区间估计

- 可靠度：待估参数 $g(\theta)$ 被包含在 $[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$ 内可能性大小
- 精度：由随机区间的平均长度来度量 $E_\theta[\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1]$

Neyman提出：在保证一定可靠度的前提下选择精度尽可能高的区间估计.

- $[\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X)]$ 为 θ 的一个区间估计，则 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含 θ 的概率 $P_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$ 称为此区间估计的置信水平.

  $\inf\limits_{\theta \in \Theta} P_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$ —— 置信系数.

- 枢轴变量法：

  (1) 找待估参数 θ 的一个良好估计 $T(X)$.

  ☆(2) 构造枢轴变量 $\varphi(T, \theta)$ 满足：

  (i) 表达式与 θ 有关　(ii) 分布与 θ 无关

  (3) 对给定的 $0<\alpha<1$，决定常数 a 和 b 使 $P_\theta(a \le \varphi(T,\theta) \le b) = 1-\alpha$

  (4) 解 $a \le \varphi(T, \theta) \le b \Rightarrow \hat{\theta}_1(X) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X)$

  $[\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X)]$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

· 正态总体参数的置信区间

—单个：

· $\mu \in \bar{X} \pm d$ $\quad d = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/(双侧)} & \sigma^2 已知 \\ \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/(双侧)) & \sigma^2 未知 \\ \frac{S}{\sqrt{n}} u_{\alpha/(双侧)} & \sigma^2 未知, n > 30 \end{cases}$

· $\sigma^2 \in (\frac{1}{A} S^2, \frac{1}{B} S^2)$ $\quad \begin{cases} \mu 已知： \left[\frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}, \frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(1-\alpha/2)}\right] \\ \mu 未知： \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}\right] \end{cases}$

注意这是σ^2的，若求σ的要开根号！

—两个：

· $b-a$：

$m=n$时，令$Z_i = Y_i - X_i$，$Z_i \sim N(b-a, \sigma^2)$

即为σ^2未知时$b-a$的区间估计.

$m \neq n$时，

$b-a \in \bar{X} - \bar{Y} \pm d$ $\quad d = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\, u_{\alpha/2}, & \sigma_1^2, \sigma_2^2 已知 \\ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, S_T t_{m+n-2}(\alpha/2), & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 未知 \\ \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}\, u_{\alpha/2}, & \sigma_1^2 和 \sigma_2^2 未知, m, n \geqslant 30 \end{cases}$

其中$S_T^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2\right] = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2\right]$

· σ_1^2/σ_2^2：$\left[\frac{S_a^2}{S_b^2 F_{mn}(\alpha/2)}, \frac{S_a^2}{S_b^2 F_{mn}(1-\alpha/2)}\right]$ $\quad a, b$已知

$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 F_{m-1,n-1}(\alpha/2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2 F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)}\right]$ $\quad a, b$未知

· 非正态总体置信区间

— 小样本

· 指数分布: $f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$, $\lambda > 0$.

$2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$ $\quad \lambda \in [\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)/2n\bar{X}, \chi^2_{2n}(\alpha/2)/2n\bar{X}]$

$\qquad$ 大 $\in [2n\bar{X}/\chi^2_{2n}(\alpha/2), 2n\bar{X}/\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)]$

· 均匀分布: $U(0,\theta)$

$T(X) = X_{(n)}$ 充分 $\rightarrow \frac{n+1}{n}T$ 无偏, 且 UMVUE $\rightarrow Y_{(n)} = \frac{T}{\theta}$ 分布与 θ 无关.

$\rightarrow$ 取 $Z = 1/Y_{(n)} = \theta/T$ 为枢轴变量 $\sim g(z) = nz^{-(n+1)} I_{(1,+\infty)}(z)$

$\theta \in [T, T/\sqrt[n]{\alpha}]$

— 大样本

· Cauchy 分布: /

· 二项分布: $b(1,p)$ $\quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

· Poisson 分布: $P(\lambda)$ $\quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

参数假设检验

不能轻易否定　　不能轻易肯定

- 原假设与对立假设：久经考验的放原假设，把你需要的结论放在对立假设（希望通过否定 H_0 来得到）想要的）
- 检验函数 $\varphi(x)$，$X\to[0,1]$，$x\mapsto\begin{cases}1, & x\in D\\ 0, & x\notin D\end{cases}$ 非随机化检验

  或 $x\mapsto\begin{cases}1, & T(x)>c\\ r, & T(x)=c\\ 0, & T(x)<c\end{cases}$ 随机化检验

  它表示当有了样本 x 后，否定 H_0 的概率。
- 第一类错误：弃真（本来 H_0 对的，但由于样本随机性，观察值…）

  第二类错误：取伪
- 功效函数 $\beta_\varphi(\theta)=P_\theta$（用检验 φ 否定了 H_0）$=E_\theta[\varphi(X)]$，$\theta\in\Theta$
- 第一类错误概率 $\alpha_\varphi^*(\theta)=\begin{cases}\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_0\\ 0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}$

  二　$\gamma_\varphi^*(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0\\ 1-\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_1\end{cases}$
- Neyman-Pearson 原则：在保证犯第一类错误概率不超过 α 的检验中，寻找犯第二类错误概率尽可能小的检验
- 如果 φ 犯第一类错误概率总不超过 α，则称 α 是检验 φ 的一个水平，而 φ 称为显著性水平为 α 的检验。

  检验的真实水平：检验的最小水平，为 $\sup\{\beta_\varphi\theta,\ \theta\in\Theta_0\}$

（接右边）大样本：σ_1^2,σ_2^2 未知，$m,n>>1$，$U^*=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{S_1^2/m+S_2^2/n}}\xrightarrow{L}N(0,1)$

$m,n\sim 1$，$T_*=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{S_1^2/m+S_2^2/n}}\sim t_r$

· 正态总体参数的假设检验

一单个

· μ

σ^2已知 $U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0,1)$

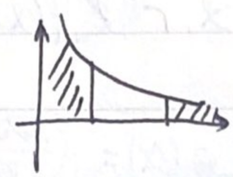
σ^2未知 $T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\sim t_{n-1}$

· σ^2

μ已知 $\chi_\mu^2=\frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2}\sim\chi_n^2$

μ未知 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi_{n-1}^2$

H_0	H_1	否定
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert>u_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U>u_\alpha$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$U<-u_\alpha$
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert T\rvert>t_{n-1}(\alpha/2)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T>t_{n-1}(\alpha)$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T<t_{n-1}(\alpha)$



一两个

· $\mu_2-\mu_1$

σ_1^2,σ_2^2均已知 $U=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知 $T=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t_{m+n-2}$

$m=n$时 成对比较. 令 $Z_i=Y_i-X_i$ 化为单个.

条件: $m=n$ + $X_1,\cdots,X_n$ 并不来自同一总体; (X_i,Y_i)中X_i与Y_i不独立.
$Y_1,\cdots,Y_n$ 也不来自同一总体

· σ_2^2/σ_1^2

μ_1,μ_2已知 $F=\frac{S_{\mu_2}^2}{S_{\mu_1}^2}\Big|_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\sim F_{n,m}$

μ_1,μ_2未知 $F=\frac{S_2^2}{S_1^2}\Big|_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\sim F_{n-1,m-1}$

例5.2.6 p187

似然比检验

- 似然比 $\lambda(x)=\sup_{\theta\in\Theta} f(x,\theta)\Big/\sup_{\theta\in\Theta_0} f(x,\theta)$
- 似然比检验 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(x)>c\\ r & \lambda(x)=c\\ 0 & \lambda(x)<c\end{cases}$，$c, r\ (0\le r\le 1)$ 选择要使检验具有水平 α，即 $E_\theta[\varphi(x)]\le\alpha,\ \forall\theta\in\Theta_0$
- 步骤：1. 求似然函数 $f(x,\theta)$ 并明确 Θ, Θ_0
  2. 分别计算 $L_\Theta(x)=\sup_{\theta\in\Theta} f(x,\theta)$ 和 $L_{\Theta_0}(x)$
  3. 求出 $\lambda(x)$ 或与其等价的统计量的分布
  4. 确定 c, r 使 $\varphi(x)$ 有给定的检验水平 α.（连续则 $r=0$）

- 正态 $N(\mu,\sigma^2)$ $L_\Theta(x)=\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\right)^{-\frac{n}{2}}$
- 例 5.3.3

- $X\sim Exp(\lambda)\Rightarrow T=\sum_{i=1}^r X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}$
  有 $2\lambda T\sim\chi^2_{2r}$

一致最优检验

- 对检验问题 $H_0: \theta\in\Theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta\in\Theta_1$，令 $0<\alpha<1$。
  记 Φ_α 为其一切水平为 α 的检验的集合。
  若 $\varphi\in\Phi_\alpha$ 满足对任何 $\varphi_1\in\Phi_\alpha$，有 $\beta_\varphi(\theta)\geq\beta_{\varphi_1}(\theta)$，$\theta\in\Theta_1$，
  则称 φ 为该检验问题一个水平为 α 的一致最优检验 UMPT
- Neyman-Pearson 引理：
  $H_0: \theta=\theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta=\theta_1$，则对 $\forall 0<\alpha<1$，有
  (1) 存在性. 对检验问题必存在一个检验函数 $\varphi(x)$ 及非负常数 c 和 $0\leq r\leq 1$，满足：

(i) $$\varphi(x)=\begin{cases}1 & f(x,\theta_1)/f(x,\theta_0)>c\\ r & f(x,\theta_1)/f(x,\theta_0)=c\\ 0 & f(x,\theta_1)/f(x,\theta_0)<c\end{cases}$$

(ii) $E_{\theta_0}[\varphi(X)]=\alpha$

(2) 一致最优性. 上述 $\varphi(x)$ 为 UMPT.

注：连续分布时 $r=0$，$E_{\theta_0}[\varphi(X)]=P(f(x,\theta_1)/f(x,\theta_0)>c\mid H_0)=\alpha$.

- 设 $f(x,\theta)=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$，$\Theta\subset(-\infty,+\infty)$ 为一区间.
  检验问题 $H_0: \theta\leq\theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta>\theta_0$
  θ_0 是 Θ 的一个内点，$Q(\theta)$ 为 θ 的严格增函数，则检验问题的一个水平为 α 的 UMPT 为 $$\varphi(x)=\begin{cases}1 & T(x)>c\\ r & T(x)=c\\ 0 & T(x)<c\end{cases}$$

  其中 c 和 $r\ (0\leq r\leq 1)$ 满足 $E_{\theta_0}[\varphi(X)]=P_{\theta_0}(T(X)>c)+rP_{\theta_0}(T(X)=c)=\alpha$

H_0, H_1 均复合

→ 写 $f(x,\theta)$，若为指数族，直接写出 UMPT，否则
写 $\lambda(x)=f(x,\theta_1)/f(x,\theta_0)$ 算 $\lambda(x)$ 或等价 T 的分布
$\varphi(x)=\begin{cases}\cdots\end{cases}$ 由 $E_{\theta_0}(\varphi(X))=\alpha$ 定 r 和 c.

若 $\varphi(x)$ 与 θ_1 无关，则 H_1 可为复合假设

※ H_0 复合，则需算功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$，证明 $\theta\in\Theta_0$ 时 $\beta_\varphi(\theta)\leq\alpha$.

非参数假设检验

*符号检验

1.小样本方法.

$H_0: \theta=\frac{1}{2} \longleftrightarrow H_1: \theta\neq\frac{1}{2}$

否定域 $\{X=n_+\geq c$ 或 $X\leq d\}$

$\sum_{i=c}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\frac{\alpha}{2}$, $d=n-c\longrightarrow$ 查表

2.大样本方法

否定域 $\{X: |U|>U_{\alpha/2}\}$, $U=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}=\frac{X-n/2}{\sqrt{n/4}}=\frac{2X-n}{\sqrt{n}}$

注:都可通过算 p 值.

---

*符号秩和检验

- 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为两两不相等的一组样本,将其按大小排列为 $X_{(1)}<\cdots<X_{(n)}$,若 $X_i=X_{(R_i)}$,则称 X_i 在样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 中秩为 R_i.
- $R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$ 或由 R 导出的统计量称为 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的秩统计量.
- 基于秩统计量的检验方法称为秩检验.

1.小样本方法

W^+ 为符号为"+"的对应秩之和,称符号秩和.

$W^+=\sum_{i=1}^{n}V_iR_i$, $V_i=\begin{cases}1, & Z_i>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ R_i 为 $|Z_i|$ 在 $(|Z_1|,\cdots,|Z_n|)$ 中秩

Wilcoxon符号秩和检验统计量

$Z_i=X_i-Y_i$.

否定域 $\{W^+\leq d$ 或 $W^+\geq c\}$

$P(W^+\geq c|H_0)\leq\alpha/2\longrightarrow$ 查表得 c , $d=\frac{n(n+1)}{2}-c$

Wilcoxon双侧符号秩和检验(双侧 W^+ 检验)

2、大样本方法

$$EW^+ = \frac{1}{4}n(n+1) \quad DW^+ = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)$$

$$W_*^+ = \frac{W^+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

*Wilcoxon两样本秩和检验 $F_2(x) = F_1(x-\theta)$

· Wilcoxon两样本秩和统计量：

设 $X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n$ 这 $m+n$ 个值两两不同，把它们按大小排列，

$Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_N$， $N = m+n$.

若 $Y_i = Z_{R_i}$，则 Y_i 在合样本 $X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n$ 中秩为 R_i

$W = R_1 + \cdots + R_n$ 称为Wilcoxon两样本秩和统计量.

· $H_0: \theta = 0 \longleftrightarrow H_1: \theta \neq 0$ 否定域 $\{W \geq c$ 或 $W \leq d\}$

c 查表，$d = n(m+n+1) - c$ [注意：我们设 $n \leq m$]

拟合优度检验

· 拟合优度：对于反映实际数据 $X_1,\cdots,X_n$ 与理论分布 F 偏差的量 $D=D(X_1,\cdots,X_n;F)$ 由具体样本算出 D 之值，记 d_0，称条件概率

$$p(d_0)=P(D\geq d_0|H_0)$$

为在选定偏离指标 D 之下，样本与理论分布的拟合优度.

· 在给定检验水平 $0<\alpha<1$ 后，根据拟合优度给出检验问题

$$H_0: \text{r.v. } X \text{ 的分布为 } F$$

的一个检验如下：当 $p(d_0)<\alpha$ 时否定 H_0，否则接受 H_0.
拟合优度越大，则接受 H_0 的结论越可靠。这种类型的检验称为拟合优度检验.

· Pearson χ^2 检验

— F 完全已知：

① $F:\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{pmatrix}$ 即 $H_0: P(X=a_i)=p_i,\ i=1,2,\cdots,r$

ν_i 频数 np_i 理论频数 $K_n=\sum_{i=1}^{r}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}$

· K. Pearson：在 H_0 成立条件下，$K_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{r-1}$

于是，当 $K_n>\chi^2_{r-1}(\alpha)$ 时否定 H_0.

拟合优度 $p(k_0)=P(K_n\geq k_0|H_0)\approx P(\chi^2_{r-1}\geq k_0)$

② F 为有可数个取值的离散型或连续型.

(i) 划分：$a_0=-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}<+\infty=a_r$

[np_i 和 ν_i 都不应低于 5]

[$a_1,\cdots,a_r$ 不能依赖于样本，应事先定好]

$I_1=(-\infty,a_1)\ I_2=[a_1,a_2),\cdots,I_r=[a_{r-1},+\infty)$

(ii) $p_j=P_F(X\in I_j)=F(a_j)-F(a_{j-1})$

从而问题转化为H_0: $P(X\in I_j)=p_j$, $j=1,2,\cdots,r$

(iii) 同①

一F带有未知参数

H_0:存在$\theta_0\in\Theta$,使X的分布为$F(x;\theta)$ [θ可能多维].

(i) 先用MLE估计θ,则只需验证分布是否为$F(x;\hat{\theta})$

(ii) 划分并算$\hat{p}_j$.

(iii) $$\hat{K}_n^* = \sum_{j=1}^{r}\frac{(\nu_j - n\hat{p}_j^*)^2}{n\hat{p}_j^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{\underset{\text{划分区间数}}{r}-1-\overset{\text{未知参数个数}}{s}}$$

(iv) $p(\hat{K}_0^*)=P(\hat{K}_n^*\geq\hat{K}_0^*|H_0)\approx P(\chi^2_{r-1-s}\geq\hat{K}_0^*)$

列联表

·独立性 H_0: $X^{(1)}$和$X^{(2)}$独立 等价 $H_0: P(X^{(1)}=i, X^{(2)}=j) = P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

$$K_n^* = n\left(\sum_{i,j}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

行 列

·齐一性 H_0: r个工厂产品质量齐一

化为 $H_0: p_1(j) = p_2(j) = \cdots = p_r(j)$, $j=1,2,\cdots,s$

—分布已知 $K_n = \sum_{i,j}\frac{(n_{ij} - n_{i\cdot}p_j^0)^2}{n_{i\cdot}p_j^0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{(s-1)r}$

—分布未知 $K_n^* = n\left(\sum_{i,j}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$