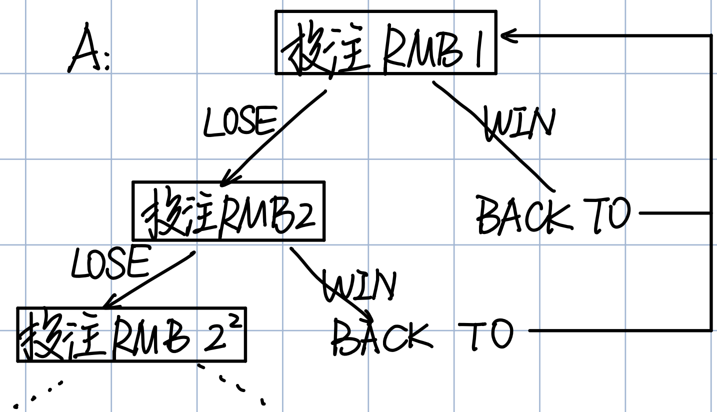
7.7 鞅 Martingale

· 18世纪流行于法国的投注策略



这个策略,只要中间赢一次,就会赢1RMB

A一直输的概率为0

记$N=\min\{n\geq 1, A赢\}$ 假设游戏公平,输赢各占一半

$P(N=n)=(\frac{1}{2})^n \Rightarrow P(N<\infty)=1 \rightarrow$ A肯定在有限时间内赢一次

A需要准备多少钱才能等到赢?

$N=n$时需准备 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$ 概率$(\frac{1}{2})^n$

$\therefore$ A需准备$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n(1+2+\cdots+2^{n-1})=\infty$

S_n～n次之后余下的钱 S_0～初始的钱

$E(S_{n+1}|S_n\cdots S_1,S_0)=S_n$ ～ Martingale 用来描述"公平"

$\leq S_n$ ～ 上鞅 收益减,不"公平"

$\geq S_n$ ～ 下鞅 收益增

定义3:称$\{S_n,n\geq 1\}$为关于$\{X_n,n\geq 1\}$的鞅,若

(a) $E|S_n|<\infty, \forall n\geq 1$

(b) $E(S_{n+1}|X_n,\cdots,X_1)=S_n, n\geq 1$

注:1.由条件期望定义知S_n为$X_1,\cdots,X_n$的函数

2.$\{X_n,n\geq 1\}$关于$\{S_n,n\geq 1\}$通常不是鞅

很多情况下,$\exists\phi$ s.t. $\{S_n=\phi(X_n),n\geq 1\}$关于$\{X_n,n\geq 1\}$为鞅

· 例6: $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立r.v. 且 $EX_n=0$, $E|X_n|<\infty$

则 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ 关于 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为鞅

Pf: · $E|S_n|\leq\sum_{i=1}^n E|X_i|<\infty$

· $E(S_{n+1}|X_n\cdots X_1)=E(S_n+X_{n+1}|X_n\cdots X_1)$

$=S_n+E(X_{n+1}|X_n\cdots X_1)$

$=S_n+EX_{n+1}=S_n$

例7. $X_0,X_1,\cdots$ 为离散时间马氏链, S, $\mathbb{P}$.

$\psi: S\to\mathbb{R}$ 有界函数, 满足

(8) $\sum_{j\in S} p_{ij}\psi(j)=\psi(i)$

则 $S_n=\psi(X_n)$ 关于 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为鞅

Pf: (a) ψ 有界 $\Rightarrow E|S_n|<\infty$

(b) $E(S_{n+1}|X_n\cdots X_0)=E(\psi(X_{n+1})|X_n\cdots X_0)$

$\underline{\underline{\text{马氏性}}}\ E(\psi(X_{n+1})|X_n)$

$\underline{\underline{\text{期望定义}}}\ \sum_{j\in S} p_{X_n,j}\psi(j)=\psi(X_n)=S_n$

· 例9: $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立r.v. 且 $EX_n=0$, $0<EX_n^2<\infty$

则 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ 关于 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为鞅 (例6)

令 $T_n=S_n^2$, 则

$E(T_{n+1}|X_n\cdots X_1)=E(S_n^2+2S_nX_{n+1}+X_{n+1}^2|X_n\cdots X_1)$

$=S_n^2+2S_nE(X_{n+1}|X_n\cdots X_1)+E(X_{n+1}^2|X_n\cdots X_1)$

$=S_n^2+E(X_{n+1}^2)$

$>S_n^2=T_n \longrightarrow$ 下鞅

⑩ 条件概率性质:

1° $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 一一映射，则 $E(X|h(Y)) = E(X|Y)$

2° Tower Property: $E[E[X|Y_1, Y_2]|Y_1] = E[X|Y_1]$

· $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $A \in \mathcal{F}$ X r.v. $F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A)$ $E[X|A]$

<u>引理12</u>: $B_i \cap B_j = \phi, \forall i \neq j, \sum_{i=1}^{n} B_i = A$，则 $E(X|A)P(A) = \sum_{i=1}^{n} E(X|B_i)P(B_i)$

· $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ X $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ r.v. $A \in \mathcal{F}$

① 由 Tower property $\Rightarrow$ (13) $E(X|A) = E[E(X|Y, A)|A]$

② 若 A 满足例如 $A = \{Y_1 \leq 1\}, A = \{|Y_2 Y_3 - Y_4| > 2\}$ (已知 Y 后 A 是否发生确定)

则 $E[E(X|Y)|A] = E[E(X|Y, A)|A] = E(X|A)$

i.e. $A \in \sigma(Y_1, \cdots, Y_n) = \sigma(\{\omega: Y_i(\omega) \leq x\}, \forall i = 1, \cdots, n, x \in \mathbb{R})$

<u>引理16</u>: 若 $\{S_n, n \geq 1\}$ 关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为鞅，则

(a) $\forall m, n \geq 1, E(S_{m+n}|X_m, \cdots, X_1) = S_m$

(b) $E(S_n) = E(S_1), \forall n \geq 1$

Pf: (a) $E(S_{m+n}|X_m, \cdots, X_1) \overset{\text{由Tower}}{=} E[E(S_{m+n}|X_{m+n-1} \cdots X_1)|X_m \cdots X_1]$

$\overset{\text{鞅性}}{=} E[S_{m+n-1}|X_m \cdots X_1]$

$= E(S_{m+1}|X_m \cdots X_1)$

$\overset{\text{鞅性}}{=} S_m$

(b) 令 $m=1$, $E[E(S_{n+1}|X_1)] = ES_1$

作业: 1, 3, 4

7.8 鞅收敛定理 (Martingale Convergence Theorem)

<u>定理1</u>. 若 $\{S_n, n \geq 1\}$ 关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为鞅，$\sup_{n \geq 1} E(S_n^2) < M < \infty$

则 $\exists$ r.v. S s.t. $\begin{cases} \lim_{n \to \infty} S_n = S \\ E(S_n - S)^2 \to 0 \text{ as } n \to \infty \end{cases}$

定理2. Doob-Kolmogorov 不等式:

假设同定理1',则 $\forall \varepsilon>0$, $P(\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}E(S_n^2)$

例7. 条件:① $X_0, X_1, \cdots$ 不可约+常返 马氏链. S $\mathbb{P}$

② $\psi: S\to\mathbb{R}$ 有界函数且满足 $\sum_{j\in S}p_{ij}\psi(j)=\psi(i)$, $\forall i\in S$

结论: ① $\{S_n=\psi(X_n)\}$ 关于 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为鞅

$ES_n^2\le M<\infty$ (ψ有界)

② 分析: $\exists$ r.v. Y s.t. $\begin{cases} S_n\to Y \text{ a.s.} \\ E(S_n-Y)^2\to 0\end{cases}$ as $n\to\infty$

由不可约+常返 $\xRightarrow{6.15.5+6.15.6}$ $\forall i\in S$, X_n 依概率1经过 i 无穷多次

$n_1(\omega)<n_2(\omega)<\cdots<n_k(\omega)<\cdots$ $\quad X_{n_k(\omega)}(\omega)=i$

$\Rightarrow S_{n_k(\omega)}(\omega)=\psi(X_{n_k(\omega)}(\omega))\equiv\psi(i)$

$\Rightarrow S_{n_k(\omega)}(\omega)\to Y(\omega)=\psi(i)$

$\therefore S_n\xrightarrow{a.s.}\psi(i)$, $\forall i\in S$ $\quad\therefore \psi$只能是常数

7.8 鞅收敛定理.

① Thm1. 若 $\{S_n, n\ge1\}$ 为关于 $\{X_n, n\ge1\}$ 的鞅. $\sup_{n\ge1}E(S_n^2)<M<\infty$.

则 $\exists$ r.v. S s.t. $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}S_n=S. & P.a.s \\ \lim_{n\to\infty}E(S_n-S)^2=0.\end{cases}$

② Thm2. Doob-Kolmogorov 不等式.

pf: ☆ $\Omega=\underbrace{\{\max_{1\le i\le k}|S_i|<\varepsilon\}}_{A_k}\cup\{\max_{1\le i\le k}|S_i|\ge\varepsilon\}$.

$=\bigcup_{j=1}^{k}\{\max_{1\le i\le j-1}|S_i|<\varepsilon, |S_j|\ge\varepsilon\}$.

$\triangleq\bigcup_{j=1}^{k}B_j$.

$\Rightarrow\Omega=A_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{k}B_j\}$. 而 $A_k\cap B_j=\phi$. $B_i\cap B_j=\phi$. $(\forall i\ne j)$.

☆(3). $E(S_n^2)=E(S_n^2\cdot I_\Omega)=\sum_{j=1}^{n}E(S_n^2 I_{B_j})+E(S_n^2 I_{A_k})$.

$\ge\sum_{j=1}^{n}E(S_n^2 I_{B_j})$.

$E(S_n^2 I_{B_j}) = E[(S_n - S_j + S_j)^2 I_{B_j}]$

$= E[(S_n-S_j)^2 I_{B_j}] + 2E[(S_n-S_j)S_j I_{B_j}] + E(S_j^2 I_{B_j})$

$= \alpha + \beta + \gamma$

① $\alpha \geq 0$. ② $\gamma \geq \varepsilon^2 P(B_j)$.

③ β. $E[(S_n-S_j)S_j I_{B_j}] = E[E[(S_n-S_j)S_j I_{B_j} | X_j, \cdots, X_1]]$

$= E[S_j I_{B_j} E[S_n - S_j | X_j \cdots X_1]]$

$= 0$. 　$\overset{\shortparallel}{0}$. 7.7.16a.

Pf (1). ①. $E(S_n^2) \uparrow \xRightarrow{\text{a.s.}} \exists M' < \infty$. s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} ES_n^2 = M'$ #.

(4). $\forall m, n \geq 1$. $ES_{m+n}^2 = E(S_{m+n} - S_m + S_m)^2$

$= ES_m^2 + \underset{\geq 0}{E(S_{m+n} - S_m)^2} + 2E[S_m(S_{m+n} - S_m)]$.　$\overset{\shortparallel}{0}$. (7.7.16).

$\geq ES_m^2$

②令 $C = \{w \in \Omega: \{S_n(w), n \geq 1\}$ 为柯西列$\}$.

若 $P(C)=1$. 定义 $S(w) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n(w). & w \in C. \\ 0. & w \notin C. \end{cases}$

?

注 $P(|S|=\infty)$ 可能大于0.

$\therefore P(C^c) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} P(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \leq \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varlimsup\limits_{m\to\infty} P(A_m(\varepsilon))$. #.

③. 证明. $P(C) = 1$. #.

$C = \{w \in \Omega: \forall \varepsilon > 0. \exists m(w,\varepsilon) > 0. \forall m > m(w,\varepsilon)$ 有 $|S_{m+i}(w) - S_m(w)| < \varepsilon\}$.

$= \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \{\forall i \geq 1, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon\}$.

$= \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \{\exists i \geq 1, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon\}$.

令 $Y_n = S_{m+n} - S_m$.

(M2). $E[Y_{n+1} | Y_n, \cdots, Y_1] \overset{\text{(M)}}{=} E[E[Y_{n+1} | X_1 \cdots X_{m+n}] | Y_1 \cdots Y_n]$

$= E[Y_n | Y_1 \cdots Y_n] = Y_n$.

(M1) $E|Y_n| \leq E|S_{m+n}| + E|S_m| < \infty$.

$\therefore Y$ 关于 自身 为鞅.

对Y用Thm2.

$$P(\sup_{1\le i\le n}|Y_i|\ge\varepsilon)=P(\exists i,1\le i\le n,|S_{m+i}-S_m|\ge\varepsilon).$$

令 $n\to\infty$. $P(A_m(\varepsilon))\le\frac{1}{\varepsilon^2}(M'-ES_m^2)$.

令 $m\to+\infty$. $\lim_{m\to\infty}P(A_m(\varepsilon))=0$ #.

④.最后. $E(S_n-S)^2\to0$.

$$\lim_{n\to\infty}E(S_n-S)^2=E[\lim_{m\to\infty}(S_n-S_m)^2].$$

$$\text{(Fatou)}\ \le\lim_{m\to\infty}E(S_n-S_m)^2=\lim_{m\to\infty}[ES_m^2-ES_n^2]=\lim_{n\to\infty}M'-ES_n^2=0\ \#.$$

注: $E(S_{m+n}-S_m)^2=ES_{m+n}^2-2ES_{m+n}\cdot S_m+ES_m^2$

$=ES_{m+n}^2-2E[(S_{m+n}-S_m+S_m)S_m]+ES_m^2$

$=ES_{m+n}^2-ES_m^2$ #.

作业. 1, 2

7.9. 条件期望—预测.

①预测: 1. 已知. $X/X_1\cdots X_n/\{X_t, t\in[0,T]\}$ 的条件下. 如何预测Y.

i.e. 从 - - - - - - - - - - - - 尽可能多得Y的信息.

2. 寻找 $h(X)\triangleq\hat{Y}$. ~"estimator" of Y.

~ $\hat{Y}$ 与 Y 在某种规则下最近.

3. "近/好"原则.

(1) $\|V\|_2=\sqrt{EV^2}$.

(2) $\|U-V\|_2=\sqrt{E(U-V)^2}$

(3) $\|U_n-V\|_2\to0$. 记 $U_n\xrightarrow{m.s}U$.

m.s: mean square.

(4). $\|\cdot\|_2$ ~ L_2 norm.

$\sim\|U+V\|_2\le\|V\|_2+\|U\|_2$. #

· 定义5. $(\Omega,\mathcal{F},P)$. r.v. X,Y. $EY^2<\infty$.

若 $\hat{Y}=h(X)$ 满足 $\|\hat{Y}-Y\|_2$ 最小. 则称 $\hat{Y}$ 为给定 X 条件下关于 Y 的最小均方误差预测.

注. $\hat{Y}$ 存在唯一性:

令 $\mathcal{H}=\{h(X): h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\ E[h^2(X)]<\infty\}$.

则 ①. $\mathcal{H}$ 为线性空间.

②. 闭的.

$\therefore (\mathcal{H},\|\cdot\|_2)$ 为闭的线性空间.

作业 7.9.6(a).

定理9. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $(\mathcal{H},\|\cdot\|_2)$ ~ 闭线性空间

r.v. Y: $E|Y|<\infty$ 且 $E(Y-EY)^2<\infty$

则 ① $\exists\ \hat{Y}\in\mathcal{H}$ s.t. 存在性

(10) $\|Y-\hat{Y}\|_2\le\|Y-Z\|,\ \forall Z\in\mathcal{H}$

② 若 $\tilde{Y}\in\mathcal{H}$ s.t. $\|Y-\hat{Y}\|_2=\|Y-\tilde{Y}\|_2$, 则 $P(\hat{Y}=\tilde{Y})=1$ 唯一性

证: 记 $d=\inf\{\|Y-Z\|_2: Z\in\mathcal{H}\}$

则 $\exists\ Z_1,Z_2,\cdots\in\mathcal{H}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}\|Y-Z_n\|_2=d$

$\triangle$ $A,B\in\mathcal{H}\Rightarrow\frac{1}{2}(A+B)\in\mathcal{H}$

(11) $\|A-B\|_2^2=2\left(\|Y-A\|_2^2-2\|Y-\frac{1}{2}(A+B)\|_2^2+\|Y-B\|_2^2\right)$

$\therefore \|Z_n-Z_m\|_2^2=2\left(\|Y-Z_n\|_2^2-2\|Y-\frac{1}{2}(Z_n+Z_m)\|_2^2+\|Y-Z_m\|_2^2\right)$

$\le 2\left(\|Y-Z_n\|_2^2-2d^2+\|Y-Z_m\|_2^2\right)$

$\longrightarrow 0$ as $m,n\to\infty$

$\therefore \{Z_n\}$ 为 $(\mathcal{H},\|\cdot\|_2)$ 中柯西列

$\overset{H闭}{\Longrightarrow} \exists \hat{Y}\in H$ s.t. $Z_n \xrightarrow{m.s.} \hat{Y}$

$\therefore d \le \|Y-\hat{Y}\|_2 \le \|Y-Z_n\|_2 + \|Z_n-\hat{Y}\|_2 \longrightarrow d$ as $n\to\infty$

$\Rightarrow \|Y-\hat{Y}\|_2 = d$

再证唯一性:

假若 $\tilde{Y}\in H$ s.t. $\|Y-\tilde{Y}\|_2 = d$

由(11), $A=\tilde{Y}$, $B=\hat{Y}$, 有

$$\|\tilde{Y}-\hat{Y}\|_2^2 = 2\Big(\underbrace{\|Y-\tilde{Y}\|_2^2}_{=d^2} - 2\underbrace{\|Y-\tfrac{1}{2}(\tilde{Y}+\hat{Y})\|_2^2}_{\ge d^2} + \underbrace{\|Y-\hat{Y}\|_2^2}_{=d^2}\Big) \le 0$$

$\Rightarrow \|\tilde{Y}-\hat{Y}\|_2^2 = 0 \quad \therefore P(\tilde{Y}=\hat{Y})=1$

(13)例. $X_1, X_2, \cdots$ r.v. $EX_i=0$, $EX_i^2=1$, $EX_iX_j=0$, $\forall i\ne j$ (标准白噪声)

在 $H \triangleq \{\sum_i a_iX_i : a_i\in\mathbb{R}\}$ 中寻找 Y 的最小均方误差预测.

i.e. $E(Y-\sum_i a_iX_i)^2 = EY^2 - 2\sum_i a_iEX_iY + \sum_i a_i^2$

$$= EY^2 + \sum_i [a_i - EX_iY]^2 - \sum_i (EX_iY)^2$$

$\therefore a_i = EX_iY$

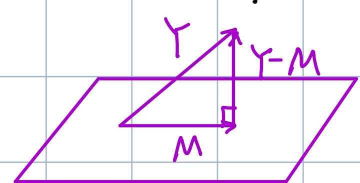
$\hat{Y} \triangleq \sum_i X_i E[X_iY]$

直观上,把 X_i 看成 H 的一族标准正交基, $\hat{Y}$ 为 Y 在 H 中的投影

14. 投影定理: $(H, \|\cdot\|_2)$ 闭的线性空间, $Y: EY^2<\infty$, $M\in H$

(15) $\|Y-M\|_2 \le \|Y-Z\|_2$, $\forall Z\in H$

(16) $E[(Y-M)Z]=0$, $\forall Z\in H$



(15) $\Leftrightarrow$ (16).

Pf: (16) $\Rightarrow$ (15):

$E(Y-Z)^2 = E(Y-M+M-Z)^2$

$= E(Y-M)^2 + 2E[(Y-M)(\underbrace{M-Z}_{\in H})] + E(M-Z)^2$

$$= E(Y-M)^2 + E(M-Z)^2$$
$$\geq E(Y-M)^2$$

(15) $\Rightarrow$ (16):

反证：假若 $\exists Z \in \mathcal{H}$, s.t. $E[(Y-M)Z] \neq 0$

不妨设 $E[(Y-M)Z] = d > 0$ 且 $EZ^2 = 1$

定义 $M' = M + dZ \in \mathcal{H}$

$$E(Y-M')^2 = E(Y-M+M-M')^2$$
$$= E(Y-M)^2 + 2E[(Y-M)\underbrace{(M-M')}_{=-dZ}] + E(M-M')^2$$
$$= E(Y-M)^2 - 2d\underbrace{E[(Y-M)Z]}_{=d} + d^2\underbrace{EZ^2}_{=1}$$
$$= E(Y-M)^2 - d^2 \quad \text{矛盾!}$$

<u>定理17</u>：$X, Y \sim$ r.v. $EY^2 < \infty$

$H \triangleq \{h(X): h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E[h^2(X)] < \infty\} \sim \|\cdot\|_2$ 闭线性空间

则 $E[Y|X]$ 为给定 X 后 Y 的<u>最好预测</u>.

i.e. $h(X) = E[Y|X] \in H$

$\forall Z \in H, \|Y - h(X)\|_2 \leq \|Y - Z\|_2$

$h(x)$ 在概率意义下唯一

Pf. ① $h(X) \in H$:

$$E[h^2(X)] = E[|E[Y|X]|^2] \overset{C\text{-}S}{\leq} E[E[Y^2|X]] = EY^2 < \infty$$

② $\forall Z \in H, Z = \psi(X)$

$$E[(Y-h(X))Z] = E[YZ] - E[h(X)Z]$$
$$= E[YZ] - E[E[Y|X]\psi(X)]$$
$$= E[YZ] - E[E[Y\psi(X)|X]]$$
$$= E[YZ] - E[Y\psi(X)]$$
$$= 0$$

注：由(17)～$E(Y|X)$定义

① 对 $\forall X, Y$ r.v. 且 $EY^2<\infty \Rightarrow E[Y|X]$（不管 X, Y 是否连续 r.v.）

② 推广定义 $E[Y|\mathcal{F}]$

<u>推广1</u>：令 $X=\{X_i, i\in I\}$，$\bar{H}=\{\varphi(X): E\varphi^2(X)<\infty\}$

若 $EY^2<\infty$，则 $E[Y|X_i, i\in I]=\psi(X)\triangleq M\in\bar{H}$ s.t. $\|Y-M\|_2$ 最小

由(17) $\psi(X)$：$E[(Y-\psi(X))Z]=0$，$\forall Z\in\bar{H}$

由(14)唯一性：若 $N\in\bar{H}$，$\|Y-N\|_2=\|Y-\psi(X)\|_2$，则 $P(\psi(X)=N)=1$

<u>推广2</u>：$E[Y|\mathcal{G}]$：

$(\Omega,\mathcal{F},P)$　$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 子 σ-代数

给定 $Y:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$　$EY^2<\infty$

$\longrightarrow$ Z关于 $\mathcal{G}$ 可测

$H\triangleq\{$r.v. Z : $EZ^2<\infty$, $\forall a\in\mathbb{R}, \{Z\le a\}\in\mathcal{G}\}$

H 关于 $\|\cdot\|_2$ 闭线性子空间.

由定理9，$\exists!\, M\in H$, s.t. $\forall Z\in H$, $\|Y-M\|_2\le\|Y-Z\|_2$

定义 $E[Y|\mathcal{G}]\triangleq M$.

推广1 $\longleftrightarrow$ 推广2：令 $\mathcal{G}=\sigma(X_i, i\in I)$，则 $E(Y|X_i, i\in I)=E(Y|\mathcal{G})$

$\sigma(X_i, i\in I)\triangleq\sigma(\{X_i\le a\}, \forall a\in\mathbb{R}, \forall i\in I)$

<u>定义</u>：$(\Omega,\mathcal{F},P)$　r.v. Y　$EY^2<\infty$　Y 关于 $\mathcal{F}$ 可测　$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 子 σ-代数

满足如下条件的 r.v. M

① M 关于 $\mathcal{G}$ 可测 $(M\in\mathcal{G})$

(21) ② $\forall Z\in H$（推广2中的 H），$E[(Y-M)Z]=0$

则称 M 为给 $\mathcal{G}$ 后关于 Y 的条件期望，记 $E[Y|\mathcal{G}]$，i.e. $M=E[Y|\mathcal{G}]$

(21) $\Leftrightarrow$ (22)：$\forall G\in\mathcal{G}$，$E[(Y-M)1_G]=0$

(24) Doob's Martingale

令 Y ~ r.v.　$EY^2<\infty$，$X_1, X_2, \cdots$ r.v.

$Y_n = E[Y|X_1,\cdots,X_n]$，则$\{Y_n\}$关于$\{X_n\}$为鞅.

Pf. 要证 $\begin{cases} E|Y_n|<\infty \\ E[Y_{n+1}|X_n\cdots X_1] = Y_n \end{cases}$

· $EY_n^2 = E[(E[Y|X_n\cdots X_1])^2] \le E[E[Y^2|X_n\cdots X_1]] = EY^2 < \infty$

$\Rightarrow E|Y_n|<\infty$

· Y_n为Y_{n+1}关于$X_n\cdots X_1$的条件期望.

由条件期望的定义，记 $H_n \triangleq \{\varphi(X_1,\cdots,X_n)$ 且 $E\varphi^2(X_1\cdots X_n)<\infty\}$

$= \{$关于$\sigma(X_1,\cdots X_n)$可测函数全体，二阶矩有限$\}$

Y_n为Y在H_n中的投影　$Y-Y_n \perp H_n$　i.e. $\forall Z\in H_n, E[(Y-Y_n)Z]=0$

Y_{n+1}为Y在H_{n+1}中的投影　i.e. $\forall Z\in H_{n+1}, E[(Y-Y_{n+1})Z]=0$

只须证明：$\begin{cases} Y_n\in H_n \quad (\Leftarrow Y_n = E[Y|X_n\cdots X_1] \text{及} EY_n^2<\infty) \\ \forall Z\in H_n, E[(Y_{n+1}-Y_n)Z]=0 \end{cases}$

$Z\in H_n\subset H_{n+1}$, $E[(Y_{n+1}-Y_n)Z] = E[(Y_{n+1}-Y)Z] + E[(Y-Y_n)Z] = 0$

· Doob's Martingale 一般形式 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $Y\sim$ r.v. $EY^2<\infty$

$\{\mathcal{G}_n, n\ge1\}$ 一列σ-代数，$\mathcal{G}_n\subset\mathcal{G}_{n+1}\subset\mathcal{F}$ $\longrightarrow$ filtration

定义 $Y_n = E[Y|\mathcal{G}_n]$，则 $E|Y_n|<\infty$, $E[Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] = Y_n$

· 注：例(24)中，$\mathcal{G}_n$取$\sigma(X_1,\cdots,X_n)$

· 若$\{Z_n,\mathcal{G}_n\}_{n\ge0}$满足 $\begin{cases} E|Z_n|<\infty \\ E[Z_{n+1}|\mathcal{G}_n] = Z_n \end{cases}$

则称$\{Z_n, n\ge0\}$关于$\{\mathcal{G}_n, n\ge0\}$为鞅.

· 条件可弱化：$\|Y\|_2<\infty$ 改为 $E|Y|<\infty$

定理26：$(\Omega,\mathcal{F},P)$ r.v. Y $E|Y|<\infty$ $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 子σ-代数

则 $\exists!$ r.v. Z (a) $Z\in\mathcal{G}$

(b) $E|Z|<\infty$

(c) $\forall G\in\mathcal{G}$, $E[(Y-Z)1_G]=0$

定义 $Z \triangleq E[Y|\mathcal{G}]$

·注：①若 $Y \geq 0$，则 $E(Y|\mathcal{G}) \geq 0$

②若 $EY^+ < \infty$ 或 $EY^- < \infty$ $\xRightarrow{\text{定义}}$ $E[Y|\mathcal{G}]$

作业：1, 4, 6(b)

$= \exp(\theta B_{t_n} - \ldots)$.

2019.5.23

☆ 定义连续时间鞅.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \mathbb{F}$

· $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, ① $Y_t \in \mathcal{F}_t$

"$(\mathcal{F}_t)$-鞅" ② $E|Y_t| < \infty$

③ $E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = Y_s$, $t \geq s$

· 若 Y_t 关于 t 连续且 $EY_t^2 < \infty$, 则称为平方可积连续鞅.

⑤ 鞅性: 记 $\sigma\{B_t, 0\leq t\leq s\} = \mathcal{F}_s$

则 ① B 关于 $\{\mathcal{F}_t, 0\leq t\leq s\}$ 为鞅.

② $\{B_t^2 - t, t\geq 0\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ 为鞅.

③ $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\{\exp[\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t], t\geq 0\}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 为鞅

④ $f \in C^2(\mathbb{R})$, 且 $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 有界,

则 $\{f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\,ds, t\geq 0\}$

关于 $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ 为鞅

[pf]: (1) · $E|B_t|^2 = t < \infty \Rightarrow E|B_t| < \infty$

· $B_t \in \mathcal{F}_t$

· $\forall\, t \ge s$, $E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] \overset{独立性}{=} E[B_t - B_s] = 0$.

(2) 马氏性: ~~$E B_t$~~ $E[h(B_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[h(B_t) \mid B_s]$

$\forall\, t \ge s$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "有界可测".

[pf]: $E[h(\underbrace{B_t - B_s}_{独立} + B_s) \mid \mathcal{F}_s] = g(B_s) \in \sigma(B_s)$. #

其中: ~~g~~ $g(x) = E[h(B_t - B_s + x)]$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}\right] du.$$

(3) 轨道性质: $(B_t)_{t\ge 0}$ 为标准BM, 固定t, $[0,t]$ 2^n等分.

记 $\Delta_{m,n} := B\left(\frac{mt}{2^n}\right) - B\left(\frac{(m-1)t}{2^n}\right)$.

证明: $E\left(\sum_{m\le 2^n} (\Delta_{m,n})^2 - t\right)^2 \longrightarrow 0$, as $n \to \infty$

再用 B-C 引理 证明: $\sum_{m \le 2^n} (\Delta_{m,n})^2 \longrightarrow t$, a.s

[pf]: ① $\Delta_{m,n} \overset{d}{=} N\left(0, \frac{t}{2^n}\right) \Rightarrow E\Delta_{m,n}^2 = \frac{t}{2^n}$.

② $\Delta_{m,n} - \frac{t}{2^n} \perp \Delta_{k,n} - \frac{t}{2^n}$

从而: $E\left(\sum_{m\le 2^n} \Delta_{m,n}^2 - t\right)^2$

$= Var\left(\sum_{m\le 2^n} \Delta_{m,n}^2 - t\right)$

$= \sum_{m\le 2^n} Var\left(\Delta_{m,n}^2 - \frac{t}{2^n}\right) = \underbrace{Var(\Delta_{m,n}^2)}$

~~$= \sum_{m\le 2^n} E\left(\Delta_{m,n}^2 - \frac{t}{2^n}\right)^2 - \left(E\Delta_{m,n}^2\right)^2$~~

$= \sum_{m\le 2^n} \left(\frac{t}{2^n}\right)^2 Var(\chi_1^2)$

$= 2t^2/2^n \longrightarrow 0$. as $n \to \infty$.

证明：④ B-C引理：

记 $A_n = \left\{ w : \left| \sum_{m \le 2^n} \Delta_{m,n}^2 - t \right| \ge \frac{1}{n} \right\}$

$P(A_n) \le n^2 \, E\left(\sum_{m \le 2^n} \Delta_{m,n}^2 - t \right)^2 \le \frac{C \cdot n^2}{2^n}$

$\Rightarrow \sum P(A_n) < \infty$

$\Rightarrow P(A_n, i.o) = 0$ #

RMK：该结果也称为二次变差有界性.

⑤ 引理：$[0,t]$ 上 B_s 几乎处处非有界变差

i.e. $\exists \ \Omega_0$, s.t $P(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$

且 $\forall w \in \Omega_0$, $\{ B(s,w), s \in [0,t] \}$ 有界变差

[pf]：记 $\lambda_n(w) = \sup_{m \le 2^n} |\Delta_{m,n}|$.

$\because [0,t]$ 连续 $\Rightarrow$ $[0,t]$ 一致连续 $\Rightarrow$ $\lambda_n(w) \xrightarrow{a.s} 0$

$\therefore \underbrace{\sum_{m \le 2^n} \Delta_{m,n}^2(w)}_{\to t > 0} \le \underbrace{\lambda_n(w)}_{\to 0} \cdot \sum_{m \le 2^n} |\Delta_{m,n}(w)|$

作业：1, 9, 10, 12.

7. Kolmogorov 不等式

(定理) $\forall \ \gamma > 0$, $P\left(\sup_{0 \le s \le t} |B_s| \ge \gamma \right) \le t / \gamma^2$

[pf]：① 记 $Y = \left\{ Y_i = B\left(\frac{it}{2^n}\right), i = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}$

则 Y 关于 Y 为离散时间鞅

由此：$P\left(\max_{0 \le i \le 2^n} |Y_i| \ge \gamma \right) \le \frac{1}{\gamma^2} E Y_{2^n}^2$

$= \frac{t}{\gamma^2}$

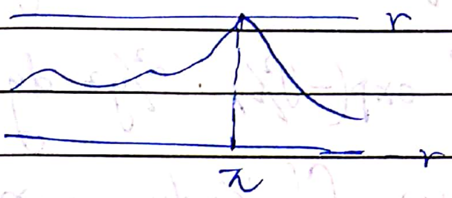
$$\lim_{n\to\infty}\{\max_{0\le i\le 2^n}|Y_i|\ge\gamma\} \supset \{\sup_{[0,t]}|Y_s|>\gamma\}.$$

~~由连续性可知.~~ $\cancel{P(\max_{0\le i\le 2^n}|Y_i|\ge\gamma)\uparrow P(\sup_{0\le s\le t}|Y_s|>\gamma)}$.

$\Rightarrow$ $P(\sup_{0\le s\le t}|Y_s|>\gamma)\le t/\gamma^2$ 。

· 为什么不直接考虑 $\{\sup|Y_s|\ge\gamma\}$?

注意:



(2): 记 $C_\varepsilon=\{\omega: \sup_{[0,t]}|X_s|>\gamma-\varepsilon\}$.

$D=\{\omega: \sup_{[0,t]}|X_s|>\gamma\}$.

$\Rightarrow$ $\bigcap_{\varepsilon\downarrow 0} C_\varepsilon = D$.

$\Rightarrow$ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}P(C_\varepsilon)=P(D)$.

$\Rightarrow$ $P(D)\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0} t/(\gamma-\varepsilon)^2 = t/\gamma^2$. #.

习题课 (2019.5.25).

$\{W_t, t\ge0\}$ 为标准BM, $a>0$ 时,

令 $\tau_a=\inf\{t: W_t\ge a\}$. 证:

(1) $P(\tau_a<\infty)=1$

(2) $E\tau_a=\infty$.

pf: (1): ☆ $P(\tau_a\le t)=2P(W_t\ge a)$.

$$P(W_t\ge a)=\underbrace{P(W_t\ge a\mid\tau_a\le t)}_{\frac12}\cdot P(\tau_a\le t) + \underbrace{P(W_t\ge a\mid\tau_a> t)}_{0}\cdot P(\tau_a>t)$$

$$= \cancel{(\tfrac12+0)}\ \tfrac12 P(\tau_a\le t).$$

(2) $E\tau_a=\int_0^\infty P(\tau_a>t)\,dt$.

$=\int_0^\infty 1-P(\tau_a\le t)\,dt$