f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

8. (1) 若 $f(x)>0$. $(\forall x\in[0,1])$. 则取 $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x$.

有 $g(0)=g(1)=1 \Rightarrow \exists\, \xi\in(0,1)$ s.t. $g'(\xi)=-\frac{f'+f^2}{f^2}=0$.

$\therefore f'(\xi)+f^2(\xi)=0$.

(ii) 若 $f_{min}=0$. 则 设 $f(x_0)=f_{min}$. 此时 $f^2(x_0)+f'(x_0)=0$.

(iii) 若 $f_{min}<0$ 则 设 $f(x_0)=f_{min}$.

取 $a=\sup\limits_{x\leq x_0}\{f(x)\geq 0\}$. $\quad b=\inf\limits_{x\geq x_0}\{f(x)\geq 0\}$

则 $f(a)=f(b)=0$. 且 $a<x_0<b$.

对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)<0$. 取 $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x$. $(x\in(a,b))$.

有 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to b}g(x)=-\infty$.

$\therefore \exists\, c, d\in(a,b)$ s.t. $g(c)=g(d)$. $\therefore \exists\, g'(\xi)=0$. $(\xi\in(c,d))$ $\square$

由 扫描全能王 扫描创建

补充题.

1. $\{a_n\}$ 由 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $(n\geq 1)$ 定义. 判断 $\{\frac{a_n}{\sqrt{n}}\}$ 是否收敛.

首先 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}>0$. $(a_n\uparrow)$.

且 $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ (否则 取极限有 $a=a+\frac{1}{a}$ 矛盾!).

$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=2+\frac{1}{a_n^2}\to 2$.

由 stolz. $\frac{a_n^2}{n}\to 2 \Longrightarrow \frac{a_n}{\sqrt{n}}\to\sqrt{2}$.

2. 设 $a_1=1$, $a_2=2$. $a_{n+1}=\frac{3n+1}{2n}a_n-\frac{n-1}{2n}a_{n-1}$. $(n=2,3,\cdots)$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

记 $b_n=a_n-a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$.

则 $2n\,b_{n+1}=(n-1)b_n \Longrightarrow b_{n+1}=\frac{n-1}{2n}b_n<\frac{1}{2}b_n<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}b_2=\frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore a_{n+p}-a_n=b_{n+p}+\cdots+b_{n+1}<(\frac{1}{2^{n+p-2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})$

$<\frac{1}{2^{n-2}}$

$\therefore$ 由 Cauchy 收敛原理得证. □

3. 证明: 多项式 $p(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ 当n为偶数时无零点, 当n为奇数时恰有一个零点.

$p'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$ $(x\neq 1)$.

① n为偶数 显然 $\forall x\geq 0$. $p(x)>0$. 下面只考虑 $x<0$.

则 $p'(x)>0 \Longleftrightarrow x^n<1 \Longleftrightarrow -1<x<0$.

$\therefore p(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单减 $(-1,0)$ 上单增.

又$\because p(-1)=1-1+\frac{1}{2}-\cdots+\frac{1}{n}>0$. $\therefore p(x)$ 无零点

② n为奇数 $p'(x)>0$ $(\forall x<0)$.

于是 $p(x)$ 单增 且 $p(-\infty)<0$ $p(+\infty)>0$.

$\therefore$ 有唯一零点

4. 证明对 $\forall n\in N^+$ $x+x^n=1$ 恰有一个正根 x_n. 进一步证明 x_n 收敛 且求极限.

$\begin{cases} x_n+x_n^n=1 \\ x_{n+1}+x_{n+1}^{n+1}=1 \end{cases}$ $\because$ 若 $x_{n+1}\leq x_n$ 有 $x_{n+1}^{n+1}\leq x_n^{n+1}<x_n^n$

$\therefore 1=x_{n+1}+x_{n+1}^{n+1}<x_n+x_n^n=1$ 矛盾.

$\therefore x_{n+1}>x_n \Longrightarrow x_n$ 有极限.

由 扫描全能王 扫描创建

记 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 则 $x_0\leq 1$. 若 $x_0<1$

则 $x_n\leq x_0$. $\therefore 1=x_n+x_n^n\leq x_0+x_0^n$.

$\therefore$ 取极限 $(n\to\infty)$ 有 $x_0\geq 1$ 矛盾!

$\therefore x_0=1$. $\square$

5. 设 $f(x)$ 为定义在实轴 R 上的函数. 且对 $\forall x,y$ 有 $|xf(y)-yf(x)|\leq M|x|+M|y|$. 其中 $M>0$. 求证.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛. (2) $\exists$ 常数 α s.t. 对 $\forall x$ 有 $|f(x)-\alpha x|\leq M$.

(1). $\forall x,y\neq 0$ 有 $\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\leq M\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$. $(*)$.

$\therefore$ 由 Cauchy 收敛原理 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛

(2). 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$. 在 $(*)$ 式中令 $y\to+\infty$.

有 $\left|\alpha-\frac{f(x)}{x}\right|\leq\frac{M}{|x|}$. $\Rightarrow$ $M\geq|\alpha x-f(x)|$. $\forall x\neq 0$.

而在原式中取 $y=0$ 可知 $|xf(0)|\leq M|x|\Rightarrow$ $M\geq|f(0)|$.

$\therefore M\geq|\alpha x-f(x)|$ $\forall x$ 均成立. $\square$

6. $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$. 证明 $\frac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}\to 0$.

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$. $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in N^*$ s.t. 对 $\forall n>N$ 有 $\left|\frac{a_n}{n}\right|<\varepsilon$.

而 $\left|\frac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}\right|\leq\left|\frac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq N}\{a_k\}\right|+\left|\frac{1}{n}\max\limits_{N<k\leq n}\{a_k\}\right|$.

$$<\frac{1}{n}\left|\max_{1\leq k\leq N}\{a_k\}\right|+\left|\frac{1}{n}\varepsilon n\right|.$$

$$\to\varepsilon.$$

$\therefore\frac{1}{n}\max\limits_{1\leq k\leq n}\{a_k\}\to 0$. $\square$

由 扫描全能王 扫描创建

7. $f(x)$在0附近有2阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$. 求证，对$\forall x$. 若$|x|$充分小时，则∃唯一$\theta\in(0,1)$ s.t. $f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$. 并求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

pf: 不妨设 $f''(0)>0$. 则 $\exists\ \delta>0$ s.t. $\forall x\in(-\delta,\delta)$ 有 $f''(x)>0$.

θ由中值定理可知存在.

若$\exists\ \theta_1,\theta_2\in(0,1)$ s.t. $f(x)-f(0)=f'(\theta_1 x)x=f'(\theta_2 x)x$.

则 $f'(\theta_1 x)=f'(\theta_2 x)$. 又$\because f''(x)>0 \Rightarrow \theta_1=\theta_2$. $\therefore\theta$唯一!

而 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$.

$\therefore$ ~~$f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2=f'(\theta x)x$~~

$\therefore$ $f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=f'(\theta x)x$.

$\therefore$ $\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}=\frac{f''(0)}{2\theta}+\frac{o(x)}{x\theta}$.

令$x\to 0$有 $f''(0)=\frac{f''(0)}{2\theta}\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}$. $(x\to 0)$. ☐

由 扫描全能王 扫描创建