本科概率论

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1933 Kolmogorov 公理化体系

古典概型

1812 Laplace 《分析概率论》

随机变量 $X(\omega)$

正态r.v. Poisson r.v. 指数r.v. 几何r.v.

$F(x)=P(X\le x)$

$F(x)$ is AC $\Rightarrow dF(x)=p(x)dx$

数学期望 $E[X]$

$E[X]=\int_{\mathbb{R}} xp(x)dx$

条件数学期望

$E[X|Y]$

$E[X|Y=y]$

r.v.收敛性

高等概率论

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 测度空间

Dykin π-λ定理

Halmos 单调类定理

Carathéodory 延拓定理

随机变量 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 是可测函数

i.e. $\forall B\in\mathcal{S}$, 有 $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

r.v.分布 $P_X(B)\triangleq P(X^{-1}(B)), \forall B\in\mathcal{S}$

$(S,\mathcal{S},P_X)$ 概率空间

若 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 分布函数 $F(x)\triangleq P_X((-\infty,x]), x\in\mathbb{R}$

r.v. X 关于 P 的积分 $E[X]=\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \underset{\text{formula}}{\overset{\text{Change of variable}}{=}} \int_S xP(dx)$$

$$\overset{S=\mathbb{R}}{=} \int_{\mathbb{R}} xF_X(dx) \underset{p(x)\triangleq\frac{F(dx)}{dx}}{\overset{F_X(dx)\ll dx}{=}} \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx$$

条件数学期望

$E[X|\mathcal{G}]$ $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ σ-代数

- 存在唯一性 (Radon-Nikodym Thm)
- 鞅论、回归分析、Filter理论

r.v.收敛性

几乎处处收敛

依概率收敛

依分布收敛 $\Leftrightarrow$ 概率测度列的弱收敛

连续映射定理、Skorokhod表示定理、

Vitali收敛定理、Helly定理、Poulow定理

思想 Dykin π-λ定理
逼近的思想

参考书：(1) Kailai Chung : A course in probability Theory
(2) Paul. R. Halmos : Measure Theory（可以当工具书用）
(3) Davis Willians: Probability with Martingale

第一章 概率空间与随机变量

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 设样本空间Ω为任意一个空间

<u>定义(代数)</u>：设$\mathcal{A}$为样本空间Ω中某些子集所形成的集类，若

(i) $\Omega\in\mathcal{A}$

(ii) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$ （补封闭）

(iii) $A_i\in\mathcal{A}, i=1,\cdots,n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{A}$（有限可加性）

注：$\mathcal{A}=\{\phi,\Omega\}$ 平凡代数

$\mathcal{A}=2^{\Omega}$ 最大代数

$\mathcal{A}=\{\Omega,A,A^c,\phi\}$ 代数 $(A\subset\Omega)$

例. 设$\Omega=(0,1]$

$\mathcal{A}\triangleq\{\phi,\ \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]: 0\le a_1<b_1<\cdots<a_n<b_n\le 1, n\ge 0\}$ $\mathcal{A}$是代数

注：σ代数 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ 代数
→除非加条件：A_n单增，其极限在代数中.

过滤(Filtration)：一列(族)单增的σ-代数(信息流)

$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots\mathcal{F}_n\subset\cdots$ (σ代数)

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, $s<t$ (σ代数)

习题. 设$\forall\alpha\in I$, $\mathcal{F}_\alpha$为σ代数，则$\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$为σ代数.(其中I可以不可数)

但$\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$不一定

习题. 设$\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$且$\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$为σ代数，$\forall H\in\mathcal{H}$，定义$\mathcal{H}^H\triangleq\{A\in\mathcal{G}: A\cap H\in\mathcal{H}\}$

证明：(a) $\mathcal{H}^H$为σ代数 (b) $H\to\mathcal{H}^H$是单减的 (c) $\forall H,H'\in\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{H\cup H'}=\mathcal{H}^H\cap\mathcal{H}^{H'}$

(d) $\mathcal{H}^{\Omega}=\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\phi}=\mathcal{G}$

<u>定义</u>(生成的σ代数) 设$\mathcal{A}$为Ω中某些子集的全体.

$\sigma(\mathcal{A}) \triangleq \cap\{\mathcal{G}\subset 2^{\Omega}: \mathcal{G}\text{为}\sigma\text{代数}, \mathcal{A}\subset\mathcal{G}\}$

称$\sigma(\mathcal{A})$为由$\mathcal{A}$生成的(最小的)σ代数

注: · $\bigvee_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha \triangleq \sigma(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F})$

· $\Omega=\mathbb{R}$ 以及 $\mathcal{A}=\{\mathbb{R}\text{中的开集}O\}$, 称 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\triangleq\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\{\mathbb{R}\text{中的开集}O\})$

为Borel σ代数, 每个Borel σ-代数中的集合称为<u>Borel集</u>

Borel集: 开集、闭集 G_δ集、F_σ集

问题: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subsetneq 2^{\mathbb{R}}$ 　拓展: 设Ω为拓扑空间, $\mathcal{B}_\Omega\triangleq\sigma(\{\Omega\text{中开集}O\})$

习题: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\sigma(\{\mathbb{R}\text{中开集}\})=\sigma(\{(a,b): a<b\})=\sigma(\{[a,b]: a<b\})=\sigma(\{(-\infty,b], b\in\mathbb{R}\})$

要证 $\sigma(\{A_\alpha\}_{\alpha\in I})=\sigma(\{B_\beta\}_{\beta\in J})$ 即证 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\sigma(\{B_\beta\}_{\beta\in J})$ 及 $\{B_\beta\}_{\beta\in J}\subset\sigma(\{A_\alpha\}_{\alpha\in I})$

§1.2 Dykin π-λ类定理

<u>定义</u>(π类): 设$\mathcal{A}$中Ω中某些子集的全体, 如果$\forall A_1, A_2\in\mathcal{A}$, 有$A_1\cap A_2\in\mathcal{A}$, 则称$\mathcal{A}$为<u>π类</u>

注: · 有限交是封闭的集类就是π类

· 代数、σ代数都是π类

· $\mathcal{A}=\{\mathbb{R}\text{中开集}O\}$是π类

· $\mathcal{A}=\{(-\infty,b]: b\in\mathbb{R}\}$是π类

<u>定义</u>(λ类, Dykin-system):

设$\mathcal{L}\subset 2^{\Omega}$, 如果其满足

(i) $\Omega\subset\mathcal{L}$

(ii) $A, B\in\mathcal{L}$ 且 $A\subset B\Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{L}$

(iii) $\forall A_n\in\mathcal{L}$ $(n\geq 1)$ 且 $A_n\nearrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{L}$

则称$\mathcal{L}$为一个<u>λ类</u>或<u>Dykin-System</u>

注: · λ类一定对补是封闭的($\Leftarrow$ (i)+(ii))

· σ代数 ⇒ λ类

习题: 设$\mathcal{L}\subset 2^{\Omega}$且满足

(i)' $\Omega\in\mathcal{L}$ (ii)' $A\in\mathcal{L}\Rightarrow A^c\in\mathcal{L}$ (iii)' $A_n\in\mathcal{L}$ $(n\geq 1)$ 且 $A_i\cap A_j=\phi$ $(i\neq j)\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{L}$

则$\mathcal{L}$一定为λ类. 反之, 若$\mathcal{L}$为λ类, 则(i)'(ii)'(iii)'成立.

证明: (⇒)·设$A,B\in\mathcal{L}$且$A\subset B$, 则$A\cap B^c=\phi \xRightarrow{(iii)'} A\cup B^c\in\mathcal{L} \xRightarrow{(ii)} B\setminus A\in\mathcal{L}$

·设$A_n\in\mathcal{L}$且$A_n\nearrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \Rightarrow A_1, A_2\setminus A_1, \cdots, A_{n+1}\setminus A_n, \cdots$是两两互斥的

且$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}\setminus A_n)$ (记$A_0=\phi$) 则由(iii)', $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{L}$

(⇐)·(i)(ii)⇒(i)'(ii)'

·设$A_n\in\mathcal{L}$且$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$, 则$A_i\subset A_j^c \xRightarrow{(ii)} A_j^c\setminus A_i\in\mathcal{L}\Leftrightarrow(A_i\cup A_j)^c\in\mathcal{L}$

$\Rightarrow A_i\cup A_j\in\mathcal{L}$　定义$B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{L}$ 且$B_n\nearrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \xRightarrow{(iii)} \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{L}$

定理($\sigma=\pi+\lambda$): $\mathcal{F}$为σ代数⇔$\mathcal{F}$既为π类又为λ类

定理(Dykin π-λ类定理):

设$\mathcal{A}$为π类, $\mathcal{L}$为λ类, $\mathcal{A}\subset\mathcal{L}\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{L}$

证: 思想: 设$\lambda(\mathcal{A})$为由$\mathcal{A}$生成的λ类

$\mathcal{A}\subset\mathcal{L}\Rightarrow\lambda(\mathcal{A})\subset\mathcal{L}$

若$\lambda(\mathcal{A})$为π类, 则$\lambda(\mathcal{A})$就是一个包含$\mathcal{A}$的σ代数

$\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})\subset\lambda(\mathcal{A})\subset\mathcal{L}$.

下只需证$\lambda(\mathcal{A})$为π类.

令$D_2\triangleq\{B\in\lambda(\mathcal{A}): B\cap C\in\lambda(\mathcal{A}), \forall C\in\lambda(\mathcal{A})\}$

则只需证$\lambda(\mathcal{A})\subset D_2$

可验证D_2为λ类 (留作业)

则只需证$\mathcal{A}\subset D_2$, 即证$\forall B\in\mathcal{A}, \forall C\in\lambda(\mathcal{A})\Rightarrow B\cap C\in\lambda(\mathcal{A})$

令$D_1\triangleq\{C\in\lambda(\mathcal{A}): B\cap C\in\lambda(\mathcal{A}), \forall B\in\mathcal{A}\}$

则只需证$\lambda(\mathcal{A})\subset D_1$

可验证D_1为λ类(留作业)

则只需证$\mathcal{A}\subset D_1$, 即证$\forall C\in\mathcal{A}, \forall B\in\mathcal{A}\Rightarrow B\cap C\in\lambda(\mathcal{A})$

而$\mathcal{A}$为π类, $\forall C\in\mathcal{A}, \forall B\in\mathcal{A}\Rightarrow B\cap C\in\mathcal{A}\subset\lambda(\mathcal{A})$

注: ·$D_1=D_2=\lambda(\mathcal{A})$

·$\sigma=\pi+\lambda$　$\sigma=a+m$ (代数+单调类)

推论: $\underset{(\pi类)}{\mathcal{A}}\subset\underset{(\lambda类)}{\mathcal{L}}\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})=\lambda(\mathcal{A})$

证明: $\mathcal{A}\subset\lambda(\mathcal{A})\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})\subset\lambda(\mathcal{A})$

• $\sigma(\mathcal{A})$ 也是λ类且 $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{A})\Rightarrow\lambda(\mathcal{A})\subset\sigma(\mathcal{A})$

应用/习题(函数形式的π-λ定理):

设 $\mathcal{A}\subset 2^{\Omega}$ 为π类且 $\Omega\in\mathcal{A}$.

$\mathcal{H}$ 是定义在Ω上的某些实值函数的全体且满足:

(i) $\forall A\in\mathcal{A}\Rightarrow 1_A\in\mathcal{H}$

(ii) $\mathcal{H}$ 为向量空间,即 $\forall f_1,f_2\in\mathcal{H},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\Rightarrow c_1f_1+c_2f_2\in\mathcal{H}$

(iii) $\forall$ 非负 $f_n\in\mathcal{H},\ n\geq 1$ 且 $f_n\uparrow f\Rightarrow f\in\mathcal{H}$

则 $\mathcal{H}$ 包含所有 $\sigma(\mathcal{A})$-可测函数

(注: $f:(\Omega,\sigma(\mathcal{A}))\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, 若 $\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f^{-1}(B)\triangleq\{\omega\in\Omega\,|\,f(\omega)\in B\}\in\sigma(\mathcal{A})$,
则称 f 为 $\sigma(\mathcal{A})$-可测函数)

证: 思路 我们只需证 $\forall A\in\sigma(\mathcal{A})\Rightarrow 1_A\in\mathcal{H}$

定义 $\mathcal{L}\triangleq\{A\subset\Omega: 1_A\in\mathcal{H}\}$

由(i), $\underset{(\pi类)}{\mathcal{A}}\subset\mathcal{L}$

下证 $\mathcal{L}$ 为λ类:

(i) $\Omega\in\mathcal{A}\subset\mathcal{L}$

(ii) $A,B\in\mathcal{L}$ 且 $A\subset B\Rightarrow 1_A,1_B\in\mathcal{H}\overset{(ii)}{\Longrightarrow}1_{B\setminus A}=1_B-1_A\in\mathcal{H}\Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{L}$

(iii) $\forall A_n\in\mathcal{L}$ 且 $A_n\uparrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow 1_{A_n}\in\mathcal{H},\ 1_{A_n}\uparrow 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i},\ 1_{A_n}\geq 0\Rightarrow 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}\in\mathcal{H}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{L}$

因此 $\mathcal{L}$ 为λ类,故由π-λ定理, $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{L}\Rightarrow\forall A\in\sigma(\mathcal{A}),\ 1_A\in\mathcal{H}$

注: $\Omega=\mathbb{R},\ \mathcal{A}=\{(-\infty,x]:x\in\mathbb{R}\}$,则 $\mathcal{H}$ 包含所有 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 可测函数

($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 可测函数一般称为Borel函数)

习题(Dykin-乘法类定理):

设 $\mathcal{H}$ 为包含定义在Ω上某些实值有界函数的全体且满足:

(i) $1\in\mathcal{H}$

(i) $1 \in \mathcal{H}$

(ii) $\mathcal{H}$为向量空间

(iii) 非负$f_n \in \mathcal{H}$且$f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

设M为一个包含所有常数的乘法类($f_1, f_2 \in M \Rightarrow f_1 f_2 \in M$)且$M \subset \mathcal{H}$

则$\mathcal{H}$包含所有$\sigma(M)$-可测函数全体

注: $\sigma(M) \triangleq \sigma(\{f^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, f \in M\})$

$$\left(\begin{array}{l} \forall A \in \sigma(M) \Rightarrow 1_A \in \mathcal{H} \\ \quad\quad\quad\quad \Uparrow \\ \mathcal{L} = \{A \subset \Omega : 1_A \in \mathcal{H}\} \\ \text{构造}\pi\text{类}\mathcal{A}\text{使}\mathcal{A} \subset \mathcal{L}\text{且}\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(M) \xrightarrow{\pi-\lambda\text{定理}} \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L} \end{array}\right)$$

证明: 构造一列非负连续函数$\varphi_n(x) \uparrow 1_{\{x>0\}}$ $x \in \mathbb{R}$

$\forall f_1, \cdots, f_k \in M$, 设$a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$F_n(w) \triangleq \prod_{i=1}^k \varphi_n(f_i(w) - a_i), \quad w \in \Omega$$

则F_n为非负且$F_n \uparrow \prod_{i=1}^k 1_{\{f_i > a_i\}} = 1_{\bigcap_{i=1}^k \{f_i > a_i\}}$ ($\in \mathcal{H}$? $\Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{L}$)

$\mathcal{A} \triangleq \{\bigcap_{i=1}^k \{f_i > a_i\} : f_1, \cdots, f_k \in M, a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ 这是π类.

可验证$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(M)$

现在问题是F_n不一定$\in \mathcal{H}$.

定义$B \triangleq \max_{1 \le i \le k} \sup_{w \in \Omega} |f_i(w) - a_i| < +\infty$

$\varphi_n(x)$, $x \in [-B, B]$为连续函数, 则由Weierstrass逼近定理, 存在一列多项式$P_\ell(x)$, $\ell \ge 1$, 使$\lim_{\ell \to \infty} \sup_{x \in [-B,B]} |P_\ell(x) - \varphi_n(x)| = 0$ (i.e. $P_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \varphi_n$ uniformly)

于是$\lim_{\ell \to \infty} \sup_{w \in \Omega} \left|\prod_{i=1}^k P_\ell \circ (f_i - a_i)(w) - F_n(x)\right| = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{且} \prod_{i=1}^k P_\ell \circ (f_i - a_i) \in \mathcal{H} \\ \prod_{i=1}^k P_\ell \circ (f_i - a_i) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} F_n \text{ uniformly} \end{array}\right\} \Rightarrow F_n \in \mathcal{H}$$

(问题: $f_n \in \mathcal{H}$, $\forall n \ge 1$ $\Big\} \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformly

§1.3 单调类定理

定义(单调类)：设 $\mathcal{M}\subset 2^{\Omega}$，如果其满足

(1) $\forall A_n\in\mathcal{M}, n\geq 1$ 且 $A_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{M}$

(2) $\forall A_n\in\mathcal{M}, n\geq 1$ 且 $A_n \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{M}$

则称 $\mathcal{M}$ 为单调类.

注：σ-代数 $\Rightarrow$ 单调类

λ类 $\Rightarrow$ 单调类

定理 ($\sigma=a+m$)：设 $\mathcal{F}\subset 2^{\Omega}$，则 $\mathcal{F}$ 为 σ 代数 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 为代数且 $\mathcal{F}$ 为单调类

证明：($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$) 设 $\mathcal{F}$ 为代数且 $\mathcal{F}$ 为单调类. 只需证 $\mathcal{F}$ 满足可列并封闭

事实上，设 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$. 令 $B_n \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，则 $B_n\in\mathcal{F}$

且 $B_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$

定理(单调类定理 P.Halmos)：

设 $\mathcal{A}$ 为代数，$\mathcal{M}$ 为单调类，若 $\mathcal{A}\subset\mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$

证明：设 $m(\mathcal{A})$ 为由 $\mathcal{A}$ 生成的(最小)单调类. 则 $m(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$

单调类(✓) 代数(?) $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{A})\subset m(\mathcal{A})$ $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$

下只需证 $m(\mathcal{A})$ 为代数

$\boxed{m(\mathcal{A})\text{为代数}}$

$\boxed{m(\mathcal{A})\text{为}\pi\text{类}}$ $\boxed{m(\mathcal{A})\text{对补是封闭的}}$

$\boxed{\text{由}\pi\text{-}\lambda\text{定理的证明}\lambda(\mathcal{A})\pi\text{类}}$ $\boxed{D\triangleq\{B\in m(\mathcal{A}): B^c\in m(\mathcal{A})\}\quad m(\mathcal{A})\subset D\ (\Rightarrow m(\mathcal{A})=D)}$

$\boxed{D\text{为单调类(作业)}}$

$\boxed{\mathcal{A}\subset D}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall B\in\mathcal{A}\xrightarrow{\mathcal{A}\text{为代数}}B^c\in\mathcal{A}\\ \mathcal{A}\subset m(\mathcal{A})\end{array}\right\}\Rightarrow B^c\in m(\mathcal{A})\Rightarrow B\in\mathcal{D}}$$

推论：设$\mathcal{A}$为代数，则$\sigma(\mathcal{A})=m(\mathcal{A})$.

证：由于$\underset{\text{代数}}{\mathcal{A}}\subset \underset{\text{单调类}}{m(\mathcal{A})}\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})\subset m(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{A})$且$\sigma(\mathcal{A})$是单调类$\Rightarrow m(\mathcal{A})\subset\sigma(\mathcal{A})$

§1.4 概率测度

定义（概率测度）：设$(\Omega,\mathcal{F})$为可测空间以及$\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$作为一个集函数，

如果：(i) $\mathbb{P}(\phi)=0$, $\mathbb{P}(\Omega)=1$

(ii) $\forall A_n\in\mathcal{F}, n\geq1$ 且 $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$ （σ可加性）（可列可加性）

则称$\mathbb{P}$为定义在事件域$\mathcal{F}$上的一个概率测度.

注：设$\mu:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$为集函数，满足

(i) $\mu(\phi)=0$ (ii) μ满足可列可加性，则称μ为$\mathcal{F}$上的一个测度.

进一步，若$\mu(A)<+\infty$，称μ为$\mathcal{F}$上的有限测度.

若$\mu(\Omega)=+\infty$，但存在一个Ω的划分$\{A_i\}$ $(\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i, A_i\in\mathcal{F}, A_i\cap A_j=\phi)$

满足$\mu(A_i)<+\infty$，则称μ为$\mathcal{F}$上的一个σ-有限测度.

（$\Omega=(0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}_{(0,1]}$, μ为Lebesgue测度，此时μ为$\mathcal{B}_{(0,1]}$上的有限测度，

事实上，$\mu(\Omega)=\mu((0,1])=1$，进一步μ为$\mathcal{B}_{(0,1]}$上的一个概率测度）

- 对任意$\mathcal{F}$上的一个有限测度μ，则$\forall A\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)\triangleq\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$为$\mathcal{F}$上一个概率测度
- 对任意$\mathcal{F}$上的一个σ有限测度μ，设$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$为Ω的一个划分且$\mu(A_i)<+\infty$，定义$\mathbb{P}_i(A)=\dfrac{\mu(A\cap A_i)}{\mu(A_i)}$, $\forall A\in\mathcal{F}$，则$\forall i$, $\mathbb{P}_i$为$\mathcal{F}$上概率测度.
- $\forall x\in\mathbb{R}$，定义$\delta_x(A)\triangleq 1_A(x)$, $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，则称$\delta_x$为集中在点$x$处的

Dirac-delta测度. 事实上, δ_x为$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$上的一个概率测度

$\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$为$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$上的概率测度(经验概率测度)

→设$X_1,\cdots,X_n$为n个r.v.s. $\mu\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$

$\mu(w,A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i(w)}(A)$, $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ —— 随机概率测度

$\mu(w)$ —— 概率测度值r.v.

→设$X_1(t,w),\cdots,X_n(t,w)$为n个随机过程, $t\geq 0$, $w\in\Omega$

$\mu_t(w,A)\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i(t,w)}(A)$

$\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ —— 概率测度值随机过程

例子: 考虑无穷次掷硬币的随机实验.

$\Omega=\{(w_1,w_2,\cdots,w_n,\cdots): w_i=0 \text{ or } 1,\ i\geq 1\}$

事件域2^Ω

定义$\Omega_n\triangleq\{(w_1,\cdots,w_n): w_i=0 \text{ or } 1,\ i=1,\cdots,n\}$

则$|\Omega_n|=2^n$　定义$\mathbb{P}_n(A)=\frac{|A|}{2^n}$, $\forall A\in 2^\Omega$

$\forall n\geq 1$, 定义$\mathcal{F}_n\triangleq\{A\subset\Omega: \exists B\in 2^\Omega, \text{s.t. } A=\{w=(w_i)_{i\geq 1}, (w_1,\cdots,w_n)\in B\}\}$

思考: ①$\mathcal{F}_n$是一个σ代数? ②$\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$是一个过滤?

$\forall A\in\mathcal{F}_n$, $\exists B\in 2^\Omega$, s.t. $A=\{w: (w_1,\cdots,w_n)\in B\}$, 定义$\mathbb{P}(A)\triangleq\mathbb{P}_n(B)$

思考: $\mathbb{P}$为$\mathcal{F}_n$上一个概率测度?

于是我们建立了$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$上的一个集函数$\mathbb{P}$

思考: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$是一个代数但不是一个$\sigma$代数?

问题: 将$\mathbb{P}$从代数$\mathcal{F}_\infty\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$上扩展到$\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n)/\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$?

(key: $\mathbb{P}$在$\mathcal{F}_\infty$上满足可列可加性)

定理(Carathéodory定理)

设$\mathcal{A}$为代数且$\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$是一个可列可加的集函数, 则存在$(\Omega,\sigma(\mathcal{A}))$上的一个测度$\mu$使$\mu=\mu_0$ on $\mathcal{A}$. 进一步, 若$\mu(\Omega)<+\infty$, 则μ是唯一的

注：μ_0在$\mathcal{A}$上可列可加性，即$\forall A_n\in\mathcal{A}, n\geq 1$且$A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$以及$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$，
有$\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(A_n)$

· 概率测度的性质：

(i) $\forall A,B\in\mathcal{F}$，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(ii) $\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{J\subset\{1,2,\cdots,n\}\\|J|=i}}P(\bigcap_{j\in J}A_j)$

(iii) $\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，有 $P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{J\subset\{1,2,\cdots,n\}\\|J|=i}}P(\bigcup_{j\in J}A_j)$

(iv) Bonferroni不等式：$\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，则

$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{J\subset\{1,2,\cdots,n\}\\|J|=i}}P(\bigcap_{j\in J}A_j)$　　m奇数

$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\geq\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{J\subset\{1,2,\cdots,n\}\\|J|=i}}P(\bigcap_{j\in J}A_j)$　　m偶数

(v) Boole不等式：$\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

注：$\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

$(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$

(vi) 概率测度的上、下连续性

下连续性：$A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 且 $A_n\uparrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

上连续性：$A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 且 $A_n\downarrow\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

证：下连续性：$A_n\in\mathcal{F}$ 且 $A_n\uparrow$

注意到 $A_n, \underbrace{A_{n+1}\setminus A_n}_{V_n}, A_{n+2}\setminus A_{n+1}, \cdots$ 两两互斥

且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_n\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}V_i$

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=P(A_n\cup\bigcup_{i=n}^{\infty}V_i)=P(A_n)+P(\bigcup_{i=n}^{\infty}V_i)$

$=P(A_n)+\sum_{i=n}^{\infty}P(V_i)$

取$n=1$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=P(A_1)+\sum_{i=1}^{\infty}P(V_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(V_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - P(A_1) \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{i=n}^{\infty} P(V_i) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

因此 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) + 0$

(vii) 设 $\mathcal{F}$ 为 σ 代数以及 $\mu: \mathcal{F} \to [0,\infty]$ 为有限可加的集函数 $(\mu(\phi)=0)$

如果 $H_n \in \mathcal{F}, n\geq 1$ 且 $H_n \downarrow \phi$，有 $\mu(H_n) \downarrow 0, n\to+\infty$，

则 μ 在 $\mathcal{F}$ 上满足可列可加性.

证：$\forall A_n \in \mathcal{F}$ 且 $A_i \cap A_j = \phi (i\neq j)$

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \underbrace{\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i}_{H_n}) \xlongequal{\text{有限可加}} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mu(H_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(H_n)$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu(H_n)}_{=0}$

注：若 $\mathcal{F}$ 为代数，此结果也成立.

$\Omega = (0,1]$ $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], 0\leq a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n \leq 1, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$

$\mathcal{A}$ 为代数（不是 σ 代数）

$\forall \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \in \mathcal{A}$，定义 $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]) \triangleq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$，则 μ_0 为 $\mathcal{A}$ 上的一个有限可加集函数

问题：将 μ_0 从 $\mathcal{A}$ 上拓展到 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{(0,1]}$ 上的一个概率测度.

Need: μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上满足可列可加性 $\Leftarrow$ "$H_n \downarrow \phi \Rightarrow \mu_0(H_n) \downarrow 0, n\to\infty$"

$\forall A_n \in \mathcal{A}, n\geq 1$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu_0(H_n) \downarrow 0$，其中 $H_n \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $(H_n \downarrow \phi)$

用反证法，假设 $\exists \varepsilon > 0$, s.t. $\mu_0(H_n) \geq 2\varepsilon$, $\forall n \geq 1$

注意到，由代数 $\mathcal{A}$ 的构造以及 μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上的定义，有

$\forall l \geq 1, \exists T_l \in \mathcal{A}$ 且 $\overline{T_l} \subset H_l$ 以及 $\mu_0(H_l \setminus T_l) \leq \varepsilon \cdot 2^{-l}$

于是 $\forall n \geq 1$，$\mu_0(\bigcap_{l\leq n} T_l) = \mu_0(H_n) - \mu_0(H_n \setminus \bigcap_{l\leq n} T_l)$

另一方面，对于 $l \leq n$，$H_n \subset H_l$，故 $H_n \setminus \bigcap_{l\leq n} T_l = \bigcup_{l\leq n} (H_n \setminus T_l) \subset \bigcup_{l\leq n} (H_l \setminus T_l)$

因此 $\mu_0(H_n \setminus \bigcap_{l\leq n} T_l) \leq \mu_0(\bigcup_{l\leq n} (H_l \setminus T_l)) \leq \sum_{l\leq n} \mu_0(H_l \setminus T_l) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \mu_0(\bigcap_{l\leq n} T_l) \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow C_n \triangleq \bigcap_{l\leq n} \overline{T_l} \neq \phi$，$\forall n \geq 1$)

$C_n \downarrow \bigcap_{l\geq 1} \overline{T}_l$ $\Big\} \Rightarrow \bigcap_{l\geq 1} \overline{T}_l \neq \phi$
C_n compact

又 $\bigcap_{l\geq 1} \overline{T}_l \subset \bigcap_{l\geq 1} H_l = \phi$ 矛盾!

§1.5 Borel-Cantelli 引理

设 $A_n \in \mathcal{F}, n\geq 1$. 定义 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$

注: $\cdot\ \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \mathcal{F}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \mathcal{F}$

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega\in\Omega : \forall m\geq 1, \exists n\geq m$ 使 $\omega\in A_n\}$
  $= \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n$ for infinitely many $n\}$
  $= \{A_n : \text{i.o.}\}$ (infinite, often)
- $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega\in\Omega, \exists m\geq 1, \forall n\geq m, \omega\in A_n\}$
  $= \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n$ for large $n\}$
  $= \{A_n : \text{e.v.}\}$ (eventually)
- $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$
- $1_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(\omega) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, 1_{A_n}(\omega)$
  $1_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(\omega) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, 1_{A_n}(\omega)$

$\cdot$ Fatou 引理: $f_n \geq 0$,
$\int \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n\,dx \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \int f_n\,dx$

Fatou 引理: 设 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$, 则 $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}(A_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)$

证明: $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n)$

Notice that $\forall m\geq 1$, $\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(A_n)\ (n\geq m) \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \inf_{n\geq m}\mathbb{P}(A_n)$

故 $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m\to\infty}\inf_{n\geq m}\mathbb{P}(A_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} P(A_n)$

$\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c) \geq 1 - \underline{\lim_{n\to\infty}}\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \underline{\lim_{n\to\infty}}(1-\mathbb{P}(A_n)) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbb{P}(A_n)$

Borel-Cantelli 引理 I: 设 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, 则 $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$.

证: $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)$
注意到 $\mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty} 0$
$\Big\} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$

注: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X \Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$

设 $\tilde{\Omega} \triangleq \{\omega\in\Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$

$\forall \omega\in\tilde{\Omega}$, 则 $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists m(\omega)\geq 1, \forall n\geq m(\omega), |X_n(\omega)-X(\omega)|\leq\varepsilon$

$\Leftrightarrow \omega\in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\omega\in\Omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|\leq\varepsilon\}, \forall\varepsilon$

定义 $A_n \triangleq \{\omega\in\Omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}$

$\mathbb{P}(\tilde{\Omega})=1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0, \forall\varepsilon>0$

$(= \mathbb{P}(|X_n - X|>\varepsilon, i.o.))$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)<+\infty, \forall\varepsilon>0 \overset{B\text{-}C}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$

<u>Borel-Cantelli引理II</u>: 设 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 且 $A_1,\cdots,A_n$ 是相互独立的, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=+\infty$

则 $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=1$.

证: 只需证 $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c)=0$

事实上, $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c)$

$\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=m}^{\infty}(1-\mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{n=m}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = e^{-\sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)} = 0$

故 $\mathbb{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=1$

<u>定理</u>(Kolmogorov 0-1律): 设 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 且 $A_1,\cdots,A_n$ 是相互独立的,

则 $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=0$ or 1.

§1.6 概率空间的完备化

<u>定义</u>(零事件 null set) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间.

对于 $N\in\mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(N)=0$, 称 N 为一个零事件

定义 $\mathcal{N} \triangleq \{N\in\mathcal{F}: \mathbb{P}(N)=0\}$ 为所有零事件的全体

注: $\forall N_j\in\mathcal{N}, j\geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\in\mathcal{N}$ $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\in\mathcal{F} \text{ 且 } \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_j)=0\right)$

$\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j\in\mathcal{N}$ $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j\in\mathcal{F} \text{ 且 } \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j)\leq\mathbb{P}(N_1)=0\right)$

定义(完备的概率空间): 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间

定义(完备的概率空间): 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为一个概率空间

$\forall N\in\mathcal{N}$ 且 $B\subset N$，有 $B\in\mathcal{N}$，则称$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为一个完备概率空间.

定理(概率空间的完备化): 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为一个概率空间，

则存在一个完备的概率空间$(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$使$\mathcal{F}\subset\overline{\mathcal{F}}$，$\overline{\mathbb{P}}=\mathbb{P}$ on $\mathcal{F}$

证明: 定义 $\overline{\mathcal{F}}\triangleq\mathcal{F}\cup\overline{\mathcal{N}}=\{E=A\cup B: A\in\mathcal{F}, B\subset N, N\in\mathcal{N}\}$

其中 $\overline{\mathcal{N}}\triangleq\{B\subset\Omega: B\subset N, N\in\mathcal{N}\}$

下证 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 σ 代数

(i) $\Omega\in\overline{\mathcal{F}}$ $(\Omega=\Omega\cup\phi)$

(ii) $\forall E=A\cup B\in\overline{\mathcal{F}}$，则 $A\in\mathcal{F}, B\subset N, N\in\mathcal{N}$

$\Rightarrow E^c=A^c\cap B^c=(A^c\backslash N)\cup(A^c\cap B^c\cap N)\in\overline{\mathcal{F}}$

(iii) $\forall E_j=A_j\cup B_j\in\overline{\mathcal{F}}$, $\forall j\geq 1$，则 $A_j\in\mathcal{F}$, $B_j\subset N_j$, $N_j\in\mathcal{N}$

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty}E_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\cup B_j)=(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j)\in\overline{\mathcal{F}}$

$\forall E=A\cup B\in\overline{\mathcal{F}}$，定义 $\overline{\mathbb{P}}(E)\triangleq\mathbb{P}(A)$

良定性: 若 $E=A_1\cup B_1$，$A_1\in\mathcal{F}$，$B_1\subset N_1$，$N_1\in\mathcal{N}$

$E=A_2\cup B_2$，$A_2\in\mathcal{F}$，$B_2\subset N_2$，$N_2\in\mathcal{N}$

$A_1\subset A_2\cup B_2\subset A_2\cup N_2\Rightarrow\mathbb{P}(A_1)\leq\mathbb{P}(A_2\cup N_2)\leq\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(N_2)=\mathbb{P}(A_2)$

反过来同理可得 $\mathbb{P}(A_2)\leq\mathbb{P}(A_1)$

故 $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2)$ $(=\mathbb{P}(A_1\cap A_2))$

再证 $\overline{\mathbb{P}}$ 为 $\overline{\mathcal{F}}$ 上一个概率测度 (自证)

习题: 设 $\mathcal{H}\triangleq\{F\subset\Omega: \exists G\in\mathcal{F}, G\triangle F\in\overline{\mathcal{N}}\}$

证明: (1) $\mathcal{H}$ 为 σ 代数 (2) $\mathcal{H}=\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\cup\overline{\mathcal{N}}$

(1) (i) $\Omega\in\mathcal{H}$ (取 $G=\Omega\in\mathcal{F}$ 故 $\Omega\triangle\Omega\in\overline{\mathcal{N}}$)

(ii) $\forall F\in\mathcal{H}\Rightarrow\exists G\in\mathcal{F}$, s.t. $G\triangle F\in\overline{\mathcal{N}}$

故 $F^c\triangle G^c=F\triangle G\in\overline{\mathcal{N}}$，$G^c\in\mathcal{F}\Rightarrow F^c\in\mathcal{H}$

故 $F\triangle G=F\triangle G\in\mathcal{N}$, $G\in\mathcal{F}\Rightarrow F\in\mathcal{H}$

(iii) $\forall F_j\in\mathcal{H}, j\geq 1, \exists G_j\in\mathcal{F}$ s.t. $G_j\triangle F_j\in\overline{\mathcal{N}}$

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j\right)\triangle\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j\right)\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(F_j\triangle G_j)\in\overline{\mathcal{N}}\Rightarrow\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j\right)\triangle\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j\right)\in\overline{\mathcal{N}}$$

又 $\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j\in\mathcal{F}$　故 $\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j\in\mathcal{H}$

故 $\mathcal{H}$ 为 σ 代数

(2) · $\left.\begin{array}{l}\mathcal{F}\subset\mathcal{H}\\ \overline{\mathcal{N}}\subset\mathcal{H}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{\mathcal{F}}\subset\mathcal{H}$

· 下证 $\mathcal{H}\subset\overline{\mathcal{F}}$. 事实上, $\forall F\in\mathcal{H}\Rightarrow\exists G\in\mathcal{F}$ s.t. $N\triangleq G\triangle F\in\overline{\mathcal{N}}$

注意到 $N=G\triangle F\Leftrightarrow F=G\triangle N$, 因此 $\mathcal{H}=\{G\triangle N\mid G\in\mathcal{F}, N\in\overline{\mathcal{N}}\}$

又 对于 $G\in\mathcal{F}, N\in\overline{\mathcal{N}}$, $G\triangle N=\underbrace{(G\cap A^c)}_{\in\overline{\mathcal{F}}}\cup\underbrace{((G\triangle N)\cap A)}_{\in\overline{\mathcal{N}}}$, $A\in\mathcal{N}$

故 $G\triangle N\in\overline{\mathcal{F}}$　因此 $\mathcal{H}\subset\overline{\mathcal{F}}$

§1.7 随机变量

定义 (随机变量) 设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为一个样本空间上的函数, 如果 $\forall B\in\mathcal{S}$, 有

$$X^{-1}(B)\triangleq\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$$

则称 $X(\omega)$ 为一个随机变量 (r.v.) 或记为 $X\in\mathcal{F}$

注: 例: $\mathcal{F}=2^{\Omega}$, 则任何样本空间 Ω 上的函数都为 r.v.

例: $(\Omega,\mathcal{F})=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, 设 $X(\omega)=\omega:(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})\Rightarrow X(\omega)$ 为 r.v.

例: $(\Omega,\mathcal{F})=(\mathbb{R},\sigma(\{[a,b]: a<b, a,b\in\mathbb{Z}\}))$, 则 $X(\omega)=\omega$ 不是 r.v.

· 设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为一个 r.v. 且 $f:(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ 为一个可测函数, 即 $\forall B\in\mathcal{T}$, 有 $f^{-1}(B)\in\mathcal{S}$, 则 $f\circ X:(\Omega,\mathcal{F})\to(T,\mathcal{T})$ 也为一个 r.v. [事实上, $\forall B\in\mathcal{T}$, $(f\circ X)^{-1}(B)\triangleq\{\omega\in\Omega: f(X(\omega))\in B\}$

$=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in\mathcal{S}}\}\in\mathcal{F}$，故 $f\circ X$ 为r.v. 或记 $f\circ X\in\mathcal{F}$)

例.示性r.v.：$\forall A\in\mathcal{F}$，定义 $1_A(\omega)\triangleq\begin{cases}1 & ,\omega\in A\\ 0 & ,\omega\notin A\end{cases}$

则 $1_A(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为一r.v.，以后称为示性r.v.

事实上，$\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，$1_A^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: 1_A(\omega)\in B\}=\begin{cases}\Omega & ,0\in B\text{且}1\in B\\ A^c & ,0\in B\text{且}1\notin B\\ A & ,0\notin B\text{且}1\in B\\ \phi & ,0\notin B\text{且}1\notin B\end{cases}$

故 $\{1_A^{-1}(B):B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}=\{\Omega,\phi,A,A^c\}\subset\mathcal{F}$

例.简单r.v.：设 $\{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{F}$ 为 Ω 的一个划分，对任意常数 $a_i\in\mathbb{R}$，

定义 $X(\omega)\triangleq\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega)$，$\omega\in\Omega$，则称 $X(\omega)$ 为简单r.v.

注：$\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}=\sigma(\{A_1,\cdots,A_n\})=\{\bigcup_{i\in I}A_i : I\subset\{1,2,\cdots,n\}\}$ (记 $\bigcup_{i\in\phi}\triangleq\phi$) $\subset\mathcal{F}$

<u>引理</u>：设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(S,\mathcal{S})$ 为一个样本空间的函数，则 $\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{S}\}$ 为 σ-代数.

证：注意到 $[X^{-1}(B)]^c=X^{-1}(B^c)$

$$X^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I}X^{-1}(B_\alpha)$$

$$X^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in I}X^{-1}(B_\alpha)$$

注：以后记 $\sigma(X)\triangleq\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{S}\}$ (由引理，必为 σ-代数)

<u>引理</u>：设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(S,\mathcal{S})$ 为一个样本空间函数，则 $X\in\mathcal{F}\Leftrightarrow\sigma(X)\subset\mathcal{F}$

注：若 $X\in\mathcal{F}$ (即 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ 为一个r.v.) $\Rightarrow\sigma(X)$ 为一个<u>子事件域</u>

- 当 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$，写 $X(\omega)=(X_1(\omega),\cdots,X_d(\omega))$，则 $\sigma(X)=\sigma((X_1,\cdots,X_d))=\sigma\Big(\bigcup_{i=1}^d\sigma(X_i)\Big)$
- 当 $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R}^\infty,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^\infty})$，即 $X(\omega)=(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega),\cdots)$，则
  $\sigma(X)=\sigma((X_1,\cdots,X_n,\cdots))=\sigma\Big(\bigcup_{d=1}^\infty\sigma(X_1,\cdots,X_d)\Big)$
- $\sigma(X)$ 是使样本空间上的函数 $X(\omega)$ 为一个r.v.的最小事件域

引理：设 $X(\omega):(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为一个r.v.，则 $\exists$ 一列简单r.v. $\{X_n\}_{n\geq1}$ 使

$$X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega),\ \forall \omega\in\Omega,\ n\longrightarrow +\infty$$

证: $\forall n\geqslant 1$, 定义 $f_n(x) \triangleq n 1_{(n,+\infty)}(x) + \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}(x)$, $x\geqslant 0$

则 $f_n(x) \uparrow x$, $\forall x\geqslant 0$

注意到 $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$

定义 $Y_n(\omega) \triangleq f_n(X^+(\omega)) \uparrow X^+(\omega)$ as $n\to\infty$

$Z_n(\omega) \triangleq f_n(X^-(\omega)) \uparrow X^-(\omega)$ as $n\to\infty$

故 $X_n(\omega) \triangleq f_n(X^+(\omega)) - f_n(X^-(\omega)) \longrightarrow X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$ as $n\to\infty$

引理: 设 $X(\omega): (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (S, \sigma(\mathcal{A}))$ 为样本空间上的函数, 其中 $\mathcal{A} \subset 2^S$.

如果 $\forall B\in\mathcal{A}$ 有 $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$, 则 $X(\omega): (\Omega,\mathcal{F}) \to (S,\sigma(\mathcal{A}))$ 为一个r.v. (或 $X\in\mathcal{F}$)

证: 只需证 $\forall B\in\sigma(\mathcal{A}) \Rightarrow X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

令 $\mathcal{M} \triangleq \{B\in\sigma(\mathcal{A}) : X^{-1}(B)\in\mathcal{F}\}$ (或 $\subset S$)

则 $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$, 又因为 $\mathcal{M}$ 为 σ-代数, 故 $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$

注: 当 $(S,\mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, 设 $\mathcal{A} = \{(-\infty, x] : x\in\mathbb{R}\}$, 则 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A})$

于是, $\forall x\in\mathbb{R}$, $X^{-1}((-\infty,x])\in\mathcal{F} \Rightarrow X\in\mathcal{F}$, 即 $X(\omega): (\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 为r.v.

例. 设 $X_n(\omega): (\Omega,\mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 为一列r.v.s 其中 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$, $n\geqslant 1$, 则

$\inf_{n\geqslant 1} X_n$, $\sup_{n\geqslant 1} X_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n : (\Omega,\mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 也为r.v.s

Pf: 取 $\mathcal{A} \triangleq \{[-\infty, x) : x\in\mathbb{R}\}$, 则 $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{A})$

$$\{\omega\in\Omega : \inf_{n\geqslant 1} X_n(\omega) < x\} = \{\omega\in\Omega : \inf_{n\geqslant 1} X_n(\omega) \in [-\infty, x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{X_n^{-1}([-\infty,x))}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \inf_{n\geqslant 1} X_n \in\mathcal{F} \quad \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} X_n = -\inf_{n\geqslant 1}(-X_n) \in\mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} X_n = \inf_{m\geqslant 1} \sup_{n\geqslant m} X_n \in\mathcal{F}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n \in\mathcal{F}$$

引理: 设 $X(\omega): (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (S,\sigma(\mathcal{A}))$ 为一个r.v., 其中 $\mathcal{A}\subset 2^S$, 则

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B) : B\in\mathcal{A}\})$$

证：记$\mathcal{G} \triangleq \sigma(\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{A}\})$

(i) $\mathcal{G}\subset\sigma(X)$：$\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{A}\}\subset\{X^{-1}(B):B\in\sigma(\mathcal{A})\}=\sigma(X)$

$$\Rightarrow \mathcal{G}=\sigma(\{X^{-1}(B):B\in\mathcal{A}\})\subset\sigma(X)$$

(ii) $\sigma(X)\subset\mathcal{G}$：$X\in\mathcal{F}$，则$\sigma(X)\subset\mathcal{F}$，因此$\mathcal{G}\subset\sigma(X)\subset\mathcal{F}$

即$\mathcal{G}$是一个子事件域

下证$X\in\mathcal{G}$，可证$\forall B\in\sigma(\mathcal{A})\Rightarrow X^{-1}(B)\in\mathcal{G}$

事实上，定义$\mathcal{M}\triangleq\{B\subset S: X^{-1}(B)\in\mathcal{G}\}$，则$\mathcal{M}$为$\sigma$-代数(自己验证)

因此有$\mathcal{A}\subset\mathcal{M}\Rightarrow\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$

也就是说$\mathcal{G}$为使$X(\omega)$为r.v.的一个子事件域

又知$\sigma(X)$为使$X(\omega)$为r.v.的最小子事件 $\Big\}\Rightarrow\sigma(X)\subset\mathcal{G}$

注：当$(S,\sigma(\mathcal{A}))=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$，其中$\mathcal{A}=\{(-\infty,x],x\in\mathbb{R}\}$

$X\in\mathcal{F}\Rightarrow\sigma(X)=\sigma(\{X^{-1}(-\infty,x]):x\in\mathbb{R}\})$

当$(S,\sigma(\mathcal{A}))=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$，其中$\mathcal{A}=\{\prod_{i=1}^{d}(-\infty,x_i]:x_i\in\mathbb{R}\}$ 柱形

则$\sigma(X)=\sigma((X_1,\cdots,X_d))$

$$=\sigma(\{(X_1,\cdots,X_d)^{-1}(\prod_{i=1}^{d}(-\infty,x_i]):x_i\in\mathbb{R}\})$$

$$=\sigma(\{\bigcap_{i=1}^{d}X_i^{-1}((-\infty,x_i]):x_i\in\mathbb{R}\})$$

习题：设(X,Y)为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$下2维r.v.，则

$\exists$可测函数f使$Y=f(X)\Leftrightarrow\sigma(Y)\subset\sigma(X)$

注：设Y为$\sigma(X)$-可测($Y\in\sigma(X)$)，$Y(\omega):(\Omega,\sigma(X))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$为一个r.v.

$\Rightarrow$存在一个可测函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$使$Y=f(X)$

(以后称f为回归函数)