习题课讲义

1、习题参考答案

Week14

4. 求下列线性方程和贝努利方程的解.

(1) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

(3) $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$;

(5) $y' = y\tan x + y^2\cos x$;

注:用公式本质是在用积分因子,故用积分因子做也是一样的

$$y'+p(x)y=q(x) \Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

(1) $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$

$\int p(x)dx = \ln\dfrac{1}{1+x^2}$

故 $y=(1+x^2)\left(\int(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx+C\right)=(1+x^2)(x+C)$

(3) $y\neq0$ 时 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y^3}{y} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^2$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}y^3+Cy$

$y=0$ 特解

另解: $xy'+y^3y'-y=0 \xRightarrow{y\neq0} \dfrac{xy'-y}{y^2}+yy'=0$

$\Rightarrow \left(-\dfrac{x}{y}\right)'+\left(\dfrac{1}{2}y^2\right)'=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{x}{y}=C$

$y=0$ 特解

或看成 $\dfrac{xdy-ydx}{y^2}+ydy=0 \Rightarrow d\left(-\dfrac{x}{y}\right)+d\left(\dfrac{1}{2}y^2\right)=0 \Rightarrow$ 相同结果.

不过这么做是有前提的,详见后面.

(5)[这是Bernoulli方程]

$-y^{-2}y'=\dfrac{1}{y}\tan x-\cos x \xRightarrow{z=\frac{1}{y}} z'+(\tan x)z=-\cos x$

$\Rightarrow z=|\cos x|\cdot\left(\int\frac{-\cos x}{|\cos x|}dx+C\right)=-x\cos x+C\cos x$

$\Rightarrow y=\frac{1}{(C-x)\cos x}$ 特解 $y=0$

5.(2) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x},\quad y(\pi)=1.$

可以用公式法做，但积分因子 $e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=|x|$ (特别取 x) 很简单

则可用积分因子直接做：$xy'+y=\sin x\Rightarrow(xy)'=\sin x\Rightarrow xy=-\cos x+C$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{x}\cos x+\frac{C}{x}$

由 $y(\pi)=1\Rightarrow C=\pi-1$

$\Rightarrow y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$

6. 求解下列微分方程:

(1) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$;

(3) $y'-e^{x-y}+e^{x}=0$;

(1) Tips: 没有熟悉形式怎么办？换元化到熟悉形式.

这题你知道"根号"无法解决，那不妨令 $z=\sqrt{x^2+y}$.

令 $z=\sqrt{x^2+y}$，则 $y=z^2-x^2$ 且 $y'=2zz'-2x$.

$2zz'-2x+x=z\Rightarrow z'=\frac{z+x}{2z}$ (注意这是齐次形式)

令 $w=\frac{z}{x}$，则 $z'=xw'+w$

$xw'+w=\frac{w+1}{2w}\Rightarrow\frac{dw}{dx}=\frac{\frac{-2w^2+w+1}{2w}}{x}$

$\Rightarrow\frac{2w}{-2w^2+w+1}dw=\frac{1}{x}dx\Rightarrow-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2w+1}+\frac{1}{w-1}\right)dw=\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow(2w+1)(w-1)^2=\frac{C}{x^3}\xRightarrow{w=\sqrt{x^2+y}/x}(2\sqrt{x^2+y}+x)(\sqrt{x^2+y}-x)^2=C$

(化成 $4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+C)^2$ 也对)

(3) $y'=e^x(e^{-y}-1)\Rightarrow\frac{e^y}{1-e^y}dy=e^xdx$

$\Rightarrow-\ln|1-e^y|=e^x+C'\Rightarrow\frac{1}{1-e^y}=Ce^{e^x}\Rightarrow y=\ln(1+Ce^{-e^x})$

(其实上述推导中 C 为不等于0之常数，但 $C=0$ 时，$y=0$ 是特解，故上式一个就够了)

9. 设函数 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (对 $x\in R$), 求 $f(x)$.

$f\in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \in D(\mathbb{R}) \xrightarrow{f=\int_0^x f(t)dt} f\in D(\mathbb{R})$ 从而可对两边求导

$f'(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=Ce^x$ 又 $f(0)=0 \Rightarrow C=0$ 故 $f(x)\equiv 0$

12. 求解下列二阶方程的解.

(1) $xy''=y'$;

(3) $y''=y'+x$;

不显含 y, 故令 $z=y'$

(1) $\underset{(C\neq 0)}{z=Cx}$ 或 $z\equiv 0 \Rightarrow \underset{(C_1\neq 0)}{y=C_1x^2+C_2}$ 或 $\underset{(这是C_1=0情形)}{y\equiv C} \Rightarrow y=C_1x^2+C_2$

你也可以一开始就把 $z=0$ 的特解归入 $z=Cx$ 中, 则直接得答案

(3) $z'-z=x \Rightarrow z=-x-1+Ce^x \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2$

13. 求下列二阶方程满足初始条件的特解.

(1) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$;

令 $z=y'$, 则 $z'=\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z}=\frac{z^2+x^3}{xz}$

$\Rightarrow \frac{d(\frac{1}{2}z^2)}{dx}=\frac{z^2}{x}+x^2 \xrightarrow{w=\frac{1}{2}z^2} w'-\frac{2}{x}w=x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}w'-\frac{2}{x^3}w=1 \Rightarrow (\frac{1}{x^2}w)'=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2}w=x+C \Rightarrow w=x^3+Cx^2$

$\Rightarrow y'=\pm x\sqrt{2x+C} \xrightarrow{y'(1)=0} y'=\pm x\sqrt{2x-2}=\pm\sqrt{2}\cdot x\sqrt{x-1}$

$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\frac{2}{3}\int x\,d(x-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int(x-1)^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}+C$

故 $y=\pm\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}+C\right)$

由 $y(1)=1 \Rightarrow C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

故 $y=\pm\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}\right)+1$

$=\pm 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+1$

6. 验证函数组$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在实轴上线性无关，函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

给定$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,

线性无关证法：设$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n=0$，证明$\alpha_i=0, \forall i$

线性相关证法：直接找α_i不全为0,使$\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n=0$

(也可用空间维数来证,这不作要求)

- 设$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 则$p\in C^\infty(\mathbb{R})$

  由$p(0)=p'(0)=p''(0)=\cdots=p^{(n)}(0)=0 \Rightarrow a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ 故线性无关

- $(-1)\times 1+1\cdot\cos^2 x+1\cdot\sin^2 x=0$，$-1,1,1$全不为0 故线性相关.

8. 证明下列函数在区间 $(0,2)$ 上是线性无关的，但是它们的 Wronski 行列式却恒为零

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x\leqslant 2\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

设$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=0$，即$\forall x\in[0,2]$，$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0$

特别地，取$x=0,2$，得$\alpha_1=\alpha_2=0$ 故y_1, y_2线性无关

后半可显然.

1. 在下列方程中, 已知方程的一个特解 y_1, 试求它们的通解.

(1) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, $y_1=\frac{\sin x}{x}$;

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{1}{\tan^2 x}d\tan x=\frac{-\cos x}{x}$$

故通解$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$

(3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, $y_1=x$.

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0$$

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2-1}dx=x\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1$$

故通解$y=C_1x+C_2\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\right)$

2. 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解, 然后求方程的通解.

(1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x \neq 0$;

观察得 $y=x$ 为一个非零特解 (观察出 $y=x^2$ 也可)

易算得另一个

故通解 $y(x)=C_1x+C_2x^2$

4. 求下列常系数齐次方程的通解.

(1) $y'' - 2y' - y = 0$;

特征方程 $\lambda^2-2\lambda-1=0$

$\Rightarrow \lambda=1\pm\sqrt{2}$

故 $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$

(3) $y'' + y' - 6y = 0$.

$\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=2 / \lambda=-3$

$\Rightarrow y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$

9. 求下列方程的通解.

(1) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$;

$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$

$\Rightarrow (\lambda+1)^3=0 \Rightarrow \lambda=-1$ 三重根

故 $x=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-t}$

✓(3) $x^{(4)} - 8x'' + 18x = 0$;

$\lambda^4-8\lambda^2+18=0$

$\Rightarrow \lambda^2=4\pm\sqrt{2}i=3\sqrt{2}e^{\pm i\theta}$

其中 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\pm i\frac{\theta}{2}}$

$=\pm\sqrt{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\pm i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

由 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\end{cases}$

$\Rightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}}\pm i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}} \triangleq \pm a\pm ib$

故通解为 $x(t)=e^{at}(C_1\cos bt+C_2\sin bt)$
$+e^{-at}(C_3\cos bt+C_4\sin bt)$

习题7.1

1. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=1-\sqrt{2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$

2. 正项级数最常用收敛判别法：(a1) Cauchy: $\sqrt[n]{a_n}$ (a2) D'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

(a3) $a_n\sim b_n$ / $\frac{a_n}{b_n}\to 0$，而 $\sum b_n$ 收敛.

不收敛判别：(b1) $a_n\sim\frac{1}{n^k}$ $(k\le 1)$ (b2) $a_n\not\to 0$

(1) $\sqrt[n]{0.001}\to 1\ne 0$ 散 (b2) (2) $\frac{1}{n\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$ 敛 (a3)

(3) $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\sim\frac{1}{n}$ 散 (b1) (4) $\lim_{n\to\infty}\sin n$ 不存在 散 (b2)

(5) $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 敛 (a3) (7) $\sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}<1$ 敛 (a1)

(9) $\arctan\frac{\pi}{4n}\sim\frac{\pi}{4n}$ 散 (b1) (11) $\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n+1}{4n+2}\to\frac{1}{4}<1$ 敛 (a2)

(13) 法一：$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^{5/4}}dx=16<+\infty$ 敛 (单调递减连续函数 $f(x)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{\infty}f(x)dx$ 敛散性同)

法二：$\frac{\ln n}{n^{5/4}}\Big/\frac{1}{n^{9/8}}=\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{8}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ 敛. (a3)

[9/8 确定方法：$\forall p>0$, $\frac{\ln n}{n^p}\to 0$ as $n\to\infty$

设 $\frac{\ln n}{n^{5/4}}\Big/\frac{1}{n^k}\to 0$，则 $\frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}-k}}\to 0\Rightarrow\frac{5}{4}-k>0$

又为了保证 $\frac{1}{n^k}$ 收敛，$k>1$ $\Big\}\Rightarrow 1<k<\frac{5}{4}$ 选一个其中值即可.]

(15) $\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}\cdot\underbrace{n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)}_{\sim n^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{2}}}$

$\to\frac{1}{\sqrt{e}}<1$ 敛 (a1)

4. 令 $b_n=a_n+a_{n+1}$

$|b_n+\cdots+b_{n+p}|=|a_n+2a_{n+1}+\cdots+2a_{n+p}+a_{n+p+1}|$

$\le|a_n+\cdots+a_{n+p}|+|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p+1}|$

$\to 0$ as $n\to\infty$ $(\forall p)$

由Cauchy收敛准则，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

· 逆命题不成立，如 $a_n=(-1)^n$，则 $a_n+a_{n+1}\equiv 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=0$ 收敛

但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不收敛.

· 若 $a_n>0$，则 $|a_n+\cdots+a_{n+p}|=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}<b_n+\cdots+b_{n+p}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$，$\forall p$

5. (1) 由条件可知 $a_n \sim \frac{1}{n}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(2) 否. 反例: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n=2^k, k\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} n(a_n - a_{n+1}) + N a_N$ 右侧在 $N\to+\infty$ 时收敛.

6. $|a_n^2+\cdots+a_{n+p}^2| \leq |a_n+\cdots+a_{n+p}|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall p$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

反之不成立. $a_n = \frac{1}{n}$

7. 令 $T_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, 则 $a_{n+1} < a_n + b_n \Rightarrow a_{n+1} - T_n < a_n - T_{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow b_n = a_{n+1} - T_n \downarrow \\ \text{又 } b_n \geq -T_n \geq -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 有下界} \end{array}\right\} \Rightarrow b_n$ 收敛, 即 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

10. 由 $a_n > 0$ 且 $a_n \downarrow$ 知 a_n 收敛, 设 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散 知 $a \neq 0$. 进一步, $a > 0$.

故 $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n} = \frac{1}{a_n+1} \to \frac{1}{a+1} < 1$ 由Cauchy判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

11. 只需证 $b_n \triangleq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 单调递减趋于0.

·递减: b_n 是 a_1 到 a_n 的平均数, 新加入更小的数来求平均当然会减小

　或严格写: $b_{n+1} - b_n = \cdots < 0$ (过程略)

·趋于0: 由Stolz显然.

13. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的条件/绝对收敛性

做题一般顺序: 先考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛性, 若收敛, 则推出绝对收敛, 讨论完毕

若不然, 再考察 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性, 若收敛则条件收敛, 否则不收敛.

(1) $\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|} = \frac{2n+100}{3n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3} < 1$ 绝对收敛.

(3) $\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 不绝对收敛.

$\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 在n充分大时单调递减且趋于0 $\Rightarrow$ 条件收敛.

(5) $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ $(n \geq 3)$ 由比较判别法, 不绝对收敛.

$\frac{\ln n}{n}$ 单调递减趋于0 $\Rightarrow$ 条件收敛

(7) $e^{\frac{1}{n}}-1>\frac{1}{n}$ 不绝对收敛

$e^{\frac{1}{n}}-1$ 单调递减趋于0 $\Rightarrow$ 条件收敛

(9) $p=0$ 时，原级数 $=0$ 绝对收敛

$p\neq0$ 时，$1-\cos\frac{p}{n}\sim\frac{p^2}{2n^2}$ 绝对收敛

16.(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 有界
$\frac{1}{n}$ 单减趋于0 $\xrightarrow{\text{Dirichlet}}$ 收敛

(3) 将(1)中 $\frac{1}{n}$ 换成 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，取 $x=1$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛
$(1+\frac{1}{n})^n\nearrow e$ $\xrightarrow{\text{Abel}}$ 收敛

2.微分方程解法

(1)一阶微分方程

方程类型	解法
$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$	一般直接背公式 $y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C)$ 或左右同乘 $e^{\int p(x)dx}$ 转化到分离变量型
可分离变量型	转化为 $f(y)dy=g(x)dx$，两边积分
齐次方程 $f(y',\frac{y}{x})=0$	令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u+xu'$ 注意 $y'=\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ 是可以化成齐次方程的.
Bernoulli方程 $y'+p(x)y=y^n$	同除 y^n 后转化为 $\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$，令 $z=y^{1-n}$ 即可.
Ricatti方程 $y'=a(x)+b(x)y+c(x)y^2$	先已知一个解 $y=\varphi(x)$，再令 $y(x)=\varphi(x)+z(x)$ 代入后可得 z 满足 $z'=[2c(x)\varphi(x)+b(x)]z+a(x)z^2$ 为Bernoulli方程.

注：前四个重点掌握，最后一个了解即可.

※积分因子法.

先介绍恰当方程的概念：

考虑 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，如果存在一个可微函数 $\Phi(x,y)$，

使得 $d\Phi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称其为恰当方程

注：·全微分 $d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$

·恰当方程的一个通解是 $\Phi(x,y)=C$

例. $2xy^3dx+3x^2y^2dy=0 \Rightarrow d(x^2y^3)=0 \Rightarrow x^2y^3=C$

问题：给一个 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，什么时候可以找到 Φ 呢？

定理：设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在区域 $R: \alpha<x<\beta, \gamma<y<\delta$ 上连续，且有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为恰当方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \forall(x,y)\in R$

另外，此时方程通解为 $\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$ （(x_0,y_0) 是 R 中任意取定的一点）

例. 回头验证上例：$\frac{\partial(2xy^3)}{\partial y}=6xy^2 \quad \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x}=6xy^2$ 确实相等

问题：当 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，该怎么解决？

例. $y'+a(x)y=0$ (a(x)连续) $\Leftrightarrow a(x)ydx+dy=0$ 记 $P(x,y)=a(x)y$, $Q(x,y)=1$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=a(x)\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ 故不是恰当方程.

回忆课上解决办法，左右同乘因子 $e^{\int a(x)dx}$（我们不妨取 $e^{\int_0^x a(s)ds}$）

此时 $P_1(x,y)=a(x)e^{\int_0^x a(s)ds}\cdot y$, $Q_1(x,y)=e^{\int_0^x a(s)ds}$

则 $\frac{\partial P_1}{\partial y}=a(x)e^{\int_0^x a(s)ds}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x}=a(x)e^{\int_0^x a(s)ds}$，即 $\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}$，是恰当方程

从而通解为 $\int_0^x P_1(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=C$

$$\Leftrightarrow y\int_0^x a(x)e^{\int_0^x a(s)ds}dx+y=C \Leftrightarrow y=C\cdot e^{-\int_0^x a(s)ds}$$

分析：对于 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ （I）

如果(*)不为恰当方程，则可同乘 $\mu(x,y)$，使 $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ （II）

这时，函数 $\mu(x,y)$ 称为积分因子.

问题：μ 存在么？μ 怎么找？

实际上，求解(II)等价于求解 $P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu$

这种方法找 μ 一般不可取. 但对某些特殊情况，这是可行的.

定理：(I)有一个只依赖于 x 的积分因子 $\mu(x)$ 的充要条件是：

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ 只依赖于 x，记为 $G(x)$.

此时 $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$.

例. $y'+a(x)y=0$ 的积分因子为 $e^{\int a(x)dx}$

例. $(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2(1-2xy)\neq 0$ 故不为恰当方程

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{2}{x}$ 只依赖于 x $\Rightarrow$ 积分因子 $\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$

从而 $3x\,dx+2y\,dy+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}=0$ 为恰当方程

$\Rightarrow d\left(\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}\right)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=C$

注意补上特解 $x=0$.

例. 本讲义第一页4(3),第三页13

(2) 二阶微分方程

- 常系数?
  - Y: 通解用特征方程求(如果还要求特解,跳到下面的(ii))
  - N: 显含 y?
    - Y: 化成 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$
    - N: 令 $z=y'$ 降阶

对于 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ $(*)$

(i) 先求 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 通解(基本解组)

先观察出一个基本解 $y_1(x)$

再利用 $y_2(x)=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$ 求出另一个基本解

(ii) 求特解:

法一: 待定系数法: $f(x)=P_n(x)/e^{\alpha x}/\cos\beta x/\sin\beta x$ [只适用于常系数方程]

法二: 常数变易法: $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\cdots \\ C_2'(x)=\cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\cdots \\ C_2(x)=\cdots \end{cases}$

$\Rightarrow y^*(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ [这部分不推荐背公式]

(iii) 综合: $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$ (C_1,C_2 任意常数)

※欧拉方程 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$

令 $x=e^t$，可化为 $\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+y=f(e^t)$ ⟶ 常系数方程

3.级数收敛性判别

(1)正项级数：见习题7.1的2（实际判别法更多，但2中所列基本够用）

(2)交错项级数：Leibniz判别法（$a_n>0$且$a_n \downarrow 0$）

(3)一般级数：Dirichlet（单调趋于0 + 部分和有界）

Abel（单调有界 + 收敛）

*一定要在考前背下 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

（实在怕记错就用积化和差公式或复数方法推）

(4)条件收敛与绝对收敛：见习题7.1的13红字部分

4.补充习题

4.1 求$y''-6y'+9y=e^x\sin x+(x+1)e^{2x}$的通解

对应齐次方程$y''-6y'+9y=0$

特征方程$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=3$（二重根）⇒基本解组$\{e^{3x},xe^{3x}\}$

下求非齐次特解：

由叠加原理，只需分别求 $y''-6y'+9y=e^x\sin x$ 和$y''-6y'+9y=(x+1)e^{2x}$特解

对$y''-6y'+9y=e^x\sin x$，设$y_1^*=e^x(a\cos x+b\sin x)$

则$(y_1^*)'=e^x[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x]$，$(y_1^*)''=e^x(2b\cos x-2a\sin x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b-6(a+b)+9a=0\\-2a-6(b-a)+9b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{25}\\b=\frac{3}{25}\end{cases}\Rightarrow y_1^*=\frac{e^x}{25}(4\cos x+3\sin x)$$

对$y''-6y'+9y=(x+1)e^{2x}$，设$y_2^*=(c+dx)e^{2x}$

则$(y_2^*)'=(2c+d+2dx)e^{2x}$，$(y_2^*)''=(4c+4d+4dx)e^{2x}$

$\Rightarrow\begin{cases}4c+4d-6(2c+d)+9c=1\\4d-12d+9d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3\\d=1\end{cases}\Rightarrow y_2^*=(3+x)e^{2x}$

综上，$y(x)=(C_1+C_2x)e^{3x}+(3+x)e^{2x}+\frac{e^x}{25}(4\cos x+3\sin x)$

4.2 设 $y_1(x)=xe^x+e^{2x}$，$y_2(x)=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$

是某二阶常系数非线性微分方程的3个解，求此方程.

先找齐次方程解：$y_2(x)-y_1(x)=e^{-x}-e^{2x}$

$y_1(x)-y_3(x)=e^{-x}$

$(y_1-y_3)-(y_2-y_1)=e^{2x}$ 仍为齐次方程的解

故基本解组 $\{e^{-x},e^{2x}\}\Rightarrow$ 特征方程 $(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\Rightarrow y''-y'-2=0$

下求非齐次的，设 $y''-y'-2=f(x)$

任意代入 y_1,y_2,y_3 中一个，可得 $f(x)=(1-2x)e^x$

故 $y''-y'-2=(1-2x)e^x$

4.3 $y''+3y'+2y=f(x)$，$f\in C[a,+\infty)$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明：方程的任一解 $y(x)$ 均有 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$

齐次通解 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

设非齐次特解为 $y^*(x)=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x}$

$\begin{cases}C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{-2x}=0\\-C_1'(x)e^{-x}-2C_2'(x)e^{-2x}=f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1'(x)=e^xf(x)\\C_2'(x)=-e^{2x}f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}C_1(x)=\int_a^x e^tf(t)\,dt\\C_2(x)=-\int_a^x e^{2t}f(t)\,dt\end{cases}$

通解 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\int_a^x e^tf(t)\,dt-e^{-2x}\int_a^x e^{2t}f(t)\,dt$

而 $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\int_a^x e^tf(t)\,dt\overset{L'}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

4.4 级数 $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{5}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{7}+\cdots$ 是发散的

(反证)假若收敛,则 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k+1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$ 也收敛

但 $\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k}=\frac{\sqrt{2k}-1}{2k}>\frac{1}{k}$ $(k>1$时$)$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k+1}\right)$发散,矛盾!

4.5 设$\{a_n\}$是递减正数列,则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散.

$(\Leftarrow)$ 由条件,$\lim_{n\to\infty}a_n$存在,记为a. 则 $a\geq 0$

(反证)假若 $a>0$,则 $1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{N\to\infty}(a_1-a_N)=a_1-a$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$收敛(利用正项级数比较判别法)矛盾!

$(\Rightarrow)$ $\sum_{N=n}^{n+p}\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)=\sum_{N=n}^{n+p}\frac{a_N-a_{N+1}}{a_N}\geq\frac{1}{a_n}\sum_{N=n}^{n+p}(a_N-a_{N+1})=\frac{a_n-a_{n+p+1}}{a_n}=1-\frac{a_{n+p+1}}{a_n}$

$\forall n$, 取p充分大,使 $\frac{a_{n+p+1}}{a_n}\leq\frac{1}{2}$,则 $\sum_{N=n}^{n+p}\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)\geq\frac{1}{2}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散

(没太理解的写一下级数收敛的柯西准则,再写出否定形式)

[万一期末考这个概念,可别再错了...]

4.6 第一章综合习题的12.

$a_n\to a\in\mathbb{R}$, $\{b_n\}$为正数列, $c_n=\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1+\cdots+b_n}$, 求证$\{c_n\}$收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则由Stolz定理,$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum_{N=n}^{n+p}b_N\to 0$ as $N\to\infty$ $(\forall p)$

注意到 $c_n=\frac{(a_1-a)b_1+\cdots+(a_n-a)b_n}{b_1+\cdots+b_n}+a$

故 $|c_n-c_{n+p}|=\left|\frac{(a_1-a)b_1+\cdots+(a_n-a)b_n}{b_1+\cdots+b_n}-\frac{(a_1-a)b_1+\cdots+(a_{n+p}-a)b_{n+p}}{b_1+\cdots+b_{n+p}}\right|$

$$=\left|\frac{(a_1-a)b_1+\cdots+(a_n-a)b_n-\frac{b_1+\cdots+b_n}{b_1+\cdots+b_{n+p}}[(a_1-a)b_1+\cdots+(a_{n+p}-a)b_{n+p}]}{b_1+\cdots+b_n}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}}{b_1+\cdots+b_{n+p}}[(a_1-a)b_1+\cdots+(a_n-a)b_n]-\frac{b_1+\cdots+b_n}{b_1+\cdots+b_{n+p}}[(a_{n+1}-a)b_{n+1}+\cdots+(a_{n+p}-a)b_{n+p}]}{b_1+\cdots+b_n}\right|$$

注意到 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\exists M$, s.t. $|a_i-a|\leq M$, $\forall i$

$$\leq M\cdot\frac{b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}}{b_1+\cdots+b_{n+p}}+M\cdot\frac{b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}}{b_1+\cdots+b_{n+p}}\leq\frac{2M}{b_1}\cdot\sum_{N=n+1}^{n+p}b_N\to 0 \text{ as } N\to\infty$$

4.6 写得太麻烦！

由分母收敛只需证分子收敛

而 $|a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| \le M|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| \to 0$ as $n \to \infty$ $(\forall p)$

直接得证！

（不好意思习题课讲得这么复杂 T^T）

4.7 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$，且对 $\forall k \in \mathbb{N}$，级数 $S_k = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{k}} a_n$ 收敛。

若 $\lim_{k\to\infty} S_k = l$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$.

只需证 $|\sum_{n=1}^{k} a_n - S_k| \to 0$，即证 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K, |\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{k}} a_n| < \varepsilon$

为此，我们利用三角不等式

$|\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{k}} a_n| \le |\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} e^{-\frac{n}{k}} a_n| + |\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\frac{n}{k}} a_n|$ 分别证.

(1) 由 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |n a_n| < \varepsilon$

$$|\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} e^{-\frac{n}{k}} a_n| = |\sum_{n=1}^{k} a_n (1 - e^{-\frac{n}{k}})|$$

$$\le \overbrace{|\sum_{n=1}^{N} a_n (1 - e^{-\frac{n}{k}})|}^{I_1} + \overbrace{|\sum_{n=N+1}^{k} a_n (1 - e^{-\frac{n}{k}})|}^{I_2}$$

I_1: $\forall 1 \le n \le N, \exists K, \forall k > K, |1 - e^{-\frac{n}{k}}| < \varepsilon / \sum_{n=1}^{N} |a_n|$

则 $I_1 \le \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |1 - e^{-\frac{n}{k}}| \le \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n| \cdot \frac{\varepsilon}{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}\right) = \varepsilon$

I_2: 注意到 $1 - e^{-\frac{n}{k}} \le \frac{n}{k}$

则 $I_2 \le \sum_{n=N+1}^{k} |a_n| \frac{n}{k} \le \varepsilon \cdot \frac{k-N}{k} < \varepsilon$

(2) $|\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\frac{n}{k}} a_n| \le \varepsilon \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n e^{\frac{n}{k}}} = \varepsilon \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{n e^{\frac{n}{k}}} \le \varepsilon \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x e^{x/k}}$

$$\overset{t = x/k}{=\!=\!=} \varepsilon \sum_{n=k}^{\infty} \int_{(n-1)/k}^{n/k} \frac{dt}{t e^t} = \varepsilon \int_{(k-1)/k}^{\infty} \frac{dt}{t e^t} \le \varepsilon \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t e^t} < A \varepsilon$$