第二章 分布与积分

§1.

<u>定义</u>(r.v.的分布): 设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为一个 r.v.,

$\forall B\in\mathcal{S}$, $\mathbb{P}_X(B)\triangleq\mathbb{P}(X^{-1}(B))$, 则称 $\mathbb{P}_X:\mathcal{S}\to[0,1]$ 为 r.v. X 的<u>分布</u>

如果 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, 定义 $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)\triangleq\mathbb{P}_X((-\infty,x])$

则称 $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ 为 r.v. X 的<u>分布函数</u>

注: $\mathbb{P}_X:\mathcal{S}\to[0,1]$ 为一个概率测度, 即 $(S,\mathcal{S},\mathbb{P}_X)$ 为一个概率空间.

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 概率空间 $\xRightarrow{def}$ r.v. $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$

$\xRightarrow{def}$ $(S,\mathcal{S},\mathbb{P}_X)$ 概率空间

当 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ 时, 定义 $F_X(x_1,\cdots,x_n)=\mathbb{P}_X(\prod_{i=1}^{d}(-\infty,x_i])$, $\forall x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\cdots,d$

$(=\mathbb{P}(X_1\le x_1,\cdots,X_d\le x_d))$

<u>定义</u>(同分布) 设 $X,Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为 r.v.s. 如果 $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$ on $\mathcal{S}$

则称 X 与 Y 同分布, 记 $X\overset{d}{=}Y$.

注: $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上一个 r.v. $\Rightarrow\mathbb{P}_X=\mathbb{P}(X^{-1}(\cdot))$

$Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$ 上一个 r.v. $\Rightarrow\mathbb{P}_Y=\mathbb{Q}(X^{-1}(\cdot))$

$\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$ on $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $X\overset{d}{=}Y$ (即使在不同概率空间上)

<u>引理</u>: 设 $X,Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的两个 r.v.s

如果 $F_X(x)=F_Y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 则 $X\overset{d}{=}Y$

证: 只需证 $\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}_Y(B)$

由 $F_X(x)=F_Y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{P}_X((-\infty,x])=\mathbb{P}_Y((-\infty,x])$, $\forall x\in\mathbb{R}$

定义 $\mathcal{A}\triangleq\{(-\infty,x]:x\in\mathbb{R}\}$ 一π类且 $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{L}\triangleq\{B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}:P_X(B)=P_Y(B)\}\Rightarrow\mathcal{A}\subset\mathcal{L}$

下证 $\mathcal{L}$ 为λ类.

(i) $P_X(\mathbb{R})=P_Y(\mathbb{R})=1\Rightarrow\mathbb{R}\in\mathcal{L}$

(ii) $A,B\in\mathcal{L}$ 且 $A\subset B\Rightarrow P_X(A)=P_Y(A),P_X(B)=P_Y(B)$

$\Rightarrow P_X(B\backslash A)=P_X(B)-P_X(A)=P_Y(B)-P_Y(A)=P_Y(B\backslash A)$

(iii) $A_n\in\mathcal{L},n\geq1$ 且 $A_n\uparrow A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_i\Rightarrow P_X(A_n)=P_Y(A_n),\forall n\geq1$

$\Rightarrow P_X(A)=\lim_{n\to\infty}P_X(A_n)=\lim_{n\to\infty}P_Y(A_n)=P_Y(A)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{L}$

故 $\mathcal{L}$ 为λ类

由π-λ类定理, $\underbrace{\sigma(\mathcal{A})}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\Rightarrow\mathcal{L}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

定义(几乎处处相等) 设 $X,Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 r.v.s

如果 $\mathbb{P}(X=Y)=1$, 则称 X 与 Y 几乎处处相等, 记 $X\overset{a.e.}{=}Y$

注: $X\overset{a.e.}{=}Y\Rightarrow X\overset{d}{=}Y$

设 μ 为 $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上一个概率测度, 定义 $F(x)\triangleq\mu((-\infty,x]),\forall x\in\mathbb{R}$

则 $F(x)$ 为一个分布函数(单增, 右连续, $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$)

并且还有 $\forall-\infty<a<b<+\infty$

$$(\ast)\begin{cases}\mu((a,b])=F(b)-F(a)\\ \mu((a,b))=F(b-)-F(a)\\ \mu([a,b])=F(b)-F(a-)\\ \mu([a,b))=F(b-)-F(a-)\end{cases}$$

注意到上面4个等式是等价的

反过来, 设 $F(x),x\in\mathbb{R}$ 为一个分布函数, 问题: 能否通过 $(\ast)$ 中一个等式建立 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上一个概率测度 μ?

首先，定义μ满足：$\forall -\infty<a<b<+\infty$，$\mu((a,b])\triangleq F(b-)-F(a)$

Step1：设$C\subset\mathbb{R}$且C为开集，则存在一列互不相交的开区间(a_i,b_i)，$i\geq 1$

使$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$

定义$\mu(C)=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i))\triangleq\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{\infty}[F(b_i-)-F(a_i)]$

Step2：设$D\subset\mathbb{R}$且D为闭集，故D^c为开集，于是存在一列互不相交的开区间(c_i,d_i)，$i\geq 1$，使$D^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}(c_i,d_i)$

定义$\mu(D)\triangleq 1-\mu(D^c)=1-\sum_{i=1}^{\infty}[F(d_i-)-F(c_i)]$

Step3：设$S\subset\mathbb{R}$为任何一个子集

$$\mu^*(S)\triangleq\inf_{\substack{S\subset C\\ C\text{开}}}\mu(C)\quad(\text{外测度})$$

$$\mu_*(S)\triangleq\sup_{\substack{D\subset S\\ D\text{闭}}}\mu(D)\quad(\text{内测度})$$

显然，$\mu_*(S)\leq\mu^*(S)$.

如果$\mu_*(S)=\mu^*(S)$，称S为关于分布函数$F(x)$"可测的"

故当S为"可测的"，定义$\mu(S)=\mu_*(S)=\mu^*(S)$

思考问题.(1)开集和闭集都是"可测的"

(2)定义$\mathcal{G}\triangleq\{S\subset\mathbb{R}:S$为"可测的"$\}$，则$\mathcal{G}$为$\sigma$-代数

注意到由(1)$\Rightarrow\{$开集$C\}\subset\mathcal{G}$

$\Rightarrow\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\sigma(\{$开集$C\})\subset\mathcal{G}$

(3)上面定义μ为$\mathcal{G}$上的概率测度.

§2. 分布函数的性质

设$F(x)$，$x\in\mathbb{R}$为一个分布函数

(i)分布函数是一个单增函数，则
$$\left.\begin{aligned}F(x-)&=\lim_{y\uparrow x}F(y)=\sup_{y<x}F(y)\\ F(x+)&=\lim_{y\downarrow x}F(y)=\inf_{y>x}F(y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(x-)\leq F(x)=F(x+)$$

右连续

(ii)分布函数$F(x)$的不连续点为跳跃不连续点且有至多可数个.

定义 $\Delta F(x) \triangleq F(x+)-F(x-)=F(x)-F(x-)\geq 0$

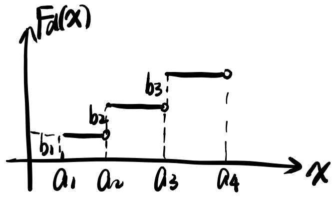
分布函数的分类与分解

设 $F(x), x\in\mathbb{R}$ 为一个分布函数，由其性质(1)，假设 $F(x)$ 的不连续点为 $\{a_n, n\in\mathbb{Z}\}$

(其中 $a_1<a_2<\cdots$)，定义 $b_n\triangleq F(a_n)-F(a_n-)(=\Delta F(a_n))>0$，$\forall n\in\mathbb{Z}$

定义 $F_d(x)\triangleq\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n 1_{[a_n,+\infty)}(x)$，$x\in\mathbb{R}$

注意到 $x\longmapsto 1_{[a,+\infty)}(x)=\mathbb{P}(a_n\leq x)$ 实际上为一个分布函数，以后称其为退化的分布函数



$F_d(x)$ 是单增，右连续，$F_d(-\infty)=0$，$F_d(+\infty)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}[F(a_n)-F(a_n-)]\leq F(+\infty)-F(-\infty)=1$

若 $F_d(+\infty)=1$ (即 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n=1$)，则称 $F_d(x)$ 为一个离散型分布函数.

例. 设 X 为一个取值于 $\{a_n: n\in\mathbb{Z}\}$ 的一个 r.v. 且 $b_n=\mathbb{P}(X=a_n)$，$n\in\mathbb{Z}$ ($\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=1$)

则 X 的分布函数 $F_X(x)\triangleq\mathbb{P}(X\leq x)=F_d(x)$ 为离散型分布函数

定义：$F_c(x)\triangleq F(x)-F_d(x)$，$x\in\mathbb{R}$，则 $\Delta F_c(x)=\Delta F(x)-\Delta F_d(x)=0$，$\forall x\in\mathbb{R}$

因此 $F_c(x)$ 是一个连续函数，并且 $F_c(x)$ 是单调函数.

以及 $F_c(-\infty)=F(-\infty)-F_d(-\infty)=0$

$F_c(+\infty)=F(+\infty)-F_d(-\infty)=1-\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n\in[0,1]$

若 $F_c(+\infty)=1$，则称 $F_c(x)$ 为一个连续型分布函数

总结：对任何分布函数 $F(x)$，有 $F(x)=F_d(x)+F_c(x)$，$x\in\mathbb{R}$

定理 (分布函数的 Jordan 分解)：

设 $F(x), x\in\mathbb{R}$ 为一个分布函数，则存在一个常数 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$F(x)=\alpha F_1(x)+(1-\alpha)F_2(x)$$

其中 $F_1(x)$ 为离散型分布函数，$F_2(x)$ 为连续型分布函数

证：只考虑 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n\in(0,1)$，定义 $\alpha\triangleq F_d(+\infty)\in(0,1)$ 以及 $F_1(x)\triangleq\frac{1}{\alpha}F_d(x)\Rightarrow F_1(+\infty)=1$

因此 $F_1(x)$ 为离散型分布函数

因此$F_1(x)$为离散型分布函数

同理,定义$F_2(x) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} F_c(x) \Rightarrow F_2(+\infty)=1$,故$F_2(x)$为连续型分布函数

则$F(x)=F_d(x)+F_c(x)=\alpha F_1(x)+(1-\alpha)F_2(x)$

定义(绝对连续型分布函数AC)

设$F(x)$为一个分布函数,如果$F(x)$为一个AC函数,即

$\forall -\infty<x_1<y_1<\cdots<x_m<y_m<+\infty \ (m\geq 1)$ 及 $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t.

$\sum_{i=1}^{m}|y_i-x_i|<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}|F(y_i)-F(x_i)|<\varepsilon$,则称$F(x)$为一个AC型分布函数

注:如果$F(x)$为一个AC型分布函数 $\Rightarrow \exists$ 一个非负 $f\in L^1(\mathbb{R})$,使

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2)-F(x_1),\ \forall x_1<x_2$$

$$\left(\text{或} \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = F(x)-F(-\infty)=F(x),\ \forall x\right)$$

此外,$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(-\infty)=1-0=1$

以后称f为AC型分布函数$F(x)$的密度函数

定义(奇异型分布函数):

设$F(x)$为一个分布函数,如果$F'=0$,则$F(x)$为奇异型分布函数

进一步,若$F(x)$还是连续的,则称$F(x)$为连续奇异分布函数

注:任何离散型分布函数都是奇异型分布函数

- 连续奇异型分布函数:Cantor分布函数

定理(单调函数的Leb分解)

设$f(x)$为一个单调函数且$f(-\infty)=0$

记f'为f的导数(if exists),则

(i) 定义$S \triangleq \{x\in\mathbb{R}: f'(x)\in[0,+\infty)\}$,有$m(S^c)=0$ (m表示Lebesgue测度)

(ii) $f'\in L^1(\mathbb{R})$,并且$\forall x_1<x_2$,有$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \leq f(x_2)-f(x_1)$

其中当f为AC时,等号成立

(iii) 定义$f_{ac}(x)=\int_{-\infty}^{x} f'(u)du$ (AC函数)

$$f_s(x) \triangleq f(x) - f_{ac}(x)$$

则 f_{ac} 和 f_s 都单增，且 $f_{ac}' = f'$ a.e. 和 $f_s' = 0$ a.e.

定理（分布函数的Lebesgue分解）设 $F(x)$ 为一个分布函数，则

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, s.t. $F(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + (1-\alpha_1-\alpha_2) F_{cs}(x)$

其中，$F_d(x)$ 为离散型分布函数

$F_{ac}(x)$ 为AC型分布函数

$F_{cs}(x)$ 为连续奇异分布函数

证：$F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x)$

其中 F_1 为离散型分布函数，F_2 连续分布函数

由单调函数的Leb-分解，得到 $F_2(x) = \hat{F}_{ac}(x) + \hat{F}_{cs}(x)$

其中 $\hat{F}_{ac}(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} F_2'(y)dy$，$\hat{F}_{cs}(x) \triangleq F_2(x) - \hat{F}_{ac}(x)$

注意到 $\hat{F}_{ac}(x)$ 单增，AC 且 $\hat{F}_{ac}(-\infty) = 0$ 以及 $\hat{F}_{ac}(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2'(y)dy \leq F_2(+\infty) - F_2(-\infty) = 1$

另外，$\hat{F}_{cs}(x)$ 单增，且 $\hat{F}_{cs}' = F_2' - \hat{F}_{ac}' = F_2' - F_2' = 0$ a.e.

$\hat{F}_{cs}(x)$ 还是连续的且 $\hat{F}_{cs}(-\infty) = F_2(-\infty) - \hat{F}_{ac}(-\infty) = 0$ 以及

$\hat{F}_{cs}(+\infty) = F_2(+\infty) - \hat{F}_{ac}(+\infty) = 1 - \hat{F}_{ac}(+\infty) \in [0,1]$

设 $\beta = \hat{F}_{ac}(+\infty) \in (0,1)$，定义

$F_{ac}(x) \triangleq \frac{1}{\beta} \hat{F}_{ac}(x) \Rightarrow F_{ac}(x)$ 为AC分布函数

$F_{cs}(x) \triangleq \frac{1}{1-\beta} \hat{F}_{cs}(x) \Rightarrow F_{cs}(x)$ 为连续奇异分布函数

§3. 积分（数学期望）

问题：$X(\omega): (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的r.v.，如何定义 X 关于 $\mathbb{P}$ 的积分

$E(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$，$\int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$

Step1：设r.v. X 为非负简单r.v.，即存在一个 Ω 划分 $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$，以及 $b_n \geq 0$，有

$X(\omega) = \sum_{n=1} b_n 1_{A_n}(\omega)$

定义 $\int_\Omega X\,d\mathbb{P}=\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)=\int_\Omega \sum_{n\geq 1} b_n 1_{A_n}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)=\sum_{n\geq 1} b_n\int_\Omega 1_{A_n}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$

$$E(X)\triangleq\sum_{n\geq 1} b_n\mathbb{P}(A_n)\in[0,+\infty]$$

Step2：设 X 为非负 r.v.，则存在一列非负简单 r.v. $\{X_n\}_{n\geq 1}$，使

$$X_n(\omega)\uparrow X(\omega),\ \forall\omega\in\Omega\quad \text{as } n\to\infty$$

定义 $E(X)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}E(X_n) & \text{极限存在}\\ +\infty & \text{otherwise}\end{cases}$

Step3：设 X 为任意 r.v.，则 $X=X^+-X^-$，定义

定义 $E(X)\triangleq E(X^+)-E(X^-)$

注：· 若 r.v. X 的 $E(X)$ 存在，称 X 是<u>可积的</u>

进一步，定义 $L^p(\mathcal{F})\triangleq\{X:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为 r.v.：$E(|X|^p)<+\infty\}$，$p\geq 1$

$$=\{X\in\mathcal{F}:E(|X|^p)<+\infty\}$$

$X\in L^p(\mathcal{F})$，则 X 是可积的

· 若 $X,Y\in L^1(\mathcal{F})$，$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

若 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 $X\geq 0$ a.e. (i.e. $\mathbb{P}(X\geq 0)=1$) $\Rightarrow E(X)\geq 0$

$$X=0\text{ a.e.}\Rightarrow E(X)=0$$

若 $X,Y\in L^1(\mathcal{F})$ 且 $X\geq Y$ a.e. $\Rightarrow E(X)\geq E(Y)$

X 可积 $\Leftrightarrow E(|X|)<+\infty$

若 $X\in L^1(\mathcal{F})$，$A\in\mathcal{F}$，若 $a\leq X(\omega)\leq b$，$\forall\omega\in A$，则 $a\mathbb{P}(A)\leq E(X1_A)\leq b\mathbb{P}(A)$

若 $X\in L^1(\mathcal{F})\Rightarrow|E(X)|\leq E(|X|)$

例. 设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 $X\geq 0$ a.e. 定义 $\mu(A)\triangleq E(X1_A)$，$A\in\mathcal{F}$

则 $\mu:\mathcal{F}\to[0,+\infty)$ 为一个有限测度，即

(1) $\mu(\phi)=0$

(2) $\{A_n\}\subset\mathcal{F}$，$A_i\cap A_j=\phi\Rightarrow E(X1_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n})=\sum_{n=1}^\infty E(X1_{A_n})$

(3) $\mu(\Omega)=E(X)\in[0,+\infty)$

定理(单调收敛定理) 设$\{X_n\}_{n\ge1}$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下的一列非负(可积)r.v.s且

$X_n\uparrow$ a.e. $n\to\infty$, 则 $E[\lim\limits_{n\to\infty}X_n]=\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

注: $X_0\le X_n,\forall n\ge1$, a.e. 其中$X_0\in L^1(\mathcal{F})$ 令$Y_n\triangleq X_n-X_0\Rightarrow Y_n\uparrow, Y_n\ge0$, a.e.

(此时没有非负性)

Fatou引理: 设$\{X_n\}_{n\ge1}$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列非负(可积)r.v.s.

则 $E[\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n]\le\varliminf\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

证明: $\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{m\ge n}X_m(X)$

定义 $Y_n=\inf\limits_{m\ge n}X_m$ 故 $Y_n\uparrow\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n$ a.e., $0\le Y_n\le X_n,\forall n\ge1$

由MCT, $E[\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n]=E[\lim\limits_{n\to\infty}Y_n]\overset{MCT}{=}\lim\limits_{n\to\infty}E[Y_n]\le\varliminf\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

定理(控制收敛定理DCT)

设$\{X_n\}_{n\ge1}$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下一列(可积)r.v.s, 满足:

(i) $\forall n\ge1, |X_n|\le Y$ a.e., 其中$Y\in L^1(\mathcal{F})$

(ii) $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{a.e.}X$, 其中$X$为r.v. $(P(\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X)=1)$

则 $E[\lim\limits_{n\to\infty}X_n]=\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

证明: $Y\pm X_n\ge0$ a.e.

利用Fatou引理, 有 $E[\varliminf\limits_{n\to\infty}(X_n+Y)]\le\varliminf\limits_{n\to\infty}E[X_n+Y]\Rightarrow E[\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n]\le\varliminf\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

$E[\varliminf\limits_{n\to\infty}(Y-X_n)]\le\varliminf\limits_{n\to\infty}E[Y-X_n]\Rightarrow\varlimsup\limits_{n\to\infty}E[X_n]\le E[\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n]$

由(ii) $E[\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n]=E[\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n]$

故 $E[\lim\limits_{n\to\infty}X_n]=\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]$

注: 有界收敛定理BCT: 在DCT中, r.v. $Y=M$ 常数

引理: 设$X\in L^1(\mathcal{F})$且X非负(a.e.), 假设$A\in\mathcal{F}$且$\mathbb{P}(A)=0$ (即$A\in\mathcal{N}$)

则有 $E[X1_A]=0$

证明：定义 $X_n \triangleq X\wedge n, n\geq 1 = \min\{X,n\}$ 故 $X_n \uparrow X$ 且 $0\leq X_n \leq n$ (a.e.)

于是 $0\leq E[X_n 1_A] \leq nP(A)=0 \Rightarrow \forall n\geq 1, E[X_n 1_A]=0$

$\therefore E[X1_A]=E[\lim_{n\to\infty} X_n 1_A] \overset{MCT}{=\!=} \lim_{n\to\infty} E[X_n 1_A]=0$

注：非负 $X\in L^1(\mathcal{F})$，若 $A\in\mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(A)=0 \Rightarrow \mu(A)\triangleq E[X1_A]=0$

称 μ 关于 $\mathbb{P}$ 是绝对连续的，记 $\mu<<\mathbb{P}$

[AC函数 $F(x)=\int_0^x f(y)dy$，$f\in L^1(\mathbb{R})$ 非负，

定义 $\mu(A)\triangleq\int_A f(y)dy \Rightarrow \mu<<dx \Rightarrow \exists$ 非负 Radon-Nickdym 导数 $\frac{d\mu}{dx}=f$]

习题：设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 X 非负，如果 $A_n\in\mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，则 $\lim_{n\to\infty} E[X1_{A_n}]=0$

引理：设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 $X>0$ a.e. on $A\in\mathcal{F}$ $(\mathbb{P}(A\cap\{X\leq 0\})=0)$

如果 $E[X1_A]=0$，则 $\mathbb{P}(A)=0$

证：$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap\{X>0\})+\overbrace{\mathbb{P}(A\cap\{X\leq 0\})}^{=0}=\mathbb{P}(A\cap\{X>0\})$

下证 $\mathbb{P}(A\cap\{X>0\})=0$.

事实上，定义 $A_0\triangleq\{X>0\}$，$A_n\triangleq\{X>\frac{1}{n}\}$，$\forall n\geq 1$ 故 $A_n\uparrow A_0=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

故 $0\leq\frac{1}{n}\mathbb{P}(A\cap A_n)\leq E[X1_{A\cap A_n}]\leq E[X1_A]=0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap A_n)=0$

$\therefore \mathbb{P}(A\cap\{X>0\})=\mathbb{P}(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap A_n))=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A\cap A_n)=0$

注：设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 $X>0$ a.e. (on Ω)，则 $\mu(A)\triangleq E[X1_A]=0\Rightarrow\mathbb{P}(A)=0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathbb{P}<<\mu \\ \mu<<\mathbb{P}\end{array}\right\}$ 称 μ 与 $\mathbb{P}$ 是相互等价，记 $\mu\sim\mathbb{P}$

推论1：设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且满足 $\forall A\in\mathcal{F}, E[X1_A]=0$，则 $X=0$, a.e.

证：只需证 $\mathbb{P}(X\neq 0)=0$

定义 $A_0\triangleq\{X>0\}$，则 $X>0$ on A_0

又由于 $A_0\in\mathcal{F}$，由条件 $E[X1_{A_0}]=0$

故由上述引理 $\mathbb{P}(A_0)=0$ (i.e. $\mathbb{P}(X>0)=0$)

下证 $\mathbb{P}(X<0)=0$：

事实上，定义 $\hat{A}_0 \triangleq \{X<0\}$，故 $-X>0$ on $\hat{A}_0$

$\hat{A}_0\in\mathcal{F}$，由条件 $E[(-X)1_{\hat{A}_0}]=-E[X1_{\hat{A}_0}]=0$

故由上述引理 $\mathbb{P}(\hat{A}_0)=0$ (i.e. $\mathbb{P}(X<0)=0$)

<u>推论2</u>：设 X_1, X_2 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下两个 r.v. 且满足存在 $p>0$

使得 $E[|X_1-X_2|^p]=0$

则 $X_1=X_2$ a.e.（即 $\mathbb{P}(X_1=X_2)=1$）

证明：只需证 $\mathbb{P}(X_1-X_2\neq 0)=0$

定义 $A_0=\{X_1\neq X_2\}$，则 $X=|X_1-X_2|^p>0$ on A_0

又由于 $A_0\in\mathcal{F}$，由题设 $E[X1_{A_0}]=E[|X_1-X_2|^p 1_{\{X_1\neq X_2\}}]=E[|X_1-X_2|^p]=0$

由上述引理 $\mathbb{P}(A_0)=0$，即 $\mathbb{P}(X_1\neq X_2)=0$

<u>推论3</u>：设 X_1, X_2 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下两个可积 r.v.s 且满足

$\forall A\in\mathcal{F}$，$E[X_1 1_A]\leq E[X_2 1_A]$，则 $X_1\leq X_2$ a.e.

（不抄了）

例. 设 $X\in L^1(\mathcal{F})$ 且 X 非负，则

$$E[X]=\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)=\int_\Omega\left(\int_0^{X(\omega)}1dt\right)\mathbb{P}(d\omega)=\int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}1_{\{X(\omega)\geq t\}}dt\right)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_0^{+\infty}\left(\int_\Omega 1_{\{X(\omega)\geq t\}}\mathbb{P}(d\omega)\right)dt=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq t)dt$$

§4. 变量变换公式

<u>定理</u>（变量变换公式）：设 $X:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(S,\mathcal{S})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一个 r.v.

以及 $h:(S,\mathcal{S})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为可测函数，且满足 $h(X)\in L^1(\mathcal{F})$

则 $E[h(X)]=\int_\Omega h(X)(\omega)\mathbb{P}(d\omega)=\int_S h(x)\mathbb{P}_X(dx)$

其中P_X为r.v. X的分布

特别地，当$(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$，则$E[h(X)]=\int_{\mathbb{R}}h(x)P_X(dx)=\int_{\mathbb{R}}h(x)F_X(dx)$

其中$F_X(x)\triangleq P_X((-\infty,x])$，$x\in\mathbb{R}$为r.v. X的分布函数

证明：Step1：设$h(x)=1_B(x)$，$x\in S$，其中$B\in\mathcal{S}$

于是，$E[h(X)]=E[1_B(X)]=\mathbb{P}(X\in B)=P_X(B)=\int_S 1_B(x)P_X(dx)=\int_S h(x)P_X(dx)$

Step2：设$h(x)$为一个非负简单函数，即存在S中的一个划分$\{B_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{S}$

以及常数$a_n>0$，$\forall n\geq1$，使$h(x)=\sum_{n\geq1}a_n1_{B_n}(x)$，$x\in S$，于是

$$E[h(X)]=E\Big[\sum_{n\geq1}a_n1_{B_n}(X)\Big]\overset{MCT}{=}\sum_{n\geq1}E[a_n1_{B_n}(X)]=\sum_{n\geq1}a_n\mathbb{P}(X\in B_n)$$

$$=\sum_{n\geq1}a_n\int_S 1_{B_n}(x)P_X(dx)\overset{MCT}{=}\int_S\sum_{n\geq1}a_n1_{B_n}(x)P_X(dx)=\int_S h(x)P_X(dx)$$

Step3：设h为非负可测函数，则存在一列非负简单函数$\{h_n\}_{n\geq1}$使

$h_n(x)\uparrow h(x)$，$n\to\infty$，$\forall x\in S$

由Step2知 $E[h_n(X)]=\int_S h_n(x)P_X(dx)$，$\forall n\geq1$

$$\overset{MCT}{\Longrightarrow}E[h(X)]=\int_S h(x)P_X(dx)$$

Step4：设h为任意实值可测函数，则$h(x)=h^+(x)-h^-(x)$，$x\in S$

由Step3得
$$\left.\begin{array}{l}E[h^+(X)]=\int_S h^+(x)P_X(dx)\\ E[h^-(X)]=\int_S h^-(x)P_X(dx)\end{array}\right\}\overset{\text{线性性}}{\Longrightarrow}E[h(X)]=\int_S h(x)P_X(dx)$$

例. 设X为实值连续型r.v.，即$\exists$非负$f\in L^1(\mathbb{R})$且$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}=1$并满足

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x f(y)dy\quad(\text{AC分布函数})$$

则X的分布表为$P_X(B)=\int_B f(y)dy$，于是$P_X(dx)=F_X(dx)=f(x)dx$

由变量变换公式有$E[h(X)]=\int_{\mathbb{R}}h(x)F_X(dx)=\int_{\mathbb{R}}h(x)f(x)dx$

例. 设X为一个取值$\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$的离散型r.v.且其分布律$b_n=\mathbb{P}(X=a_n)$，$\forall n\geq1$

则X的分布函数$F_X(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}^+}b_n1_{[a_n,+\infty)}(x)$，$x\in\mathbb{R}$

X的分布P_X为$P_X=\sum_{n\in\mathbb{N}^+}b_n\delta_{a_n}$，其中$\delta_{a_n}$为Dirac-delta测度

即 $P_X(B)=\sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n\delta_{a_n}(B)=\sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n I_B(a_n)$

由变量变换公式得 $E[h(X)]=\int_{\mathbb{R}} h(x)\sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n\delta_{a_n}(dx)$

$=\sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n\int_{\mathbb{R}} h(x)\delta_{a_n}(dx)=\sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n h(a_n)$

老师所谓"记不记无所谓"的部分:

<u>定义</u>(push forward measure):

设 $T:(S_1,\mathcal{S}_1)\to(S_2,\mathcal{S}_2)$ 为一个可测映射,对于给定的 $(S_1,\mathcal{S}_1)$ 上一个测度 μ,

定义 $(T_\#\mu)(B)\triangleq\mu(T^{-1}(B)),\ \forall B\in\mathcal{S}_2$

称 $T_\#\mu$ 为测度 μ 关于 T 的 push forward measure

注:设 $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下 r.v.,则 X 的分布 P_X 为 $\mathbb{P}$

关于 r.v. X 的 push forward measure $(P_X(B)\triangleq\mathbb{P}(X^{-1}(B)),\forall B\in\mathcal{S})$

<u>定理</u>(变量变换公式):

设 h 为定义在 $(S,\mathcal{S})$ 上的一个可测函数,则

h 关于 $T_\#\mu$ 是可积的 $\Longleftrightarrow h\circ T$ 关于 μ 是可积的.

进一步,有 $\int_{S_2} h\,d(T_\#\mu)=\int_{S_1} h\circ T\,d\mu$

注:取 $T=X$ r.v. $\mu=\mathbb{P}$, $T_\#\mu=P_X$, $(S_1,\mathcal{S}_1)=(\Omega,\mathcal{F}),(S_2,\mathcal{S}_2)=(S,\mathcal{S})$

$\Longrightarrow \int_S h\,dP_X=\int_\Omega h\circ X\,d\mathbb{P}$

· 设 $(S_1,\mathcal{S}_1)=(S_2,\mathcal{S}_2)=(S,\mathcal{S})$ 以及 $T:(S,\mathcal{S})\to(S,\mathcal{S})$ 可测.

若定义在 $(S,\mathcal{S})$ 上的测度 μ 满足 $T_\#\mu=\mu$

则称 μ 关于 T 是不变的(或 μ 为 T 的不变测度)

例.取 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, $T^a(x)\triangleq x+a,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (translation map)

设 m 为 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上 Lebesgue 测度, $\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$(T^a_\# m)(B)=m((T^a)^{-1}(B))=m(\{x\in\mathbb{R}: x+a\in B\})=m(B-a)=m(B)$

$\Rightarrow T^a_{\#} m = m$，即Lebesgue测度为$T^a$的一个不变测度

§5. 独立性

定义（σ代数的独立性）

设$\mathcal{H}, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$为两个σ代数，如果$\forall H \in \mathcal{H}$和$G \in \mathcal{G}$，有

$\mathbb{P}(H \cap G) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G)$，称$\mathcal{H}$和$\mathcal{G}$是相互独立的

定义（r.v.的独立性）

设X, Y为$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$下两个r.v.s，如果$\sigma(X)$与$\sigma(Y)$独立，则

称r.v.s X与Y相互独立.

例. 设$X = 1_A$，$Y = 1_B$，$A, B \in \mathcal{F}$，则$\sigma(X) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$，$\sigma(Y) = \{\phi, \Omega, B, B^c\}$

A与B独立$\Leftrightarrow \sigma(X)$与$\sigma(Y)$独立

定义（多个事件的独立性）

设$\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$，如果对任意正整数$L \geq 1$，以及互不相同$i_1, \cdots, i_L$

$\subset \{1, 2, \cdots, n\}$，满足 $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{L} A_{i_k}) = \prod_{k=1}^{L} \mathbb{P}(A_{i_k})$

则称$A_n, n \geq 1$为相互独立的.

定义（任意个集类独立性）

设$\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$为一族集类且$\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$（$\alpha \in I$，$I$可以不可数）

如果$\forall$正整数$L \geq 1$以及互不相同$i_1, \cdots, i_L \in I$，满足

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{L} A_{i_k}) = \prod_{k=1}^{L} \mathbb{P}(A_{i_k}), \quad \forall A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$$

定理：设$\mathcal{G}_i \triangleq \sigma(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{F}$，$i = 1, \cdots, n$，如果$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$为相互独立的π类，则$\mathcal{G}_1, \cdots, \mathcal{G}_n$相互独立.

证明：$\forall$正整数$L \leq n-1$以及互不相同$i_1, \cdots, i_L \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$

定义 $H \triangleq \bigcap_{k=1}^{L} A_{i_k}$，$\forall A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$

再定 $\forall G \in \sigma(\mathcal{A}_n)$，$\mu(G) \triangleq \mathbb{P}(H \cap G)$，$\nu(G) \triangleq \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G)$

再定义 $\forall G\in\mathcal{G}_n=\sigma(\mathcal{A}_n)$, $\mu_1(G)=\mathbb{P}(H\cap G)$, $\mu_2(G)=\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G)$

则 μ_1 与 μ_2 为 $\mathcal{G}_n$ 上的两个有限测度且 $\mu_1(\Omega)=\mu_2(\Omega)=\mathbb{P}(H)$

由于 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_n$ 相互独立，则 $\mu_1=\mu_2$ on $\mathcal{A}_n$ $(*)$

下证 $\mu_1=\mu_2$ on $\mathcal{G}_n=\sigma(\mathcal{A}_n)$：

事实上，定义 $\mathcal{L}\triangleq\{G\in\mathcal{G}_n \mid \mu_1(G)=\mu_2(G)\}$，可验证为λ类

$$\left.\begin{array}{l}\text{由}(*)\text{和 }\mathcal{A}_n\subset\mathcal{L}\xRightarrow{\pi\text{-}\lambda}\mathcal{G}_n=\sigma(\mathcal{A}_n)\subset\mathcal{L}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \mathcal{L}\subset\mathcal{G}_n\end{array}\right\}\Rightarrow\mathcal{L}=\mathcal{G}_n$$

即 $\forall G\in\mathcal{G}_n=\sigma(\mathcal{A}_n)\Rightarrow\mathbb{P}(H\cap G)=\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G)$

$\xRightarrow{\text{(自己想)}}$ $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_{n-1},\mathcal{G}_n$ 独立

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}_n,\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_{n-1}$ 独立

用同样方法可得 $\mathcal{G}_n,\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_{n-2},\mathcal{G}_{n-1}$ 独立

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow\mathcal{G}_1,\cdots,\mathcal{G}_n$ 独立

<u>推论</u>：设 $\mathcal{G}_\alpha\triangleq\sigma(\mathcal{A}_\alpha)(\subset\mathcal{F})$, $\alpha\in I$（可以不可数），如果 $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为相互独立的π类，则 $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为相互独立

习题：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下实值 r.v.s，则

$$X_1,\cdots,X_n\text{ 相互独立}\Leftrightarrow\mathbb{P}(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n)=\prod_{k=1}^n\mathbb{P}(X_k\le x_k),\ \forall x_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,n$$

Pf. $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow\sigma(X_1),\cdots,\sigma(X_n)$ 相互独立

$(\Rightarrow)$ 若 $\sigma(X_1),\cdots,\sigma(X_n)$ 相互独立，则 $\forall B_k\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $k=1,2,\cdots,n$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^n X_k^{-1}(B_k)\Big)=\prod_{k=1}^n\mathbb{P}(X_k^{-1}(B_k))$$

取 $B_k=(-\infty,x_k]\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $k=1,\cdots,n$ 即可

$(\Leftarrow)$ 若 $\mathbb{P}(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n)=\prod_{k=1}^n\mathbb{P}(X_k\le x_k)$, $\forall x_k\in\mathbb{R},k=1,\cdots,n$ $(*)$

定义 $\mathcal{A}_k\triangleq\{X_k^{-1}((-\infty,x]):x\in\mathbb{R}\}$, $k=1,\cdots,n$，则 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ 都是π类

由 $(*)$ 知 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ 相互独立

注意到 $\sigma(X_k)=\sigma(\mathcal{A}_k)$

由上面定理得 $\sigma(X_1)=\sigma(\mathcal{A}_1),\cdots,\sigma(X_n)=\sigma(\mathcal{A}_n)$ 相互独立

习题：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下的相互独立的 S-值的r.v.s

且设 $f_k:(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ 可测映射，$k=1,\cdots,n$，则

$f_1(X_1),f_2(X_2),\cdots,f_n(X_n)$ 相互独立

证明：注意到 $f_k\circ X_k:(\Omega,\mathcal{F})\to(T,\mathcal{T})$ 是r.v.，$k=1,2,\cdots,n$

需证 $f_1\circ X_1,\cdots,f_n\circ X_n$ 相互独立，此等价于 $\sigma(f_1\circ X_1),\cdots,\sigma(f_n\circ X_n)$ 相互独立

事实上，$\forall C_k\in\mathcal{T},k=1,\cdots,n$，有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(f_k\circ X_k)^{-1}(C_k)\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}X_k^{-1}(f_k^{-1}(C_k))\right)$$

由于 $f_k:(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ 是可测的，故 $f_k^{-1}(C_k)\in\mathcal{S}$

又由 $X_1,\cdots,X_n$ 的独立性，

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}X_k^{-1}(f_k^{-1}(C_k))\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_k^{-1}(f_k^{-1}(C_k))\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left((f_k\circ X_k)^{-1}(C_k)\right)$$

定理：设 $i\geq1$（正整数）及 $m(i)\geq1$（正整数），假设 $\{\mathcal{F}_{ij}\}_{i\geq1,j=1\cdots m(i)}$ 为

相互独立的 σ-代数，对任意 $i\geq1$，

定义 $\mathcal{F}_i\triangleq\bigvee_{j=1}^{m(i)}\mathcal{F}_{ij}=\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{m(i)}\mathcal{F}_{ij}\right)$

则 $\{\mathcal{F}_i\}_{i\geq1}$ 相互独立

注：
$$\left(\begin{array}{cccc}\mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} & \cdots & \mathcal{F}_{1m(1)}\\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} & \cdots & \mathcal{F}_{2m(2)}\\ \vdots & & & \vdots\\ \mathcal{F}_{n1} & \mathcal{F}_{n2} & \cdots & \mathcal{F}_{nm(n)}\end{array}\right)\begin{array}{l}\xrightarrow{\vee}\mathcal{F}_1\\ \xrightarrow{\vee}\mathcal{F}_2\\ \\ \xrightarrow{\vee}\mathcal{F}_n\end{array}$$

证明：对任意 $i\geq1$，定义 $\mathcal{Q}_i\triangleq\left\{\bigcap_{j=1}^{m(i)}E_{ij}:E_{ij}\in\mathcal{F}_{ij}\right\}$

则 $\{\mathcal{Q}_i\}_{i\geq1}$ 为相互独立的π类且 $\sigma(\mathcal{Q}_i)=\mathcal{F}_i$

$\Rightarrow\{\mathcal{F}_i\}_{i\geq1}$ 相互独立

定理：设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下的一列r.v.s，则

(i) 如果 $\forall n\geq 1$, $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\sigma(X_{n+1})$ 独立, 则有 $X_1, X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立

(ii) 如果 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 相互独立, 则有 $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\mathcal{T}_n^X \triangleq \sigma(X_i, i>n)$ 相互独立

证明: (i) 由题设和 $\forall n\geq 1$ 以及 $\forall B\in \mathcal{S}^{\otimes n}$ 和 $C\in\mathcal{S}$ 有

$X_k:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ r.v.

$(X_1,\cdots,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(S^n,\mathcal{S}^{\otimes n})$

$$\mathbb{P}\left((X_1,\cdots,X_n)^{-1}(B)\cap X_{n+1}^{-1}(C)\right)=\mathbb{P}\left((X_1\cdots X_n)^{-1}(B)\right)\mathbb{P}\left(X_{n+1}^{-1}(C)\right)$$

取 $B=\prod\limits_{k=1}^{n}B_k$ $(B_1\times B_2\times\cdots\times B_n)$, $B_k\in\mathcal{S}$, 则有 $(X_1,\cdots,X_n)^{-1}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}B_k\right)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\left(X_k^{-1}(B_k)\right)$

于是 $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}X_k^{-1}(B_k)\cap X_{n+1}^{-1}(C)\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}X_k^{-1}(B_k)\right)\mathbb{P}\left(X_{n+1}^{-1}(C)\right)$

取 $n=1$, $\mathbb{P}\left(X_1^{-1}(B_1)\cap X_2^{-1}(C)\right)=\mathbb{P}\left(X_1^{-1}(B_1)\right)\mathbb{P}\left(X_2^{-1}(C)\right)$

取 $n=2$, $\mathbb{P}\left(X_1^{-1}(B_1)\cap X_2^{-1}(B_2)\cap X_3^{-1}(C)\right)=\mathbb{P}\left(X_1^{-1}(B_1)\cap X_2^{-1}(B_2)\right)\mathbb{P}\left(X_3^{-1}(C)\right)$

$$=\mathbb{P}\left(X_1^{-1}(B_1)\right)\mathbb{P}\left(X_2^{-1}(B_2)\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_3^{-1}(C)\right)$$

$\cdots$

$\forall n\geq 1$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}X_k^{-1}(B_k)\cap X_{n+1}^{-1}(C)\right)=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_k^{-1}(B_k)\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_{k+1}^{-1}(C)\right)$

$\Rightarrow \sigma(X_1),\cdots,\sigma(X_n),\cdots$ 相互独立

(ii) 注意到

$$\begin{pmatrix}\sigma(X_1) & \sigma(X_2) & \cdots & \sigma(X_n)\\ \sigma(X_{n+1}) & \sigma(X_{n+2}) & \cdots & \sigma(X_{n+d})\end{pmatrix}\begin{matrix}\longrightarrow \bigvee\limits_{j=1}^{n}\sigma(X_j)=\sigma\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}\sigma(X_j)\right)=\sigma(X_1,\cdots,X_n)\\ \longrightarrow \bigvee\limits_{j=1}^{d}\sigma(X_{n+d})=\sigma\left(\bigcup\limits_{j=1}^{d}\sigma(X_{n+j})\right)=\sigma(X_{n+1},\cdots,X_{n+d})\end{matrix}$$

由于 $\sigma(X_1),\cdots,\sigma(X_n),\cdots$ 相互独立

故 $\forall d\geq 1$, $\sigma(X_1\cdots X_n)$ 与 $\sigma(X_{n+1}\cdots X_{n+d})$ 相互独立

因此, $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}\sigma(X_{n+1}\cdots X_{n+d})$ 相互独立

又注意到 $\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}\sigma(X_{n+1}\cdots X_{n+d})$ 是 π 类 (需注意 $\{\sigma(X_{n+1},\cdots,X_{n+d})\}_{d\geq 1}$ 是过滤)

于是 $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\sigma\left(\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}\sigma(X_{n+1},\cdots,X_{n+d})\right)=\mathcal{T}_n^X$ 相互独立

$\mathcal{T}_n^X=\sigma(X_{n+1},X_{n+2},\cdots)=\sigma\left(\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}\sigma(X_{n+1},\cdots,X_{n+d})\right)$

<u>定理</u> (Kolmogorov 0-1律) 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一列相互独立的 r.v.s, 定义 $\mathcal{T}^X\triangleq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}_n^X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(X_i: X_i>n)$ (尾σ-代数)

则 $\mathcal{T}^X$ 为平凡σ-代数 ($\forall A\in\mathcal{T}^X$ 有 $P(A)=0$ 或 1)

则 $\mathcal{T}$ 为平凡σ-代数($\forall H\in\mathcal{T}$, 有 $P(H)=0$ or 1)

证明: 只需证 $\mathcal{T}^X$ 与 $\mathcal{T}^X$ 相互独立

($\Rightarrow \forall H\in\mathcal{T}^X, P(H\cap H)=P(H)^2 \Rightarrow P(H)=P(H)^2 \Rightarrow P(H)=0$ or 1)

$\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\mathcal{T}_n^X$ 独立, $\forall n\geq 1$

$\Rightarrow \sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{T}_k^X$ 独立, 即 $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\mathcal{T}^X$ 独立, $\forall n\geq 1$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\mathcal{T}^X$ 独立

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 为π类

$\Rightarrow \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(X_1,\cdots,X_n))$ 与 $\mathcal{T}^X$ 独立

即 $\sigma(X_1,X_2,\cdots)$ 与 $\mathcal{T}^X$ 独立

又由于 $\mathcal{T}^X\subset\sigma(X_1,X_2,\cdots)$

故 $\mathcal{T}^X$ 与 $\mathcal{T}^X$ 独立

注: 事件形式的Kolmogorov 0-1律: 设 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 为一列相互独立的事件,

则 $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=0$ or 1

定义 $X_n=1_{A_n}, n\geq 1$, 则 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立.

定义尾σ-代数 $\mathcal{T}^X=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_i, i>n)$, 则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\mathcal{T}^X$(自证)

§6. 乘积测度

<u>定义</u>(可测矩形): 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i), i=1,2$ 为两个可测空间, 称 $A\times B$ ($A\in\mathcal{F}_1, B\in\mathcal{F}_2$)

为一个可测矩形

记所有可测矩形全体为 $\mathcal{R}\triangleq\{A\times B: A\in\mathcal{F}_1, B\in\mathcal{F}_2\}$

注: $\forall A\times B, C\times D\in\mathcal{R}$, 则 $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)\in\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ 为π类

· $\forall A\times B\in\mathcal{R}$, 则 $(A\times B)^c=(A^c\times B)\cup(A\times B^c)\cup(A^c\times B^c)$

<u>定义</u>(乘积σ代数) 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i), i=1,2$, 为两个可测空间

称 $\sigma(\mathcal{R})$ 为 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_2$ 的乘积σ代数, 以后记 $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2\triangleq\sigma(\mathcal{R})$

注: $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$ —可测空间, $\forall E\in\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$, 则称E是 $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$ 可测的.

任何可测矩形都是可测的

定义(截口)设$E\subset\Omega_1\times\Omega_2$,则

称$E_{\omega_1}\triangleq\{\omega\in\Omega_2:(\omega_1,\omega)\in E\}\subset\Omega_2$, $\forall\omega_1\in\Omega_1$为E的$\omega_1$-截口($\omega_1$-section)

称$E_{\omega_2}\triangleq\{\omega\in\Omega_1:(\omega,\omega_2)\in E\}\subset\Omega_1$, $\forall\omega_2\in\Omega_1$为E的$\omega_2$-截口($\omega_2$-section)

引理:设$E\subset\Omega_1\times\Omega_2$且$E\in\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$,则$E_{\omega_1}\in\mathcal{F}_2,\forall\omega_1\in\Omega_1$, $E_{\omega_2}\in\mathcal{F}_1,\forall\omega_2\in\Omega_2$.

证明:注意到$\forall E\in\mathcal{R}$,即$\exists A\in\mathcal{F}_1, B\in\mathcal{F}_2$, s.t. $E=A\times B$

则$\forall\omega_1\in\Omega_1$, $E_{\omega_1}=(A\times B)_{\omega_1}=\{\omega\in\Omega_2:(\omega_1,\omega)\in A\times B\}=\begin{cases}B, & \omega_1\in A\\ \phi, & \omega_1\notin A\end{cases}$

同理,$\forall\omega_2\in\Omega_2$, $E_{\omega_2}=\begin{cases}A, & \omega_2\in B\\ \phi, & \omega_2\notin B\end{cases}$

定义$\mathcal{M}\triangleq\{E\subset\Omega_1\times\Omega_2: E_{\omega_1}\in\mathcal{F}_2,\forall\omega_1\in\Omega_1, E_{\omega_2}\in\mathcal{F}_1,\forall\omega_2\in\Omega_2\}$

容易验证$\mathcal{M}$为σ-代数(自证),进一步,有$\mathcal{R}\subset\mathcal{M}$

$\Rightarrow\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{M}$,此即$\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2\subset\mathcal{M}$

引理:$\forall m,n\geq1$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$

证明:$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\sigma(\{A\times B: A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\})$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}=\sigma(\{\mathbb{R}^{m+n}中开集\})=\sigma(\{\mathbb{R}^{m+n}中闭集\})$

下证$\mathcal{A}_1\triangleq\{A\times B: A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$

注意到$\{A\times B: A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}=\{A\times\mathbb{R}^n: A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\}\cap\{\mathbb{R}^m\times B: B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}$

下证$\{A\times\mathbb{R}^n: A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$, $\{\mathbb{R}^m\times B: B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$

定义$\mathcal{M}\triangleq\{A\subset\mathbb{R}^m: A\times\mathbb{R}^n\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}\}$ —— σ代数

另一方面,$\{\mathbb{R}^m中开集\}\subset\mathcal{M}\Rightarrow\mathbb{R}^m=\sigma(\{\mathbb{R}^m中开集\})\subset\mathcal{M}$

下证$\{\mathbb{R}^{m+n}中开集\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

或$\{\mathbb{R}^{m+n}中闭集\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

注意到$\prod_{k=1}^{m+n}[a_k,b_k]=\prod_{k=1}^{m}[a_k,b_k]\times\prod_{k=m+1}^{m+n}[a_k,b_k]\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

下面定义乘积测度

设 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ $i=1,2$，为两个可测空间 ν_i 为 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ 上一个 σ 有限测度

step1：在 $R=\{A\times B: A\in\mathcal{F}_1, B\in\mathcal{F}_2\}$ 上定义一个集函数

$\forall E=A\times B\in R$，定义 $\nu(E)=\nu(A\times B)\triangleq\nu(A)\times\nu(B)$

step2：定义 $\mathcal{A}\triangleq\{\biguplus_{k=1}^{m}A_k\times B_k: A_k\in\mathcal{F}_1, B_k\in\mathcal{F}_2, k=1,\cdots,m, m\geq1\}$

其中 $\biguplus_{k=1}^{m}$ 表示互不相交可测矩形的并

则 $\mathcal{A}$ 为代数

引理：设 $A\times B\in R$ 且 $A\times B=\biguplus_{k=1}^{\infty}A_k\times B_k$，其中 $A_k\in\mathcal{F}_1$，$B_k\in\mathcal{F}_2$，$k\geq1$

则 $\nu(A\times B)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k\times B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)\times\nu(B_k)$

证明：由于 $A\times B=\biguplus_{k=1}^{\infty}A_k\times B_k$，故 $1_{A\times B}(\omega_1,\omega_2)=1_{\biguplus_{k=1}^{\infty}A_k\times B_k}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k\times B_k}(\omega_1,\omega_2)$

$\Rightarrow 1_A(\omega_1)1_B(\omega_2)=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega_1)1_{B_k}(\omega_2)$

$\Rightarrow 1_A(\omega_1)\int_{\Omega_2}1_B(\omega_2)\nu_2(d\omega_2)=\int_{\Omega_2}\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega_1)1_{B_k}(\omega_2)\nu_2(d\omega_2)$

$LHS=1_A(\omega_1)\nu_2(B)$

RHS：由 MCT，有 $\int_{\Omega_2}\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega_1)1_{B_k}(\omega_2)\nu_2(d\omega_2)=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega_1)\int_{\Omega_2}1_{B_k}(\omega_2)\nu_2(d\omega_2)$

$=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega)\nu_2(B_k)$

故 $1_A(\omega_1)\nu_2(B)=\sum_{k=1}^{\infty}1_{A_k}(\omega)\nu_2(B_k)$

同理，$\nu_1(A)\nu_2(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_1(A_k)\nu_2(B_k)$

由 Step1 的定义 $\nu(A\times B)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k\times B_k)$

下面将 ν 从 R 延拓到 $\mathcal{A}$ 上，即 $\forall E\in\mathcal{A}$，则 $\exists m$，s.t. $E=\biguplus_{k=1}^{m}A_k\times B_k$

定义 $\nu(E)=\nu(\biguplus_{k=1}^{m}A_k\times B_k)\triangleq\sum_{k=1}^{m}\nu(A_k\times B_k)$

由上面引理及其证明方法，可证 ν 在代数 $\mathcal{A}$ 上满足可列可加性

定理：设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$，$i=1,2$ 为两个可测空间 ν_i 为 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 上的 σ-有限测度，则

存在唯一 $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$ 上的 σ-有限测度 ν，使得

$\nu(\biguplus_{k=1}^{m}A_k\times B_k)=\sum_{k=1}^{m}\nu_1(A_k)\times\nu_2(B_k)$，其中 $A_k\in\mathcal{F}_1$，$B_k\in\mathcal{F}_2$，$k=1,\cdots,m$

证明：用 Carathéodory 延拓定理，①定义在 $\mathcal{A}$ 上的 ν 满足可列可加性

② $\sigma(\mathcal{R})=\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$

注：以后记 $\nu_1\times\nu_2\triangleq\nu$

定理：设 $X_i:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(S_i,\mathcal{S}_i)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下的r.v.，$i=1,\cdots,n$，则

$X_1\cdots X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow P_{(X_1\cdots X_n)}=P_{X_1}\times\cdots P_{X_n}$ on $\mathcal{S}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{S}_n$

证明：不失一般性，取 $n=2$

(i) 假设 X_1,X_2 相互独立，则 $\sigma(X_1)$ 与 $\sigma(X_2)$ 相互独立，因此，

$\forall B_k\in\mathcal{S}_k,\ k=1,2$，有 $\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1)\cap X_2^{-1}(B_2))=\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1))\mathbb{P}(X_2^{-1}(B_2))$

注意到 $\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1)\cap X_2^{-1}(B_2))=\mathbb{P}((X_1,X_2)^{-1}(B_1\times B_2))=P_{(X_1,X_2)}(B_1\times B_2)$

$\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1))\mathbb{P}(X_2^{-1}(B_2))=P_{X_1}(B_1)\times P_{X_2}(B_2)$

故 $P_{(X_1,X_2)}(B_1\times B_2)=(P_{X_1}\times P_{X_2})(B_1\times B_2)$，即 $P_{(X_1,X_2)}=P_{X_1}\times P_{X_2}$ on $\mathcal{R}$

因为 $\mathcal{R}$ 为 π 类，由 π-λ 定理，$P_{(X_1,X_2)}=P_{X_1}\times P_{X_2}$ on $\sigma(\mathcal{R})$

<u>Kolmogorov延拓定理</u>

<u>定义</u>：$\mathbb{R}^\infty\triangleq\{x=(x_1,x_2,\cdots):x_i\in\mathbb{R},\ i\geq1\}$
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

$\mathcal{R}=\{\underbrace{\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^\infty:x_i\in B_i\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ i=1,\cdots,n\}}_{\text{柱集}}:n\geq1\}$

$\mathcal{B}_c\triangleq\sigma(\mathcal{R})$

于是 $(\mathbb{R}^\infty,\mathcal{B}_c)$ 为一个可测空间

<u>定理</u>：$\forall n\geq1$，设 μ_n 为 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ 上一个概率测度且满足

$\mu_{n+1}(B_1\times\cdots\times B_n\times\mathbb{R})=\mu_n(B_1\times\cdots\times B_n)$ 其中，$B_i\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ i=1,\cdots,n$
相容性条件

则 $\exists!$ $(\mathbb{R}^\infty,\mathcal{B}_c)$ 上的概率测度 μ_∞，s.t.

$\mu_\infty(\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^\infty:x_i\in B_i,\ i=1,\cdots,n\})=\mu_n(B_1\times\cdots\times B_n)$

<u>Fubini定理</u>：设 ν_i 为 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 上的 σ-有限测度 $(i=1,2)$，以及 $\mu\triangleq\nu_1\times\nu_2$

设 $h:\Omega_1\times\Omega_2\longrightarrow\mathbb{R}$ 为一个 $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$-可测函数且满足

(i) h 非负 或 (ii) $\int_{\Omega_1\times\Omega_2}|h|d\mu<+\infty$，则

$\int h(\omega_1,\omega_2)\mu(d\omega_1,d\omega_2)=\int(\int h(\omega_1,\omega_2)\nu_2(d\omega_2))\nu_1(d\omega_1)$

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} h(\omega_1,\omega_2)\,\mu(d\omega_1,d\omega_2) = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} h(\omega_1,\omega_2)\,\nu_2(d\omega_2)\right)\nu_1(d\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} h(\omega_1,\omega_2)\,\nu_1(d\omega_1)\right)\nu_2(d\omega_2)$$

注：设 $\begin{cases} X:(\Omega,\mathcal{F})\to(S_1,\mathcal{S}_1) \\ Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(S_2,\mathcal{S}_2)\end{cases}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下两个独立r.v.s，则 $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$ on $\mathcal{S}_1\otimes\mathcal{S}_2$

设 $h: S_1\times S_2\to\mathbb{R}$ 为可测函数满足(i)非负 或(ii) $E[|h(X,Y)|]<+\infty$,

则 $E[h(X,Y)] = \int_{S_1\times S_2} h(x,y)\,\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}(dx,dy) = \int_{S_1}\left(\int_{S_2} h(x,y)\,\mathbb{P}_{X_2}(dy)\right)\mathbb{P}_{X_1}(dx)$

$$= \int_{S_2}\left(\int_{S_1} h(x,y)\,\mathbb{P}_{X_1}(dx)\right)\mathbb{P}_{X_2}(dy)$$

特别地，如果 $h(x,y)=f(x)\cdot g(y)$，则

$E[f(X)\cdot g(Y)] = E[f(X)]\cdot E[g(Y)]$