一、习题参考答案(Week6+Week7)[注意国庆为Wee5无作业]

习题2.1

1. 不一定，可能在 $x=x_0$ 处无定义 → 给出肯定性结论时要证明 → 给出不确定结论时要给例子.

3. (1) $f(x)+g(x)$ 不连续，$f(x)g(x)$ 可能连续 (e.g $f(x)\equiv 0$) 可能不连续

(2) $f(x)+g(x)$ 可能连续 (e.g. $f(x)=I_{\mathbb{Q}}$, $g(x)=I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $f+g\equiv 1$) 可能不连续

$f(x)g(x)$ 可能连续 (e.g. $f(x)=I_{\mathbb{Q}}$, $g(x)=I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $fg\equiv 0$) 可能不连续

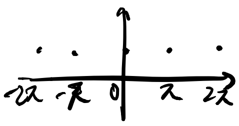
5. $f(x)=\begin{cases} 1 & ,x\in\mathbb{Q} \\ -1 & ,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ $\quad |f(x)|\equiv 1$

6. 间断点
- 第一类间断点
  - 可去间断点 — $f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0)$
  - 跳跃间断点 — $f(x_0-)\neq f(x_0+)$
- 第二类间断点 — $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ 中至少一个不存在

[以上均视极限为∞为极限不存在]

(1) $x=2$ 第二类间断点

(3) $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 可去间断点.



(5) $x=-7$ 第二类～ $\quad x=1$ 跳跃～(注意 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=0$)

(理由略)

7. $a=1$

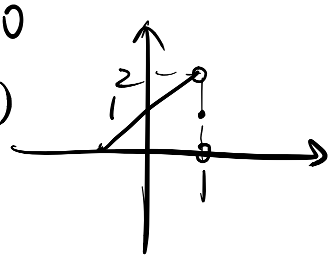
9. $|x|<1$ 时, $x^{2n}\to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$

$x=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1}=1$

$x=-1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

$|x|>1$ 时, $x^{2n}\to\infty\ (n\to\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$

故 $f(x)=\begin{cases} 0 & ,x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty) \\ 1+x & ,x\in(-1,1) \\ 1 & ,x\in\{1\}\end{cases}$



$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点，$f(x)$在其余点均连续

17.(1) $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} \sim \dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2}{2x} \to \frac{1}{4}$ as $x\to 0$

(3) $\dfrac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x} \sim \dfrac{\frac{1}{10}x\cdot\frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40}$ as $x\to 0$

(5) $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} \sim \dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^4} \sim \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}x^2)^2}{x^4} = \frac{1}{8}$ as $x\to 0$

(7) $|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}| = \left|2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$

$\leq 2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = 2\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \to 0$ as $x\to\infty$

习题2.2

2. 令$f(x)=x-a\sin x-b$，则$f(x)$连续

$f(0)=-b<0$, $f(a+b)=a(1-\sin(a+b))\geq 0$ $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{general 零点定理}}$ $\exists x_0\in(0,a+b]$ s.t. $f(x_0)=0$ 即x_0为零点

$\forall x>a+b$, $f(x)>a-a\sin x\geq 0 \Rightarrow$ 大于$a+b$时无零点

5. 令$h(x)=f(x)-g(x)$，则$h(x)$连续

$h(a)>0$, $h(b)<0$ $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{零点定理}}$ $\exists x_0\in(a,b)$, s.t. $h(x_0)=0$，即$f(x_0)=g(x_0)$

6. 令$h(x)=f(x)-f(x+a)$，则$h(x)$连续

$h(0)=f(0)-f(a)$, $h(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)=-h(0)$

若$h(0)=h(a)=0$，则结论得证

若$h(0)\neq 0$，则$h(0)h(a)<0$，由零点定理，$\exists x_0\in(0,a)$ s.t. $h(x_0)=0$，即$f(x_0)=f(x_0+a)$

7. 只需证一般的结论.

令$h(x)=\sum_{i=1}^{n}q_i[f(x)-f(x_i)]$，记$x^{(m)}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$，$x^{(M)}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$

则$h(x^{(m)})\leq 0$, $h(x^{(M)})\geq 0 \Rightarrow h(x^{(m)})h(x^{(M)})\leq 0$

$\xRightarrow{\text{general 零点定理}}$ $\exists\xi$在$x^{(m)}$与$x^{(M)}$之间$(\Rightarrow \xi\in[a,b])$, s.t. $h(\xi)=0$，即$f(\xi)=\sum_{i=1}^{n}q_i f(x_i)$

16. $f(x)=\sin x^2$ 连续、有界显然，下面说明不一致连续.

只需注意到 $|\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{k\pi}|\to 0$ $(k\to\infty)$ 但$|\sin(\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}})^2-\sin(\sqrt{k\pi})^2|=1>\frac{1}{2}$

严格写：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall\delta$，取 $N=[\frac{\pi}{16\delta^2}]+1$，$\forall k\geq N$，$|\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{k\pi}|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{k\pi}}<\frac{\pi}{4\sqrt{k\pi}}<\delta$

此时 $|\sin(\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}})^2-\sin(\sqrt{k\pi})^2|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$

第二章综合习题

5. 令 $h(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，则 $h(x)$ 连续

$h(0)=f(0)-f(\frac{1}{n})$，$h(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n})$，$\cdots$，$h(\frac{n-1}{n})=f(\frac{n-1}{n})-f(1)$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-1}h(\frac{i}{n})=f(0)-f(1)=0$

不妨设 $h(\frac{i}{n})\neq0$，$i=0,1,\cdots,n-1$（否则直接得证）

不妨设 $h(0)>0$，则 $\exists j\in\{1,\cdots,n-1\}$，s.t. $h(\frac{j}{n})<0$

由零点定理，$\exists\xi\in(0,\frac{j}{n})\subset[0,1-\frac{1}{n}]$，s.t. $h(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

10.（反证）假若 $f(b)\leq f(a)$，则 $\exists x\in[a,b)$，s.t. $f(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，由题意 $\exists y\in(x,b)$ s.t. $f(y)>f(x)$ 矛盾！

（这里利用了闭区间上连续函数必可取到最值的性质）

习题3.1

1.(1) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{-\sin x}{x}=-1$，$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ 在 $x=0$ 处不可导

(3) 法一：$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-1}{x}\right|\geq\frac{1-x^2}{|x|}\longrightarrow\infty$ as $x\to0$ 故 $f'(0)$ 不存在 $\Rightarrow$ 在 $x=0$ 处不可导

法二：$f(x)$ 不连续（在 $x=0$ 处），从而不可导

3. 注意没说 f 可导，所以不能 $f'(a)=[(x-a)'g(x)+(x-a)g'(x)]\big|_{x=a}=g(a)$！

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}g(x)\xlongequal{g\text{在}x=a\text{连续}}g(a)$ 故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=g(a)$

5：不妨设 $f(a)>0$，由 f 在 $x=a$ 处可导知 f 在 $x=a$ 处连续

故 $\exists a$ 的邻域 $(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})$ s.t. $f(x)>0$，$\forall x\in(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})$

从而 $\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}\xlongequal{|x-a|<\frac{1}{n}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\longrightarrow f'(a)$ as $x\to a$

即 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导

· 若 $f(a)=0$，则不一定，如 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处.

6. (1) $y'=\frac{(6x+9)(5x+8)-5(3x^2+9x-2)}{(5x+8)^2}=\frac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}$

(3) $y'=2x\log_3 x+x^2\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 3}=2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$

(5) $y'=\left(\frac{2}{1-\ln x}-1\right)'=\frac{-2\cdot(-\frac{1}{x})}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$

Week 7:

7.(1) $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\Big/\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\frac{-2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}}$

(5) $9\cdot(x\sin x^3)^2\cdot\cos x^3$

(7) $\cos[\sin(\sin x)]\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$

(9) $\frac{3x^2(x^3-1)^2(-x^4+4x+3)}{(x^4+1)^4}$

(11) $\frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

(13) $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$ ①

$(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=e^{x^x\ln x}\cdot\left((x^x)'\ln x+\frac{1}{x}\cdot x^x\right)$

$=x^{x^x}\cdot x^x\left((\ln x+1)\ln x+\frac{1}{x}\right)$ ②

$(x^{2^x})'=(e^{2^x\ln x})'=e^{2^x\ln x}\left((2^x)'\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot 2^x\right)$

$=x^{2^x}\cdot 2^x\left(\ln 2\cdot\ln x+\frac{1}{x}\right)$ ③

$y'=$ ① + ② + ③

(15) $y'=(e^{\cot x\ln\tan x})'=(\tan x)^{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\ln\tan x+\cot x\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}\right)$

$=(\tan x)^{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}(1-\ln\tan x)$

9. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)]$, $[f(g(x))]'$.

• $f'(x)=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow f'[g(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{1+(g(x))^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$ → 不是 e^{x^2+1} ($(e^{\sqrt{x^2+1}})^2=e^{2\sqrt{x^2+1}}$)

• 求 $[f(g(x))]'$:

法一: $f(g(x))=\ln(e^{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}})$

$\Rightarrow [f(g(x))]'=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}+\frac{e^{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}}{e^{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}=\dfrac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+e^{2\sqrt{x^2+1}})}}$

法二: $[f(g(x))]'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$ ← 链式法则

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

11. (1) $y'(0+)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=1$

$y'(0-)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=0$

$y'(0+)\neq y'(0-)\Rightarrow y$ 在 $x=0$ 处不可导.

$x\neq0$ 时, $y'(x)=\dfrac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{2}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$

(2) $y'(\frac{1}{2}+)=2\sin\frac{1}{2}\neq-2\sin\frac{1}{2}=y'(\frac{1}{2}-)\Rightarrow y$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处不可导

$y'(x)=\begin{cases}2\sin x+(2x-1)\cos x, & x>\frac{1}{2}\\ -2\sin x+(1-2x)\cos x, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

12. 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 证明:

(1) 当 $n=1$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 $n=2$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 但导函数在 $x=0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且导函数在 $x=0$ 处连续.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

注意: 错误做法:

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=2-\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在

因为极限不存在时不可以进行极限四则运算

正确做法:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \text{ 不存在}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \text{ 不存在}$$

因为可以反证法证明: 若 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在, 则由四则运算知 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 存在矛盾!

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow f$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

$x\neq 0$ 时, $f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)$

习题3.2

2. (1) $dy=\frac{1}{x-2\pi}dx$

(3) $dy=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ ☆

(5) $dy = 5^{\sqrt{\arctan x^2}} \ln 5 \, d\sqrt{\arctan x^2}$

$= 5^{\sqrt{\arctan x^2}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctan x^2}} d \arctan x^2$

$= 5^{\sqrt{\arctan x^2}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctan x^2}} \cdot \frac{2x}{1+x^4} dx$

$= \frac{x \cdot 5^{\sqrt{\arctan x^2}} \ln 5}{(1+x^4)\sqrt{\arctan x^2}} dx$

(7) $dy = e^{-x}[\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt}$

(1) $dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$, $dy = (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$

(2) $dx = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) d\varphi$, $dy = (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) d\varphi$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}\right)' \Big/ (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) = \frac{\varphi^2+2}{(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^3}$

二、补充题

1. 设 f 于有界区间 (a,b) 内可微

(1) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$

2. 设 f 于 $(a,+\infty)$ 内可微

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 $\overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在 $\overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

以上均否.

1.(1) 在 $(0,\frac{2}{\pi})$ 上定义函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$ 显然

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

$x_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ $\quad f'(x_n)=0$

1.(2) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ on $(0,1)$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

2.(1) $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$ on $(0,+\infty)$

$f'(x)=2\cos x^2-\frac{1}{x^2}\sin x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(2) $f(x)=\cos(\ln x)$ on $(0,+\infty)$

$f'(x)=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

3. 设 f 在有界区间 (a,b) 内可微, 则 f 在 (a,b) 上无界 $\Rightarrow f'$ 在 (a,b) 上无界

证明:(反证) 假若 $\exists M$, s.t. $|f'(x)|\le M$, 则任取 (a,b) 中一点 c 并固定

$$|f(x)|\le |f(x)-f(c)|+|f(c)| = |f'(\xi)||x-c|+|f(c)|\le M(b-a)+|f(c)|, \forall x$$

$\Rightarrow f(x)$ 有界, 矛盾!

Remark: · 反之不对 (反例为 1.(2))

· 对于无界区间, 上述结论不对, 即"无界区间上的无界函数的导函数未必无界" (反例为 $f(x)=\ln x$ on $(1,+\infty)$)

4. $f\in D((a,+\infty))$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 均存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$

对于 $\varepsilon=\frac{|A|}{2}$, $\exists x_0$, $\forall x>x_0$, 有 $|f'(x)-A|\le\frac{|A|}{2} \Rightarrow |f'(x)|\ge\frac{|A|}{2}$

故 $\forall x>x_0+1$, $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(\xi)|(x-x_0)\ge\frac{|A|}{2}$

而 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，故 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \to 0$ as $x\to+\infty$

这迫使 $A=0$.

5. 设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$，$0\le x<\infty$，则存在 $\xi\in(0,+\infty)$，

s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$

构造 $F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$

练习：设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$f^2(a)-f^2(b)=b^2-a^2$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)f(\xi)+\xi=0$

6. $f\in D^3(a,b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]=\frac{f'''(\xi)(b-a)^3}{12}$

构造 $F(x)=f(x)-f(b)+\frac{b-x}{2}[f'(x)+f'(b)]-\frac{A}{12}(b-x)^3$

其中 $A=\frac{12}{(b-a)^3}\left[f(a)-f(b)+\frac{b-a}{2}[f'(a)+f'(b)]\right]$

则 $F(a)=F(b)=0 \Rightarrow \exists\xi'\in(a,b)$，$F'(\xi')=0$
而 $F'(b)=0$
$\Longrightarrow \exists\xi\in(\xi',b)$，$F''(\xi)=0$.

练习：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

7. $f\in D[a,b]$，若 $\exists x_0\in(a,b)$，s.t. $f'(x_0)=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

令 $F(x)=[f(x)-f(a)]e^{-\frac{x}{b-a}}$

$F(a)=0$，$F'(x)=e^{-\frac{x}{b-a}}\left(f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\right)$

$$F'(x_0)=-\frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}e^{-\frac{x_0}{b-a}}=-\frac{F(x_0)}{b-a}$$

(1) 若 $F(x_0)=0$，则 $f'(x_0)-\frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}=0$ ✓

(2) 若 $F(x_0)\ne0$，$\exists\xi'\in(a,x_0)$，s.t. $F'(\xi')=\frac{F(x_0)-F(a)}{x_0-a}=\frac{F(x_0)}{x_0-a}$

$\Rightarrow F'(x_0)F'(\xi')=-\frac{F^2(x_0)}{(b-a)(x_0-a)}<0$

$\Rightarrow \exists\xi\in(\xi',x_0)\subset(a,b)$，s.t. $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

8、设 $f\in D[a,b]$，证明：

$$f'\in C[a,b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \text{s.t.} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\ 0<|h|<\delta$$

$(\Rightarrow)$ $f'\in C[a,b] \Rightarrow f'$ 在 $[a,b]$ 上一致连续（P66 定理2.14）

故 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1,x_2\in[a,b]$ with $|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon$

则 $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| \xlongequal[\text{值定理}]{\text{微分中}} |f'(\xi)-f'(x)| \xrightarrow{|\xi-x|<|h|<\delta} \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ $\forall x\in[a,b], \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall 0<|h|<\delta$，有

$$|f'(x+h)-f'(x)| \le \left|f'(x+h)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| + \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|$$

$$<\left|f'(x+h)-\frac{f(x+h+(-h))-f(x+h)}{-h}\right|+\varepsilon$$

（这里总可取适当 h，使 $x+h\in[a,b]$）

$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$