第十一周

习题4.2

1.(1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$ (3) $x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ (5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{x+1}$

(7) $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+1)-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)$ or $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right|$

2.(1) $\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

(3) $\tan x-\frac{2}{\tan x}-\frac{1}{3\tan^3 x}$

(5) $\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)$ or $\frac{1}{2}\arcsin(2\tan^2 x+1)$

(7) $\frac{\sin x-\cos x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|$

(9) $\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}$

习题5.1

3. $f(x)=\begin{cases}1 & Q\\ -1 & [a,b]/Q\end{cases}$

4 (1) $\because f(c)>0$ $\therefore \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 有 $f(x)>\frac{f(c)}{2}$

$\therefore \int_a^b f(x)dx\geq\int_{c-\delta}^{c+\delta}f(x)dx\geq f(c)\cdot\delta>0$

(2) 利用(1)

(3) $f(x)=0$ $(a\leq x<b)$ $f(x)=1$ $(x=b)$

5. 反向

习题5.2

3. 利用 $|f(x_i)-f(y_i)|\geq\big||f(x_i)|-|f(y_i)|\big|\Rightarrow$ 可积

4. 利用 Lebesgue 定理

第十二周

习题5.1

6. (1). $(a\sin x+b\cos x)^2\le(a^2+b^2)$.

(2). $f(x)=x^m(1-x)^n$ $\quad f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-n(1-x)^{n-1}x^m$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{m}{m+n}$ $\quad\therefore f_{max}=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

11. (1). $f'(x)=2x\sin x^4$.

(3). $f'(x)=2x\cdot e^{-x^4}-e^{-x^2}$.

15. (2). $\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$.

(4). $\int_2^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}=\int_2^3\frac{2}{5}\frac{dx}{2x-1}-\int_2^3\frac{1}{5}\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$.

18. (1). $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^3dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}$.

~~(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-i^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$.~~

21. ~~$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x+a)dx$.~~

$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{T+a}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

22. (1). $\int_0^{\pi}|\cos x|dx=4$.

(3). $\int_{-1}^1\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=0$. (奇函数)

(5). $\int_0^{\ln2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)-1\right]dt=\ln(2+\sqrt3)-\frac{\sqrt3}{2}$.

(设 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$ 则 $dx=\frac{t}{1-t^2}dt$)

(7). $\int_0^1x^3e^xdx=x^3e^x\Big|_0^1-\int_0^1 3x^2e^xdx=e-3\left(x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1xe^xdx\right)=6-2e$.

(9). $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}\,dx\xlongequal{t=\sqrt{\tan x}}\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{\sqrt2}\int_0^1\left(\frac{t}{t^2-\sqrt2t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt2t+1}\right)dt$

$=\left[\frac{\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt2t+1}{t^2+\sqrt2t+1}\right|+\frac{\sqrt2}{2}\arctan(\sqrt2t+1)+\frac{\sqrt2}{2}\arctan(\sqrt2t-1)\right]\Big|_0^1$

$=\frac{\sqrt2}{4}(\ln(3-2\sqrt2)+\pi)$.

(11). $\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = B(\frac{5}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\pi}{16}$

(13). $\int_{-1}^{1} e^{|x|}\arctan e^x\,dx = \int_0^1 e^x(\arctan e^x + \arctan e^{-x})\,dx = \frac{\pi}{2}(e-1)$

23. $\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot f(\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t) f(\sin t)\,dt = \pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$ $(t=\pi-x)$

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx = \pi\cdot\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$

24. $\frac{13}{42} = \int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{6}\,dx < \int_0^1 \sin x^2\,dx < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

27. (1) $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)\,dt \geq \alpha\int_0^1 f(t)\,dt$

(2). $(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \geq (1-\alpha)\alpha f(\alpha) \geq \alpha\cdot\int_{\alpha}^1 f(x)\,dx$

$\therefore \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \geq \alpha\int_0^1 f(x)\,dx$

31. $g(x,y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t))\,dt = \int_0^{x+y} f(t)\,dt - [(\int_0^x + \int_0^y) f(t)\,dt]$

$\therefore g(x,y) = g(y,x)$ 四

第十六周

习题5.3

$\sqrt{1+x^2}$: $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$

☆1.(1). $\int_{-a}^{a} \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = a\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{4a^2+1}+2a)$

(3). $\int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2}\,d\theta = |a|(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}))$

2.(1) $ds = \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\,d\theta$. $S = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = a^2$

(3). $S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = e + \frac{1}{e} - 2$

3.(1). x轴: $V_x = \int_0^{\pi} \pi\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2}$

(2) y轴. $V_y = \int_0^{\pi} 2\pi x\cdot\sin x\,dx = 2\pi^2$

由 扫描全能王 扫描创建

(3). $V=\int_0^{2\pi}\pi(1-\cos t)^2(1-\cos t)\,dt=5\pi^2$.

习题5.4.

1.(1). $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}$

(3). $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$ 发散.

(5). $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}$

(7). $\int_0^1 \ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1$.

(9). $\cancel{\int_0^1\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^1 \ln x\,d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\ln x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x}}$

$\int\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\ln x\,d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$.

$=\left(-1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\ln x+\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C\triangleq f(x)+C$.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$.

又: $f(x)=\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln x+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\ln 2$.

$\therefore\int_0^1\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=-\ln 2$.

4.(1). $\int_{-1}^4\frac{dx}{x^2+x-2}=\int_{-1}^4\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$ 不收敛!

(2). $\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}}dx=\int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}}dx+\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx=0$.

综合习题5.

3.(6). $\because\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}(x+(k-1)\pi)\sin x\,dx=(2k-1)\pi$

$\therefore\int_0^{n\pi}x|\sin x|\,dx=n^2\pi$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx = \int_0^1 u^n/(1+u^2)\, du$

$\because \frac{u^n}{2} < \frac{u^n}{1+u^2} < \frac{u^{n-1}}{2}$

$\therefore \frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx < \frac{1}{2n}$

14. 设 $(k+1)\pi > x \geq k\pi$ 则 $\int_0^x |\sin t|\, dt \in [2k, 2k+2)$.

$\therefore \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\, dt \in [\frac{2k}{k+1}\frac{1}{\pi}, \frac{2k+2}{k}\frac{1}{\pi})$.

令 $k \to \infty$ (i.e. $x \to \infty$) 有 $\frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\, dt = \frac{2}{\pi}$ $(x \to \infty)$.

17. $|f(a)| = \int_0^1 |f(a)| - |f(x)|\, dx + \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx + \max_{x\in[0,1]} |f(x)| - \min_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

$\leq \int_0^1 |f(x)|\, dx + |f(\alpha) - f(\beta)|$ (α为最大值点，β为最小值点).

$= \int_0^1 |f(x)|\, dx + |\int_\alpha^\beta f'(x)\, dx|$.

$\leq \int_0^1 |f(x)|\, dx + \int_0^1 |f'(x)|\, dx$ □

22. 设 $\exists x_0$ s.t. $(f'(x_0))^2 \geq 2f(x_0)$.

则 $\int_{x_0}^x f'(t) - f'(x_0)\, dt \leq \int_{x_0}^x |t - x_0|\, dt = \frac{(x-x_0)^2}{2}$.

i.e. $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}$.

取 $x = x_0 - f'(x_0)$ 有 $f(x_0 - f'(x_0)) \leq f(x_0) - \frac{1}{2}f'^2(x_0) \leq 0$.

矛盾！

习题6.1

1.(1) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow y = C \cdot e^{\arctan x}$.

(3) $\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left|\frac{1-y}{y}\right| = C \cdot |x| \Rightarrow y = \frac{1}{1+Cx}$ $(C \in R)$ 或 $y = 0$.

令 $t=\sin^2 x$ 有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \cdot \sin^\beta x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)} \quad \square$$

Remark: 取 $\alpha=\beta=0$ 有 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

eg2. 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ 中 令 $t=x^2$.

有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} x^{2s-1} e^{-x^2} dx$.

令 $s=\frac{1}{2}$ 有 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3. $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ (1). $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ (2).

性质 1. 齐次线性方程(1)的解或恒为0或恒不等于0.

2. 线性方程的解是整体存在的. i.e. (1)或(2)的∀一个解都在 $p(x)$, $q(x)$ 有定义且连续的区间 I 上存在.

3. 齐次线性方程(1)的∀解的线性组合仍为解; 齐次线性方程(1)的∀一解与非齐次方程(2)的∀一解之和为(2)的解.

4. 非齐次方程(2)的∀一解与相应齐次方程(1)的通解之和为(2)的通解.

5. 初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的解存在唯一.

4. 反例.

1. 没有原函数的可积函数

$f(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(Darboux 定理).

2. 在闭区间上有原函数，但不可积

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

则 $g(x)=f'(x)=\begin{cases} 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

∴ g 有原函数 f，但由于 g 无界 $[-1,1]$ 上，∴ g 不可积

Remark：闭区间上有原函数的有界函数也可能不可积

5. 微分方程的相关定理

Theorem 1.（皮卡定理）：设初值问题 (E)：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R: |x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b$ 内连续，且对 y 满足 Lipschitz 条件

i.e. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$，则 (E) 在区间 $I=[x_0-h, x_0+h]$ 上有并且只有一个解

其中 $h=\min(a,\frac{b}{M})$，且 $M\geq\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$

Theorem 2.（延拓定理）：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，P_0 为 G 内 ∀ 点，

设 Γ 为方程经 P_0 点的任一条积分曲线，则曲线 Γ 将在 G 内延伸到边界

推论：设 $f(x,y)$ 在 G 内连续，且对 y 满足局部 lipschitz 条件，则经过 G 内 ∀ 一点 P_0 有

唯一的积分曲线 Γ，并且 Γ 在 G 内延伸到边界

eg. $p(x)dy=Q(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{Q(y)}=\frac{dx}{p(x)}$

问题：$Q(y)$ 或 $p(x)$ 不恒为 0，但是有一些点为 0 怎么办？

如 $Q(y_0)=0$，由唯一性定理，$y=y_0$ 显然为方程的解，

故这是唯一解，所以大部分情况可以放心地除过去，只用再加上零点时的解

由 扫描全能王 扫描创建

2.(1). 令 $u=y/x$. 则 $u+x\frac{du}{dx}=u^2-2 \Rightarrow \frac{u-2}{u+1}=Cx^3$.

$\therefore \frac{y-2x}{y+x}=Cx^3$. $(C\neq 0)$

此外 $u=2$. $u=-1$ 亦为解 $\Rightarrow$ $y=2x$ 或 $y=-x$ 亦为解.

(3). 类似有 $\frac{dx}{x}=-\frac{u^2-u+1}{u(u-1)(u-2)}du$.

$\therefore x^2=C\frac{(u-1)^2}{|u|(u-2)^3} \Rightarrow \frac{x^2u(u-2)^3}{(u-1)^2}=C$ $(C\neq 0)$.

$\therefore \frac{y(y-2x)^3}{(y-x)^2}=C$. 此外 $y=x$ 亦为解. 注 $y=0$ 非特解.

3.(1). $u=x+2$. $v=y+1$. 则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v}$.

令 $t=v/u$. 则 $dv=t\,du+u\,dt$.

$\therefore t+u\cdot\frac{dt}{du}=\frac{1+t}{1-t} \Rightarrow \arctan t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)=\ln|u|+C$

$\therefore \frac{e^{\arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}=C\cdot u$. $(C\neq 0)$ 且 $t\neq 1$

补充内容

1. $\varphi(x)=\int_{p(x)}^{q(x)}f(x,u)du$. 则 $\varphi'(x)=f(x,q(x))\cdot q'(x)-f(x,p(x))\cdot p'(x)$

$+\int_{p(x)}^{q(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,u)du$.

2. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$. $(s>0)$.

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$. $(p,q>0)$.

Theorem1. Γ 函数性质. $(s>0)$.

(1). $\forall s>0$ 有 $\Gamma(s)>0$. 且 $\Gamma(1)=1$.

(2). $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

(3). $\log\Gamma(s)$ 为 $(0,+\infty)$ 上 凸函数.

Theorem2 $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

应用: eg1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\beta}x\cdot\cos^{\alpha}x\,dx$. $(\alpha,\beta>-1)$.