week5,6习题

夏前卫PB15010395

April 12, 2019

1 习题9.4

13.试证曲面$x^2+y^2+z^2=ax$与曲面$x^2+y^2+z^2=by$相互正交。

pf:先求出法向。
$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-ax$,
$G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-by$,
$n_1=(2x-a,2y,2z)$,
$n_2=(2x,2y-b,2z)$,
且在两曲面交线处有$ax=by$成立, 故$n_1\cdot n_2=4x^2+4y^2+4z^2-2ax-2by=0$ □

15.证明曲面$z=xe^{\frac{x}{y}}$的每一切平面都通过原点。

pf:还是先求出法向。
$F(x,y,z)=xe^{\frac{x}{y}}-z$,
$n_{=}(e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}},-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}},-1)$,
(x_0,y_0,z_0)点的切平面方程为$(e^{\frac{x_0}{y_0}}+\frac{x_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}})(x-x_0)-\frac{{x_0}^2}{{y_0}^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}(y-y_0)-(z-z_0)=0$
检验发现原点确实在上述曲面上。 □

17.求下列曲线在给定点出的切线方程。$y^2+z^2=25,x^2+y^2=10$在$(1,3,4)$点。

这道题是空间中隐式曲线的情况。先求两个曲面在给定点处的法向。
$n_1=(2x,2y,0)=2,6,0,$
$n_2=(0,2y,2z)=0,6,8,$
$n=n_1\times n_2=(48,-16,12)$,切线方程为$\frac{x-1}{48}=\frac{y-3}{-16}=\frac{z-4}{12}$,切平面方程为$48(x-1)-16(y-3)+12(z-4)=0$

2 习题9.5

3.对于函数$f(x,y)=sin\pi x+cos\pi y$,用中值定理证明，存在一个数θ,$0<\theta<1$,使得$\frac{4}{\pi}=cos\frac{\pi\theta}{2}+sin\frac{\pi}{2}(1-\theta)$。

pf:考虑$(0,\frac{1}{2})$和$(\frac{1}{2},0)$这两点,由中值定理
$2=f(\frac{1}{2},0)-f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f_x^{'}(a,b)-\frac{1}{2}f_y^{'}(a,b)$
即$4=\pi(cos\pi a+sin\pi b)$,其中$a+b=\frac{1}{2}$ □

3.求下列函数的泰勒展开公式，并指出展开式成立的区域。
(1)$f(x,y)=e^x ln(1+y)$ (3)$f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ (5)$f(x,y)=sin(x^2+y^2)$

(1)(0,0)处展开到三阶。
$f_x=e^x ln(1+y),f_y=\frac{e^x}{1+y},f_{xx}=f_{xxx}=f_x,f_{xy}=f_{xxy}=f_y,f_{yy}=f_{xyy}=-\frac{e^x}{(1+y)^2},f_{yyy}=2\frac{e^x}{(1+y)^3}$
在(0,0)处$f_x=f_{xx}=f_{xxx}=0,f_y=f_{xy}=f_{xxy}=1,f_{yy}=f_{xyy}=-1,f_{yyy}=2$

$f(x,y)=1+y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$
只展开到三阶，故只需要$x+1>0$成立即可.

(3)$f(x,y)=\frac{1}{1-x}*\frac{1}{1-y}$,当$|x|<1$时，有$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$成立,
$f(x,y)=1+\sum_{l+m=1}^{\infty}x^ly^m$

(5)$f(x,y)=sin(x^2+y^2)$ 做变量代换$r=x^2+y^2$,当$|r|<1$时，$f(x,y)=sinr=1+\frac{r^3}{3!}-\frac{r^5}{5!}+\dots$

5.$z=z(x,y)$是由方程$z^3-2xz+y=0$确定的隐函数，按$(x-1)$和$(y-1)$的乘幂函数展开到二次为止。
$F(x,y,z)=z^3-2xz+y=0,\frac{\partial F}{\partial x}=-2z,\frac{\partial F}{\partial y}=1,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-2x$
$z(1,1)=1$
$f_x=\frac{2z}{3z^2-2x},f_y=\frac{-1}{3z^2-2x},f_x(1,1)=2,f_y(1,1)-1.$
$f_{xx}=\frac{2z_x(3z^2-2x)-2z(6zz_x-2)}{(3z^2-2x)^2}=-16,$
$f_{xy}=\frac{2z_y(3z^2-2x)-2z(6zz_y-2)}{(3z^2-2x)^2}=10,$
$f_{yy}=\frac{6zz_y}{(3z^2-2x)^2}=-6,$
$f(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2}(-16(x-1)^2+10*2(x-1)(y-1)-6(y-1)^2).$

7.求下列函数极值。(1)$f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$
$f_x=y-\frac{50}{x^2},f_y=x-\frac{20}{y^2}$,联立解出$x=5,y=2$是唯一驻点。求出Hesse矩阵为

$$\begin{matrix}\frac{4}{5} & 1\\ 1 & 5\end{matrix}$$

正定的,在该点取到极小值30.

(3)$f(x,y)=e^{2x}(x+2y+y^2)$
$f_x=e^{2x}(1+2(x+2y+y^2)),f_y=e^{2x}(2+2y)$,联立解出$x=-\frac{1}{2},y=1$是唯一驻点。求出Hesse矩阵为

$$\begin{matrix}2e & 0\\ 0 & 2e\end{matrix}$$

正定的,在该点取到极小值$-\frac{e}{2}$.

10.求下列条件极值。
(1)$u(x,y)=x^2+y^2,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$
几何意义为直线上任意一点到直线外一点距离，有极小值，无极大值。
$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)$
$F_x=2x+\lambda/a$
$F_y=2y+\lambda/b$
$F_\lambda=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1$
得到$ax=by$,带入条件得$(x,y)=(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2})$ $u(a,b)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$为极小值。

(3)$u(x,y)=sinxsinysinz,x+y+z=\frac{\pi}{2}$,x,y,z¿0.
$0<u(x,y)\le 1$ 无极小值，有极大值。
$F(x,y,z,\lambda)=sinxsinysinz+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$
$F_x=sinysinz+\lambda$
$F_y=sinxsinz+\lambda$
$F_z=sinxsiny+\lambda$

$F_\lambda = x + y + z - \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \quad sinysinz = sinxsinz = sinxsiny \Rightarrow \quad x = y = z = \frac{\pi}{6}$
极小值为$\frac{1}{8}$

10.求下列函数在给定范围内的最大最小值。
(1)$z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le 4$
$z \ge -y^2 \ge -4$
$z \le x^2 \le 4$

(3)$sinx + siny - sin(x + y), x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\pi$
$F(x, y) = sinx + siny - sin(x + y)$,边界为三角形，先求其驻点
$F_x = cosx - cos(x + y) = 0$
$F_y = cosy - cos(x + y) = 0$
$\Rightarrow \quad cosx = cosy \Rightarrow \quad x + y = 2\pi$(舍去) or $x = yorx - y = 2\pi$(舍去)
$\Rightarrow$ 驻点为$(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$
$f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
求出Hesse矩阵为

$$\begin{matrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{matrix}$$

负定的,在该点取到极大值$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.
再考虑边界点，$x = 0$or$y = 0$时,$f(x, y) = 0$恒成立;
$x + y = 2\pi$时$f(x, y) = sin(x) + sin(2\pi - x) = 0$,为最小值。
综上，f的最大值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$,最小值为0.

18.求椭球体$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \ge 1$内长方体的最大体积。
转化为条件极值问题,构造辅助函数$F(x, y, z) = 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$
$F_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2}$
$F_x = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2}$
$F_x = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2}$
$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = 1/3 \ V = 8xyz = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc$

3 习题9.7

1.计算
(1)$(x\,dx + y\,dy) \wedge (z\,dz - z\,dx)$

原式$= xz\,dx \wedge dz + yz\,dy \wedge dz + yz\,dx \wedge dy$
(2)$(dx + dy + dz) \wedge (x\,dx \wedge dy - z\,dy \wedge dz)$

原式$= (x - z)\,dx \wedge dy \wedge dz$

1.对下列微分形式ω,计算$d\omega$

(1)$\omega = xy + yz + xz$

$d\omega$= $\frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx\,+\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy\,+\,frac\partial\omega\partial z\,dz\,= (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$

(3)$\omega = xy\,dx + x^2\,dy$

$d\omega$=$d(xy)\wedge dx\,+\,d(x^2)\wedge dy$=$-x\,dx\wedge dy\,+\,2x\,dx\wedge dy$=$x\,dx\wedge dy$

(5)$\omega = xy^2\,dy\wedge dz - xz^2\,dx\wedge dy$

$d\omega$=$d(xy^2)\,\wedge\,dy\,\wedge\,dz\,+\,d(xz^2)\,\wedge\,dx\,\wedge\,dy$=$(y^2-2xz)\,dx\,\wedge\,dy\,\wedge\,dz$

4 习题10.1

2.计算(1)$\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy \qquad D=[0,1]^2$
原式=$\int_0^1 dx\,\int_0^1 d(-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}})$
=$\int_0^1(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}})dx$
=$\int_0^1 d(ln(x+\sqrt{1+x^2})-ln(x+\sqrt{2+x^2}))$
=$ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

(3)$\iint_D sin(x+y)\,dxdy \qquad D=[0,\pi]^2$
原式=$\int_0^\pi dx\,\int_0^\pi d(-cos(x+y))$ =$\int_0^\pi 2cos(x)dx$
=$\int_0^\pi 2d(sin(x))$
=0

3.(1)计算$\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy \qquad D=[-1,1]^2$

原式=4 $\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy \qquad D=[0,1]^2$
=8 $\iint_D x^2\,dxdy \qquad D=[0,1]^2$
=$\frac{8}{3}$

4.证明$f(x,y)=\phi(x,y)\psi(x,y)$在$D=[a,b]x[c,d]$上可积,且有$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\phi(x)dx\,\int_c^d\psi(y)dy$.其中$\phi$,$\psi$分别在$[a,b],[c,d]$上可积.

证明；主要是要证明可积性.
可以利用教材$P150$的4·:可积函数的乘积仍然是可积函数.或者用黎曼和进行计算.