6. 马氏链

· 可以描述很多物理、生物经济、社会现象

6.1 马氏链定义

· 例1. 赌徒破产

规则: 每次赌博赌徒赢 RMB 1 $p=0.4$ 输 RMB 1 $p=0.6$

每次赌博行为相互独立

策略: 赌资达到 RMB N 不玩

赌资达到 RMB 0 不让玩

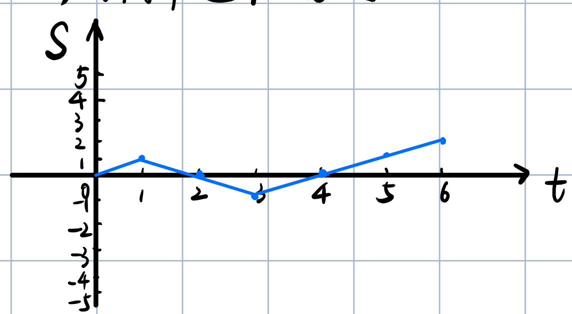
记 X_n 为第 n 次赌博之后赌徒的赌资

马氏性: 若已知 X_n, 则 X_{n+1} 只取决于 X_n, 与 $X_0, \cdots, X_{n-1}$ 无关

验证马氏性: 假设 $X_n=i$, $0<i<N$.

$$P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i, \cdots, X_1=i_1, X_0=i_0)=0.4=P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i)$$

· 例2. 简单随机游走



$S_0=0$

$S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$, $n\geq 1$

X_n r.v. $\begin{cases}1 & p\\ -1 & q=1-p\end{cases}$ $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立同分布

$\Longrightarrow S_n=S_0+\sum_{i=1}^n X_i$

S_n 三个性质: ① 空间齐次性: $P(S_n=j \mid S_0=a)=P(S_n=j+b \mid S_0=a+b)\left(=P\left(\sum_{i=1}^n X_i=j-a\right)\right)$

② 时间齐次性: $P(S_n=j \mid S_0=a)=P(S_{n+m}=j \mid S_m=a)\left(=P\left(\sum_{i=1}^n X_i=j-a\right)\right)$

③ 马氏性: $P(S_{m+n}=j \mid S_m, S_{m-1}, \cdots, S_0)=P(S_{m+n}=j \mid S_m)$, $\forall n\geq 0, m\geq 0$

(Pf: $RHS=P(S_{m+n}-S_m=j-y_m, S_m=y_m)/P(S_m=y_m)$

$=P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-y_m, S_m=y_m\right)/P(S_m=y_m)$

$=P\left(\sum X_i=j-y_m\right)\overset{同理}{=}LHS$)

· 定义: 离散时间、离散状态马氏链

· S ~ 状态空间 ~ 所有可能发生的状态 ~ 可数集 ~ $N=|S|$

• $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $X=\{X_0,X_1,\cdots\}$ r.v.s $X_i(\omega)\in S$, $\forall i,\omega\in\Omega$

• 若X满足马氏性 $\Big(P(X_{n+1}=j|\underbrace{X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0}_{\text{任一可能发生的事情.}})=P(X_{n+1}=j|X_n=i)\Big)$ (1)

$\forall n\geq 1,\ \forall j,i,i_{n-1},\cdots,i_0\in S$

则称X离散时间离散状态马氏链

• 转移概率 (Transition probabilities) $P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P_{ij}(n,n+1)$

• 时间齐次 $P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_1=j|X_0=i)\triangleq P_{ij}$ 或 $P(i,j)$

• 转移矩阵 $\mathbb{P}=(P_{ij})_{|S|\times|S|}$

• 以后提到马氏链，总是假设马氏链为时间齐次的.

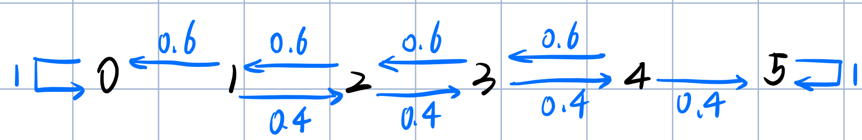
$(\underbrace{\Omega,\mathcal{F},P}_{\text{计算机硬件}},\underbrace{S,\mathbb{P}}_{\text{win系统}})$ —— 马氏链的基本信息

回到例1. $S=\{0,1,2,\cdots,N\}$

$0<i<N$, $P(i,i+1)=0.4$, $P(i,i-1)=0.6$, $P(i,j)=0\ (|i-j|\neq 1)$

$P(0,0)=1$, $P(N,N)=1$

若$N=5$,则
$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0.6&0&0.4&0&0&0\\0&0.6&0&0.4&0&0\\0&0&0.6&0&0.4&0\\0&0&0&0.6&0&0.4\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$



• $P(X_{n+m}=s|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)=P(X_{n+m}=s|X_n=i)$, $\forall m,n\geq 0,\forall s,i_0,\cdots,i_{n-1},i\in S$ (2)

• $\forall 0\leq n_1<n_2<\cdots<n_k\leq n$, $P(X_{n+1}=s|X_{n_k}=i_{n_k},\cdots X_{n_2}=i_{n_2},X_{n_1}=i_{n_1})=P(X_{n+1}=s|X_{n_k}=i_{n_k})$ (3)

• 注1. $P(X_3=i_3,X_2=i_2)=\sum_{i_1\in S}P(X_3=i_3,X_2=i_2,X_1=i_1)$ $\forall$ r.v.s X_1,X_2,X_3

作业 注2. $P(X_4=j,X_3=i,X_2\in A,X_1\in B|X_0=k)=P(X_4=j|X_3=i)P(X_3=i,X_2\in A,X_1\in B|X_0=k)$

$\forall A,B,k,i,j$

注3: $P(X_3=j\mid X_2=i, X_1\in A, X_0\in B)=P(X_3=j\mid X_2=i)$

定理: (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3)

证明: "(1) $\Rightarrow \forall A=\{X_{n_1}=i_{n_1}, X_{n_2}=i_{n_2}, \cdots, X_{n_k}=i_{n_k}, n_1<n_2<\cdots<n_k<n\}$

$P(X_{n+1}=s\mid X_n=i, A)=P(X_{n+1}=s\mid X_n=i)$".

$$LHS=\frac{P(X_{n+1}=s, X_n=i, A)}{P(X_n=i, A)}$$

$$\overset{\text{注1}}{=}\frac{\sum\limits_{x_l\in S}P(X_{n+1}=s, X_n=i, A, \overbrace{X_l=x_l, l<n\text{且}l\notin\{n_1,\cdots,n_k\}}^{\text{记为}H})}{P(X_n=i, A)}$$

$$=\sum_{x_l\in S}\frac{P(X_{n+1}=s, X_n=i, A, H)}{P(X_n=i, A, H)}\cdot\frac{P(X_n=i, A, H)}{P(X_n=i, A)}$$

$$\overset{(1)}{=}\sum_{x_l\in S}P(X_{n+1}=s\mid X_n=i)\cdot\frac{P(X_n=i, A, H)}{P(X_n=i, A)}$$

$$=P(X_{n+1}=s\mid X_n=i)$$

作业 $\Big\{$ "(1) $\Rightarrow P(X_{n+1}=s\mid X_{n-1}=i, A)=P(X_{n+1}=s\mid X_{n-1}=i)$

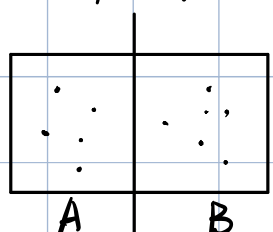
$A=\{X_{n_1}=i_{n_1}, \cdots, X_{n_k}=i_{n_k}\}$, $n_1<n_2<\cdots<n_k<n-1$"

上面证了 $n_k=n, n-1$ 情形, 自然可证到任意 n_k, 故 (1) $\Rightarrow$ (3) 得证.

·例3. Ehrenfest chain

作业

用于研究薄膜间分子扩散



分子总数为 $2N$

$A: k \quad B: 2N-k$

· 扩散规则: 从 $2N$ 个分子中每次"等概率选取一分子, 放入另一罐子中

· 记 $A\sim Y_n$, $B\sim 2N-Y_n$ 个

记 $X_n\triangleq Y_n-N$, 则 $\{X_n\}$ 马氏链

①$S=?$ ②$P_{ij}=?$ ③当$N=2$时, $\mathbb{P}=?$

- $\mathbb{P}$: (a) $P_{ij}\geq 0$ (b) $\sum_{j\in S}P_{ij}=1, \forall i\in S$ (从i出发,肯定会转移到某个状态j)

满足(a)(b)的矩阵称随机矩阵(跟刘党政讲的不是一个随机矩阵)

任一$\mathbb{P}$+(a)(b) $\xrightarrow{\text{构造}}$ 以$\mathbb{P}$为转移矩阵的马氏链

- 例4. Weather chain

X_n~第n天某地的天气情况~1=阴天, 2晴天

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{array}$$

问题:长时间晴天占有的比例?

- 例5. Social Mobility

X_n~一个家庭第n代的社会地位~1=低 2=中 3=高

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

问题:三类家庭稳定占有率?

- 例6. Brand Preference

1,2,3种品牌的产品 X_n表示第n次购买的产品品牌

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

问:三种品牌产品长期市场占有率

作业·例7. 库存链

- 库存策略:当库存量在当天下班时小于等于ℓ时,第二天上班前补充到L.
- X_n~第n天下班时的库存量

D_{n+1}~第n+1天顾客需求量 $D_1, D_2, \cdots$ iid

- $l=1,\ L=5$

k	0	1	2	3
$P(D_{n+1}=k)$	0.3	0.4	0.2	0.1

- X_n: $S=?$ $\mathbb{P}=?$

- 例8. Repair chain

一台机器 ~ 3个核心部件，2个或3个部件工作，机器可工作.

2个损坏就需要更换，第二天正常工作.

1, 2, 3 核心部件在一天中损坏可能性为 0.01, 0.02, 0.04

作业 ← S? $\mathbb{P}$?

问题：机器工作1800天，需核心部件1, 2, 3各多少？

- 对于例5：

- 问题1：已知A的父母为2，A为3，A的孩子为1的概率？

$$P(X_2=1,X_1=3\mid X_0=2)=\frac{P(X_2=1,X_1=3,X_0=2)}{P(X_1=3,X_0=2)}\cdot\frac{P(X_1=3,X_0=2)}{P(X_0=2)}$$

$$=P(X_2=1\mid X_1=3,X_0=2)\cdot P(X_1=3\mid X_0=2)$$

$$=P_{31}\cdot P_{23}=0.2\times0.2=0.04$$

- 问题2：已知A的父母为2，A的孩子为1的概率？

$$P(X_2=1\mid X_0=2)=\sum_{k=1}^{3}P(X_2=1,X_1=k\mid X_0=2)=\sum_{k=1}^{3}P_{2k}P_{k1}$$

- 同样，$P(X_2=j\mid X_0=i)=\sum_{k=1}^{3}P_{ik}P_{kj}$

- $\mathbb{P}=(P_{ij})_{|S|\times|S|}$ $\quad P_{ij}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ 时间齐次　一步转移矩阵

→ 一般情况 $\quad P_{ij}(m,m+n)\triangleq P(X_{m+n}=j\mid X_m=i)$

$\mathbb{P}(m,m+n)=(P_{ij}(m,m+n))_{|S|\times|S|}$ $\quad$ n步转移矩阵

$\xrightarrow{\text{时间齐次}}$ $\mathbb{P}(m,m+1)=\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(m,m+n)=\mathbb{P}^n$

- Chapman-Kolmogorov 方程(CK方程)

$$P_{ij}(m,m+n+r)=\sum_{k\in S}P_{ik}(m,m+n)P_{kj}(m+n,m+n+r)$$

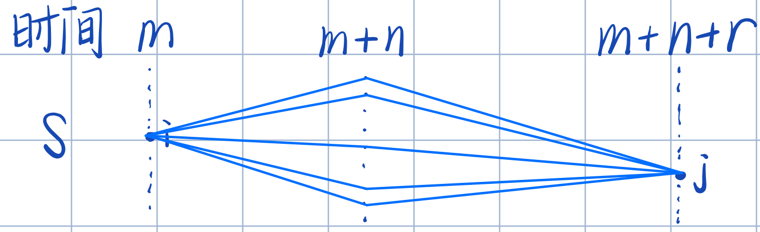
or $\mathbb{P}(m,m+n+r)=\mathbb{P}(m,m+n)\mathbb{P}(m+n,m+n+r)$

注:对一般马氏链均成立(不管是否有时间齐次性)

$\xrightarrow{\text{时间齐次}}$ $\mathbb{P}(m,m+n)=\mathbb{P}(m,m+1)\mathbb{P}(m+1,m+n)=\cdots=\mathbb{P}^n$

故简记 $\mathbb{P}(m,m+n)=\mathbb{P}_n=(P_{ij}(n))_{|S|\times|S|}$

Pf:



$$\begin{aligned}P_{ij}(m,m+n+r)&=P(X_{m+n+r}=j\mid X_m=i)\\&=\sum_{k\in S}P(X_{m+n+r}=j,X_{m+n}=k\mid X_m=i)\\&=\sum_{k\in S}\frac{P(X_{m+n+r}=j,X_{m+n}=k,X_m=i)}{P(X_{m+n}=k,X_m=i)}\cdot\frac{P(X_{m+n}=k,X_m=i)}{P(X_m=i)}\\&=\sum_{k\in S}P_{kj}(m+n,m+n+r)P_{ik}(m,m+n)\end{aligned}$$

- 例. Gambler's Ruin. $N=4$

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}0&1&2&3&4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&&&&\\0.6&&0.4&&\\&0.6&&0.4&\\&&0.6&&0.4\\&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^n=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}0&1&2&3&4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&&&&0\\57/65&&&&8/65\\45/65&&0&&20/65\\27/65&&&&38/65\\0&&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

- 给定 X_0 的条件下 $\xrightarrow{\text{CK方程}}$ X_n i.e. $P(X_n\mid X_0)$

记 $\mu_i^{(n)}\triangleq P(X_n=i)$ X_n的质量函数

$\mu^{(n)}\triangleq(\mu_i^{(n)},i\in S)$ X_n的分布,行向量

引理: $\mu^{(m+n)}=\mu^{(n)}\mathbb{P}_m$, $\mu^{(n)}=\mu^{(0)}\mathbb{P}_n$

Pf: $\mu_i^{(m+n)}=P(X_{m+n}=i)=\sum P(X_n=i)P(X_{m+n}=j\mid X_n=i)$

$$= \sum_{i\in S} \mu_i^{(n)} P_{ij}(m) = (\mu^{(n)} \mathbb{P}_m)_j$$

- 由一步转移概率$\mathbb{P}$+初始时刻X_0的分布$\mu^{(0)} \Rightarrow$马氏链的分布
- 若$\mu_{i_0}^{(0)}=1 \sim P(X_0=i_0)=1$，则$\mu^{(m)}=(P_{i_0 i}(m), i\in S)$

例. 简单随机游走

$S=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ $\mathbb{P}$: $P_{ij}=\begin{cases} p & ,j=i+1 \\ q=1-p & ,j=i-1 \\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$

$P_{ij}(n)=?$ $\binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}}(1-p)^{\frac{n-j+i}{2}}$，$n+j-i$为正偶数时.（否则为0）

例. Bernoulli过程 $X=\{X_0,X_1,X_2,\cdots\}$

$S=\{0,1,2,\cdots\}$ $X_n\sim$抛n次硬币出现正面的次数 $X_0=0$.

$P(X_{n+1}=s+1|X_n=s)=p$，$P(X_{n+1}=s|X_n=s)=1-p$，$\forall n\geq 0$，$p\in[0,1]$

$P(X_{m+n}=j|X_m=i)=?$ $\begin{cases}\binom{n}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{n-j+i} & ,0\leq j-i\leq n \\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$

作业 记$Y_n=X_n|10$，问$\{Y_0,Y_1,\cdots\}$是不是马氏链. 若是，写出S，$\mathbb{P}$.

例. 满足CK方程的随机过程，一定是马氏链？

否. 反例：$Y_1,Y_3,Y_5,\cdots$ iid r.v.

$P(Y_{2k+1}=1)=P(Y_{2k+1}=-1)=\frac{1}{2}$，$k=0,1,2,\cdots$

定义$Y_{2k}=Y_{2k-1}Y_{2k+1}$，$k=1,2,\cdots$

作业 证明：$\{Y_1,Y_2,\cdots\}$满足CK方程，但非马氏链.

可以证明$Y_2,Y_4,\cdots$ iid 分布同奇数列 $S=\{1,-1\}$

$Y_1,Y_3,\cdots$ 两两独立

$P_{ij}(n)=P(Y_{m+n}=j|Y_m=i)=P(Y_{m+n}=j)=\frac{1}{2}$，$\forall m,n\ \forall i,j=\pm1$

$\therefore$ CK方程 $P_{ij}(m,m+n+r)=\frac{1}{2}=\sum_{k\in S}P_{ik}(m,m+n)P_{kj}(m+n,m+n+r)$

但$Y=\{Y_1,Y_2,\cdots\}$不是马氏链：$P(Y_{2k+1}=1|Y_{2k}=-1,Y_{2k-1}=1)=0\neq\frac{1}{2}=P(Y_{2k+1}=1|Y_{2k}=-1)$

3.12 作业：令$Z_n=(Y_n,Y_{n+1})$，证明：$Z=\{Z_n,n=1,2,\cdots\}$为（非时齐）马氏链

写出状态空间和一步转移概率

6.2 状态分类

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(S, \mathbb{P})$ $X=\{X_0, X_1, \cdots\}$

- 若从状态 i 出发，在某个 $n\geq 1$ 时刻，肯定回到状态 i，称状态 i 为<u>常返态</u>(persistent/recurrent)

  i.e. $P(\exists n\geq 1, X_n=i | X_0=i)=1$

- 若从状态 i 出发，以正概率不会回到状态 i，称状态 i 为<u>瞬时态</u>(transient)

  i.e. $P(\forall n\geq 1, X_n\neq i | X_0=i)>0$

  i.e. $P(\exists n\geq 1, X_n=i | X_0=i)<1$

- 任一状态，要么瞬时要么常返
- 之后可以证明常返态 i ~ 从 i 出发的样本轨道以概率1经过 i 无穷多次

  瞬时态 i ~ 从 i 出发的样本轨道以概率1经过 i 有限多次

  i.e. $\forall \omega\in\Omega, \exists N(\omega), \forall n>N(\omega), X(n,\omega)\neq i$

- <u>首达时</u>(First passage time)：首次达到某个状态 j 的时刻

  $T_j(\omega)=\min\{n\geq 1, X_n(\omega)=j\}$

- $\{T_j=n\}=\{X_1\neq j, X_2\neq j, \cdots, X_{n-1}\neq j, X_n=j\}$
- $f_{ij}(n)\triangleq P(T_j=n | X_0=i)$ $\quad f_{ij}\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n)$
- $f_{ij}=P(\exists n\geq 1, X_n=j | X_0=i)$

Pf: 令 $A=\{X_0=i\}\cap\{\exists n\geq 1, X_n=j\}$

$B_m=\{X_0=i\}\cap\{X_1\neq j, \cdots, X_{m-1}\neq j, X_m=j\}, m\geq 1$

则
$$\left.\begin{aligned} &- B_m\cap B_n=\phi, \forall m\neq n \\ &- B_m\subset A，进一步 \bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\subset A \\ &- \forall \omega\in A, \exists m\geq 1, s.t. \omega\in B_m \quad \therefore A\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m \end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\bigsqcup_{m=1}^{\infty}B_m$$

$\therefore P(A)=\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m) \Rightarrow P(A)/P(X_0=i)=\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m)/P(X_0=i)$ 即为所证.

- j 为常返态 $\Leftrightarrow f_{jj}=1$ j 为瞬时态 $\Leftrightarrow f_{jj}<1$

- $f_{ij}(n)$ $p_{ij}(n)$ $\longleftrightarrow$ 常返态

- <u>生成函数</u> $P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n p_{ij}(n)$ $F_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n f_{ij}(n)$ 为了区分 此时把小写明显写出来

  规定 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$, $f_{ij}(0)=0$, $\forall i,j$

- 1° $f_{ij}=F_{ij}(1)$

  2° $|s|<1$ 时, $P_{ij}(s)<\infty$, $F_{ij}(s)<\infty$

  3° (5.1.15) Abel's 定理 $P_{ij}(s)\longrightarrow P_{ij}(1)$ as $s\nearrow 1$

  $F_{ij}(s)\longrightarrow F_{ij}(1)$ as $s\nearrow 1$

- <u>Th1</u>: (a) $P_{ii}(s)=1+F_{ii}(s)P_{ii}(s)$

  (b) $P_{ij}(s)=F_{ij}(s)P_{jj}(s)$ $i\neq j$

Pf: 令 $B_r=\{X_1\neq j,\cdots,X_{r-1}\neq j,X_r=j\}$, $r\geq 1$ 则 $B_{r_1}\cap B_{r_2}=\phi$ 当 $r_1\neq r_2$ 时.

$$p_{ij}(m)=P(X_m=j\mid X_0=i)=\sum_{r=1}^{m}P(X_m=j,B_r\mid X_0=i)$$

而 $P(X_m=j,B_r\mid X_0=i)=\dfrac{P(X_m=j,B_r,X_0=i)}{P(B_r,X_0=i)}\cdot\dfrac{P(B_r,X_0=i)}{P(X_0=i)}$

$$=P(X_m=j\mid B_r,X_0=i)\cdot P(B_r\mid X_0=i)$$

$$=P(X_m=j\mid X_r=j)\cdot f_{ij}(r)$$

$$=p_{jj}(m-r)\cdot f_{ij}(r)$$

故 $p_{ij}(m)=\sum_{r=1}^{m}f_{ij}(r)p_{jj}(m-r)$, $m=1,2,\cdots$

两边同乘 s^m 并求和 即可得证.

- <u>Corollary1</u>: (a) $\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=+\infty \Leftrightarrow j$ 常返 (1)

  $\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=+\infty$ 且 $f_{ij}>0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}(n)=+\infty$ (2)

  (b) $\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)<+\infty \Leftrightarrow j$ 瞬时 (3)

  $\Rightarrow \forall i, \sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}(n)<+\infty$.

Pf: 由 Thm1 Fo(a), $P_{jj}(s)=\frac{1}{1-F_{jj}(s)}$, $|s|<1$

$\therefore P_{jj}(s)\to+\infty$ as $s\nearrow1 \Leftrightarrow F_{jj}(s)\to1$ as $s\nearrow1$

由 Abel's 定理 $\lim_{s\nearrow1}P_{jj}(s)=P_{jj}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)$

$\lim_{s\nearrow1}F_{jj}(s)=F_{jj}(1)=f_{jj}$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=+\infty \Leftrightarrow f_{jj}=1 \Leftrightarrow j$ 常返　(1)得证

下证(2): 由Thm1 Fo(b), $P_{ij}(s)=F_{ij}(s)P_{jj}(s)$, $i\neq j$

$\Rightarrow \lim_{s\nearrow1}P_{ij}(s)=\lim_{s\nearrow1}F_{ij}(s)P_{jj}(s)$

$\xRightarrow{\text{Abel's}} P_{ij}(1)=F_{ij}(1)P_{jj}(1)$, 即 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}(n)=f_{ij}\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=+\infty$

· Corollary2: 若 j 瞬时, 则 $p_{ij}(n)\to0$ as $n\to\infty$, $\forall i$.

· 设 $X(0)=i$, i.e. $P(X_0=i)=1$, 返回 i 的次数记为 $N(i)$ (是个r.v.)

$$P(N(i)=\infty)=\begin{cases}1, & i\text{ 常返}\\ 0, & i\text{ 瞬时}\end{cases}$$

· P297 (6.15.5) $\{X_0,X_1,X_2,\cdots\}$ 马氏链 $P(X_0=i)=1$

$N_i(j)$ 为 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 经过 j 的次数

则 $$P(N_i(j)=m)=\begin{cases}1-f_{ij}, & m=0\\ f_{ij}f_{jj}^{m-1}(1-f_{jj}), & m\geq1\end{cases}$$

直观: $m=0$ 时显然, f_{ij} 表示从 i 出发, 存在某个 $n\geq1$ 时刻, 到达 j 的概率

$m\geq1$ 时: ①从 i 出发, 第一次到达 j 的概率为 f_{ij}

②由马氏性, 从 j 出发第一次到达 j 的概率为 f_{jj} } 到达 j m 次

③由 j 出发, 永远回不到 j, 概率 $1-f_{jj}$

Pf: $m\geq1$ 时,

$$P(N_i(j)=m)=\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_m}P(X_0=i,X_{k_1}=j,\cdots,X_{k_m}=j, \text{其他}X_k\neq j, k\geq1)$$

$$=\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_m}P(X_0=i)\underbrace{P(X_{k_1}=j,\cdots,X_{k_m}=j,\text{其他}X_k\neq j,k\geq1\mid X_0=i)}_{=I_1}$$

$$I_1 = P(X_{k_1}=j, X_k\neq j, 1\le k<k_1 | X_0=i)\, P(X_{k_2}=j,\cdots,X_{k_m}=j, X_k\neq j, k>k_1 | X_{k_1}=j, X_k\neq j, X_0=i)$$
$$= f_{ij}(k_1) P(X_{k_m}=j,\cdots,X_{k_2}=j, X_k\neq j, k>k_1 | X_{k_1}=j)$$
$$= f_{ij}(k_1) f_{jj}(k_2-k_1)\cdots f_{jj}(k_m-k_{m-1}) P(X_k\neq j, k>k_m | X_{k_m}=j)$$
$$= f_{ij}(k_1) f_{jj}(k_2-k_1)\cdots f_{jj}(k_m-k_{m-1})(1-f_{jj})$$
$$\therefore P(N_i(j)=m) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2-k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m-k_{m-1}=1}^{\infty} f_{ij}(k_1) f_{jj}(k_2-k_1)\cdots f_{jj}(k_m-k_{m-1})(1-f_{jj})$$
$$= f_{ij} f_{jj}^{m-1}(1-f_{jj})$$

- $P(N(i)=\infty) = 1-\sum_{n=0}^{\infty} P(N(i)=n) = 1 \Leftrightarrow f_{ii}=1 \Leftrightarrow i$ 常返

  $P(N(i)=\infty) = 1-\sum_{n=0}^{\infty} P(N(i)=n) < 1 \Leftrightarrow f_{ii}<1 \Leftrightarrow i$ 瞬时

  $P(N(i)=\infty)=0$

- $T_j = \min\{n\ge 1: X_n=j\}$

  $\{T_j=\infty\} \sim \{n\ge 1$ 之后永远不会达到 $j\}$

- $P(T_j<\infty | X_0=j)=1 \Leftrightarrow P(T_j=\infty|X_0=j) = 1-f_{jj}=0 \Leftrightarrow f_{jj}=1 \Leftrightarrow j$ 常返
- $P(T_j<\infty | X_0=j)<1 \Leftrightarrow P(T_j=\infty|X_0=j) = 1-f_{jj}>0 \Leftrightarrow f_{jj}<1 \Leftrightarrow j$ 瞬时

  $$\Downarrow$$
  $$E[T_j|X_0=j]=\infty$$

<u>Def</u>: 定义<u>平均返回时间/常返时间</u>

$$\mu_i \triangleq E[T_i|X_0=i] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) & i \text{ 常返} \\ \infty & i \text{ 瞬时} \end{cases}$$

<u>Def</u>: 若 i 常返，且 $\mu_i=+\infty$，则称 i 为<u>零常返</u> (null persistent)

若 i 常返，且 $\mu_i<+\infty$，则称 i 为<u>正常返/非零常返</u> (positive/nonnull persistent)

- <u>Th</u>: 若 i 常返，则 i 零常返 $\Leftrightarrow p_{ii}(n)\longrightarrow 0 \quad n\to+\infty$

  $$\Leftrightarrow p_{ji}(n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0,\ \forall j$$

<u>Pf</u>: Th 6.4.17 #

这里只证明,若 $p_{ii}(n)\to 0$,则 $p_{ji}(n)\to 0,\forall j$

$p_{ji}(n)=\sum_{r=0}^{n} f_{ji}(r)p_{ii}(n-r)$

$f_{ji}=\sum_{r=0}^{\infty} f_{ji}(r)\le 1$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0$, s.t. $\sum_{r=N_0+1}^{\infty} f_{ji}(r)\le\varepsilon$

$$p_{ji}(n)=\sum_{r=0}^{N_0} f_{ji}(r)p_{ii}(n-r)+\sum_{r=N_0+1}^{n} f_{ji}(r)p_{ii}(n-r)$$
$$\le\sum_{r=0}^{N_0} f_{ji}(r)p_{ii}(n-r)+\sum_{r=N_0+1}^{\infty} f_{ji}(r)$$
$$\le\underbrace{\sum_{r=0}^{N_0} f_{ji}(r)p_{ii}(n-r)}+\varepsilon$$

由 $p_{ii}(n)\to 0$ 知 n 充分大时 $\le\varepsilon$.

3.14 · Def: i 的周期(period)定义为 $d(i)=\gcd\{n:p_{ii}(n)>0\}$ 最大公约数

· $d(i)>1$,则称 i 为周期的(periodic)

$d(i)=1$,则称 i 为非周期的(aperiodic)

· 若 n 不是 $d(i)$ 的整数倍,则 $p_{ii}(n)=0$

· Def: 若状态 i 是非零常返与非周期的,则称 i 为遍历的.(ergolic)

6.3 子链

6.3.1 状态之间的关系

· Def.(可达/相互可达)

若 $\exists m\ge 0$, s.t. $p_{ij}(m)>0$,则称 i 可达 j,记 $i\to j$ communicate

若 $i\to j$ 且 $j\to i$,则称 i,j 相互可达,记 $i\leftrightarrow j$ inter-communicate

*注: ① 若 $i\ne j$,则 $i\to j\Leftrightarrow f_{ij}>0$,即存在一条不经过 i 且概率大于0的有限路径

② $i\to i$,因为 $p_{ii}(0)=1$

③ "$\leftrightarrow$" 等价类: (1) $i\leftrightarrow i$ (2) $i\leftrightarrow j$ 则 $j\leftrightarrow i$ (3) $i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k\Rightarrow i\leftrightarrow k$

· Thm1: 若 $i\leftrightarrow j$,则 (a) $d(i)=d(j)$

(b) i 瞬时 $\Leftrightarrow j$ 瞬时

(c) i零常返 $\Leftrightarrow$ j零常返

(d) i非零常返 $\Leftrightarrow$ j非零常返

Pf: (b) 由 $i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists m, n \geq 0$, $p_{ij}(m) > 0$, $p_{ji}(n) > 0$

令 $\alpha \triangleq p_{ij}(m) p_{ji}(n) > 0$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \text{已知} & \text{结论} \\ i\text{ 瞬时} \arrow[r, "\text{要证明}"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{推论6.2.4}"'] & j\sim\text{瞬时} \arrow[d, Leftrightarrow] \\ \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(r) < \infty \arrow[r, "\text{只需证明}"] & \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}(r) < \infty \end{tikzcd}$$

由C-K方程, $p_{ii}(m+r+n) \geq p_{ij}(m) p_{jj}(r) p_{ji}(n) = \alpha \cdot p_{jj}(r)$, $\forall r \geq 0$

对上式求和 $\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(m+r+n) \geq \alpha \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}(r)$

而 LHS $\leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(r) < \infty$

$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}(r) < \infty$ $\therefore$ j 瞬时

(a) 只需证明 $d(j) \mid d(i)$ 且 $d(i) \mid d(j)$

$p_{ii}(m+n) \geq p_{ij}(m) p_{ji}(n) > 0$

若 $p_{jj}(s) > 0$, 则 $p_{ii}(m+s+n) \geq p_{ij}(m) p_{jj}(s) p_{ji}(n) > 0$

由 $d(i)$ 定义, $m+n \mid d(i)$, $m+s+n \mid d(i)$

$\therefore s \mid d(i)$ 对 $\forall$ $p_{jj}(s) > 0$ 成立

故 $d(j) \mid d(i)$

同理 $d(i) \mid d(j)$

(c) 见下一节

6.3.2 子链

·Def: 状态集合 C ($C \subset S$)

(a) 若对 $\forall i \in C$, $j \notin C$, 都有 $p_{ij} = 0$, 则称 C 为闭的 (closed)

(b) 若对 $\forall i, j \in C$, 都有 $i \leftrightarrow j$, 则称 C 为不可约 (irreducible)

·若不可约 C 中有一个状态瞬时, 则称 C 为瞬时

若不可约 C 中有一个状态非周期, 则称 C 为非周期

若不可约 C 中有一个状态周期, 则称 C 为周期

·定理2(分解定理, Decomposition Th)

状态空间S可以唯一划分为如下形式

$$S=T\cup C_1\cup C_2\cdots$$

这里T~所有瞬时态, C_i~不可约+闭的+常返

Pf: ·首先, $S=T+S\backslash T$

·对$S\backslash T$, 任取$i\in S\backslash T$, 记$C(i)=\{j: j\leftrightarrow i\}\triangleq C_1$

任取$j\in S\backslash(T\cup C_1)$, 记$C(j)=\{k: k\leftrightarrow j\}\triangleq C_2$

…… 上述过程最多进行可数多次.

·$\forall C_i$~常返+不可约, 只须证明C_i是闭的

反证. 设$\exists j_0\in C_r, j_1\notin C_r$, 使得 $j_0\to j_1$, $j_1\not\to j_0$

则必有一条路径, 从j_0出发条件下, 之后不经过j_0, 到达j_1的概率>0

i.e. $P(\exists m\geq 1, s.t. X_1\neq j_0,\cdots,X_{m-1}\neq j_0, X_m=j_1 | X_0=j_0)>0$

$\Rightarrow P(对n\geq 1, X_n\neq j_0 | X_0=j_0)\geq$ 上式 >0

这与状态j_0常返矛盾, 故C_i是闭的

*注: ① $X_0(\omega)\in C_r\Rightarrow X_n(\omega)\in C_r, \forall n\geq 1$

② $X_0(\omega)\in T\Rightarrow\begin{cases}X_n(\omega)\in T, & \forall n\geq 1\\ \exists N_0(\omega), \forall n\geq N_0(\omega), X_n(\omega)\notin T & \Rightarrow \exists r(\omega), s.t. X_n(\omega)\in C_{r(\omega)}\end{cases}$

长时间行为

③ 每个C_r可看成一个马氏链 状态空间C_r转移矩阵?

引理: 若S为有限个元素的集合, 则至少存在一个状态为常返状态, 并且所有常返状态都是非零常返

Pf: ①首先证明至少有一个常返态

反证. 假设所有状态均为瞬时态.

由推论1.2.5, 若j瞬时, 则对$\forall i$, $p_{ij}(n)\to 0$ as $n\to\infty$

故 $1=\sum_{j\in S}p_{ij}(n)\xrightarrow{S有限}0$ as $n\to\infty$ 矛盾!

②证明所有常返态均为非零常返

由分解定理, $S=T\cup C_1\cup\cdots\cup C_m$ (S有限)

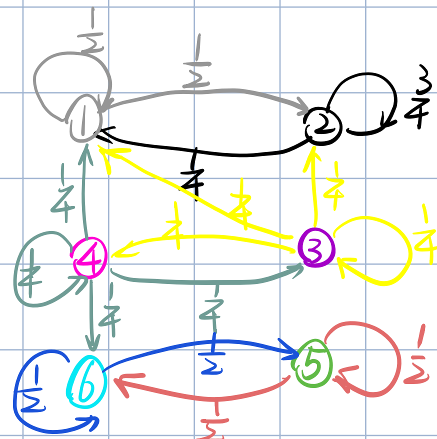
任取 C_r (不可约+闭+常返)

反证: 假若 C_r 的状态均为零常返

取 $i\in C_r$, $1=\sum_{j\in C_r} p_{ij}(n)\xrightarrow[(\text{定理2.9})]{}0$, 矛盾

· 例. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$
\mathbb{P}=\begin{array}{c}
\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac12 & \frac12 & & & & \\
\frac14 & \frac34 & & & & \\
\frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 & & \\
\frac14 & 0 & \frac14 & \frac14 & 0 & \frac14\\
 & & & & \frac12 & \frac12\\
 & & & & \frac12 & \frac12
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



马氏链与带权有向图: 将S中的状态作为顶点, 若 $p_{ij}>0$, 则画一条从i到j的有向边 $\vec{ij}$, 称该有向图为转移概率图

作业: ①画有向图 ②分析每个状态的常返性/分解定理/周期/平均返回时间 μ_i

③这一节的 3, 5, 6, 7, 9

分析有向图, $\{1,2\}$, $\{5,6\}$: 不可约+闭+非零常返

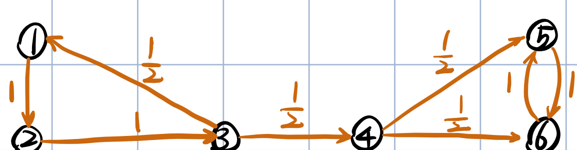
3, 4 瞬时

周期均为1 故1, 2, 5, 6 遍历

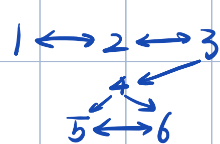
平均返回时间: μ_1, μ_2 见Week 3作业

注: 记 $\pi\triangleq(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1},0,0,0,0)$ ~ $\pi\mathbb{P}=\pi$

例.



分析: · 划分:



1, 2, 3, 4 瞬时

$\{5,6\}$ 不可约+闭+非零常返

·周期：$d(1)=d(2)=d(3)=3$ （$P_{11}(3n)>0$，其余为0）

$d(4)=\infty$ （从状态4出发永远无法返回）

$d(5)=d(6)=2$

·平均返回时间：$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=+\infty$ （瞬时）

$$\left(f_{11}(n)=\begin{cases} 0 & n=1,2 \\ \frac{1}{2} & n=3 \\ 0 & n=4,5,\cdots \\ \frac{1}{2} & n=\infty \end{cases} \Rightarrow \mu_1=\infty \right)$$

$\mu_5=\mu_6=2$

注：$\pi=(0,0,0,0,\mu_5^{-1},\mu_6^{-1}) \sim \pi P=\pi$

6.4 平稳分布 + 极限定理

内容概览：(A) 平稳分布 stationary distribution $\pi P=\pi$

(B) 极限定理 The Limit Theorems $X=\{X_0,X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots\}$

- 当 $n\to\infty$ 时 X_n 的极限是什么？
- 赌徒破产问题：X_n 的极限是 ①赌徒输光 ~ 0RMB

  ②赌徒赢NRMB ~ NRMB

  0，N 吸収态.
- 从平稳分布出发，X_n 的极限是什么？不知道 但 X_n 的分布 ~ π
- 从不平稳分布出发，也没有吸収态，X_n 的极限是什么？X_n 的分布的极限？

  不知道　　粗略讲，平稳分布

注：(A)+(B) ~ 随机过程的长时间行为

6.4.1 平稳分布

·定义：称 $\pi=(\pi_j, j\in S)$ 行向量为平稳分布，若

(a) $\pi_j\geq 0$，$\forall j\in S$，$\sum_{j\in S}\pi_j=1$

(b) $\pi=\pi P$ i.e. $\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}$，$\forall j\in S$

·为什么称平稳分布？

$X_0\sim\pi \Rightarrow X_n\sim \pi P^n=(\pi P)P^{n-1}=\pi P^{n-1}=\cdots=\pi$

· **Thm3**: 对于不可约马氏链，则 $\exists$ 平稳分布 $\pi \Longleftrightarrow$ 所有状态为非零常返

此时 π 是唯一的，$\pi_i=\mu_i^{-1}$，$\forall i\in S$，μ_i 为状态 i 的平均返回时间

Pf: 下证若马氏链~常返+不可约，则 $\exists$ 非零行向量 v，使得 $v=vP$

(注意：只是说 $\exists$ 一个非零行向量，但并不一定是平稳分布)

构造 v：1. 考虑马氏链 $X=\{X_n: n=0,1,2,\cdots\}$，状态空间 S

2. $T_k(\omega)=\inf\{n\ge 1: X_n(\omega)=k\}$ 首次达到状态 k 的时间

3. $X_0(\omega)=k,\ \underbrace{X_1(\omega)\ X_2(\omega)\cdots X_{T_k(\omega)-1}(\omega)}_{\in S\setminus\{k\}},\ X_{T_k(\omega)}(\omega)=k$

$N_i(\omega)$ 表示 $n=1,2,\cdots,T_k(\omega)$ 之间经过 i 的次数

(或 $n=0,1,\cdots,T_k(\omega)-1$)

构造 v 的直观：记 $\rho_i(k)=E[N_i|X_0=k]$ 表示 $\{1,2,\cdots,T_k(\omega)\}$ 之间经过 i 的平均次数

记 $\overline{\rho_i(k)}$ 表示 $\{0,1,\cdots,T_k(\omega)-1\}$ 之间经过 i 的平均次数

则 $(\overline{\rho_i(k)}, i\in S)P=(\rho_i(k), i\in S)$

而 $(\overline{\rho_i(k)}, i\in S)=(\rho_i(k), i\in S)\triangleq v$

上述结论对常返才成立，否则，$\overline{\rho_k(k)}\equiv 1$，$\rho_k(k)=P(T_k<\infty|X_0=k)\times 1+P(T_k=\infty|X_0=k)\times 0<1$

4. 由 k 常返 $N_k(\omega)\equiv 1$ $\quad T_k(\omega)=\sum_{i\in S}N_i(\omega)$

5. $N_i(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{X_n(\omega)=i\}\cap\{T_k(\omega)\ge n\}}$

(Pf: 不妨设 $T_k(\omega)=N$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{X_n(\omega)=i\}\cap\{T_k(\omega)\ge n\}}=\sum_{n=1}^{N}I_{\{X_n(\omega)=i\}\cap\{T_k(\omega)\ge n\}}+\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}I_{(\ )}}_{=0}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}I_{\{X_n(\omega)=i\}}=N_i(\omega)$$
)

6. $\rho_i(k)=E[N_i|X_0=k]=\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=i, T_k\ge n|X_0=k)$

由4，常返时 $\rho_k(k)\equiv 1$

7. $\mu_k=\sum_{i\in S}\rho_i(k)$

(Pf: $\mu_k=E[T_k|X_0=k]\overset{4}{=}E[\sum_{i\in S}N_i|X_0=k]=\sum_{i\in S}E[N_i|X_0=k]=\sum_{i\in S}\rho_i(k)$)

8. 引理5.

<u>引理5</u>: 若X～不可约+常返马氏链，状态空间S，则

$\forall k\in S, \forall i\in S$，$0<\rho_i(k)<\infty$ 且

$\rho(k)=(\rho_i(k): i\in S)$ 行向量 $\rho(k)=\rho(k)\mathbb{P}$

<u>Pf of lemma</u>: ①首先证明 $0<\rho_i(k)<\infty$:

(1a) $\rho_k(k)=1$

(1b) 若 $i\neq k$: 记 $l_{ki}(n)=P(X_n=i, T_k\geq n|X_0=k)$

由6. $\Rightarrow \rho_i(k)=\sum_{n=1}^{\infty} l_{ki}(n)$

$l_{ki}(n)\cdot f_{ik}(m)\leq f_{kk}(m+n)$

(LHS 表示从k出发，在不经过k的情况下，经过n步走到 i $(l_{ki}(n))$

然后再从 i 出发，在不经过k的情况下，再走m步走到 k $(f_{ik}(m))$

$f_{kk}(m+n)$ 表示从k出发，不经过k，走m+n步刚好到达 k)

由不可约 $\Rightarrow \exists m_0$, s.t. $0<f_{ik}(m_0)\leq 1$

故 $l_{ki}(n)\leq f_{kk}(n+m_0)/f_{ik}(m_0)$

于是 $\rho_i(k)=\sum_{n=1}^{\infty} l_{ki}(n)\leq \sum_{n=1}^{\infty} f_{kk}(n+m_0)/f_{ik}(m_0)\leq \frac{1}{f_{ik}(m_0)}<+\infty$

另一方面，由不可约 $\Rightarrow \exists m_0, i_1, i_2, \cdots, i_{m_0-1}\notin\{k,i\}$, s.t.

$P(X_{m_0}=i, X_{m_0-1}=i_{m_0-1},\cdots, X_1=i_1|X_0=k)>0$ 思考为什么.

故 $\rho_i(k)\geq l_{ki}(m_0)\geq$ 上式 >0

②下证 $\rho(k)=\rho(k)\mathbb{P}$:

$\rho_i(k)=\sum_{n=1}^{\infty} l_{ki}(n)$

从k出发第1步走到 i，则必有 $T_k\geq 1$

$n=1$: $l_{ki}(1)=P(X_1=i, T_k\geq 1|X_0=k)=P(X_1=i|X_0=k)=p_{ki}$

$n\geq 2$: $l_{ki}(n)=P(X_n=i, T_k\geq n|X_0=k)$

$=\sum_{j\in S\setminus\{k\}} P(X_n=i, X_{n-1}=j, T_k\geq n|X_0=k)$

$\overset{?}{=}\sum_{j\in S\setminus\{k\}} l_{kj}(n-1)p_{ji}$

$\therefore \rho_i(k)=p_{ki}+\sum_{n\geq 2}\sum_{j\in S\setminus\{k\}} l_{kj}(n-1)p_{ji}$

$$=p_{ki}+\sum_{j\in S\setminus\{k\}} p_{ji}\underbrace{\left(\sum_{n\ge 2} l_{kj}(n-1)\right)}_{=\rho_j(k)}$$

$\rho_k(k)=1$

$$=\rho_k(k)p_{ki}+\sum_{j\in S\setminus\{k\}}\rho_j(k)p_{ji}$$

$$=\sum_{j\in S}\rho_j(k)p_{ji}$$

$$\Rightarrow \rho(k)=\rho(k)\mathbb{P}$$

"?"证明. $P(X_n=i,X_{n-1}=j,T_k\ge n|X_0=k)$

$$=\sum_{\substack{y_m\in S\setminus\{k\}\\(1\le m\le n-2)}} P(X_n=i,X_{n-1}=j,X_m=y_m,1\le m\le n-2,\underbrace{T_k\ge n}_{\text{已经确定状态后}T_k\text{必}\ge n}|X_0=k)$$

$$=\sum_{\substack{y_m\in S\setminus\{k\}\\(1\le m\le n-2)}} P(X_n=i,X_{n-1}=j,X_m=y_m,1\le m\le n-2|X_0=k)$$

$$=\sum_{y_m\in S\setminus\{k\}} P(X_n=i|X_{n-1}=j)P(X_{n-1}=j,X_m=y_m,1\le m\le n-2|X_0=k)$$

$$=p_{ji}\sum_{y_m\in S\setminus\{k\}} P(X_{n-1}=j,X_m=y_m,1\le m\le n-2|X_0=k)$$

$$=p_{ji}P(X_{n-1}=j,T_k\ge n-1|X_0=k)=l_{kj}(n-1)p_{ji}$$

注:在引理5条件下,$\mu_k=\sum_{i\in S}\rho_i(k)$,$0<\rho_i(k)<\infty$

若$\mu_k<\infty$,令$\pi_i=\rho_i(k)/\mu_k$,则$\pi=\pi\mathbb{P}$且$\sum_{i\in S}\pi_i=1\Rightarrow\pi$平稳分布

反,若已知平稳分布π和μ_k,则$\rho_i(k)=\pi_i\mu_k$

· **定理6**:马氏链$X\sim$不可约+常返,则$\exists$行向量$\nu=(\nu_i:i\in S)$,$\nu_i>0,\forall i$,s.t. $\nu=\nu\mathbb{P}$

且若$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}\mathbb{P}$,则存在常数$\tilde{c}>0$,使$\tilde{\nu}=\tilde{c}\nu$

·注:$\sum_{i\in S}\nu_i<\infty\Rightarrow\mu_k<\infty\Rightarrow X$非零常返

$\sum_{i\in S}\nu_i=\infty\Rightarrow\mu_k=\infty\Rightarrow X$零常返

·回忆上节未证定理(6.3.2(c)(d))

若$i\leftrightarrow j$,则 (c) $i\sim$零常返$\Leftrightarrow j\sim$零常返 ;(d) $i\sim$非零常返$\Leftrightarrow j\sim$非零常返

证明:只需证(d).

记$C(i)\sim$最小的包含i的不可约闭的子集

($\Rightarrow$)已知i非零常返,则$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}(n)\ge\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}(n)=1$ $\therefore 1\le\mu_i<\infty$

由引理5,$\mu_i=\sum_{j\in C(i)}\rho_j(i)$

定义 $\pi_j = f_j(i)/\mu_i$，$\pi = (\pi_j, j\in C(i))$　$\pi = \pi P|_{C(i)}$

由定理3，$C(i)$ 所有状态均为非零常返

定理3的证明:

Step1. 假设 $\exists\,\pi$ 为平稳分布，证明: $\forall i\in S$，i 常返.

由 π 平稳 $\Rightarrow \forall i\in S$，$\pi_i \geq 0$，$\sum_{i\in S}\pi_i = 1$，$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \pi_j$，$\forall j\in S$

(反证) 假若 $\exists\, i_0\in S$，i_0 ~ 瞬时

由不可约 $\Rightarrow \forall i\in S$　i ~ 瞬时 (6.3.2b)

推论6.2.5 $\Rightarrow p_{ji}(n)\to 0$ as $n\to\infty$，$\forall j,i\in S$

$\Rightarrow \pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}(n) \to 0$ as $n\to\infty$　与 $\sum_{i\in S}\pi_i = 1$ 矛盾

reason: 记 F 为 S 的 $\forall$ 有限子集

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}(n) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in F}\pi_i \overbrace{p_{ij}(n)}^{\to 0} + \underbrace{\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i\notin F}\pi_i p_{ij}(n)}_{\leq \sum_{i\notin F}\pi_i} \leq \sum_{i\notin F}\pi_i$$

令 $F\uparrow S$，则 $\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}(n) \leq \lim_{F\uparrow S}\sum_{i\notin F}\pi_i = 0$

Step2: 假设 $\exists\,\pi$ 为平稳分布，证明: $\forall j\in S$ ~ 非零常返，$1\leq\mu_j<\infty$，$\pi_j = \mu_j^{-1}$

这等价于证明 $\pi_j\mu_j = 1$ 且 $\pi_j > 0$

- 首先证明 $\pi_j\mu_j = 1$:

假设 X_0 服从分布 π.　$(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ 的联合分布 $= (X_1,\cdots,X_{n+1})$ 的联合分布

$$\pi_j\mu_j = P(X_0=j)E(T_j|X_0=j) = \sum_{n=1}^{\infty}P(X_0=j)P(T_j\geq n|X_0=j)$$

1° $n=1$ 时，$P(X_0=j)P(T_j\geq 1|X_0=j) = P(X_0=j)$

2° $n\geq 2$ 时，$P(X_0=j)P(T_j\geq n|X_0=j) = P(X_0=j)P(\cancel{T_j\geq n},\, X_m\neq j,\, 1\leq m\leq n-1\,|\,X_0=j)$

$$= P(X_0=j,\, X_m\neq j,\, 1\leq m\leq n-1)$$

$$= P(\cancel{X_0\in S},\, X_m\neq j,\, 1\leq m\leq n-1) - P(X_0\neq j,\, X_m\neq j,\, 1\leq m\leq n-1)$$

$$= P(X_0\neq j,\cdots,X_{n-2}\neq j) - P(X_0\neq j,\cdots,X_{n-1}\neq j)$$

$$\pi_j\mu_j \overset{?}{=} \underbrace{P(X_0=j)+P(X_0\neq j)}_{=1} - \lim_{n\to\infty}P(X_0\neq j,\cdots,X_n\neq j)$$

只须证明 $\lim_{n\to\infty}P(X_0\neq j,\cdots,X_n\neq j) = 0$ (由问题6.15.6 + Step1)

→ 不可约　→ 常返

—再证明 $\pi_j>0, \forall j\in S$.

6. Let i and j be two states of a discrete-time Markov chain. Show that if i communicates with j, then there is positive probability of reaching j from i without revisiting i in the meantime. Deduce that, if the chain is irreducible and persistent, then the probability f_{ij} of ever reaching j from i equals 1 for all i and j.

$p_{ij}(m)(1-f_{ji})\le 1-f_{ii}=0 \Rightarrow f_{ji}=1$
$(m=\min\{n\mid p_{ij}(n)>0\})$

(反证)假设存在 j_0 s.t. $\pi_{j_0}=0$

则 $0=\pi_{j_0}=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij_0}(n), \forall n\ge 1.$

由不可约 $\Rightarrow$ 对 $i, j_0, \exists n_i$ s.t. $p_{ij_0}(n_i)>0$

取上述 n 为 n_i, 则 $\pi_i=0, \forall i\in S$ 这与 $\sum\pi_i=1$ 矛盾

由Step1+Step2 $\Rightarrow$ 若∃平稳分布 π, 则 $\pi_j=\mu_j^{-1}$ (唯一), $X\sim$ 非零常返

Step3: 证明:若 S 非零常返 $(1\le\mu_i<\infty)$, 则∃平稳分布 π, 且 $\pi_j=\mu_j^{-1}, \forall j\in S$

由引理5 $\Rightarrow$ ∃平稳分布 π $\Rightarrow$ 重复step2可得 $\pi_j=\mu_j^{-1}$ □

注:定理3提供了一个判断不可约马氏链是否非零常返的准则,以及求 μ_j 和 $p_j(i)$ 的方法

定理10: 不可约马氏链 X

X 是瞬时 $\Leftrightarrow \exists s\in S, \exists\{y_j, j\ne s\}$ 满足 $|y_j|\le 1, \forall j, \exists |y_{j_0}|>0$, s.t. $y_i=\sum_{j\ne s}p_{ij}y_j,\ i\ne s$

· 直观上:把状态 s 排除之后,其他状态自成体系

· 不可约马氏链,常返 $\Leftrightarrow y_i=\sum_{j\ne s}p_{ij}y_j,\ i\ne s$ 的有界解为0

定理13: 不可约马氏链 X, $S=\{0,1,2,\cdots\}$

若 $\exists s\in S, \{y_j, j\ne s\}$, s.t. $\begin{cases} y_i\to+\infty \text{ as } i\to\infty \\ y_i\ge\sum_{j\ne s}p_{ij}y_j,\ i\ne s\end{cases}$ 则 X 常返

例15. 带反射边界

$p_{00}=q,\ p_{i,i+1}=p, \forall i\ge 0,\ p_{i,i-1}=q, \forall i\ge 1$. 其余全为0 $(p+q=1, p\ge 0, q\ge 0)$

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline 0 & q & p & & & \\ 1 & q & 0 & p & & \\ 2 & & q & 0 & p & \\ 3 & & & q & 0 & p \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}$$

$X\sim$ 不可约 $\rho=p/q$

(a) 解 $\pi=\pi\mathbb{P}$ $\pi_j=\rho^j(1-\rho)$

$\therefore \rho<1 \Leftrightarrow q>p \Leftrightarrow X$ 有平稳分布 π

$\therefore X$ 非零常返 $\Leftrightarrow q>p$

(b) $q<p$. 取 $s=0$, $y_j=1-\rho^{-j}$ 满足 $y_i=\sum_{j\ne s}p_{ij}y_j, i\ne s$ $\therefore X\sim$ 瞬时

(c) $q=p=\frac{1}{2}$. 取 $s=0$, $y_j=j, j\ge 1$ 由定理13 $\Rightarrow X\sim$ 常返, 再结合(a), $X\sim$ 零常返

定理10证明: $X\sim$瞬时 $\Leftrightarrow s\sim$瞬时

($\Rightarrow$) 若$s\sim$瞬时. 定义 $\tau_i(n)=P(X_m\neq s, 1\le m\le n \mid X_0=i)$ $\quad i\neq s$, 则当 $n\to\infty$ 时 $\tau_i(n)\downarrow$

$\tau_i(1)=\sum_{j\neq s}p_{ij} \quad \tau_i(n+1)=\sum_{j\neq s}p_{ij}\tau_j(n)$ (*)

由 $\tau_i(n)\ge\tau_i(n+1)$, 记 $\tau_i=\lim_{n\to\infty}\tau_i(n)=P(\forall m\ge 1, X_m\neq s \mid X_0=i)=1-f_{is}$

(*) $\Rightarrow \tau_i(n+1)=\left(\sum_{j\in F\setminus\{s\}}+\sum_{\substack{j\notin F\\ j\neq s}}\right)p_{ij}\tau_j(n)$ (F为有限子集)

取极限 $\Rightarrow \{\tau_i, i\neq s\}$ 满足定理中那个方程

证明 $\exists i, \tau_i>0$.

(反证) 若 $\forall \tau_i=0, i\neq s$, 则 $f_{is}=1$, 则 $f_{ss}=p_{ss}+\sum_{i\neq s}p_{si}f_{is}=\sum_i p_{si}=1$ 与s瞬时矛盾

($\Leftarrow$) 若$\exists y_j, j\neq s$ 满足 $y_i=\sum_{j\neq s}p_{ij}y_j$, $i\neq s$ 且 $|y_j|\le 1, \forall j$

则 $|y_i|\le\sum_{j\neq s}p_{ij}|y_j|\le\sum_{j\neq s}p_{ij}=\tau_i(1)$

$\Rightarrow |y_i|\le\sum_{j\neq s}p_{ij}\tau_i(1)=\tau_i(2)$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow |y_i|\le\tau_i(n), \forall n, i\neq s$

令 $n\to\infty$, $\tau_i=\lim_{n\to\infty}\tau_i(n)\ge|y_i|\ge 0$

取 $i=j_0$, $1-f_{j_0 s}=\tau_{j_0}\ge|y_{j_0}|>0 \quad \therefore f_{j_0 s}\neq 1$

由(6.11.6) $X\sim$瞬时

定理13: 不可约马氏链X, $S=\{0,1,2,\cdots\}$, $\mathbb{P}$

若$\exists s\in S$, $\{y_j, j\neq s\}$, s.t. $\begin{cases} y_i\to+\infty \text{ as } i\to\infty \\ y_i\ge\sum_{j\neq s}p_{ij}y_j, \; i\neq s\end{cases}$ (#) 则X常返

证明: 不妨设$s=0$, $y_i>0$ (若y_i满足(#), y_i+C也满足(#))

记$T\sim\mathbb{P}$去掉p_{0i}, p_{j0}之后的矩阵

则 $T^n=(t_{ij}(n), i,j\neq 0)$ 表示不经过0, n步转移概率

① $t_{ij}(n)\to 0$ as $n\to\infty$, $\forall i,j\neq 0$.

构造X' $\quad S=\{0,1,2,\cdots\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \end{array}$$

特点: $0\sim$吸收态

在第一次进入0之前X'与X一样

2	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$
3	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$\forall i,j\neq 0,\ t_{ij}(n)=P(X'_n=j\mid X'_0=i)\triangleq p'_{ij}(n)$

$\forall i\neq 0,\ P(\exists n\geqslant 1, X'(n)=i\mid X'(0)=i)=1-P(\forall n\geqslant 1, X'(n)\neq i\mid X'(0)=i)$

$\leq 1-P(\exists n\geqslant 1, X'(n)=0, X'(m)\neq i, 1\leq m\leq n-1\mid X'(0)=i)<1$

$\therefore X'\ \forall i\neq 0\sim$ 瞬时 $\Rightarrow p'_{ij}(n)\longrightarrow 0$ as $n\to\infty, \forall j\neq 0$

② $y=(y_1,y_2,\cdots)'$ 则(#)的矩阵形式 $y\geqslant Ty \Rightarrow y\geqslant T^n y$

i.e. $y_i\geqslant \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}(n)y_j\geqslant \sum_{j=r+1}^{\infty} t_{ij}(n)y_j\geqslant \min_{s\geqslant 1}\{y_{r+s}\}\sum_{j=r+1}^{\infty} t_{ij}(n),\ \forall i\geqslant 1$

$\forall \varepsilon>0, \exists R$, s.t. $\dfrac{y_i}{\min_{s\geqslant 1}\{y_{R+s}\}}\leq \varepsilon$

③ 令 $A_n=\{X_k\neq 0\mid 1\leq k\leq n\}\Rightarrow \forall i\neq 0, P(A_\infty\mid X_0=i)=0$:

$P(A_\infty\mid X_0=i)=\lim_{n\to\infty}P(A_n\mid X_0=i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}t_{ij}(n)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{r}t_{ij}(n)+\sum_{j=r+1}^{\infty}t_{ij}(n)\right)$

$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{r}t_{ij}(n)+\dfrac{y_i}{\min_{s\geqslant 1}\{y_{r+s}\}}\right)\overset{①+②}{\leq}\varepsilon$

④ 0～常返:

$P(\exists n\geqslant 1, X_n=0\mid X_0=0)=p_{00}+\sum_{i\neq 0}p_{0i}P(\exists k\geqslant 1, X_k=0\mid X_0=i)$

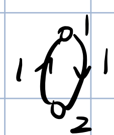
$=p_{00}+\sum_{i\neq 0}p_{0i}(1-P(A_\infty\mid X_0=i))$

$\overset{③}{=}p_{00}+\sum_{i\neq 0}p_{0i}=1$

6.4.2 极限定理

极限定理描述平稳分布与 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)$ 之间的关系

• 例16. $S=\{1,2\}$ $p_{12}=p_{21}=1$

则 $p_{11}(n)=\begin{cases}0 & n\text{ 奇数}\\ 1 & n\text{ 偶数}\end{cases}$  $p_{11}(n)\longrightarrow ?$

<u>定理17.</u> 马氏链 $X\sim$ 不可约 + 非周期 $(d(i)=1)$

则 $p_{ij}(n)\longrightarrow \pi_j$ as $n\to\infty, \forall i,j$

其中 $\mu_j = E[T_j | X_0 = j] = \begin{cases} \infty & j\text{瞬时} \\ \sum_{n=1} n f_{jj}(n) & j\text{常返} \end{cases}$

- 这次先不给证明,后两次课给
- 注:(a) X~瞬时或者零常返,则 $\forall i,j$ $p_{ij}(n) \to 0$ as $n\to\infty$

  无论 X 是否非周期,是否不可约

  (a.1) j 瞬时:推论 6.2.5

  (a.2) j 零常返:记 $C(j)$ ~ 包含 j + 不可约 + 闭的

  ① $C(j)$ 非周期,则由定理17, $p_{ij}(n) \to 0$ as $n\to\infty$

  ② $C(j)$ 周期, $d(j)=d$

  则 $Y=\{Y_n = X_{nd}, n\geq 0\}$ ~ 非周期

  $p^Y_{jj}(nd) = P(Y_n = j | Y_0 = j) \longrightarrow \frac{1}{\mu_j^Y} \overset{\text{作业}}{=} \frac{d}{\mu_j}$ $\therefore p_{jj}(n) \to 0, \forall j \in S$

  由定理 6.2.9, $p_{ij}(n) \to 0$ as $n\to\infty$, $\forall i,j\in S$

  (本笔记 P11 下 + P12 上)

  (b) 非零常返 + 非周期 $\Rightarrow$ $p_{ij}(n) \longrightarrow \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$

  (c) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$ 与 X_0 的分布无关

  $P(X_n=j) = \sum_{i\in S} P(X_0 = i) p_{ij}(n) \longrightarrow \frac{1}{\mu_j}, n\to\infty$

  前提 $p_{ij}(n)$ 有 (a)(b) 的收敛性

- 6.3.9(a)
- 不假设不可约

<u>定理21</u>: $\forall$ 非周期状态 j,都有 $p_{jj}(n) \longrightarrow \frac{1}{\mu_j}$ as $n\to\infty$

$i\neq j$, $p_{ij}(n) \longrightarrow \frac{f_{ij}}{\mu_j}$ as $n\to\infty$

<u>推论22</u>: 若 j ~ 非周期,则 $\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_{ij}(n) \longrightarrow \frac{f_{ij}}{\mu_j}$

- 例. Weather chain

  X_n ~ 第 n 天某地的天气情况

  ~ 1 = 阴天　2 = 晴天

$$\begin{array}{c|cc} \mathbb{P}: & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0.6 & 0.4 \\ 2 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

问题:长时间看,晴天占有比例?

$\mathbb{P}^n \to ?$

$X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 不可约+非周期

由定理3(P17),X存在平稳分布,由$\pi=\pi\mathbb{P}$ 及$\pi_1+\pi_2=1$ 得$\pi_1=\frac{1}{3}, \pi_2=\frac{2}{3}$

由定理17可知,无论X_1的分布是什么,经过比较长的时间后,X_n的分布基本上是$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

$$\mathbb{P}^n=(p_{ij}(n))_{2\times2} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

作业: P4的例5例6

·例7. 库存链

·库存策略:当库存量在当天下班时小于等于l时,第二天上班前补充到L.

·X_n~第n天下班时的库存量

D_{n+1}~第n+1天顾客需求量 $D_1,D_2,\cdots$ iid

·$l=1, L=5$

k	0	1	2	3
$P(D_{n+1}=k)$	0.3	0.4	0.2	0.1

$$X_{n+1}=\begin{cases}(X_n-D_{n+1})^+, & X_n>1 \\ (5-D_{n+1})^+, & X_n\le 1\end{cases}$$

·X_n: $S=\{0,1,2,3,4,5\}$

$$\begin{array}{c} \mathbb{P} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

问题:卖出一个商品获利12元,一个商品存在库房花2元.长期收益多少?

- 首先,长期来看,下班后剩余产品数量的分布

$\pi\mathbb{P}=\pi$ $\sum_{i=0}^{5}\pi_i=1$

$\pi=\frac{1}{9740}(885\ \ 1516\ \ 2250\ \ 2100\ \ 1960\ \ 1029)$

- 每天产品需求量平均为$ED_1=0.4\times1+0.2\times2+0.1\times3=1.1$

- 因为商店产品不足,无法满足顾客需求,每天的平均损失的产品数量:

分析：当天下班后余0,1，第二天早上产品数量为5，不会出现损失

余3,4,5，也不会出现损失

余2，只有需求量为3会出现损失

故损失量 $=(3-2)\times\pi(2)\times P(D_{n+1}=3)=0.0231$

- 每天平均卖出产品 $=1.1-0.023=1.077 \Rightarrow$ 收益 $=1.077\times 12=12.94$
- 因库存而花费，每天平均花费

$\pi(1)\times1\times2+\pi(2)\times2\times2+\pi(3)\times3\times2+\pi(4)\times4\times2+\pi(5)\times5\times2=5.20$

- 长期看每天平均收益 $=12.94-5.20=7.74$

作业：5.6.8.11,12

- 若 X 满足马氏性 $\left(P(X_{n+1}=j\mid \underbrace{X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0}_{\text{任一可能发生的事情.}})=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)\right)$

$\forall n\geq1,\ \forall j,i,i_{n-1},\cdots,i_0\in S$

则称 X 离散时间离散状态马氏链

- 强马氏性：将上述确定的 n 换成一个随机时间 $T(\omega)$

也就是给定 $T=n$，$X_T=j$ 的条件下，$X_0,\cdots,X_{T-1}$ 的信息对预测未来 $X_{T+1},X_{T+2},\cdots$ 不提供任何帮助.

i.e. $P(X_{T+1}=k\mid X_T=j, T=n, X_{T-1}\in A_{T-1},\cdots,X_0\in A_0)=P(X_{T+1}=k\mid X_T=j, T=n)=p_{jk}$

- 这个随机时间 T 不能是任意的随机时间，但若 T 为停时 (stopping time)，则上述强马氏性是对的.

3.28

定理17. 马氏链 $X\sim$ 不可约 + 非周期 $(d(i)=1)$

则 $p_{ij}(n)\to\frac{1}{\mu_j}$ as $n\to\infty$, $\forall i,j$

其中 $\mu_j=E[T_j\mid X_0=j]=\begin{cases}\infty & j\text{ 瞬时}\\ \sum_{n\geq1} n f_{jj}(n) & j\text{ 常返}\end{cases}$

6.3.9(a) 条件同上，则 $\forall i,j$, $\exists N(i,j)$, s.t. $\forall r\geq N(i,j)$, $p_{ij}(r)>0$

Pf of thm17:

(A) X瞬时，由推论6.2.5可得定理17.

(B) X常返：利用耦合方法(coupling)

已知$X=\{X_n, n\geq 0\}$ S IP 马氏链

令$Y=\{Y_n, n\geq 0\}$与X独立 S IP 马氏链

则称$Z=(X,Y)=\{Z_n=(X_n,Y_n), n\geq 0\}$为X的耦合链(coupled chain)

Z的状态空间 $S\times S$

转移概率 $p_{ij,kl}=P(Z_{n+1}=(k,l)|Z_n=(i,j))$

$\overset{\text{独立性}}{=} P(X_{n+1}=k|X_n=i)P(Y_{n+1}=l|Y_n=j)$

$=p_{ik}p_{jl}$

$\because$ X不可约+非周期

$\therefore \forall i,j,k,l, \exists N=N(i,j,k,l)>0$, s.t. $\forall n\geq N$, $p_{ik}(n)p_{jl}(n)>0$

$\therefore$ Z不可约+非周期

(B) X 非零常返+不可约

由定理3，对于X，$\exists!$平稳分布，记为$(\pi_j, j\in S)$，$\pi_j=\mu_j^{-1}$

Z $\exists$平稳分布 $v=(v_{ij}=\pi_i\pi_j, \forall(i,j)\in S\times S)$?

由定理3，Z的平稳分布唯一，且Z非零常返

断言：$p_{ij}(n)\to\mu_j^{-1} \Leftrightarrow p_{ij}(n)\to\pi_j \overset{①}{\Leftrightarrow} |p_{ik}(n)-p_{jk}(n)|\to 0$ as $n\to\infty$, $\forall i,j,k$ (*)

[①的原因：($\Rightarrow$)显然.

($\Leftarrow$) $\pi_k-p_{ik}(n)=\sum_{j\in S}\pi_j p_{jk}(n)-\sum_{j\in S}\pi_j p_{ik}(n)$

$=\sum_{j\in S}\pi_j(p_{jk}(n)-p_{ik}(n))$

$\therefore |\pi_k-p_{ik}(n)|\leq\sum_{j\in S}\pi_j|p_{jk}(n)-p_{ik}(n)|$

$\leq\sum_{j\in F}|p_{jk}(n)-p_{ik}(n)|+2\sum_{j\notin F}\pi_j$, F为S的有限子集

$\xrightarrow{n\to\infty} 2\sum_{j\notin F}\pi_j \xrightarrow{F\uparrow S} 0$]

令$X_0=i$, $Y_0=j$, 则$Z_0=(i,j)$ $P(X_0=i)=1$

对 $\forall s\in S$, $T=\min\{n\geq 1, Z_n=(s,s)\}$

Z 常返+不可约 ⊕ 问题6.15.6 $\Rightarrow f_{(i,j)(s,s)}=1=P(T<\infty)$

想法: 若 $m\leq n$, $X_m=Y_m$ 则 $X_n\sim Y_n$ 分布相同

$\Rightarrow$ 在 $\{T\leq n\}$ 的条件下, X_n, Y_n 分布相同 $\}\Rightarrow (*)$

又 T 有限 $(P(T<\infty)=1)$

$p_{ik}(n)=P(X_n=k|X_0=i)\underbrace{P(X_0=i)}_{=1}$

$=P(X_n=k)=P(X_n=k, T\leq n)+P(X_n=k, T>n)$

$=P(Y_n=k, T\leq n)+P(X_n=k, T>n)$

$\leq P(Y_n=k)+P(T>n)$

$=p_{jk}(n)+P(T>n)$

互换 i,j, $|p_{ik}(n)-p_{jk}(n)|\leq P(T>n)\to 0$ as $n\to\infty$

注 $(*)$ 的证明中只用到 Z 常返+不可约, 与 Z 是否非零常返无关

B2 X 零常返

B2.1 Z 瞬时 $\xrightarrow{\text{推论6.2.5}} P(Z_n=(j,j)|Z_0=(i,i))=(p_{ij}(n))^2\to 0$

B2.2 Z 非零常返

$T_{ii}^Z=\min\{n\geq 1, Z(n)=(i,i)\}$ $E[T_{ii}^Z|Z_0=(i,i)]<\infty$

$T_i=\min\{n\geq 1, X(n)=i\}$ $\therefore T_{ii}^Z\geq T_i$

X 零常返 $\Rightarrow E[T_i|X_0=i]=\infty\Rightarrow E[T_{ii}^Z|Z_0=(i,i)]=\infty$ 矛盾!

B2.3 Z 零常返 (反证说明此情况不存在)

$(*)$ 成立, 即 $|p_{ij}(n)-p_{kj}(n)|\to 0$ as $n\to\infty$ $\forall i,j$

"diagonal selection" $\exists n_1, n_2, \cdots$, 与 i,j 无关, s.t.

$p_{ij}(n_r)\to\alpha_j$, $r\to+\infty$, $\forall i,j$ (由 $(*)$ 成立, 极限与出发点 i 无关)

$\alpha=(\alpha_j, j\in S)$ 假若 $\exists j_0\in S$, $\alpha_{j_0}>0$ 思路有点抖 有点迷离...

1° $|\alpha|=\sum_{j\in S}\alpha_j$, $0<|\alpha|\leq 1$

$(\forall F\subset S$ 有限子集, $\lim_{r\to\infty}\sum_{j\in F}\alpha_j=\lim_{r\to\infty}\sum_{j\in F}p_{ij}(n_r)\leq 1)$

$2^\circ\ \sum_{k\in S}\alpha_k p_{kj}\le\alpha_j,\ \forall j\in S$

$\left(\sum_{k\in F}p_{ik}(n_r)p_{kj}\le p_{ij}(n_r+1)=\sum_{k\in S}p_{ik}p_{kj}(n_r)\right.$

$\left.\xrightarrow{r\to\infty}\sum_{k\in F}\alpha_k p_{kj}\le\sum_{k\in S}p_{ik}\alpha_j=\alpha_j\quad 再令F\uparrow S\right)$

3° 上式中等号成立.

(反证) $\sum_{k\in S}\alpha_k=\sum_{k\in S}\alpha_k\sum_{j\in S}p_{kj}=\sum_{j\in S}\sum_{k\in S}\alpha_k p_{kj}\overset{假若}{<}\sum_{j\in S}\alpha_j$ 矛盾!

4° 由 $2^\circ,3^\circ\Rightarrow\sum_{k\in S}\alpha_k p_{kj}=\alpha_j,\ \forall j\in S,\ 0<\sum_{k\in S}\alpha_k\le1$

令 $\pi=(\alpha_j/|\alpha|,\ j\in S)$ ~为X的平稳分布

由定理3, X~非零常返, 与X零常返矛盾!

4.2

· 若X满足马氏性 $(P(X_{n+1}=j\mid\underbrace{X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0}_{D_n})=P(X_{n+1}=j\mid\underbrace{X_n=i}_{A_n}))$ → 任一可能发生的事情.

$\forall n\ge1,\ \forall j,i,i_{n-1},\cdots,i_0\in S$

则称X离散时间离散状态马氏链

· 强马氏性: 将上述确定的n换成一个随机时间 $T(\omega)$

也就是给定 $T=n,\ X_T=j$ 的条件下, $X_0,\cdots,X_{T-1}$ 的信息对预测未来

$X_{T+1},X_{T+2},\cdots$ 不提供任何帮助.

i.e. $P(X_{T+1}=k\mid\underbrace{X_T=j,T=n,X_{T-1}\in A_{T-1},\cdots,X_0\in A_0}_{D_T^n})=P(X_{T+1}=k\mid\underbrace{X_T=j,T=n}_{A_T^n})=p_{jk}$ (*)

· 这个随机时间T不能是任意的随机时间, 但若T为停时(stopping time),

则上述强马氏性是对的.

· T为停时: 对 $\forall n\ge0$, 事件 $\{T=n\}$ 是否发生仅取决于 $\{X_0,\cdots,X_n\}$

i.e. 已知 $\{X_0(\omega),\cdots,X_n(\omega)\}$ 即可判断 $T(\omega)$ 是否为n

i.e. $\forall n\ge0,\ \{T=n\}\in\sigma(X_0,\cdots,X_n)$

· $D_T^n=D^n\cap\{T=n\},\ A_T^n=A^n\cap\{T=n\}$

· 若T为停时, 给定 $T=n$ 且 $X_T=j$ 的条件下, $X_0,\cdots,X_{T-1}$ 的信息对预测)

未来没有帮助，且 $X_{T+k}, k\geq 0$ 的运动与从 j 出发的马氏链相同

i.e. 给定 $T=n$ 且 $X_T=j$ 的条件下，若定义 $Y_0=X_T, Y_1=X_{T+1}, \cdots, Y_n=Y_{T+n}, \cdots$,

则 Y 与给定 $X_0=j$ 条件下的 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 具有相同的性质

例. $T_j=\min\{n\geq 1, X_n=j\}$ ~ 首达时 ~ 第一次到达 j 的时间

$\{T_j=n\}=\{X_1\neq j, X_2\neq j, \cdots, X_{n-1}\neq j, X_n=j\}$

$\{T_j=0\}=\phi$ T_j ~ 停时

作业: (*) 中 T 用 T_j 替换，证明 (*)

- $f_{ij}(m)=P(T_j=m|X_0=i)$: 从 i 出发的条件下，首次达到状态 j 的时间刚好为 m 的概率

$f_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m)=P(T_j<\infty|X_0=i)$:

①从 i 出发，可以到达 j 的概率

②从 i 出发，至少到达 j 一次的概率

③从 i 出发，有限时间内到达 j 的概率

- 令 $T_j^1 \triangleq T_j$, $T_j^2 \triangleq \min\{n>T_j^1, X_n=j\}$, $T_j^k \triangleq \min\{n>T_j^{k-1}, X_n=j\}, k\geq 2$

T_j^k ~ 停时 $T_j^k \wedge T_i^m$ ~ 停时

- 在 $X_0=j$ 条件下，X 最少回到 j 1次的概率为 $f_{jj}=P(T_j^1<\infty|X_0=j)$

在 $X_0=j$ 条件下，X 最少回到 j 2次的概率为 $f_{jj}\times f_{jj}$

- $P(T_j^2<\infty|X_0=j)=P(T_j^2<\infty, T_j^1<\infty|X_0=j)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P(T_j^2<\infty, T_j^1=n, X_{T_j^1}=j|X_0=j)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P(T_j^2<\infty|T_j^1=n, X_{T_j^1}=j, X_0=j)P(T_j^1=n, X_{T_j^1}=j|X_0=j)$$

$$\overset{\text{强马氏性}}{=}\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}\cdot P(T_j^1=n|X_0=j)$$

$$=f_{jj}^2$$

- $P(T_j^k<\infty|X_0=j)=f_{jj}^k$

- 若 $P(X_0=j)=1$ 且 j 常返，则 $T_j^1, T_j^2-T_j^1, \cdots, T_j^k-T_j^{k-1}$ i.i.d

直观上：从常返态j出发，以概率1所有轨道都会回到j，之后所有轨道从j出发，循环.

- $f_{jj}<1 \longleftrightarrow$ 瞬时，从j出发，至少返回k次的概率 $f_{jj}^{k} \to 0$ as $k\to\infty$

直观上：越往后越难发现到达j的路.

- $f_{jj}=1 \longleftrightarrow$ 常返，从j出发，至少返回k次的概率 $f_{jj}^{k}=1$

引理1.3：若$\forall i\in S$，都有$P(T_j\le k|X_0=i)\ge\alpha>0$

则 $P(T_j>nk|X_0=i)\le(1-\alpha)^n$

直观上：$P(T_j>nk|X_0=i)=P(T_j>k,T_j>2k,\cdots,T_j>nk|X_0=i)$

$=P(T_j>k|X_0=i)P(T_j>2k,\cdots,T_j>nk|X_0=i)$

$\le(1-\alpha)P(T_j>2k,\cdots,T_j>nk|X_0=i)$

$\le\cdots\le(1-\alpha)^n$ （不严格证明）

例.
$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 2 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array}$$

$P(T_3\le1|X_0=i)\ge0.1$

$\therefore P(T_3>n|X_0=3)\le(0.9)^n\to0$ as $n\to\infty$

$\therefore P(T_3=\infty|X_0=3)=0$

$\Updownarrow$

$P(T_3<\infty|X_0=3)=1=f_{33}$

- 由强马氏性，$P(T_j^k<\infty|X_0=i)=f_{ij}f_{jj}^{k-1}$

记$N(j)$为$\{X_1,X_2,\cdots\}$经过j的次数

则 $E[N(j)|X_0=i]=f_{ij}/(1-f_{jj})$

Pf. $E[N(j)|X_0=i]=\sum_{k=1}^{\infty}P(N(j)\ge k|X_0=i)$

$=\sum_{k=1}^{\infty}P(T_j^k<\infty|X_0=i)$

$=\sum_{k=1}^{\infty}f_{ij}f_{jj}^{k-1}=f_{ij}/(1-f_{jj})$

- 由$N(j)=\sum_{n=1}^{\infty}1_{X_n=j}$可得$E[N(j)|X_0=i]=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}(n)$
- j常返$\Leftrightarrow f_{jj}=1\Leftrightarrow E[N(j)|X_0=i]=\infty=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}(n)$

※双随机马氏链

· 转移矩阵$\mathbb{P}$称为双随机的，若列和为1，i.e. $\sum_{i\in S} p_{ij}=1$

· 双随机马氏链 + $|S|=N$，则其平稳分布为 $\pi_j=\frac{1}{N},\forall j\in S$.

Pf: 若 $\pi_j=\frac{1}{N},\forall j\in S$

则 $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{i\in S}p_{ij}=\frac{1}{N}=\pi_j$

· $S=\{0,1,2,\cdots,L\}$　$p_{i,i+1}=0.5,\ i=0,1,\cdots,L-1$

$p_{i,i-1}=0.5,\ i=1,2,\cdots,L$

$p_{00}=p_{LL}=0.5$

若$L=4$

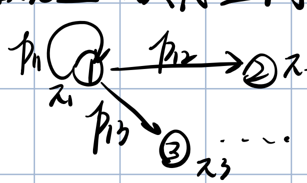
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0&1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}\frac12&\frac12&0&0&0\\ \frac12&0&\frac12&0&0\\ 0&\frac12&0&\frac12&0\\ 0&0&\frac12&0&\frac12\\ 0&0&0&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\end{array}\rightarrow \text{双随机}$$

※Detailed Balance Condition (DBC)

若$\forall i,j\in S$，$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，则称$\pi=(\pi_j,j\in S)$满足DBC.

· DBC比$\pi\mathbb{P}=\pi$强：两边对i求和得 $\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}=\sum_{i\in S}\pi_j p_{ji}=\pi_j$

· 直观上：状态空间S, $\mathbb{P}$，π～平稳分布



π_i看成结i拥有某种物质的量

$\pi\mathbb{P}=\pi$:

$\pi_1 p_{11}\rightarrow$ ①　　时间为1时，①的物质的量 $\sum_{i\in S}\pi_i p_{i1}=\pi_1$

$\pi_1 p_{12}\rightarrow$ ②　　从①流出到$S\backslash$①的量

$\pi_1 p_{13}\rightarrow$ ③　　$=$从$S\backslash$①流入到①的量　　全局平衡

DBC:　　$i\rightarrow j$　$\pi_i p_{ij}$
　　　　$j\rightarrow i$　$\pi_j p_{ji}$　相等

每个局部都是平衡的

从i流到j的量=从j流i的量

例. 存在平稳分布π,但不是DBC.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} & \\ 3 & & & \end{array}$$

若DBC,则 $\pi_3 p_{31} = \pi_1 p_{13} = \pi_1 0 = 0$

$\Rightarrow \pi_3 = 0$

而由双随机知 $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 矛盾!

例. $S = \{l, l+1, \cdots, r-1, r\}$

$\mathbb{P}$: $p_{i,i+1} = p_i \ (l \le i \le r-1)$ $p_{i,i-1} = q_i \ (l+1 \le i \le r)$

$p_{ii} = 1 - p_i - q_i \ (l \le i \le r)$

若DBC,当 $l \le i \le r-1$,有

$$\pi_i p_{i,i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1,i} \quad \text{i.e.}\ \pi_i p_i = \pi_{i+1} q_{i+1}$$

$\therefore \pi_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} \pi_i$

$$\therefore \pi_{l+1} = \frac{p_l}{q_{l+1}} \pi_l,\ \pi_{l+2} = \frac{p_{l+1}}{q_{l+2}} \pi_{l+1}, \cdots, \pi_{l+i} = \pi_l \cdot \frac{p_{l+i-1} \cdots p_l}{q_{l+i} \cdots q_{l+1}}$$

※ Random Walks on Graphs

图: 顶点集V

临接矩阵 $A(u,v)$: 若u,v之间有边,则 $A(u,v)=1$,否则 $A(u,v)=0$

规定 $A(u,u)=0$.

结点u的度 $d(u)$: u所有临接点的个数, $d(u) = \sum_{v \in V} A(u,v)$

图上随机游走的规则(考虑最简单的规则)

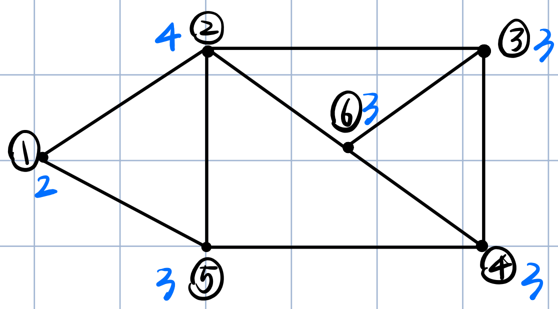
从结点u出发,等概率往其临接点转移 i.e. $p_{uv} = \frac{A(u,v)}{d(u)}$

令 $\pi_u = c\,d(u)$, $u \in V$, $c>0$ 常数

则 $\pi_u p_{uv} = cA(u,v) = cA(v,u) = \pi_v p_{v,u} \longrightarrow$ DBC

$\sum_{v \in V} \pi_v = 1 \Rightarrow \sum_{u \in V} c\,d(u) = 1 \Rightarrow c = 1 / \sum_{u \in V} d(u)$

$\Rightarrow \pi_v = d(v)/\sum_{u\in V} d(u)$ —— 唯一平稳分布



例2. 网球规则：先赢4分胜利。但 4:3/3:4 时继续，直至差2球。

若甲A赢一球 0.6，输 0.4。

若比分为3:3，A胜利概率？

解：A的比分差 $S=\{0,\pm1,\pm2\}$。

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \\
\mathbb{P}= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & & \\ & 0.6 & 0 & 0.4 & \\ & & 0.6 & 0 & 0.4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

设 $h(x)$ 为比分差为 x，最终胜利的概率。

则 $\begin{cases} h(2)=1,\ h(-2)=0. \\ h(x)=\sum_{y\in S} p_{x,y}\, h(y).\ (x\neq 2,-2). \end{cases}$

Theorem 1.28. 马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$. S. A, B 为 S 子集，满足 $\overset{C.}{\overset{\parallel}{S/(A\cup B)}}$ 为有限集。

函数 $h(x): S\to[0,1]$ 满足

$\forall a\in A\quad h(a)=1,\quad \forall b\in B\quad h(b)=0.$

$\forall c\in C.\quad h(x)=\sum_{y\in S} p_{xy}\cdot h(y).$

记 $V_A=\min\{n\geq 0, X_n\in A\}$. $V_B=\min\{n\geq 0, X_n\in B\}$.

若 $\forall x\in C$. $P(V_A\wedge V_B<\infty|X_0=x)>0$. ($V_A\wedge V_B$ 为取小).

则 $h(x)=P(V_A<V_B|X_0=x)$ #.

证明: $V_A\wedge V_B$ 表示首次进入 $A\cup B$ 的时刻.

$\because \forall x\in A\cup B$, $P(V_A\wedge V_B<\infty|X_0=x)=1$.

记 $T=V_A\wedge V_B$ ~停时.

对 $\forall x\in C$. $\exists k_x$ $\alpha_x>0$ s.t. $P(T\leq k_x|X_0=x)\geq\alpha_x>0$.

由于 C 有限. 取 $k=\max\{k_x\}$. $\alpha=\min\alpha_x$.

则对 $\forall x\in S$. 有. $P(T\leq k|X_0=x)\geq\alpha>0$.

例1.42. A有 x RMB. B有 $N-x$.

规则: A, B各抛一次硬币. 若相同. 则A赢B 1元. 反之, B——A 1元.

A取胜?

$S=\{0,\cdots,N\}$.

$h(0)=0$, $\underline{h(N)=1}$. $h(x)=\sum_{y\in S}P_{x,y}h(y)$. $(x\neq 0,N)$.

例1.43. 固定 N 个基因. 基因为 A, a. 记 X_n 为 n 时刻 A 型个数. 则 a 型 $N-X_n$.

X_n ~马氏链. $S=\{0,1,\cdots,N\}$. $p_{ij}=\binom{N}{j}(\frac{i}{N})^j(1-\frac{i}{N})^{N-j}$.

$h(0)=0$, $h(N)=1$.

$h(x)=\sum_{y\in S}P_{x,y}\cdot h(y)$ $(x\neq 0,N)$.

例1.44. Gambler's Ruin

赌徒赢 1RMB 的概率为 $p(\neq\frac{1}{2})$

输 1RMB 的概率为 $1-p$ 每次赌博行为独立

赌徒赌资达到 N 或 0 时离开赌场

X_m ~ m 次赌博后赌资. 则 $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 为马氏过程

$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$

$\mathbb{P}$: $p_{i,i+1}=p$, $1\le i\le N-1$, $p_{00}=1$

$p_{i,i-1}=1-p$, $1\le i\le N-1$, $p_{NN}=1$

记 $h(i)=P(V_N<V_0|X_0=i)$ ~ 初始赌资为 i RMB 情况下，赌徒没有破产的概率

$h(N)=1$ $h(0)=0$

$0<i<N$, $h(i)=p_{i,i+1}h(i+1)+p_{i,i-1}h(i-1)$

$=p\,h(i+1)+(1-p)h(i-1)$

$\Rightarrow h(i+1)-h(i)=\frac{1-p}{p}(h(i)-h(i-1))$

$\Rightarrow h(i)=\frac{\theta^i-1}{\theta^N-1}$, $\theta=\frac{1-p}{p}$ $(*)$

例1.45 轮盘赌 18红+18黑+2绿=38

规则：若红，赌徒赢1RMB $p=\frac{18}{38}$

其他，庄家赢1RMB $q=1-p=\frac{20}{38}$

赌徒原始赌资50RMB，当赌资为100RMB时，他离开赌场。

则他能赢到100RMB离开赌场的概率？

将 $i=50$, $N=100$, $\theta=\frac{1-p}{p}=\frac{20}{18}$ 代入上例结果 $(*)$

$P(V_{100}<V_0|X_0=50)=\frac{\theta^i-1}{\theta^N-1}=0.005128$ （破产概率0.995）

庄家的角度：庄家赢1RMB $q=\frac{20}{38}$

庄家赌资100RMB，则庄家赌资在破产之前达到 N RMB 的概率？

$\theta=\frac{9}{10}$, $P(V_N<V_0|Y_0=100)=\frac{(\frac{9}{10})^{100}-1}{(\frac{9}{10})^N-1}=P_N$

当 $N\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{N\to\infty}P_N=1-2.656\times10^{-5}$

庄家永远不会破产的概率为 $1-2.656\times10^{-5}$

当 $\theta<1$ 时，由 $(*)$ 知

$P(V_0=\infty|Y_0=i)\overset{?}{=}\lim\limits_{N\to\infty}P(V_N<V_0|Y_0=i)=1-\theta^i$

$(**)$ $P(V_0<\infty|Y_0=i)=\theta^i\longrightarrow$ 有限时间内破产的概率

由(**)发生的概率为 $i\to 0$, $i\to i-1\to i-2\to\cdots\to 1\to 0$

$j\to j-1$ 的概率与 $1\to 0$ 的相同 $P(V_0<\infty \mid Y_0=1)$

∴由马氏性 $P(V_0<\infty \mid Y_0=i)=\left(P(V_0<\infty \mid Y_0=1)\right)^i$

例1.46 $S=\{1,2,\cdots,7\}$

$$
\mathbb{P}\quad
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\
2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\
5 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

转移概率图？分析每个状态性质？

重新排序

$$
\begin{array}{c|cc|cc|ccc}
 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \\
\hline
2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 \\
\hline
1 & & & 0.7 & 0.3 & & & \\
5 & & 0 & 0.6 & 0.4 & & 0 & \\
\hline
4 & & & & & 0.5 & 0.5 & 0 \\
6 & & 0 & & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\
7 & & & & & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

A B

求 $p_{ij}(n)$, $\forall i,j\in S$. $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)=?$

记 $A=\{1,5\}$ $B=\{4,6,7\}$

A, B不可约+闭+非零常返, ∃ π_A, π_B 平稳分布

$$
\begin{cases}
\pi_A P_A=\pi_A & \pi_A=\left(\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right)=\left(\mu_1^{-1}\ \ \mu_5^{-1}\right) \\
\pi_B P_B=\pi_B & \pi_B=\left(\frac{8}{17}\ \ \frac{5}{17}\ \ \frac{4}{17}\right)=\left(\mu_4^{-1}\ \ \mu_6^{-1}\ \ \mu_7^{-1}\right)
\end{cases}
$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} p_{11}(n)=\lim\limits_{n\to\infty} p_{51}(n)=\mu_1^{-1}=\frac{2}{3}$

1、5非周期 $\lim_{n\to\infty} p_{15}(n) = \lim_{n\to\infty} p_{55}(n) = \mu_5^{-1} = \frac{1}{3}$

同理 $i,j\in B$，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \mu_j^{-1}$

$i\in A,\ j\notin A,\ p_{ij}(n)=0,\ \forall n\geq 1$

$i\in B,\ j\notin B,\ p_{ij}(n)=0,\ \forall n\geq 1$

$i=2$ or 3 ?

从2 or 3出发，一旦进入A，则永远停留在A

一旦进入B，则永远停留在B

由定理1.28，设 $h(1)=h(5)=1$，$h(4)=h(6)=h(7)=0$

$$\begin{cases} h(2)=0.2h(2)+0.3h(3)+0.1h(1)+0.4h(4) \\ h(3)=0.5h(2)+0.2h(5)+0.3h(4) \end{cases}$$

$\Rightarrow h(2)=\frac{11}{40}$，$h(3)=\frac{2}{5}$

$h(2)=P(V_A<V_B|X_0=2)=\frac{11}{40}$，$h(3)=P(V_A<V_B|X_0=3)=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow P(V_B<V_A|X_0=2)=\frac{29}{40}$

看状态2，一旦进入A之后，长时间来看，停留在1的概率为 $\frac{2}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} p_{21}(n)=\frac{11}{40}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{60}$　$\lim_{n\to\infty} p_{25}(n)=\frac{11}{40}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{120}$

$\lim_{n\to\infty} p_{22}(n)=\lim_{n\to\infty} p_{23}(n)=0$

例1.47 两年制学习 $S=\{1,2,G,D\}$　G-Graduate　D-Drop off

	1	2	G	D
1	0.25	0.6	0	0.15
2	0	0.2	0.7	0.1
G	0	0	1	0
D	0	0	0	1

问题：求一个学生在校的平均时间

设 $g(i), i\in S$ 表示初始在 i 状态下在校平均时间

$$\begin{cases} g(G)=g(D)=0 \\ g(1)=1+0.25g(1)+0.6g(2) \\ g(2)=1+0.2g(2) \end{cases} \Rightarrow g(1)=\frac{1.75}{0.75}=\frac{7}{3},\ g(2)=\frac{1}{0.8}=\frac{5}{4}$$

例1.48 网球比赛：令$g(i)$表示状态i时,到比赛结束需要进行的平均场次.

定理1.29: $X=\{X_0,X_1,X_2,\cdots\}$ S

假设: $A\subset S$ $C=S-A$ 有限集合

· $V_A=\inf\{n\geq 0, X_n\in A\}$

· 对$\forall x\in C, P(V_A<\infty|X_0=x)>0$

· $g: S\to R_+$ s.t. $\forall a\in A, g(a)=0$

$\forall x\in C, g(x)=1+\sum_{y\in S}P_{xy}g(y)$ $\cdots(1.27)$

则$g(x)=E[V_A|X_0=x]$

注: 1. 对$\forall x\in C$, 有 $P(V_A<\infty|X_0=x)>0$

$\Rightarrow$对固定x, $\exists\ 0<N_x<\infty$, s.t. $P(V_A\leq N_x|X_0=x)=\alpha_x>0$

$\Rightarrow C$中元素有限, 取$N=\max_{x\in C}N_x$, $\alpha=\min_{x\in C}\alpha_x>0$

则 $\forall x\in C, P(V_A\leq N|X_0=x)\geq\alpha>0$

2. 由V_A的定义, $\forall x\in A, P(V_A=0|X_0=x)=1$

3. 由1.和2. 及引理1.3: $\forall x\in S, P(V_A>kN|X_0=x)\leq(1-\alpha)^k$

4. 由于V_A取值在$\{0,1,2,\cdots\}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E[V_A|X_0=x]&=\sum_{i=0}^{\infty}P(V_A>i|X_0=x)\\&=\sum_{i=0}^{N-1}P(V_A>i|X_0=x)+\sum_{i=N}^{2N-1}P(V_A>i|X_0=x)+\cdots\\&\leq N+NP(V_A>N|X_0=x)+NP(V_A>2N|X_0=x)+\cdots\\&\leq N(1+(1-\alpha)+(1-\alpha)^2+\cdots)<\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow P(V_A<\infty|X_0=x)=1$, $\forall x\in S$

5. $X(V_A)\in A$

证明: 与定理1.28类似

1. 由(1.27), $\forall x\in C, g(x)=1+E[g(X_1)|X_0=x]$

2. 由马氏性, $g(x)=E[V_A\wedge n|X_0=x]+E[g(X_{V_A\wedge n})|X_0=x]$

3. 令 $n\uparrow+\infty$, $E[V_A\wedge n|X_0=x]\uparrow E[V_A|X_0=x]$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}E[g(X_{V_A\wedge n})|X_0=x]=E[g(\underset{\in A}{\underline{X_{V_A}}})|X_0=x]=0$

5. $g(x)=E[V_A|X_0=x]$

例1.49 抛硬币,连续出现两次反面,需要抛几次硬币? 6

出现一次正面,紧跟一次反面,需要抛几次硬币? 4

Q1: 定义 X_n 为 ①若第n次和第n-1次都为反面,则 $X_n=2$

②若第n次反面,第n-1次为正面,则 $X_n=1$

③若第n次正面,第n-1次为反面,则 $X_n=0$

$$S=\{0,1,2\}\qquad \mathbb{P}:\ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array} & \begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & 0 & \frac12\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

求 $E[V_2|X_0=0]$ $(V_2=\min\{n\geq 0, X_n=2\})$.

$$\begin{cases}g(2)=0\\ g(1)=\frac12 g(0)+\frac12 g(2)+1\\ g(0)=\frac12 g(0)+\frac12 g(1)+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(1)=4\\ g(0)=6\end{cases}\Rightarrow E[V_2|X_0=0]=6$$

$$\text{Q2: } S=\{HH,HT,TH,TT\}\qquad \mathbb{P}:\ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc}HH & HT & TH & TT\end{array}\\ \begin{array}{c}HH\\HT\\TH\\TT\end{array} & \begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12\\ \frac12 & \frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}\end{array}$$

记 X_n 为第n次抛硬币的结果 $X_n=H/T$

$Y_n=(X_{n-1},X_n)_{n\geq2}$ 令 $Z_n=Y_{n+2}, n\geq 0$

$f(i)=E[V_{HT}|Z_0=i]=?\ \forall i\in S$ $(V_{HT}=\min\{n\geq 0, Z_n=HT\})$

由定理1.29 $\Rightarrow f(HH)\ \underline{f(HT)}\ f(TH)\ f(TT)$

是想要的吗? 不是.

$$E[\min\{n\geq 0,(X_{n-1},X_n)=HT\}|X_0=0]=2+\frac14(f(HH)+f(HT)+f(TH)+f(TT))$$

$$=4$$

作业：求平均需要抛多少次骰子，我们可以看到骰子每个面？

例1.5.2. 赌徒破产问题，求赌徒平均进行的赌博次数

- 若公平赌博，$p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=\frac{1}{2}$

  令 $\tau=\min\{n\geq 0, X_n=0 \text{ or } N\}$，则 $E[\tau|X_0=x]=x(N-x)$，$0\leq x\leq N$

- 若不公平赌博 $p_{i,i+1}=p\neq\frac{1}{2}$ $p_{i,i-1}=q=1-p$

  则 $E[\tau|X_0=x]=\frac{x}{q-p}-\frac{N}{q-p}\cdot\frac{1-(q/p)^x}{1-(q/p)^N}$，$0\leq x\leq N$

  · 若 $p<q$，则 $q/p>1$，$\frac{N}{1-(q/p)^N}\to 0$ as $N\to\infty$

  $$\Rightarrow E[\tau|X_0=x]=\frac{x}{q-p}$$

  直观上，每次赌博的平均收益为 $(p-q)$ 元。

  因此平均赌博次数为 $\frac{x}{q-p}$

  · 若 $p>q$，则 $(\frac{q}{p})^N\to 0$ as $N\to\infty$

  $$\Rightarrow E[\tau|X_0=x]\approx\frac{N-x}{p-q}[1-(\frac{q}{p})^x]+\frac{x}{p-q}(\frac{q}{p})^x$$

  直观上，$(\frac{q}{p})^x$ 为破产概率，而 $1-(\frac{q}{p})^x$ 为赢 $N-x$ 的概率

  每次输/赢 $|p-q|$ 元，$\frac{N-x}{p-q}\sim$ 没有破产平均赌博次数

  $\frac{x}{p-q}\sim$ 破产平均赌博次数

6.8 Birth Process and Poisson Process

例：排队买菜，超市结账，放射源发射粒子数目。

用 $N(t)$，$t\geq 0$ 描述 $[0,t]$ 时间内发生的人数/粒子数

(a) $N(0)=0$ （假设0时刻开始计算）

$N(t)\in\{0,1,2,\cdots\}$

(b) $N(t)\nearrow$

(c) 在 $(t,t+h]$ 这段时间内 $P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t,h)=\lambda_t h+o(h)$

$P(N(t+h)-N(t)=2)=o(h)$

· 定义: 给定 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $N(t), t\geq 0$ 上的一族 r.v. 状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$

称 $N=\{N(t), t\geq 0\}$ 为强度为 λ 的 Poisson 过程, 若

(a) $N(0)=0$, $N(t)\uparrow$

(b) $P(N(t+h)=m+n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\lambda h+o(h) & m=1\\ o(h) & m>1\\ 1-\lambda h+o(h) & m=0\end{cases}$

(c) 当 $s<t$ 时, $N(t)-N(s)\perp N(s')$, $s'\in[0,s]$

($N(t)-N(s)$ 表示 $(s,t]$ 时间内发生的事件个数)

注: ① $P(N(t+h)\geq n+2 \mid N(t)=n)=o(h)$

② N 也称计数过程

③ 由 Poisson 过程的定义, 对 $\forall$ 固定 $t_0\geq 0$, 令 $Y(s)=N(t_0+s)-N(t_0)$

$Y=\{Y(s), s\geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的 Poisson 过程

· $N(t)$ 的分布:

定理2: $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布

i.e. $P(N(t)=j)=\dfrac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}$, $j=0,1,2,\cdots$

Pf: $P(N(t+h)=j)=\sum_{i\in S}P(N(t)=i)P(N(t+h)=j \mid N(t)=i)$

$=P(N(t)=j-1)P(N(t+h)=j \mid N(t)=j-1)$

$+P(N(t)=j)P(N(t+h)=j \mid N(t)=j)+o(h)$

记 $P_j(t)=P(N(t)=j)$

则 $\begin{cases}P_0(t+h)=P_0(t)(1-\lambda h+o(h))+o(h)\\ P_j(t+h)=P_{j-1}(t)(\lambda h+o(h))+P_j(t)(1-\lambda h+o(h))+o(h), & j\geq 1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}P_0(t+h)-P_0(t)=-\lambda h P_0(t)+o(h)\\ P_j(t+h)-P_j(t)=\lambda h P_{j-1}(t)-\lambda h P_j(t)+o(h), & j\geq 1\end{cases}$

同除以 h 并令 $h\to 0$, 得 $\begin{cases}P_0'(t)=-\lambda P_0(t) & (*1)\\ P_j'(t)=\lambda P_{j-1}(t)-\lambda P_j(t), \ j\geq 1 & (*2)\end{cases}$

边界条件: $P_j(0)=\delta_{j0}=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & j\neq 0\end{cases}$ i.e. $P_0(0)=1$, $P_j(0)=0$, $j\geq 1$

法一(递推法):

由(*1)+边界条件$P_0(0)=1 \Rightarrow P_0(t)=e^{-\lambda t}$

由(*2),当$j=1$时, $P_1'(t)=\lambda P_0(t)-\lambda P_1(t) \Rightarrow P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$

递推知 $P_j(t)=\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}$

法二(生成函数):

$G(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t)s^j = Es^{N(t)}$

(*2)中同乘s^j,得 $s^jP_j'(t)=s^j\lambda P_{j-1}(t)-s^j\lambda P_j(t)$, $j\geq 1$

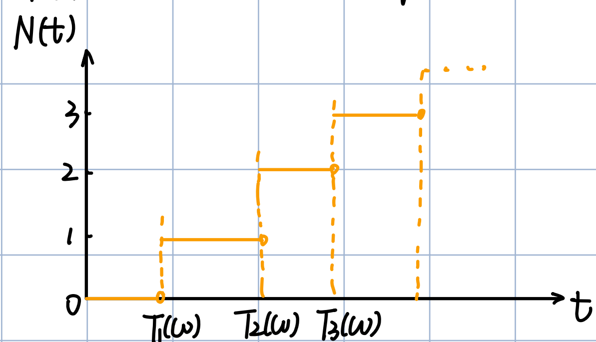
另外,$j=0$时, $P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$

则 $\sum_{j=0}^{\infty} s^jP_j'(t)=\lambda\sum_{j=1}^{\infty} s^jP_{j-1}(t)-\lambda\sum_{j=0}^{\infty} s^jP_j(t)$

i.e. $\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}=\lambda sG(s,t)-\lambda G(s,t)$

结合边界条件$G(s,0)=1$,解得 $G(s,t)=e^{\lambda(s-1)t}=e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}s^j$

· Poisson过程的运动



$T_1, T_2, T_3, \cdots$

$T_0=0$, $T_m=\inf\{t\geq 0, N(t)=m\}$

则T_m为N第m次跳的时刻

(4.16).

6.8. 生灭过程和Poisson过程.

· $\{N(t), t\geq 0\} = N \sim \lambda$. Poisson过程.

$N(t) \sim \lambda t$ poisson分布.

· N如何运动?

· 令 $T_0 = 0$. $T_m = \inf\{t\geq 0, N(t)=m\}$.

则 T_m 为第 m 次跳

· 记 $X_m = T_m - T_{m-1}$ (第 m-1 次跳与第 m 次跳之间的等待时间).

· $N \xrightarrow{\text{导出}} T_0, T_1 \xrightarrow{\text{导出}} X_0, X_1 \cdots$

$N(t) = m \Leftrightarrow T_m \leq t < T_{m+1}$ $T_m = \sum_{n=1}^{m} X_n$.

$N(t) = \max\{m, T_m \leq t\}$.

Thm 10. $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d. ~ 都服从参数为λ的指数分布.

证明: 四 X_1: $P(X_1 > t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$ ~ 参数为λ的指数分布.

· $X_2|X_1$ $P(X_2 > t | X_1 = t_1) = P(\ (t_1, t_1+t]$ 之间无跳跃 $| X_1 = t_1)$.

$\sim \{X_1 = t_1\} = \{N(t_1)=1, 0\leq s < t_1, N(s)=0\}$.

$(t_1, t_1+t]$ 无跳, $N(t_1+t) - N(t_1) = 0$. 与 t_1 之前发生事无关.

$= P(N(t_1+t) - N(t_1) = 0 \ | N(t_1)=1, 0\leq s \leq t_1, N(s)=0)$.

$= P(N(t_1+t) - N(t_1) = 0$.

$= e^{-\lambda t}$.

∴ X_1 与 X_2 独立且同分布 四

Poisson ~~分布~~ 过程 等价定义.

(A). (i) $N(0) = 0$.

(ii) $N(t+s) - N(s) \sim \lambda t$ Poisson分布.

(iii) $N(t)$ ~ 独立增量. i.e. $\forall n$. $0\leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

$N(t_1) - N(t_0), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$. 相互独立.

(4.21).

$$= \begin{cases} 1-\lambda_m h + o(h). & m=0 \\ \lambda_m h + o(h). & m=1 \\ o(h). & m>1 \end{cases}.$$

③带迁移的简单生过程. $\lambda_m = m\lambda + \nu$. ν为迁移率.

☆ $N \sim$ 生过程. $\sim \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \cdots$

· $P_{ij}(t) \overset{\text{记}}{=} P(N(s+t)=j \mid N(s)=i) \overset{\text{?}}{=} P(N(t)=j \mid N(0)=i)$. (时间齐次).

转移概率.

·(向前方程).

对 $\forall\, i,j \in \{0,1,2,\cdots\}$ 有.

$$\begin{cases} \forall j \geq i & P_{ij}'(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t). \\ \lambda_{-1}=0. & P_{ij}(0) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

·(向后方程).

$\forall\, i,j \in S$.

$$\begin{cases} j \geq i: & P_{ij}'(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - \lambda_i P_{ij}(t). \\ P_{ij}(0) = \delta_{ij} & \# . \end{cases}$$

作业. P_{300}. 24 P_{355} 1, 5 #.

Thm 14. 向前方程有唯一解. 且该解为向后方程一个解.

Pf: 方法 1. · $P_{ij}(t) = 0$. $j < i$.

· $P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$

· $P_{i,i+1}(t)$ 递推. (唯一性).

方法 2: Laplace 变换.

设 $g: R \to R$. 令 $\hat{g}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta x} g(x)\, dx$. $\theta \in C$.

$\hat{g}$ 称为 g 的 Laplace 变换.

令 $\theta = i\lambda$. $\lambda \in R$. 则 $\hat{g}(i\lambda)$ 为 Fourier 变换.

· $g(x)$ 可由 $\hat{g}$ 逆变换唯一确定.

$\boxed{\text{若 } F: [0,\infty) \to R. \quad f(x) = F'(x). \text{ 则 } \theta \cdot \hat{F}(\theta) = \hat{f}(\theta) + F(0)}$ #.

· 向前 Laplace 变换.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta t} p_{ij}(t)\,dt = \lambda_{j-1}\int_0^{+\infty} e^{-\theta t} p_{i,j-1}(t)\,dt - \lambda_j \int_0^{+\infty} e^{-\theta t} p_{ij}(t)\,dt.$$

$\Rightarrow (\theta+\lambda_j)\cdot\hat{p}_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \lambda_{j-1}\hat{p}_{i,j-1}(\theta).$

① $j=i$　$p_{i,j-1}(t)=0 \Rightarrow \hat{p}_{ii}(\theta) = \frac{1}{\theta+\lambda_i}$

② $j>i$　$\hat{p}_{ij}(\theta) = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\lambda_i}{\theta+\lambda_i}\times\cdots\times\frac{\lambda_j}{\theta+\lambda_j}$ #

将此 Laplace 变换代入向后方程 Laplace 变换可知此解亦为向后方程的解. ▫

注. 向后方程的解不唯一.

Thm16. $p_{ij}(t) \le \pi_{ij}(t)$. $\forall i,j,t$ #.　(p_{ij} 为向前方程解, π_{ij} 为向后解)

☆ $\sum_{j\in S} p_{ij}(t)=1$　$\sum_{j\in S}\pi_{ij}(t)=1$.　(17). 应该成立.
则 Thm16 应该只有等号.

☆ (17) 有可能不成立!

记 $T_n = \inf\{t\ge 0, N(t)=n\}$. $T_\infty \triangleq \lim_{n\to\infty} T_n$.

· def18. $p(T_\infty=\infty)=1$　N 为 honest.
$p(T_\infty=\infty)<1$　N 为 dishonest.

注. (17) $\Leftrightarrow p(T_\infty>t)=1$.
(17) 对 $\forall t\ge 0$ 成立. 则 N 为 honest #.

Thm19. N 为 honest $\Leftrightarrow \sum_n \lambda_n^{-1} = \infty$.

· 记 $X_n = T_n - T_{n-1} \sim \lambda_{n-1}$　相互独立.

引理20. 令 $X_1,\cdots$ 相互独立 r.v. $X_n \sim \lambda_{n-1}$ 指数分布. $T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

则 $p(T_\infty<\infty) = \begin{cases} 0 & \sum_n \lambda_n^{-1} = \infty. \\ 1 & \sum_n \lambda_n^{-1} < \infty \end{cases}$

(B). $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d. $\lambda\sim$指数分布.

记 $T_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n\geq 1$ $T_0=0$.

$N(t)=\max\{n, T_n\leq t\}\sim\lambda$ Poisson过程.

(C). 原始定义.

· 人口模型. $X_n=m$ 出生率 λ_m.

☆定义11. 称 $N=\{N(t), t\geq 0\}$ 为参数为 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ 的生过程 若

其满足 ① $N(t)\in S=\{0,1,2,\cdots\}$.

② $N(t)\uparrow$.

③ $P(N(t+h)=m+n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\lambda_n h+o(h). & m=1\\ 1-\lambda_n h+o(h) & m=0.\\ o(h) & m\geq 2\end{cases}$

④ 若 $s<t$ 则 $\forall s'\in[0,s]$ $N(t)-N(s)\perp N(s')\mid N(s)$ 条件下. ⊥独立

☆注1. ①+②. $\Rightarrow P\{N(t+h)\geq n+2 \mid N(t)=n\}=o(h)$.

注2. $A.B\mid C$条件独立. $P(A\cap B\mid C)=P(A\mid C)\cdot P(B\mid C)$.

$\Rightarrow P(A\mid B,C)=P(A\mid C)$. #

例. ①. Poisson过程. $\lambda_n\equiv\lambda$. $\forall n$.

② 简单生过程.

· 描述人口生长: 每个个体相互独立繁衍下一代.

单个个体在 $(t, t+h]$ 之间 $\begin{cases}\lambda h+o(h) & 产生一个后代\\ 1-\lambda h+o(h). & 0个\\ o(h). & 多于1个.\end{cases}$

记 $N(t)$ 为 t 时刻 人口数量.

$P(N(t+h)=m+n \mid N(t)=n)=P(N(t+h)-N(t)=m \mid N(t)=n)$

$=$ ④ $C_n^m(\lambda h)^m\cdot(1-\lambda h)^{n-m}+o(h)$.

Date 2019 04 16 二

Proof:

☆ 参数为 λ 的指数分布密度 $f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

☆ 由 (5.6 B) $E(T_\infty)=E(\sum_{n=1}^{\infty}X_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n-1}^{-1}$

☆ If $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n-1}^{-1}<\infty$ then $E(T_\infty)<\infty \Rightarrow P(T_\infty=\infty)=0$ $\quad P(T_\infty<\infty)=1$

☆ If $\underbrace{\sum_n \lambda_{n-1}^{-1}=\infty}$, $Ee^{-T_\infty}=E\prod_{n=1}^{\infty}e^{-X_n}=\prod_{n=1}^{\infty}Ee^{-X_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\lambda_{n-1}^{-1}}\right)=0$

(∵ X_n 相互独立)

$\Downarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda_{n-1}^{-1})=\infty$

$\Rightarrow P(T_\infty=\infty)=1$ □

Homework: P255 5 求 $m(t)$

2019.04.18 Thursday

§6.9 连续时间离散状态马氏链

◎ S 为最多可数元素集合 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $X=\{X_t, t\geq 0\}$

称 X 为状态空间 S 的连续时间马氏链, if X 满足

① $X(t)\in S \quad \forall t\geq 0$

② 马氏性: $\forall i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},i_n\in S$, $\forall 0\leq t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n \quad \forall n$

$P(X(t_n)=i_n\mid X(t_{n-1})=i_{n-1},\ldots,X(t_1)=i_1)=P(X(t_n)=i_n\mid X(t_{n-1})=i_{n-1})$

离散时刻 (有效的) $f:\{0,1,2,\ldots\}\to R$ $\quad f'(n)=f(n)-f(n-1)$

◎ 基本要素: $\quad f': R\to R$

离散时间马氏链: S $\quad \mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}_n$ $\quad \mathbb{P}_0=\mathbb{I}$

连续时间马氏链: S $\quad \mathbb{P}_t'$ $\quad \mathbb{P}_t$ $\quad \mathbb{P}_0=\mathbb{I}$

☆ 转移概率 $\quad \forall s\leq t$, $p_{ij}(s,t)=P(X(t)=j\mid X(s)=i)$

☆ 时齐: $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(0,t-s)\triangleq p_{ij}(t-s)$

不依赖出发时刻 $\quad$ 之后,只考察时齐情况

☆ $\mathbb{P}_t=(p_{ij}(t))_{|S|\times|S|}$ 转移矩阵

Th 3:

$\{\mathbb{P}_t, t\geq 0\}$ 为随机半群，即满足

(a) $\mathbb{P}_0 = I$

(b) $\mathbb{P}_t$ ~ 每个元素非负，行和为1

(c) $\mathbb{P}_{s+t} = \mathbb{P}_s \cdot \mathbb{P}_t \quad \forall s,t \geq 0$ (C-K 方程)

i.e. $p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s)\cdot p_{kj}(t)$ Chapman-Kolmogorov 方程

Proof: (a)(b) 略

(c) (与离散时刻情况大致相同)

$$p_{ij}(s+t) = P(X(s+t)=j \mid X(0)=i)$$
$$= \sum_{k\in S} P(X(s+t)=j, X(s)=k \mid X(0)=i)$$
$$= \sum_{k\in S} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t) \qquad \square$$

☆ $X(t)$ 的分布，可由 $X(0)$ 的分布 + $\{\mathbb{P}_t, t\geq 0\}$ 决定

$\mu_t = (\mu_t(i))_{i\in S}$ 行向量

$\mu_t(i) \triangleq P(X(t)=i)$ $\Rightarrow \mu_t = \mu_0 \cdot \mathbb{P}_t$

Question:

$\forall n, \forall\, 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ 的分布?

已知 $X(0)$ 的分布，以及 $\mathbb{P}_t$ ← Homework

③ 只考虑一类特殊类型的马氏链 —— 合理假设

☆ Def 4:

If $\lim_{t\downarrow 0} \mathbb{P}_t = \mathbb{P}_0 = I$, i.e. $\begin{cases} p_{ii}(t) \to 1 \\ \forall i\neq j \quad p_{ij}(t)\to 0 \end{cases}$ $t\downarrow 0$

then 称 $\{\mathbb{P}_t, t\geq 0\}$ 为标准的

☆ $\{\mathbb{P}_t, t\geq 0\}$ ~标准的 $\Leftrightarrow \forall i,j$, $p_{ij}(t)$ 关于 t 连续

Proof:

"$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" 由 CK 方程，$h>0$ 时 $|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| = \left|\sum_{k\in S} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t)\right|$

$$\leq |1-p_{ii}(h)|\, \underbrace{p_{ij}(t)}_{\leq 1} + \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)$$

Date 2019 / 04 / 18 四

$\le 1-p_{ii}(h) + 1-p_{ii}(h) \to 0 \quad h \downarrow 0$ $\Rightarrow$ 右连续的 $\square$

(左连续相同)

☆短时间行为：假定当 h 很小时，$(t, t+h]$ 时间内，转移2次及以上次数的概率为 $o(h)$

设 $X(t)=i$, $(t, t+h]$ （考虑时齐的）

(a) $p_{ii}(h) \to \begin{cases} \tilde{p}_{ii}(h) \sim (t, t+h] \text{时间内一直停留在 } i \text{ 的概率} \\ o(h) \sim (t, t+h] \ i \to m \cdots \to i \end{cases}$

$\qquad \| $

$\tilde{p}_{ii}(h) + o(h)$

(b) $i \neq j$, $p_{ij}(h) \to \begin{cases} \tilde{p}_{ij}(h) \sim (t, t+h] \text{从 } i \text{ 到 } j \text{ 只转移一次} \\ o(h) \sim (t, t+h] \text{从 } i \to m \cdots \to j \end{cases}$

$\qquad \| $

$\tilde{p}_{ij}(h) + o(h)$

☒ 假设 h 很小的时候，$\tilde{p}_{ij}(h) \sim$ 关于 h 的线性函数

i.e. $\exists\ g_{ij}$ s.t. $\begin{cases} \tilde{p}_{ij}(h) = g_{ij} \cdot h + o(h) & \forall i \neq j \\ \tilde{p}_{ii}(h) = 1 + g_{ii} \cdot h + o(h) \end{cases}$ (5) $g_{ij} \ge 0$, $g_{ii} \le 0$

☒ 令 $G = (g_{ij})_{|S| \times |S|}$ 称 G 为 $\mathbb{P}_t$ 的生成元

☒ $\begin{cases} (a) & p_{ii}(h) = 1 + g_{ii} \cdot h + o(h) \\ (b) & p_{ij}(h) = g_{ij} \cdot h + o(h) \quad i \neq j \end{cases}$

☒ 由 $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ 知 $1 = 1 + h \sum_{j \in S} g_{ij} + o(h)$

$\Rightarrow$ (6) $\sum_{j \in S} g_{ij} = 0 \quad \forall i$ i.e. $G \mathbf{1}^T = 0$ $\square$

eg7: 生过程

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$

$P(N(t+h) = n+m \mid N(t) = n) = \begin{cases} \lambda_n h + o(h) & m = 1 \\ 1 - \lambda_n h + o(h) & m = 0 \\ o(h) & m \ge 2 \end{cases}$

$\Rightarrow g_{nn} = -\lambda_n \quad g_{n,n+1} = \lambda_n$ 其它为0

$G = (g_{ij})_{|S| \times |S|} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & 0 \\ & -\lambda_1 & \lambda_1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

对角线

▨ G 与 $\mathbb{P}_t$ 的关系

☆ ① $\mathbb{P}_t \Rightarrow G$

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(\mathbb{P}_h - I)=\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{p_{ij}(h)-\delta_{ij}}{h}\right)_{|S|\times|S|}=\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{g_{ij}h+o(h)}{h}\right)_{|S|\times|S|}=G$$

$$(\mathbb{P}_t)'_0 = G$$

☆ ② $G \Rightarrow \mathbb{P}_t$

▨ $$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)\underbrace{p_{kj}(h)}_{=\delta_{kj}+g_{kj}\cdot h+o(h)}$$

$$= p_{ij}(t)(1+g_{jj}\cdot h+o(h)) + \sum_{k\neq j}p_{ik}(t)(g_{kj}\cdot h+o(h))$$

$$\Rightarrow \frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \frac{\sum_{k\in S}p_{ik}(t)g_{kj}\cdot h + o(h)}{h} \qquad h\downarrow 0$$

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k\in S}p_{ik}(t)g_{kj}$$

If 记 $\mathbb{P}_t' = (p_{ij}'(t))_{|S|\times|S|} \Rightarrow \mathbb{P}_t' = \mathbb{P}_t\cdot G \qquad \mathbb{P}_0 = I$ 向前方程 (9^*)

▨

$$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in S}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

类似 $(9^*) \Rightarrow \mathbb{P}_t' = G\,\mathbb{P}_t \qquad \mathbb{P}_0 = I \quad (10^*)$ 向后方程 □

☆ 形式上：

$p_t' = g\,p(t) \qquad p(0)=1 \quad \Rightarrow \quad p(t)=e^{tg}$

$(9^*)\Rightarrow(12^*)$ $\quad \mathbb{P}_t = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}G^n \qquad P_0 = I$ □

生成元生成的半群 $\quad$ Taylor 展开

Homework: 6.9 $\quad$ 1 (a) $\quad$ 2 (a) (b)

▨ 运动规律：

☆ 概述：设 $X(s)=i$，问 $X(s+t)$ $t\geq 0$ 时运动？

▨ At first，停留在 i 一段时间，how long？

▨ Then，将跳到另外一个状态 j $(j\neq i)$，怎么跳？

▨ 重复上述过程

☆第一阶段：停留

▣ 记 $U|_{X(s)=i} = \inf\{t\ge 0,\ s.t\ X(s+t)\ne i \mid X(s)=i\}$ 在 i 停留的时间

▣ $U|_{X(s)=i}$ 表示 $X(s)=i$ 的条件下，停留在 i 的时间

▣ 由齐次性（时齐性），$U|_{X(s)=i}$ 与 $U|_{X(0)=i}$ 的分布 same

▣ (13*) 说明：$U|_{X(s)=i}$ 服从 $-q_{ii}$ 的指数分布

☆第二阶段：跳

▣ (14*) 说明：If $X(s)=i$，停留一段时间后，跳到 j 的概率 $-\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$ $i\ne j$

Proof:

在 $X(s)=i$ 的条件下，停留时间 U 在 $(x,\ x+h]$ 之间

$X(s+x)=i,\quad X(s+x+h)\ne i$ means: X 在 $(s+x,\ s+x+h]$ 之间跳走

(想看怎么跳，停留时间不管)

$P(\underbrace{X(s+x+h)=j}_{C} \mid \underbrace{X\text{在}(s+x, s+x+h]\text{有跳}}_{B}, \underbrace{X(s+x)=i}_{A})$ 根据定义

$$\approx \frac{p_{ij}(h)}{\underbrace{1-p_{ii}(h)}_{\text{没跳}}} \xrightarrow{h\downarrow 0} -\frac{q_{ij}}{q_{ii}} \qquad \square$$

$P(C|BA) = P(C\cap B|A) / P(B|A)$

Pf(13*): ① $P(U|_{X(s)=i} > x+y \mid U|_{X(s)=i} > x)$

$= P(X(t')=i, s\le t'\le s+x+y \mid X(t'), s\le t'\le s+x)$

$\overset{\text{马氏}}{=} P(X(t')=i, s+x\le t'\le s+x+y \mid X(s+x)=i)$

$= P(U|_{X(s+x)=i} > y)$

$= P(U|_{X(s)=i} > y)$

② $P(U|_{X(s)=i} > x+y) = P(U|_{X(s)=i} > x)\,P(U|_{X(s)=i} > y)$

③ 记 $F_U \triangleq F_{U|X(s)=i}$ 为 $U|_{X(s)=i}$ 的分布，则有

$$\begin{cases} F_U(0)=P(U\le 0)=0 & (*) \\ F_U(h)=P(U\le h)=1-P(U>h)=1-p_{ii}(h) & \\ \quad = 1-(1+q_{ii}h+o(h)) = -q_{ii}h+o(h) & (**) \end{cases}$$

$$1-F_U(x+y)=P(U>x+y)=P(U>x)P(U>y)$$
$$=(1-F_U(x))(1-F_U(y)) \quad (***)$$

$$\xRightarrow{\cancel{(*)(***)}} 1-F_U(x)=e^{-\lambda x}$$

④ $\lambda=F_U'(0)\overset{(**)}{=}-g_{ii}$

例15. $X=\{X_t:t\geq 0\}$为状态空间$S=\{1,2\}$, $G=\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha\\ \beta & -\beta\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta>0$ 的马氏链

由$G\Rightarrow \mathbb{P}_t, t\geq 0$

假设$X(0)=1$,则 ①停留在1时间$U_1^{①}(\omega)=\inf\{t\geq 0: X_t(\omega)\neq 1\}$

$U_1^{①}\sim \exp(\alpha)$

② 然后跳到2, X将停留在2的时间 $U_1^{②}$ →状态 →第几次

$U_1^{②}(\omega)=\inf\{t\geq 0: X_{t+U_1^{①}(\omega)}(\omega)\neq 2\}$

$U_1^{②}\sim\exp(\beta)$

③ 然后又回到状态1, 第二次在状态1时间$U_2^{①}$

$U_2^{①}(\omega)=\inf\{t\geq 0: X_{t+U_1^{①}(\omega)+U_1^{②}(\omega)}(\omega)\neq 1\}$

……

$\{U_i^{①}(\omega)\}$相互独立

$U_1^{①}(\omega),\cdots U_n^{①}(\omega),\cdots$ $\forall\omega\in\Omega$/固定$\omega\in\Omega$ $\sim\exp(\alpha)$

$U_1^{②}(\omega),\cdots U_n^{②}(\omega),\cdots$ $\forall\omega\in\Omega$/固定$\omega\in\Omega$ $\sim\exp(\beta)$

$1\xrightarrow{U_1^{①}(\omega)}2\xrightarrow{U_1^{②}(\omega)}1\xrightarrow{U_2^{①}(\omega)}2\longrightarrow\cdots$

作业: 3个状态的情况?

※平稳分布和长时间行为

首先, $\forall i,j\in S$ (16) $p_{ij}(t)=0$, $\forall t>0$ or $p_{ij}(t)>0$, $\forall t>0$ 只有这两种情况

·<u>Def</u>: X不可约, 若$\exists t>0$, s.t. 对$\forall i,j\in S$, 都有$p_{ij}(t)>0$

注1：生过程可约

作业：2.(6.15.15) $X=\{X_t,t\geq 0\}$ S $G=(g_{ij})_{|S|\times|S|}$，则

X不可约$\Leftrightarrow$对$\forall i,j\in S$，$\exists k_1,k_2,\cdots,k_n\in S$，s.t. $g_{ik_1}g_{k_1k_2}\cdots g_{k_nj}\neq 0$

直观上，存在一条概率大于0的路径 s.t. X从i到j

· 平稳分布.

<u>定义</u>：称$\pi=(\pi_i:i\in S)$为X的平稳分布，若π满足

① $\pi_j\geq 0$，$\sum_{j\in S}\pi_j=1$

② $\pi\mathbb{P}_t=\pi$，$\forall t\geq 0$

· 若$X(0)$分布为$\mu^{(0)}$，$X(t)$分布为$\mu^{(t)}$，则$\mu^{(t)}=\mu^{(0)}\mathbb{P}_t$

若$\mu^{(0)}=\pi$，则$\mu^{(t)}=\pi$.

· (20*) $\pi=\pi\mathbb{P}_t$，$\forall t\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\pi G=0$

<u>Pf</u>：$G^0=I$

$\pi G=0\Leftrightarrow\pi G^n=0,\forall n\geq 1$

$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\pi G^n=0,\forall t\geq 0$

$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\pi G^n=\pi,\forall t\geq 0$

$\Leftrightarrow\pi\underbrace{e^{tG}}_{\mathbb{P}_t}=\pi,\forall t\geq 0$

<u>定理21</u>：马氏链X不可约，$\{\mathbb{P}_t,t\geq 0\}$为标准的.

则(a) 若$\exists$平稳分布，记为π，则平稳分布唯一，且$\forall i,j\in S$，$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j$

(b) 若不$\exists$平稳分布，则$\forall i,j\in S$，$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=0$

<u>Pf</u>：思路：将连续时间马氏链离散化

固定$h>0$，$Y_n=X(nh)$

则$Y=\{Y_n:n=0,1,2,\cdots\}$不可约+非周期 离散时间马氏链

由X不可约$\Rightarrow p_{ij}(nh)>0,\forall n\geq 1$

Y称为X的骨架(skeleton)

- 若 Y 非零常返，则 $\exists!\ \pi^h$ s.t. $\forall i,j\in S$, $p_{ij}(nh)=P(Y_n=j\mid Y_0=i)\to\pi^h$ as $n\to\infty$
- 其他情况，对 $\forall i,j\in S$，有 $p_{ij}(nh)\to 0$ as $n\to\infty$

对 $\forall$ 有理数 h_1,h_2，存在 h', s.t. $h_1=nh'$, $h_2=mh'$

对 $\forall i,j\in S$，都有 $p_{ij}(lh_1)\to a_j^{h_1}$ as $l\to\infty$

$p_{ij}(lh_2)\to a_j^{h_2}$ as $l\to\infty$

$p_{ij}(lh')\to a_j^{h'}$ as $l\to\infty$

而 $\{lh_1, l\in N\}$ 与 $\{lh_2, l\in N\}$ 为 $\{lh', l\in N\}$ 子集

$\therefore a_j^{h_1}=a_j^{h_2}=a_j^{h'}$

$\therefore$ 当 $t\in\mathbb{Q}$, $t\to\infty$ 时，$p_{ij}(t)\to a_j^{a}$

由 $p_{ij}(t)$ 关于 t 连续，$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=a_j^{a}$

· 构造连续时间马氏链

(A) 首先分解连续时间马氏链

(13) $X(s)=i$ 停留在 i 的时间

(14) $X(s)=i$ 第一次跳，跳出的分布

MC $X=\{X_t, t\geq 0\}$ S $G=(g_{ij})_{|S|\times|S|}$

① 记 T_n 为第 n 次跳的时间，$T_0=0$

$$T_n=\inf\{t\geq 0,\ \#\{X_s\neq X_{s-}, 0\leq s\leq t\}=n\}$$

这里固定 $\omega\in\Omega$ $\{X(t,\omega), t\geq 0\}$ 关于 t 是右连续，左极限存在的函数

在时间 $[0,t]$ 之间，$X_s\neq X_{s-}$ 的时间的个数

构造连续时间马氏链

(A) 首先分解连续时间马氏链

(13) $X(s)=i$ 停留在 i 的时间

(14) $X(s)=i$ 第一次跳，跳出的分布

MC $X=\{X_t, t\geq 0\}$ S $G=(g_{ij})_{|S|\times|S|}$

① 记 T_n 为第 n 次跳的时间，$T_0=0$

$$T_n=\inf\{t\geq 0, \underbrace{\#}_{\text{计数}}\{X_s \neq \underbrace{X_{s-}}_{\text{左极限}}, 0\leq s\leq t\}=n\}$$

☆

这里固定 $w\in\Omega$，$\{X(t,w), t\geq 0\}$ 关于 t 的右连续，左极限存在的函数

☆：在时间 $[0,t]$ 内，$X_s\neq X_{s-}$ 的时间的个数，i.e. 在 $[0,t]$ 之间跳的次数

② 记 $Z_n=X(T_n+)$：由所有的跳组成的马氏链，$Z=\{Z_n, n\geq 0\}$

Z: S 一步转移概率 $H=(h_{ij})_{|S|\times|S|}$，$h_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}, & g_{ii}=0\\ -\frac{g_{ij}}{g_{ii}}, & g_{ii}<0\end{cases}$ 跳不出去，一直停留在 i

③ 记 $A_j=\{(n,w)$：使得 $Z_n(w)=j\}$，则 $\{T_{n+1}(w)-T_n(w):(n,w)\in A_j\}$ 服从 $-g_{jj}$ 的指数分布

④ 称 Z 为 X 的跳链

⑤ (X,S,G) 分解为 (Z,T_n)

⑥ $T_{n+1}-T_n$, $n\geq 0$ 与 Z 独立

(B) 反之，已知 (Z,S,H)，构造 (X,S,G) 使得 X 的跳链（记为 Z_X）与 Z 相同

离散时间离散状态马氏链

步骤：

Ⅰ S 最多可数集

已知 $(Z,S,H=(h_{ij})_{|S|\times|S|})$，假设 $h_{ii}=0$，$\forall i\in S$ 因为连续时马氏链从i转移到i无法解释

Ⅱ 任取 $g_i\geq 0$，$i\in S$，定义

(22) $$g_{ij}=\begin{cases}g_i h_{ij}, & \forall i\neq j\\ -g_i, & i=j\end{cases}$$

Ⅲ ① 令 $X_0(w)=Z_0(w)$

② 记 U_0^ω 为服从 $g_{Z_0(\omega)}$ 的指数分布的一个样本

i.e. 若 $Z_0(\omega)=i_0$，生成一个服从 g_{i_0} 的指数分布的随机数，记为 U_0^ω

③ 令 $X_s(\omega)=Z_0(\omega)$，$0\le s<U_0^\omega$

$X_s(\omega)=Z_1(\omega)$，$s=U_0^\omega$

④ 记 U_1^ω 为服从 $g_{Z_1(\omega)}$ 的指数分布的一个样本

⑤ 令 $X_s(\omega)=Z_1(\omega)$　$U_0^\omega\le s<U_0^\omega+U_1^\omega$

$X_s(\omega)=Z_2(\omega)$　$s=U_0^\omega+U_1^\omega$

注：① $U_0^\omega, U_1^\omega, \cdots$ 相互独立生成，且与 $Z=\{Z_n, n\ge 0\}$ 独立

② 记 $T_{-1}^\omega=0$，$T_n^\omega=U_0^\omega+U_1^\omega+\cdots+U_n^\omega$，则记 $T_\infty^\omega=\lim\limits_{n\to\infty}T_n^\omega=\begin{cases}+\infty\\<\infty\end{cases}$ 称为X的爆炸时，$X_t(\omega)=\begin{cases}Z_n(\omega), & T_{n-1}^\omega\le t<T_n^\omega\\ \infty, & \text{其它}\end{cases}$ (若 $T_\infty^\omega<\infty$，把 T_∞^ω 之后的状态都记为 ∞)

③ 称X为爆炸的，若 $P(T_\infty^\omega<\infty)>0$

对于爆炸的X，可以扩充其状态空间 $\bar{S}=S\cup\{\infty\}$

以上构造的X，当 $t<T_\infty^\omega$ 时，X的生成元为 $(g_{ij})_{|S|\times|S|}$，X的跳跃链为给定的Z

以上构造的X有无穷多种，只需取不同的 g_i

定理2.4：上述构造的马氏链，不爆炸的条件：(满足其中之一即可)

(a) S有限状态

(b) $\sup g_i<\infty$

(c) $X(0)=i$，i 为给定 (Z, S, H) 的常返态

Pf: (a)⇒(b)，只需证明(b)，(c)即可

Pf(b): ① 记 $\hat{U}_0$ 为服从 $g_{Z_0(\omega)}$ 的指数分布的r.v.

$\hat{U}_1$ — — — $g_{Z_1(\omega)}$ — — — — —

$\hat{U}_2$ — — — $g_{Z_2(\omega)}$ — — — — —

且 $\hat{U}_0, \hat{U}_1, \cdots$ 与Z相互独立

② $(U_0^\omega, U_1^\omega, \cdots)$ 是 $(\hat{U}_0, \hat{U}_1, \cdots)$ 的一个样本

③ 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}U_i^\omega=\infty$，只需证明 $P(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{U}_i<\infty)=0$

由(b)，不妨设 $g_i<r<\infty$，$\forall i\in S$

若 $g_{Z_n(\omega)}>0$，则 $V_n\triangleq g_{Z_n(\omega)}\hat{U}_n$ 服从参数为1的指数分布

若 $g_{Z_n(\omega)}=0$，则 $\tilde{\sigma}_n=\infty$，永远停留在 $Z_n(\omega)$ 的状态

记 $\tilde{T}_\infty=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\tilde{\sigma}_i$，要证 $P(\tilde{T}_\infty=\infty)=1$

$$r\tilde{T}_\infty=\begin{cases}\infty & 若\ \exists n,\ s.t.\ g_{Z_n(\omega)}=0\\ \sum_{n=0}^{\infty} r\tilde{\sigma}_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} V_n, & 其它\end{cases}$$

由引理6.8.20，$P(\sum_{n=0}^{\infty} V_n=\infty)=1$

$\Rightarrow P(\tilde{T}_\infty=\infty)=1$

Pf(c)：$g_i=0$，则 $X(t)\equiv i$，$\forall t\geq 0$

$g_i>0$：① 由 $Z_0=i$ 且 i 为 Z 的常返态，

存在 $N_0(\omega)<N_1(\omega)<\cdots<N_m(\omega)<\cdots$，$Z_{N_m(\omega)}(\omega)=i$，$\forall\omega\in\Omega$

$n_0 \quad n_1 \quad n_m$

② $g_i\tilde{T}_\infty=\sum_{n=0}^{\infty} g_i\tilde{\sigma}_n \geq \sum_{m=0}^{\infty} g_i\tilde{\sigma}_{n_m}$

$g_i\tilde{\sigma}_{n_m}\sim$ 参数为1的指数分布

由引理6.8.20：$P(\sum_{m=0}^{\infty} g_i\tilde{\sigma}_{n_m}=\infty)=1 \Rightarrow P(\tilde{T}_\infty=\infty)=1$

例25. $Z=\{Z_n, n\geq 0\}$，S，$H=(h_{ij})_{|S|\times|S|}$，$h_{ii}=0$，$\forall i$

跳的次数 $N=\{N(t), t\geq 0\}$ 为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，$T_0=0<T_1<T_2<\cdots$

Z 与 N 独立，$T_m-T_{m-1}\sim\lambda$ 的指数分布 $\rightarrow$ 提供等待时间

定义 $X(t)=Z_n$，$T_n\leq t<T_{n+1}$，求：X 的转移矩阵：$\mathbb{P}_t=(p_{ij}(t))$

解：1. 求 G $\quad g_{ij}=\begin{cases}g_ih_{ij}, & i\neq j\\ -g_i, & i=j\end{cases} \quad g_i=\lambda$

$\therefore G=\lambda(H-I)$，$\mathbb{P}_t=e^{tG}$

2. $p_{ij}(t)=P(X(t)=j\mid X(0)=i)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}P(X(t)=j, N(t)=n\mid X(0)=i)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}P(Z(n)=j, N(t)=n\mid Z(0)=i)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t)=n)P(Z(n)=j\mid Z(0)=i)$ N与Z相互独立.

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}(H^n)_{ij}$

给定 (X, S, G)

称 i 常返，若 $P(\{t: X(t)=i\}$ 为无界集 $\mid X(0)=i)=1$

称i瞬时，若 $P(\{t: X(t)=i\}$ 为无界集 $|X(0)=i)=0$

定理21：由(B)构造的马氏链X

(a) 若 $g_i=0$，则 i 为X的常返态

(b) 若 $g_i>0$，则 i 为X的常返态 $\Longleftrightarrow$ i 为Z的常返态

$\quad\quad$ ------ $\Leftarrow \int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt=\infty$

$\quad\quad$ ---- 瞬时态 $\Leftarrow \int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt<\infty$

Pf: (a) $g_i=0$，$X(0)=i$，则 $X(t)=i$，$\forall t\geq 0$

(b) <1> 若 i 为Z的瞬时态，证明 i 为X的瞬时态

Z几乎处处有限次经过状态 i

$\Downarrow$

$P(\{t: X(t)=i\}$ 有界 $|X(0)=i)=1$ 从某一有限时刻之后不会再经过 i

<2> 若 i 为Z的常返态，

Thm24(c): $X(0)=i$ 出发，X不会爆炸，i.e. $T_\infty=\sum_{n=0}^{\infty} U_{Z_n}=\infty$ a.s.

对Z把回到 i 的时间排序：$0=N_0<N_1<\cdots \longrightarrow +\infty$

$Z_{N_m(\omega)}(\omega)=i$

$T_{N_m}=\sum_{l=0}^{N_m} U_{Z_l} \uparrow +\infty$ 停留在 i 的时间长度为 ∞

$\therefore$ i 为X的常返态

<3> $g_i=0$ 时 $p_{ii}(t)=1$

$g_i>0$：$p_{ii}(t)=P(X(t)=i|X(0)=i)$

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)dt=\int_0^{\infty} E[1_{\{X(t)=i\}}|X(0)=i]dt$$

$$=E[\underbrace{\int_0^{\infty} 1_{\{X(t)=i\}}dt}_{X\text{停留在}i\text{的时间}}|X(0)=i]$$

$$=E[\sum_{n=0}^{\infty} U_n 1_{\{Z_n=i\}}|X(0)=i]$$

若 $Z_n=i$，则 $U_n\sim g_i$ 的指数分布

$U_0,U_1,\cdots$，Z相互独立

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E[U_n]\underbrace{E[1_{\{Z_n=i\}}|X(0)=i]}_{h_{ii}(n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{g_i}h_{ii}(n)$$

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)dt=\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} h_{ii}(n)=\infty$$

6.11 生灭过程 Birth-Death Process

① $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ $\{X_t, t\geq 0\}\sim r.v.$

称 $X=\{X_t,t\geq 0\}$ 为出生率 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots$ 死亡率 $\mu_0,\mu_1,\cdots$ 的生灭过程，若

$\lambda_i\geq 0, \mu_i\geq 0, \mu_0=0$

(a) $S=\{0,1,2,\cdots\}$

(b)
$$P(X(t+h)=n+m \mid X(t)=n)=\begin{cases}\lambda_n h+o(h) & m=1\\ \mu_n h+o(h) & m=-1\\ 1-(\lambda_n+\mu_n)h+o(h) & m=0\\ o(h) & |m|>1\end{cases}$$

注：$(X\ S\ G)$ $G=(g_{ij}: i,j\geq 0)=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$

· 若 $\lambda_0=0$，$\exists t_0\geq 0$, s.t. $X(t_0)=0$，则 $s\geq t_0$ 时，$X(s)\equiv 0\to$ 灭绝. 0 吸收态，X 可约

· 若 $\lambda_i>0, i\geq 0, \mu_i>0, i\geq 1, \mu_0=0$，求平稳分布.

解：$\pi G=0$，$\sum_{i=0}^{+\infty}\pi_i=1$.

i.e. $\begin{cases}-\lambda_0\pi_0+\mu_1\pi_1=0\\ \lambda_{n-1}\pi_{n-1}-(\lambda_n+\mu_n)\pi_n+\mu_{n+1}\pi_{n+1}=0, n\geq 1\end{cases}$ 及 $\sum_{i=0}^{+\infty}\pi_i=1$

$\Rightarrow \pi_n=\pi_0\cdot\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, n\geq 1$

再由 $\sum_{i=0}^{+\infty}\pi_i=1\Rightarrow \pi_0=S_\Sigma^{-1}$，$S_\Sigma\triangleq\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}+1$

（故 π 为平稳分布 $\Leftrightarrow S_\Sigma<\infty$）

· 若 $S_\Sigma<\infty$，则 $\exists$ 平稳分布 π $\left.\begin{matrix}\\ \text{定理 6.9.21}\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\circ X^{-1}(t)\longrightarrow\pi$ as $t\to+\infty$

· 若要平稳分布存在，出生率和死亡率之间达到某种平衡，i.e. $S_\Sigma<+\infty$

<u>例5.</u> 纯生过程 $\mu_n=0, \forall n$

<u>例6</u> 带迁移的简单死过程 $X(0)=I$，$X=\{X(t),t\geq 0\}$

模型描述 $\{$ 出生率$=0$，以 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程迁徙新个体.

每个个体在 $(t,t+h]$ 之内死亡率 $\mu h+o(h),\ \mu>0$

证明: X 为生灭过程, $\lambda_n=\lambda,\ \mu_n=n\mu$

Pf: 记 $p_{ij}(h)=P(X(t+h)=j\mid X(t)=i)$

$$p_{i,i+1}(h)=\lambda h(1-\mu h)^i+o(h)=\lambda h+o(h)$$

$$p_{i,i-1}(h)=(1-\lambda h)C_i^1\mu h(1-\mu h)^{i-1}+o(h)=i\mu h+o(h)$$

$p_{ij}(h)=o(h)$ 若 $|j-i|>1$ 证明?

$$p_{ii}(h)=(1-\lambda h+o(h))(1-\mu h+o(h))^i+(\lambda h+o(h))C_i^1(\mu h+o(h))(1-\mu h+o(h))^{i-1}+\cdots$$

$$=1-(\lambda+i\mu)h+o(h)$$

定理8: 当 $t\to+\infty$, $P(X(t)=n)\longrightarrow\pi_n=\frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho},\ \rho=\frac{\lambda}{\mu},\ n=0,1,2,\cdots$

例9. 简单生过程

描述: 每个个体在 $(t,t+h]=\begin{cases}\mu h+o(h) & \text{死}\\ \lambda h+o(h) & \text{分裂为两个}\\ 1-(\lambda+\mu)h+o(h) & \\ o(h) & \end{cases}$

记 $X(t),t\geq0$ 为 t 时刻种群个体数量

证明: $X(t),t\geq0$ 为 $\lambda_n=n\lambda,\ \mu_n=n\mu$ 的生灭过程 (作业)

0为吸收态, 假设 $X(0)=I>0$

定理10: $X(t)$ 的生成函数 $G(s;t)=E(s^{X(t)})=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda t(1-s)+s}{\lambda t(1-s)+1}\right)^I & \mu=\lambda\\ \left(\dfrac{\mu(1-s)-(\mu-\lambda s)e^{-t(\lambda-\mu)}}{\lambda(1-s)-(\mu-\lambda s)e^{-t(\lambda-\mu)}}\right)^I & \mu\neq\lambda\end{cases}$

Pf. ① 记 $p_j(t)=P(X(t)=j)$, $\mathbb{P}(t)=(p_j(t))_{j\in S},\ t\geq0$

边界条件 $X(0)=I$ $\quad p_j(0)=\begin{cases}1, & j=I\\ 0, & j\neq I\end{cases}$

$G=\big(0\quad 0\quad 0\quad 0\ \cdots$

$$\begin{pmatrix} \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\mu+\lambda) & 2\lambda & \cdots \end{pmatrix}$$

Forward Equation $\mathbb{P}_t' = \mathbb{P}_t G$

$$j\geq 1 \begin{cases} p_j'(t) = \lambda(j-1)p_{j-1}(t) - (\lambda+\mu)j p_j(t) + \mu(j+1)p_{j+1}(t) & (*) \\ p_0'(t) = \mu p_1(t) \end{cases}$$

② $G(s,t) = E(s^{X(t)}) = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i P(X(t)=i)$

在(*)两边同乘以 s^j 求和得 $\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = (\lambda s - \mu)(s-1)\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}$

再结合边界条件 $G(s,0) = s^I$ 可算得 $G(s,t)$

· 由 $G(1,t) = E(1^{X(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X(t)=n) = 1 - P(X(t)=\infty)$

$G(1,t) = 1$

$\Rightarrow P(X(t)=\infty) = 0 \Rightarrow X$ 为 honest.

· 求 $G_s'(s,t), G_{ss}''(s,t)$

由 $G_s'(1,t) = EX(t)$, $G_{ss}''(1,t) = E[X(t)(X(t)-1)]$

$$\Rightarrow \begin{cases} EX(t) = Ie^{(\lambda-\mu)t} \\ Var(X(t)) = \begin{cases} 2I\lambda t, & \lambda=\mu \\ I\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t}-1], & \lambda\neq\mu \end{cases} \end{cases}$$

记 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $EX(t) = \begin{cases} 0 & \rho<1 \\ \infty & \rho>1 \end{cases}$

· (12) <u>推论</u>: 记 $\eta(t) = P(X(t)=0)$ $(=G(0,t))$

$$\eta(t) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \rho\leq 1 \\ \rho^{-I} & \rho>1 \end{cases}$$

<u>Pf</u>: $\eta(t) = G(0,t) = \cdots$

作业: 6.11 gap 3,5

※Poisson过程

· $N(t)\sim\lambda>0$ Poisson过程

$T_0=0$, $T_n=\inf\{t>0, N(t)=n\}$

$X_n=T_n-T_{n-1}$ $\quad X_i\sim iid\ exp(\lambda)$ $\quad T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$

1. 求: $0\le s<t$, $P(N(s)=k|N(t)=n)=?$ → 作业

2. 给定$N(t)=n$条件下, $T_1,T_2,\cdots,T_n$的联合密度为(假设密度∃且C)

$f_{T_1,\cdots,T_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n)=\frac{n!}{t^n}$, $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$ $\quad$ (*)

注: 若从$[0,t]$均匀抽取n个独立同分布的样本U_i, $1\le i\le n$

$U_1,U_2,\cdots,U_n\sim iid\ r.v.\sim[0,t]$上的均匀分布

按其大小排序$U_{(1)}\le U_{(2)}\le\cdots\le U_{(n)}$ (次序统计量)

$U_{(i)}$, $1\le i\le n$联合密度为$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n}, & 0\le y_1\le y_2\le\cdots\le y_n\le t\\ 0, & otherwise\end{cases}$

3. 求顾客依速率为λ的Poisson过程到达火车站, 若火车在时刻t离站, 问在$[0,t]$时间内顾客的平均等待时间. → 作业

※复合Poisson过程

事件发生服从Poisson过程$N(t),t\ge0$, 每次事件附带一个r.v.(如费用,损失)Y_i, iid

总费用: $N(t)$与Y_i独立, $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$

$X(t)$称为复合Poisson过程

Pf of (*):

给定$N(t)=n$, 时间$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ $\quad$ Δt_i～充分小增量

$A\triangleq\{N(t)=n\}\cap\{t_i<T_i\le t_i+\Delta t_i, 1\le i\le n\}$

$=\{(t_i,t_i+\Delta t_i], i=1,2,\cdots,n$ 恰好有一件事情发生$\}\cap\{[0,t_1],[t_1+\Delta t_1,t_2],\cdots,[t_n+\Delta t_n,t]$ 无事件发生$\}$

由密度存在且连续

$$\frac{P(A)}{P(N(t)=n)}=P(t_i<T_i\le t_i+\Delta t_i,\ 1\le i\le n\,|\,N(t)=n)$$

$$=f_{T_1\cdots T_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n)\Delta t_1\cdots\Delta t_n+o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)$$

$$P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$P(A)=\prod_{i=1}^{n}P(N(t_i+\Delta t_i)-N(t_i)=1)P(N(t_1)=0)\cdot P(N(t_2)-N(t_1+\Delta t)=0)\cdots P(N(t)-N(t_n+\Delta t_n)=0)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\lambda\Delta t_i+o(\Delta t_i))e^{-\lambda t_1}e^{-\lambda(t_2-t_1-\Delta t_1)}\cdots e^{-\lambda(t-t_n-\Delta t_n)}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\lambda\Delta t_i+o(\Delta t_i))e^{-\lambda t}e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i}$$

$$\Rightarrow\frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda\Delta t_i+o(\Delta t_i))e^{-\lambda t}e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}=f_{T_1\cdots T_n|N(t)=n}(t_1\cdots t_n|n)\Delta t_1\cdots\Delta t_n+o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)$$

等式两边同除以 $\Delta t_1\cdots\Delta t_n$ 并令 $\Delta t_1\cdots\Delta t_n\to 0$，得:

$$f_{T_1\cdots T_n|N(t)=n}(t_1\cdots t_n|n)=\frac{n!}{t^n}$$

上页第3题解答:

$T_i\sim$ 第 i 个顾客到达时间 $\to t-T_i\sim$ 等待时间

$N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间内来的顾客数

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\Big|N(t)=n\Big]=nt-E\Big[\sum_{i=1}^{n}T_i\Big|N(t)=n\Big]$$

$$=nt-E\Big[\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\Big]$$

$$=nt-E\Big[\sum_{i=1}^{n}U_i\Big]$$

$$=nt-\frac{1}{2}nt=\frac{1}{2}nt$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\Big]=E\Big[\frac{t}{2}N(t)\Big]=\frac{t}{2}\cdot\lambda t=\frac{\lambda}{2}t^2$$