第十六周：

习题7.1

8. $\left(\sum_{n=1}^{n}|a_nb_n|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛

而 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{i}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛

9.(2) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$ 收敛 $(p>1)$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=0$.

16.(2) $\left|\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi}{4}\right|$ 有界 且 $\frac{1}{\ln n}$ 单减 $\downarrow 0$. 由 Dirichlet 知其收敛 $\square$

(4) 由 Leibnitz 知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛. 而 $\frac{n}{n+1}$ 单调有界 $\therefore$ 由 Abel 知其收敛 $\square$

习题7.2

1. $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ i.e. $|f_n-f|<\varepsilon/2$, $|g_n-g|<\varepsilon/2$ (n 充分大时)

$\Rightarrow |f_n+g_n-f-g|<\varepsilon$ $\square$

2.(1). $x>0$.

(3). $\frac{x-1}{x+1}\in[-1,1) \Rightarrow x\in[0,\infty)$.

(5). $x\in(0,6)$.

(7). $x>0$.

3. $\because \left|\sum_{n=N}^{\infty}u_n(x)\right| \le \frac{1}{N}$ $\therefore$ 由 Cauchy 知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

而若 $\exists$ 控制级数 a_n. 则 $|a_n|>\frac{1}{n}$ 矛盾! $\square$

5. $\because \frac{1}{e^{nx}}$ 在 $x\in[0,\infty)$ 上为单调且一致有界的.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 一致收敛 $\Rightarrow$ (Abel) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0\le x<+\infty$ 上一致收敛.

6. $\zeta(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上一致收敛 $\Rightarrow \zeta(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上连续

由 δ 的任性 $\Rightarrow \zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续

而 $\left(\frac{1}{n^x}\right)'=-\ln n\frac{1}{n^x}$. 在 $[1+\delta,+\infty)$ 内一致收敛 $\left(\because \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(n)}=(-\ln n)^n\cdot\frac{1}{n^x}\right)$.

$\Rightarrow \zeta(x)$ 有连续的各阶导数

7\. $f(x)$ 一致收敛 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 一致收敛 $\Rightarrow$ f 可导. $f'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 一致收敛 $\Rightarrow$ $f''=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$

又∵ $\frac{\sin nx}{n^2}$ 连续 $\rightarrow$ f'' 连续 □

8\. 在 $x\in[1,+\infty)$ 上, $\left|\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{(1+2x)^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 一致收敛.

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{(1+2x)^n}=1.$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n}=-\frac{1}{4}.$

9\. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

∴ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}\,dx=\frac{1}{2}$ □

第十七周

习题7.2

10\. $f_{n+1}(x)=e^{\int_0^x f_n(t)\,dt}$

而若 $f_n(x)\le\frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$ $f_{n+1}(x)=e^{\int_0^x f_n(t)\,dt}\le\frac{1}{1-x}$

显然 $f_n(x)$ 单↑. ∴ $f_n(x)\ge f_n(0)=1$.

∴ 归纳可证 $\{f_n(x)\}$ 单调. 从而极限函数 f ∃ 且 f 单增 (f 还可微).

∴ $\{f_n(x)\}_{x\in[0,1)}$ 单增有上界 $\frac{1}{1-x}$.

PS: 这是由于单调函数几乎处处可微!

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ∃ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{1}{1-x}$

习题7.3

1\. (1) 1　　(5) $+\infty$

(3) $\frac{1}{2}$　　(7) 1

2. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x f(t)\,dt$ 且 $f(x)$ 在 R处连续

$\therefore f(R)=\lim_{x\to R}f(x)=\lim_{x\to R}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

3.(1). 收敛半径为1. $f'=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\arctan x$

(3). 半径为1 $\because \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Rightarrow\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

$\therefore\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}$

(5). 收敛半径为 $+\infty$.

$f'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!}=1+x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!!}=1+x\cdot f(x)$.

$\therefore f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

4.(1). 令 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n^2-1)}$ 半径为1.

$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

$\therefore f(x)=-x\ln(1-x)$ 且 $f(0)=0$.

$\therefore f(x)=\int_0^x -t\ln(1-t)\,dt=\frac{1-x^2}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{4}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=2\cdot f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\ln\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$

(3). $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n+1}$ 半径为1

~~$f(x)=\int_0^x f(t)\,dt=$~~ 则 $(x\cdot f(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3}$.

$\therefore x\cdot f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^3}\,dt=\frac{1}{18}\left(-\sqrt{3}\pi+6\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-6\ln(1-x)+3\ln(1+x+x^2)\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{3}\ln 2$.

5.(1). $x^3-2x^2+5x-7=(x-1+1)^3-2(x-1+1)^2+5(x-1+1)-7$. 收敛半径为 $+\infty$.

$=(x-1)^3+(x-1)^2+4(x-1)-3$.

(3). $\ln x=\ln(x-1+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$ 收敛半径为 1.

(5). $\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$.

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$.

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+1}-1}{n+1}x^{n+1}$. 收敛半径为 $\frac{1}{2}$.

6.(1) ∵ $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

∴ $\sin^2x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

(3). $\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$.

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}\frac{1+(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

(5). $\left(\int_0^x\cos^2t\,dt\right)'=\cos^2x$. 类似于(1)中做法即可 □