中国科学技术大学 2018-2019 学年第二学期
数学分析(B2) 期末考试试卷(A卷)参考解答

一、(本题 10 分) 设已知方程 $\phi\left(x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$. 求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 记 $w=x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}$. 则 $\phi(w)=0$. 分别对 x,y 求导, 得

$$\phi'(w)\cdot\left(1+\frac{z_x'}{y}+\frac{z_x'x-z}{x^2}\right)=0,$$
$$\phi'(w)\cdot\left(\frac{z_y'y-z}{y^2}+\frac{z_y'}{x}\right)=0.$$

......(5分)

因此,

$$1+\frac{z_x'}{y}+\frac{z_x'x-z}{x^2}=0,\quad \frac{z_y'y-z}{y^2}+\frac{z_y'}{x}=0.$$

因而

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\frac{x^2y}{x+y}.$$

......(10分)

二、(本题 10 分) 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分面积。

解 记 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$. 则 D 的面积为 $\sigma(D)=\pi$. 对于曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 有 $z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad z_x'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ......(2分)

于是所求曲面面积为

$$\begin{aligned} S&=\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy && (6分)\\ &=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy\\ &=\iint_D\sqrt{2}\,dxdy && (8分)\\ &=\sqrt{2}\cdot\sigma(D)\\ &=\sqrt{2}\pi. && (10分)\end{aligned}$$

三、(本题 10 分) 求积分 $I=\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV$，其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内部。

解　作变换 $x=au, y=bv, z=cw$. 则 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc.$ 2分

记 $B=\{(u,v,w)\,|\,u^2+v^2+w^2\leqslant 1\}$.

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV \\ &= \iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}dudvdw \\ &= abc\iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}dudvdw \qquad (......4分) \end{aligned}$$

作球坐标变换 $u=r\sin\theta\cos\varphi,\ v=r\sin\theta\sin\varphi,\ w=r\cos\theta,\ r\in(0,1),\ \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi)$. 则有

$$\begin{aligned} \iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}dudvdw &= \iiint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr \qquad (......8分) \\ &= 4\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

故 $I=\frac{\pi}{2}abc.$ (......10分).

四、(本题 10 分) 设 $\vec{v}=\frac{y^2+z^2}{r^3}\mathbf{i}-\frac{xy}{r^3}\mathbf{j}-\frac{xz}{r^3}\mathbf{k}$ 是定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上的向量场，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 证明：$\vec{v}$ 的旋度 $\nabla\times\vec{v}=0$;　　　　(2) 求向量场 $\vec{v}$ 的势函数。

解　(1) $\nabla\times\vec{v}$ 的第一个分量等于

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial y}\frac{xz}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{xy}{r^3}\\&=\frac{3xz}{r^4}\frac{y}{r}-\frac{3xy}{r^4}\frac{z}{r}=0;\end{aligned}$$

第二个分量等于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\frac{y^2+z^2}{r^3}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{xz}{r^3}\\&=\frac{2z}{r^3}-\frac{3(y^2+z^2)}{r^4}\frac{z}{r}+\frac{z}{r^3}-\frac{3xz}{r^4}\frac{x}{r}\\&=\frac{1}{r^5}(3zr^2-3zr^2)=0;\end{aligned}$$

第三个分量等于

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{r^3}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2+z^2}{r^3}\\&=-\frac{y}{r^3}+\frac{3xy}{r^4}\frac{x}{r}-\frac{2y}{r^3}+\frac{3(y^2+z^2)}{r^4}\frac{y}{r}\\&=\frac{1}{r^5}(-3yr^2+3yx^2+3y(y^2+z^2))=0.\end{aligned}$$

(......5分)

(2) 设 $\vec{v}=\nabla\phi$, 由 $\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{xz}{r^3}$ 可得

$$\phi(x,y,z)=\frac{x}{r}+f(x,y).$$

代入到等式 $\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{xy}{r^3}$ 可得 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. 最后利用

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r}$$

可得 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, 所以

$$\phi=\frac{x}{r}+c.$$

(......10分)

五、(本题 15 分) 设向量场 $\vec{v} = -x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{4}}\mathbf{k}$，曲面 $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$, 它的正向是外法向。求向量场 $\nabla\times\vec{v}$ 在定向曲面 S 上的积分

$$\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

解　(法1) 直接计算可得

$$\nabla\times\vec{v} = \frac{y}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}}\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}}\mathbf{j} + y\mathbf{k}. \qquad (......2分)$$

单位球面的单位外法向场 $\vec{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$，所以

$$\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n} = yz.$$

将曲面 S 分为两部分：$S^+:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $S^{-1}:\ z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 他们有相同的面积元 $dS = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$. 所以

$$\begin{aligned}
&\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_S yzdS \\
&= \iint_{S^+} yzdS + \iint_{S^-} yzdS \\
&= \iint_{x^2+y^2<1} y\sqrt{1-x^2-y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy - \\
&\quad \iint_{x^2+y^2<1} y\sqrt{1-y^2-z^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

(法2) 记 $\vec{F} = \frac{2}{\sqrt{3}}y\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{3}}x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. 则在 S 上 $\nabla\times\vec{v} = \vec{F}$. 因为 $\vec{F}$ 在 $B = \{x^2+y^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上光滑. 故, 由 Gauss 公式, 有

$$\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_B \mathrm{div}\vec{F}\,d\sigma = 0.$$

六、(本题 15 分) 计算无穷积分 $I = \int_1^{+\infty} t^2 e^{t(2-t)}\, dt$.

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^{+\infty} t^2 e^{-(t-1)^2+1}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} (u+1)^2 e^{-u^2+1}\, du && (t = u+1) \\
&= e\left[\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\, du + 2\int_0^{+\infty} u e^{-u^2}\, du + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du\right] \\
&= e\left[\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sqrt{w} e^{-w}\, dw + \int_0^{+\infty} e^{-w}\, dw + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} w^{-\frac{1}{2}} e^{-w}\, dw\right] \\
&= e\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(1) + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= e\left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) \\
&= e\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi} + 1\right)
\end{aligned}
$$

七、(本题 15 分) 设 $f(x)=\cosh(x-1),\ 0\leqslant x\leqslant 1$. 求该函数的余弦级数, 并证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{e^2-1}.$$

解 将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-1,1]$ 使之成为偶函数, 再以 2 为周期延拓到 $(-\infty,\infty)$ 使之成为整个数轴上的偶函数, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续.

$$a_0=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1\cosh(x-1)dx=2\sinh(x-1)\Big|_0^1=2\sinh 1.$$

(......3分)

$$\begin{aligned}
a_n&=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1\cosh(x-1)\cos n\pi x\,dx\\
&=2\left[\frac{\cosh(x-1)}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sinh(x-1)\sin n\pi x\,dx\right]\\
&=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sinh(x-1)\sin n\pi x\,dx\\
&=-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\sinh(x-1)\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cosh(x-1)\cos n\pi x\,dx\right]\\
&=\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}a_n.
\end{aligned}$$

故, $a_n=\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}$. (...... 10 分)

于是所求 Fourier 级数为

$$\cosh(x-1)=\sinh 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}\cos n\pi x,\ x\in[0,1].$$

(......13分)

在上式中取 $x=0$ 可得

$$\cosh 1=\sinh 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}.$$

因而,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{e^2-1}.$$

(......15分)

八、(本题 15 分, 每小题 5 分) 设 $F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$. 求证:

1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

3) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$.

证明 1) 记 $f(x,t)=\frac{\sin tx}{1+x^2}$. 则 $|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$. 由于 $f(x,t)$ 是二元连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ 收敛, 根据 Weierestrass 判别法知 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

2) 求偏导, 可得 $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{x\cos tx}{1+x^2}$. 因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 在 $x>1$ 递减趋于 0, 且对于任意 $t_0>0$, $\left|\int_{t_0}^{b}\cos tx\,dx\right|\leqslant\frac{2}{t_0}$. 根据 Dirichlet 判别法知, $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛. 故, $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$F'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx \tag{1}$$

3) 对 (1) 式右端分部积分, 得

$$\begin{aligned}F'(t)&=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx\\&=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx+\frac{2}{t}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

故,

$$tF'(t)+F(t)=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx. \tag{2}$$

上式还可表为

$$tF'(t)-F(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx. \tag{3}$$

因为 $\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}$ 关于 t 的导函数为 $\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}$, 它有控制函数 $\frac{x}{(1+x^2)^2}$. 根据 Weierestrass 判别法知 $tF'(t)-F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$(tF'(t)-F(t))'=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

这说明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二阶导数, 且

$$tF''(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

对上式右端分部积分, 得

$$\begin{aligned}
tF''(t) &= \frac{\cos tx}{1+x^2}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-t\sin tx}{1+x^2}\,dx \\
&= -1 + t\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx \\
&= -1 + tF(t).
\end{aligned}$$

因而 $F''(t) - F(t) = -\frac{1}{t}$.