习题课讲义WEEK V

郑宇

Part I

作业参考答案

1 第三周作业参考答案

1.1 习题9.1

10.设$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求$f(1,1),f(y,x),f(1,\frac{y}{x}),f(u,v),f(cos\,t,sin\,t)$.

$$f(1,1)=1,f(y,x)=f(1,\frac{y}{x})=f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$
$$f(u,v)=\frac{2uv}{u^2+v^2},f(cos\,t,sin\,t)=2sin\,tcos\,t=sin2t$$

13.设$f(x,y)=x^y,\varphi(x,y)=x+y,\psi(x,y)=x-y$，求$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)],\varphi[f(x,y),\psi(x,y)],$
$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]$.

$$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=(x+y)^{x-y},$$
$$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)]=x^y+x-y,$$
$$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]=x+y-x^y$$

14.判断下列各函数极限是否存在，若有极限，求出其极限:

$$(1)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|};\qquad(3)\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2};$$
$$(5)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2};\qquad(7)\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)};$$
$$(9)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}.$$

(1)利用$x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2$即可

(3)利用$2xy\leqslant x^2+y^2$即可

(5)利用$x^3+y^3\leqslant(|x|+|y|)(x^2+y^2)$即可
(7)利用$x^2+y^2\leqslant(x+y)^2$，再令$z=x+y$，原极限化为$\lim\limits_{z\to+\infty} ze^{-z}$，这显然是0
(9)令$z=xy$,则原极限化为$\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\sqrt{z+1}-1}$，分母有理化后直接得到2

15.若$x=\rho\, cos\,\varphi$，问沿怎样的方向$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，下列极限存在.

$$(1)\ \lim_{\rho\to 0+} e^{\frac{1}{x^2-y^2}};\qquad (2)\ \lim_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2} sin\,2xy.$$

(1)$e^{\frac{1}{x^2-y^2}}=e^{\frac{1}{\rho^2 cos\,2\varphi}}$，为了极限存在，必须且仅须$cos\,2\varphi<0$，再结合$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，解得$\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\bigcup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$

(2)$e^{x^2-y^2}sin\,2xy=e^{\rho^2 cos\,2\varphi}sin\,(\rho^2 sin\,2\varphi)$.由正弦函数的有界性，当$e^{\rho^2 cos\,2\varphi}\to 0$时，极限存在且为0，而这等价于$cos\,2\varphi<0$，解得同上题的区间.另外，如果$sin\,(\rho^2 sin\,2\varphi)=0$，则无论何时该式子均等于0，极限也便存在.而$sin\,2\varphi\in[-1,-1]$，故只能是$\rho^2 sin\,2\varphi=0$，解得$\varphi\in\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\}$.综合以上分析，$\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\bigcup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})\bigcup\{0,\pi,2\pi\}$

17.证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$沿着过此点的每一射线$x=t\,cos\,\alpha, y=t\,sin\,\alpha,(0\leqslant t<+\infty)$连续，即$\lim\limits_{t\to 0} f(t\,cos\,\alpha,t\,sin\,\alpha)=f(0,0)$.但此函数在点$(0,0)$并不连续.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t\,cos\,\alpha,t\,sin\,\alpha)&=\lim_{t\to 0}\frac{t\,cos^2\alpha sin\,\alpha}{t^2cos^4\alpha+sin^2\alpha}\\&=0=f(0,0)\end{aligned}$$

但是，当(x,y)沿曲线$y=x^2$趋于$(0,0)$时，极限为$\frac{1}{2}\neq 0$，故不在原点连续.

19.给出二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处收敛的Cauthy收敛准则完整的描述并证明之.
描述：设$f(p)$为定义在$D\in R^2$上的二元函数，p_0为D的一个聚点.极限$\lim\limits_{\substack{p\to p_0\\ p\in D}} f(p)$存在的充要条件是：对任意正数$\varepsilon$，总存在某正数$\delta$，使得对任何$p_1,p_2\in U^0(p_0,\delta)\bigcap D$，都有$|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$.
注：U右上角的0表示去掉p_0，这是很重要的，不"去心"就错了
证明：必要性：注意到$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant|f(p_1)-f(p_0)|+|f(p_0)-f(p_2)|$即可
充分性：设对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任何$p_1,p_2\in U^0(p_0,\delta)\bigcap D$，都有$|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$.现任取一个收敛于$p_0$的点列，则对上述$\delta$，存在$N>0$，使得$\forall n>N$，有$p_n\in U^0(p_0,\delta)\bigcap D$，从而$\forall m,n>N$,有$|f(p_m)-f(p_n)|<\varepsilon$.由数列的Cauchy收敛准则，$\{f(p_n)\}$收敛，不妨记为$A$.
接下来两种方法：
法一：$\forall p\in U^0(p_0,\delta)\bigcap D$，$|f(p)-A|<|f(p)-f(p_n)|+|f(p_n)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$
这里把l写成$f(p_0)$是错误的，因为不确定$f(p_0)$的情形.
法二：对于任意两个趋于p_0的点列$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，设$\lim\limits_{n\to+\infty} f(q_n)=B$.则$\{p_k 1_{\{n=2k-1\}}+$

$q_k 1_{\{n=2k\}}\}_{n=1}^{\infty}$也是收敛到$p_0$的点列，则由极限唯一性，$A=B$.从而对于任意趋于$p_0$的点列，均有$\lim\limits_{n\to+\infty} f(p_n)=A$，从而得证.

1.2 习题9.2

1.求下列各函数在指定点的偏微商:

(1)设$f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求$f'_x(3,4)$；(2)设$f(x,y)=sin\,x^2y$，求$f'_x(1,\pi)$.

(1)$f'_x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f'_x(3,4)=\frac{2}{5}$；

(2)$f'_x=2xy\,cos\,x^2y \Rightarrow f'_x(1,\pi)=-2\pi$

3.设$f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{sin\,t}{t}\,dt$，求$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

记住公式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y,t)\,dt\right)=\varphi'(x)f(x,,y,\varphi(x))-\psi'(x)f(x,y,\psi(x))+\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\,dt$$

$f_x=\frac{2xysin\,x^2y}{x^2y}=\frac{2sin\,x^2y}{x},f_y=\frac{x^2sin\,x^2y}{x^2y}=\frac{sin\,x^2y}{y}$

5.证明函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$连续但偏导数不存在.

连续性显然.

由对称性，只证对x偏导在$(0,0)$处不存在.利用定义，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+0}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$不存在即证.

注：有些同学是用$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (x^2+y^2\neq0)$在$(0,0)$点无意义来证的，这样的做法是有问题的，这样默认了偏导数是连续的，于是认为可以用0往偏导数里代. 但是考察下面这个偏导数均不连续的可微函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

易得$f'_x(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2xsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (x^2+y^2\neq0)$同时$f'_x(0,0)=0$是存在的，由此可以发现直接把0带进去说明偏导数不存在是不合理的做法.

7.求曲线$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2+1},\\ x=1\end{cases}$上点$(1,1,\sqrt{3})$处的切线分别于x轴、y轴、z轴正向的夹角.

曲线r参数化$r(y)=(1,y,\sqrt{y^2+2})$，切向量$r'(y)=(0,1,\frac{y}{\sqrt{y^2+2}})$，在点$(1,1,\sqrt{3})$，即$y=1$时，$r'(1)=(0,1,\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{2}(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(cos\,\frac{\pi}{2},cos\,\frac{\pi}{6},cos\,\frac{\pi}{3})$，故夹角分别为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$.

12.设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

证明函数的二阶偏导数存在，但所有二阶偏导数(特别是两个混合偏导数)在$(0,0)$不连续，且$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$(这个例子说明，在函数在一点分别对$x$和$y$求导的次序不能交换，其原因是不连续引起的).

各阶偏导数我懒得一个一个用$\LaTeX$ 打出来了，直接用Mathematica吧.用Mathematica直接转码过来的呈现效果不是很好，所以我直接截图了. 注意图中$f''_{xy}(0,0)$和$f''_{yx}(0,0)$是错误的，前者应为-1，后者应为1.(直接从定义可以算) 图中所有二阶偏导数都是不连续的，比如$f''xx$通过取$y=kx$逼近原点即可.

```
Simplify[D[f[x, y], x]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 2: f'_x

```
Simplify[D[f[x, y], y]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 3: f'_y

```
Simplify[D[f[x, y], x, x]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} -\frac{4xy^3\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 4: f''_{xx}

```
Simplify[D[f[x, y], x, y]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+10x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 5: f''_{xy}

```
Simplify[D[f[x, y], y, x]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+10x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 6: f''_{yx}

```
Simplify[D[f[x, y], y, y]]
化简      偏导
```

$$\begin{cases} \frac{4x^3y\left(-3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} & x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Figure 7: f''_{yy}

13.求下列函数的微分，或在给定点的微分

(1)$z = ln(x^2 + y^2)$;

(3)$u = \frac{s+t}{s-t}$;

(5)$z = sin(xy)$在点$(0,0)$.

(1)$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy$ (3)$du = \frac{-2t}{(s-t)^2}ds + \frac{2s}{(s-t)^2}dt$ (5)$dz|_{(x,y)=(0,0)} = 0$

请留意第(4)小问，它将可能对你未来算积分时候有用.

(4)$z = arctan\frac{y}{x} \Rightarrow dz = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

17.证明函数$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但偏导数在$(0,0)$不连续，而$f$在原点可微.

由正弦函数的有界性易得f在原点连续.

偏导数见第3题的红字部分.

偏导数不连续是因为趋于原点时极限不存在(比如你可以取$y = kx$逼近原点).

在原点的可微性利用定义,证明函数值之差减去其线性逼近后的余项是$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$的无穷小量.由于$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，减完后仍为$f(x,y)$，显然是$\rho$的小量.

19.求下列复合函数的偏导数或导数.

(1)设$u = e^t + arctan(t^2+1), t = x^y$，求$u_x, u_y$;

(3)设$u = ln(x^2+y^2), x = e^{t+s+r}, y = 4(s^2+t^2)$，求$u_r, u_s, u_t$.

(1)

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \left(e^t + \frac{2t}{1+(1+t^2)^2}\right)yx^{y-1} = \left(e^{x^y} + \frac{2x^y}{1+(1+x^{2y})^2}\right)yx^{y-1}$$

(3)

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2e^{2(t+s+r)}}{x^2+y^2}$$

$$u_s = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{2e^{2(t+s+r)} + 64s(s^2+t^2)}{x^2+y^2}$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2e^{2(t+s+r)} + 64t(s^2+t^2)}{x^2+y^2}$$

20.求下列复合函数的偏导数或导数，其中各题中的f均有连续的二阶偏导.

(1)设$u = f(x,y), x = t^3, y = 2t^2$，求$\frac{du}{dt}$;

(3)设$u = f(x^2-y^2, e^{xy})$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(1)

$$u_t = 3t^2 f_1 + 4t f_2$$

(3)

$$u_x = 2xf_1 + ye^{xy}f_2$$

$$u_{xy} = (1+xy)e^{xy}f_2 - 4xyf_{11} + 2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12} + xye^{2xy}f_{22}$$

这里f_i表示f对第i个位置求偏导.

29基本没人做错，只需要老老实实带进去算就证完了，略.

2 第四周作业参考答案

2.1 习题9.2

31.试证：方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} cos\, x - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} sin\, y = 0$经变换$\xi = x - sin\, x + y, \eta = x + sin\, x - y$后变成$\frac{\partial^u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.(其中二阶偏导数均连续)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(1 - cos\, x) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(1 + cos\, x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-cos\, x)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}(1 - cos^2 x) + \frac{\partial u}{\partial \xi} sin\, x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(1 - cos^2 x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+cos\, x)^2 - \frac{\partial u}{\partial \eta} sin\, x \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-cos\, x)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2 - 2cos^2 x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+cos\, x)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} sin\, x - \frac{\partial u}{\partial \eta} sin\, x
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1 - cos\, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}(1 + cos\, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(1 - cos\, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1 + cos\, x) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1 - cos\, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2cos\, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1 + cos\, x)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
0 &= u_{xx} + 2cos\, x u_{xy} - sin^2 x u_{yy} - sin\, x u_y \\
&= (1 - 2cos\, x + cos^2 x + 2cos\, x - 2cos^2 x - sin^2 x)u_{\xi\xi} \\
&+ (1 + 2cos\, x + cos^2 - 2cos\, x - 2cos^2 x - sin^2 x)u_{\eta\eta} \\
&+ (2 - 2cos^2 x + 4cos^2 x + 2sin^2 x)u_{\xi\eta} \\
&+ (sin\, x - sin\, x)u_\xi + (-sin\, x + sin\, x)u_\eta \\
&= 4u_{\xi\eta}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow u_{\xi\eta}=0$

32.设变换$\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程$6z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=0$ 简化为$z_{uv}=0$.求常数a.(其中二阶偏导数均连续)

$$z_{xx}=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}$$

$$z_{xy}=-2z_{uu}+(a-2)z_{uv}+az_{vv}$$

$$z_{yy}=4z_{uu}-4az_{uv}+a^2u_{vv}$$

于是

$$0=6z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=(10+5a)z_{uv}+(6+a-a^2)z_{vv}$$

为化为$z_{uv}=0$，必须且仅须

$$\begin{cases}10+5a\neq 0\\ 6+a-a^2=0\end{cases}$$

解得$a=3$.

36.求下列复合函数的一阶全微分du.

(1)$u=f(t),t=x+y$;

(3)$u=f(x,y,z),x=t,y=t^2,z=t^3$;

(5)$u=f(\xi,\eta,\zeta),\xi=x^2+y^2,\eta=x^2-y^2,\zeta=2xy$.

(1)$du=f'dx+f'dy$

(3)$du=(f_1'+2tf_2'+3t^2f_3')dt$

(5)$du=(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')dx+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')dy$

2.2 习题9.3

1.证明下列方程在指定点附近对y有唯一解，并求出y对x在该点处的一阶和二阶导数

(1)$x^2+xy+y^2=7$，在$(2,1)$处；　(2)$x\,cos\,xy=0$，在$(1,\frac{\pi}{2})$处.

利用隐函数定理，验证定理条件即可(所以你们要能背下这些条件)：

第一条要求偏导数连续，这也保证了你“反解”出的显函数具有良好的性质：连续可微.

第二条要求$F(x_0,y_0)=0$是必然的，不然$y_0=f(x_0)$连解都不是了，实际操作时你直接把方程一边弄成0，设另一边为F就可以直接满足了.

第三条要求对能显式表示出来的那个或那几个的微商不等于0，记忆上直接联想直线$ax+by=0$，什么时候y能够被成为“因变量”？那就是$b\neq 0$的时候.因为此时你可以把b除掉，这样y就“干净”了.同理，如果$a\neq 0$，那x就可以显式表示为$x=-\frac{b}{a}y$.

(1)令$F(x,y)=x^2+xy+y^2-7$，则$F(2,1)=0$，$F_x'=2x+y$和$F_y'=x+2y$均连续，$F_y'(2,1)=4\neq 0$

故由隐函数存在定理，方程在$(2,1)$点附近对y存在唯一解$y=f(x)$.
$f'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{2x+y}{x+2y}$ $\quad f''(x)=\left(-\frac{2x+f(x)}{x+2f(x)}\right)'=\frac{3xf'(x)-3f(x)}{(x+2f(x))^2}$
$\Rightarrow f'|_{(2,1)}=-\frac{5}{4}$ $\quad f''|_{(2,1)}=-\frac{21}{32}$
(2)令$F(x,y)=x\cos xy$，则$F(1,\frac{\pi}{2})=0$，$F_x'=\cos xy-xy\sin xy$和$F_y'=-x^2\sin xy$均连续，$F_y'(2,1)=-1\neq 0$
故由隐函数存在定理，方程在$(2,1)$点附近对y存在唯一解$y=f(x)$.

$$f'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{\cos xy-xy\sin xy}{-x^2\sin xy}\Rightarrow f|_{(1,\frac{\pi}{2})}=-\frac{\pi}{2}$$

$f''|_{(1,\frac{\pi}{2})}$可以直接对f'求导算得(求导时注意把y视为x的函数，你可以像第一小题那样先把y换成$f(x)$再求导，不容易出错，虽然我个人是懒得换的...)
这里用另外一种方法，首先推导一般情形：
对于$F(x,y)=0$，两边对x求导，得$F_x+F_yf'=0$，再对x求导，得$F_{xx}+2F_{xy}f'+F_{yy}(f')^2+F_yf''=0$.故有

$$f''=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}f'+F_{yy}(f')^2}{F_y}$$

于是只要再求出F_{xx},F_{xy},F_{yy}即可，而且在求这些时，是不把y当作x的函数的，也就是说你直接求偏导就可以了，这样就不必进行复杂的计算了.
本题由此易算得$f''|_{(1,\frac{\pi}{2})}=\pi$.

2.求由下列方程所确定的隐函数的导数.
(1)$sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$，求$\frac{dy}{dx}$;
(3)$x^y=y^x$，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$;
(5)$\frac{x}{z}=ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial x}$.
(1)

$$y'=\frac{y\cos xy-ye^{xy}-2xy}{-x\cos xy+xe^{xy}+x^2}$$

(3)

$$y'=\frac{yx^{x-1}-y^xln\,y}{xy^{x-1}-x^yln\,x}$$

再利用$x^y=y^x$，有

$$y'=\frac{y^2-xyln\,y}{x^2-xyln\,x}$$

$$y''=\frac{(2yy'-yln\,y-xy'ln\,y-xy')(x^2-xyln\,x)-(2x-yln\,x-xy'lnx-y)(y^2-xyln\,y)}{(x^2-xyln\,x)^2}$$

也可利用上题红字部分计算y''，这里就不详细写了.
(5)原方程可化为$\frac{x}{z}-ln\,z+ln\,y=0$，这里利用另一种非常方便的方法：求微分法.

$$\frac{1}{z}dx+\frac{1}{y}dy+(-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z})dz=0$$

$$dz = \frac{z}{z+x}dx + \frac{z^2}{y(x+z)}dy$$

由于$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x} \quad and \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$$

3.找出满足方程$x^2+xy+y^2=27$的函数$y=y(x)$的极大值与极小值.

易验证当$y \neq \pm 3$时满足隐函数存在定理条件，此时存在$y=y(x)$.

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2x+y}{x+2y} = 0 \\ x^2+xy+y^2=27 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-3,6) \ or \ (3,-6)$$

则极大值为6，极小值为-6.

6.设$z=z(x,y)$是由方程$2sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$所确定的隐函数，试证：$z_x+z_y=1$.

$$z_x = \frac{2cos(x+2y-3z)-1}{6cos(x+2y-3z)-3}$$

$$z_y = \frac{4cos(x+2y-3z)-2}{6cos(x+2y-3z)-3}$$

显然有$z_x+z_y=1$.

7.设$z=z(x,y)$是由方程$\varphi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的隐函数，试证:不论φ为怎样的可微函数，都有$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

方程两边对x或y求导，得到

$$\begin{cases} \varphi_1'(c-az_x)+\varphi_2'(-bz_x)=0 \\ \varphi_1'(-az_y)+\varphi_2'(c-bz_y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x = \frac{c\varphi_1'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'} \\ z_y = \frac{c\varphi_2'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'} \end{cases}$$

从而可得所求证等式.

结束本节习题前，我建议你们做一做第11题.

2.3 习题9.4

1.设$\boldsymbol{r}=(a\sin t,-a\cos t,bt^2)$，$a,b$是常数，求$\boldsymbol{r}'(t)$和$\boldsymbol{r}''(t)$.

$$\boldsymbol{r}'(t) = (a\cos t, a\sin t, 2bt)$$

$$\boldsymbol{r}''(t) = (-a\sin t, a\cos t, 2b)$$

3.证明曲线$x=a\,cos\,t,y=a\,sin\,t,z=bt$的切线与$Oz$轴成定角.
这是高中立体几何题吧，直接算和$(0,0,1)$的夹角即可，略.

5.求曲线$x=a\,sin^2t,y=b\,sin\,t\,cos\,t,z=c\,cos^2t$在$t=\frac{\pi}{4}$的切线和法平面方程.
切线$\begin{cases}\frac{x-a/2}{a}=\frac{z-c/2}{-c}\\y=\frac{b}{2}\end{cases}$，法平面方程$ax-cz-\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}=0$.
切线算法就是代入$t=\frac{\pi}{4}$得到起点P_0，再求切向量代入$t=\frac{\pi}{4}$得到方向$\vec{v}$，则可直接写出切线方程了.
法平面特点是和切线垂直，上面任一点P满足$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{v}=0$.

7.设两条隐式曲线$F(x,y)=0$与$G(x,y)=0$在一点(x_0,y_0)相交，求在交点处两条隐式曲线切线的夹角.这里$F(x,y)$，$G(x,y)$都是可微函数.

$$\theta=arccos\left(\frac{\nabla F\cdot\nabla G}{|\nabla F|\cdot|\nabla G|}\right)$$

8.求下列曲面在指定点的切平面和法线方程.
(1)$z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$，在点$(3,4,-7)$;
(3)$e^z-z+xy=3$，在点$(2,1,0)$.

可以求z_x,z_y来得到切平面里的两个线性无关的向量$\vec{i},\vec{j}$，由它们加过的定点P_0可得平面为$P_0+\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}(\lambda,\mu\in R)$，法线方向为$\vec{n}=\vec{i}\times\vec{j}$，则法线为$P_0+k\vec{n}(k\in R)$.如果希望得到方程，利用法向量就可以写出切平面和法线方程了.
这里我们利用微分的方法来做：对方程两边求微分，代入定点P_0坐标，再由定点向切平面上任一点积分即得切平面方程，由切平面方程x,y,z前面的系数立刻得到法线方向，从而得到法线方程.具体如下：
(1)

$$dz=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x\right)dy$$

代入$(x,y,z)=(3,4,-7)$得

$$17dx+11dy+5dz=0$$

从$(3,4,-7)$到(x,y,z)积分，得

$$17(x-3)+11(y-4)+5(z+7)=0$$

化简得

$$17x+11y+5z-60=0$$

从而法线方程为

$$\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$$

(3)切平面为

$$x+2y-4=0$$

法线为

$$\begin{cases} x-2=\frac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

Part II

补充内容

3 隐函数偏导数计算

一般我们有两种方法进行计算.接下来利用如下一例进行具体说明.

设方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$，唯一确定了隐函数$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

3.1 方法一：链式法则

对x求偏导，得

$$\begin{cases} F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

由此解得$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.
对y求偏导，得

$$\begin{cases} F_y+F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ G_y+G_u\frac{\partial u}{\partial y}+G_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

由此解得$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.
实际上我们利用$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$求$f'(x)$便是在用这个方法，只不过我们已经记住了结论.另外，习题9.3第一题的(2)的红字部分也是利用了链式法则的方法.

3.2 方法二：微分法

直接求微分，得

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \diamondsuit dx + \heartsuit dy \\ dv = \clubsuit dx + \spadesuit dy \end{cases}$$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \diamondsuit, \frac{\partial u}{\partial y} = \heartsuit, \frac{\partial v}{\partial x} = \clubsuit, \frac{\partial v}{\partial y} = \spadesuit$.

实际上两种方法的计算量是差不多的，自己选自己顺手的来就好，不用在选择哪个方法上面花时间.

4 两道题

1.习题9.2的38题

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$$

另外，球坐标变换的Jacobi行列式可以算得是$r^2 sin\theta$.

2.$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$在$(0,0)$点沿任意方向$\vec{l} = (cos\theta, sin\theta)$的方向导数.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,cos\theta, t\,sin\theta) - f(0,0)}{t-0} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\,cos^2\theta sin\theta}{t^2cos^4\theta + sin^2\theta} - 0}{t} \\ &= \frac{cos^2\theta}{sin\theta} \quad (sin\theta \neq 0) \end{aligned}$$

若$sin\theta = 0$，则$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = 0$.

错误做法：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0 \Longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} cos\theta + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} sin\theta = 0$$

错在哪里？

错在$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微，不可以用$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} cos\theta + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} sin\theta$这个公式.详见课本定理9.17.