1. 写出下列函数的 (具有 Peano 余项的) Maclaurin 展开式:

(1) $y=\frac{x^3+2x+1}{x-1}$; $\triangleq f(x)$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x+3+\frac{4}{x-1} \\ f'(x)=2x+1+\frac{4\times(-1)}{(x-1)^2} \\ f''(x)=2+\frac{4\times(-1)^2\cdot 2!}{(x-1)^3} \\ f'''(x)=\frac{4\times(-1)^3\cdot 3!}{(x-1)^4} \\ \cdots \\ f^{(n)}(x)=\frac{4\times(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \\ f'(0)=-3 \\ f''(0)=-6 \\ f'''(0)=-4\times 3! \\ \vdots \\ f^{(n)}(0)=-4n! \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-1-3x-3x^2-4x^3+\cdots-4x^n+o(x^n) \quad (x\to 0)$$

3. 求出函数 $\ln\cos x$ 的 (具有 Peano 余项的) 六阶 Maclaurin 展开.

套路同上,耐心算就好,过程略.

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6) \quad (x\to 0)$$

6. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}x^2)^2+o(x^4)\right)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

(x^0,x^1,x^2,x^3项一定不会出现在分子,否则极限就∞了,一般题目不会出得如此毫无意义.因此你可以用这个检查你展对没有)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-o(1)\right)=\frac{1}{2}$$

或用洛必达法:原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x\in[0,2]$, 有 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$.
证明: $|f'(x)|\leqslant 2, x\in[0,2]$.

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad \xi\in(0,x) \quad ①$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, \quad \eta\in(x,2) \quad ②$$

$$②-① \Rightarrow f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2-\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \frac{1}{2}\left[|f(2)|+|f(0)|+\frac{|f''(\eta)|(2-x)^2+|f''(\xi)|x^2}{2}\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{1+1+\frac{1}{2}\underbrace{[(2-x)^2+x^2]}\right\} \quad \boxed{2x^2-4x+4 = 2[(x-1)^2+1] \le 4}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\times 4\right)=2$$

Tips: 但凡用 Taylor expansion 做证明题, 都用反展 (如①②所示)

而非正着展: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

9. 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$ 证明 $f'(0)=0$; 但 $f''(0)$ 不存在.

- $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le \left|\frac{x^{n+1}}{x}\right| = |x^n| \to 0$ as $x\to 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$
- 为证 $f''(0)$ 不存在, 只需证 $\forall x_0 \ne 0$, $f'(x_0)$ 不存在.
  - 若 $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则 $f(x_0)=0$

    显然存在有理数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ 且 $|r_n| \ge |r_{n-1}|$

    则 $\left|\frac{f(r_n)-f(x_0)}{r_n-x_0}\right| = \left|\frac{r_n^{n+1}}{r_n-x_0}\right| \ge \frac{|r_1^{n+1}|}{|r_n-x_0|} \to +\infty$ 故 $f'(x_0)$ 不存在
  - 若 $x_0\in\mathbb{Q}$, 则 $f(x_0)=x_0^{n+1}$, 存在无理数列 $\{S_n\}$ 满足 $S_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$

    $\left|\frac{f(S_n)-f(x_0)}{r_n-x_0}\right| = \left|\frac{0-x_0^{n+1}}{r_n-x_0}\right| = \frac{|x_0^{n+1}|}{|r_n-x_0|} \to +\infty$ 故 $f'(x_0)$ 不存在

实际上只用证 $x_0\in\mathbb{Q}$ 和 $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 中一个情形即可. (分析思考下原因)

10. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 它在 $x\ne 0$ 处显然有任意阶导数. 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用归纳法证明, 当 $x\ne 0$ 时, 对 $n=1,2,\cdots$ 有 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式; 此外, 由导数定义及 L'Hospital 法则, 得出 (记 $y=\frac{1}{x}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 现在所说的结论易用归纳法及 L'Hospital 法则证明.)

先利用归纳法证 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$

再用归纳法证 $f^{(n)}(0)=0$

当 $n=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0,$

当对 n 成立时, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{P_{3n+1}(t)}{e^{t^2}}$

$\overset{L'}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{P_{3n}(t)}{2te^{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{P_{3n-1}(t)}{e^{t^2}}=\cdots=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{P_a(t)e^{t^2}}=0$

$\hookrightarrow$ a 取决于 $3n$ 是奇是偶

$\Rightarrow f^{(n+1)}(0)=0$

第三章综合习题

14. 证明下列不等式:

(1) 对任意实数 x, $e^x \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$;

法一: 令 $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$

$f'(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, $f''(x)=e^x-1-x$, $f'''(x)=e^x-1$

$f'''(x)\begin{cases}\geqslant 0, & x\geqslant 0\\ <0, & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)\geqslant 0\Rightarrow f'(x)\begin{cases}\geqslant 0, & x\geqslant 0\\ <0, & x<0\end{cases}\Rightarrow f(x)\geqslant f(0)=0$

法二: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^{\xi}}{24}x^4$, ξ 介于 0 和 x 之间

$\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

(3) 对 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$;

法一: 老老实实求导 (略)

法二: $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\cos\theta x}{120}x^5>x-\frac{x^3}{6}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{\cos\theta x}{720}x^6<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

法一: 令 $F(x)=f(x)-\left(\frac{x^3}{2}+\left(\frac{1}{2}-f(0)\right)x^2+f(0)\right)$

则 $F(-1)=F(1)=F(0)=F'(0)=0$

$\exists\xi_1\in(-1,0),\ F'(\xi_1)=0$

$\exists\xi_2\in(0,1),\ F'(\xi_2)=0$

$\exists\eta_1\in(\xi_1,0),\ F''(\eta_1)=0$

$\exists\eta_2\in(0,\xi_2),\ F''(\eta_2)=0$

$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ F'''(\xi)=0$ 即 $f'''(\xi)=3$

一开始设的那个多项式之思路:

希望构造 $F(x)=f(x)-P(x)$ s.t. $F(-1)=F(0)=F(1)=0$,

且 $P'''(x)=3$

故 $P(x)=\frac{1}{2}x^3+Ax^2+Bx+C$

然后利用 $F(-1)=F(0)=F(1)=0$ 求出 A,B,C

法二: $\begin{cases} f(1)=f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi)}{6}, & 0<\xi<1 \\ f(-1)=f(0)-f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\eta)}{6}, & -1<\eta<0 \end{cases}$

$\Rightarrow 1=f(1)-f(-1)=\frac{1}{6}\left[f'''(\xi)+f'''(\eta)\right]\Rightarrow f'''(\xi)+f'''(\eta)=6$

不妨设 $f'''(\xi)\neq f'''(\eta)$, 则 $(f'''(\xi)-3)(f'''(\eta)-3)<0$

$\Rightarrow\exists t\in(\eta,\xi)$, s.t. $f'''(t)=3$

19. 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

(反证)假若结论不成立, 则 $\exists M>0,\forall x>M, f'(x)\geq f(ax)>0$

即 $f(x)\nearrow$ on $(M,+\infty)$

取 x 足够大

$f(ax)-f(x)=f'(\xi)(ax-x)\geq(a-1)xf(a\xi)>(a-1)xf(ax)>f(ax)$

$(\xi\in(x,ax))$

$\Rightarrow f(x)<0$ 与 $f(x)>0$ 矛盾!

第四章 习题4.1

1. 求下列不定积分:

(1) $\int x(x-1)^3\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x-1} \int (u+1)u^3 du = \frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}+C = \frac{(4x+1)(x-1)^4}{20}+C$

或 $= \int (x^4-3x^3+3x^2-x)dx = \frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

(3) $\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x-\arctan x+C$

对于 $\int f(x)dx$

第一代换法: 令 $t=\varphi(x)$ [有种把一大块看成一个t的整体思想]

第二代换法: 令 $x=\psi(t)$

实际上我平时积分的时候从不区分😂所以你们了解下概念就好了,考试时候积分能算就算.

2. 用第一代换法求下列不定积分:

(1) $\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则} dx=\frac{1}{2}dt]{t=2x-1} \int t^{100}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{t^{101}}{202}+C = \frac{(2x-1)^{101}}{202}+C$

以本题为例讲一下注意事项(后面答案就不一定这么详细写了).

(i) 换元后立刻跟上 $dx=(\quad)dt$, 括号里必须是不含x的

(ii) 不定积分要跟个常数C

(iii) 最后把x代回去, 保证结果只含x! (不然会扣分)

后面的可能过程较简略!

(3) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}d(\sin x+\cos x) = \ln(1+\sin x+\cos x)+C$

(5) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则} -tdt=xdx]{t=\sqrt{1-x^2}} \int -t^2dt = -\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C$

(7) $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2}\,dx = \int (\frac{\pi}{2}-\arctan x)\,d\arctan x = \frac{\pi}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$

或 $\underline{\underline{t=\arctan\frac{1}{x}}}$ …… $= -\frac{1}{2}(\arctan\frac{1}{x})^2 + C$ 二者一样.

(9) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

注: 凡是 $\sin^\alpha x\cos^\beta x$ 积分, 都用降幂做即可.
$(\alpha, \beta \in N^+)$

3. 用第二代换法求下列不定积分, 其中的 a 均为正常数:

(1) $\int \sqrt{e^x - 2}\,dx \xlongequal{x=\ln(t^2+2)} \int \frac{2t^2}{t^2+2}dt \xlongequal{同1.(5)} \cdots = 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1} + C$

(3) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\,dx \xlongequal{x=a\operatorname{ch}t} \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}dt = \frac{1}{a^2}(-\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}t}) + C = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

用 $x=\frac{a}{\cos t}$ 做注意讨论 $\cos t>0$ 和 $\cos t<0$ 两种情况,
因为不连续, 没法统一做

(5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx \xlongequal{x=t^2-1(t\geq 0)} 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$

(7) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}dx = \int \frac{1}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}d(\frac{\ln x}{x}) = \frac{x}{x-\ln x} + C$

这里用了 $t=\frac{\ln x}{x}$ 是第一代换法

用第二代换法做, 可以先令 $x=\frac{1}{u}$, 再令 $t=1+u\ln u$ (先二再一)

(9) $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx \xlongequal{x=\frac{t^3-1}{2}} \int \frac{t^3+3}{2t}\cdot\frac{3}{2}t^2 dt = \frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{8}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(11) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int \frac{t-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\xlongequal{\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\sqrt{1-t^2}+C,\ \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t} -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \arcsin\frac{1}{x} + C$

或令 $x=\sqrt{t^2+1}$ 和 $x=-\sqrt{t^2+1}$ 分别讨论
结果为 $\arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

5. 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

(3) $\int \cos\ln x\,dx = x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,dx$

$$= x(\cos\ln x+\sin\ln x)-\int\cos\ln x\,dx$$

$$\Rightarrow\int\cos\ln x\,dx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$$

(5) $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\cos x}d\tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int(\sec^3 x-\sec x)dx$

$$\Rightarrow\int\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\sec x\,dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$\int\sec x\,dx$ 还等于 $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

$$\left(=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{(1-\tan^2\frac{x}{2})}dx\right.$$

$$\left.=\int\frac{1}{1-\tan^2\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\cdots\right)$$

※三角齐次式常用trick：分母提 $\cos^2 x$ 出来

(7) $\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt=\int\sin^2 t\,dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\underline{\frac{1}{8}\sin(2\arcsin x)}+C$$

或 $\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$

(9) $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2-\int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$