习题课讲义FINAL

郑宇

Part I

1 第十四周作业参考答案

1.1 习题13.3

1.试用两种方法计算极限：$\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$.

<u>METHOD A:</u>

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_{\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2}d\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}arctan\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big|_{\alpha}^{1+\alpha} \\
&= \frac{arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{\sqrt{1+\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \lim_{a\to0}\int_{a}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{4}
$$

<u>METHOD B:</u>

$$
0\leqslant\lim_{\alpha\to0}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx\leqslant\lim_{\alpha\to0}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}=0
$$

$$
\Rightarrow \lim_{a\to0}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0
$$

同理，

$$
\lim_{a\to0}\int_1^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0
$$

$$\therefore \lim_{\alpha\to0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$$

$$\xlongequal{\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\in C[0,1]\times[0,1]}\int_0^1\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2.$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$，求$F'(\alpha)$.

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left[f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha)\right]dx+f(2\alpha,0)$$

3.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,dt.\quad c,x\in\ [a,b)$$

满足常微分方程

$$y''+k^2y=f(x).$$

$$y'(x)=\frac{1}{k}\left[0+k\int_c^x f(t)cosk(x-t)dt\right]$$

$$=\int_c^x f(t)cosk(x-t)dt$$

$$y''(x)=f(x)-k\int_c^x f(t)sink(x-t)dt$$

$$=f(x)-k^2y(x)$$

记住公式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(x,y,t)\,dt\right)=\varphi'(x)f(x,,y,\varphi(x))-\psi'(x)f(x,y,\psi(x))+\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}dt$$

4.应用对参数进行微分或积分的方法，计算下列积分：

(2)$\int_0^{\pi}ln\left(1-2acosx+a^2\right)dx\quad(0\leqslant a<1)$

(4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln\frac{1+acosx}{1-acosx}\cdot\frac{dx}{cosx}(0\le a<1)$

(2)

$$I(a)=\int_0^{\pi}ln\left(1-2\cos x+a^2\right)dx\quad(0\leqslant a<1)$$

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\int_0^{x}\frac{\frac{1}{a}(1-2a\cos x+a^2)+2a-\frac{1}{a}-a}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{a}+\frac{a^2-1}{a}\int_0^{x}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\alpha+\beta\cos x}dx &= \int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+\beta\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\\
&= \int_0^{\pi}\frac{2}{(\alpha-\beta)\tan^2\frac{x}{2}+\alpha+\beta}d\tan\frac{x}{2}\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2}{(\alpha-\beta)t^2+\alpha+\beta}dt\\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}t\right)^2}d\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}t\\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}t\right)\Big|_0^{+\infty}\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}
\end{aligned}$$

代入$\begin{cases}\alpha=1+a^2\\ \beta=-2a\end{cases}$，则有

$$\int_0^{x}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}dx=\frac{\pi}{1-a^2}$$

$$\therefore I'(a)=\frac{\pi}{a}+\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{\pi}{1-a^2}=0$$

$$\Rightarrow I(a)=C=I(0)=0.$$

(4)

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}(0\leqslant a<1)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+y\cos x}dydx\\
&= \int_{-a}^{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y\cos x}dxdy
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\alpha+\beta\cos x}dx &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}}t\Big|_0^1\\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y\cos x}dx=\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

$$\begin{aligned}
I(a) &= 2\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}dy\\
&\xlongequal{\arctan A+\arctan A^{-1}=\frac{\pi}{2}}\pi\int_0^{a}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin a
\end{aligned}$$

1.2 习题13.4

1.确定下列广义参变量积分的收敛域：

(1)$\int_0^{+\infty} x^u dx$;

(3)$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u \ln x}$

(5)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}dx$

(1)分成0到1和1到$+\infty$两个部分的积分，则有

$$\begin{cases} u > -1 \\ u < -1 \end{cases} \Rightarrow u \in \phi$$

(3)

$$u \leqslant 1, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u \ln x} \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

$$u > 1, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u \ln x} \leq \frac{1}{\ln 2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u} < \infty$$

故收敛域为$(1, +\infty)$.

(5)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}dx = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}dx$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}} \quad (x \to 0+)$$

$$\alpha - 2 < 1 \Rightarrow \alpha < 3$$

故第一个积分收敛当且仅当$\alpha < 3$.

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

$$\alpha + 1 > 1 \Rightarrow \alpha > 0$$

故当$\alpha > 0$时，第二个积分收敛(但此时不能保证是充要的)

进一步讨论，当$\alpha \leqslant 0$时,

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)} \geqslant \frac{\sin^2 x}{1+x} = \frac{1-\cos 2x}{2(1+x)}$$

不等式右边积分后发散.

故收敛域是(0,3).

2.研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

(1)$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}dx \quad (u \in \mathbb{R})$

(3)$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx \quad (\alpha \geq 0)$

(5)$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$

(1)只需注意到

$$\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

右侧积分收敛，故原积分一致收敛

(3))$\alpha > 0$时，

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

但

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0 = \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \Big|_{\alpha=0}$$

故不一致收敛

(5)

$$\exists M, \left|\int_1^A \cos x dx\right| \leqslant M, \forall A \geqslant 1$$

且$\int_1^A \cos x dx$与α无关

$\therefore \int_1^A \cos x dx$关于$\alpha \in [0, +\infty)$一致有界.

另一方面，$\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}$关于x单调递减且关于$\alpha$一致趋于0.

由Dirichlet判别法，$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx$在$[0, +\infty)$一致收敛.

3.(反证)假若一致收敛，则$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall M_1, M_2 > N, u \in [\alpha, \beta)$,有$|\int_{M_1}^{M_2} f(x, u) dx| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x, \beta) du\right| &= \left|\int_{M_1}^{M_2} \lim_{u \to \beta-} f(x, u) dx\right| \\
&= |\lim_{u \to \beta-} \int_{M_1}^{M_2} f(x, u) dx| \\
&\leqslant \lim_{n \to \beta-} \sup \left|\int_{M_1}^{M_2} f(x, u) dx\right| \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{M_1}^{M_2} f(x, \beta) dx$收敛，矛盾！

4.证明$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$是连续且可微的函数.

proof:

令$f(x, \alpha) \triangleq \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$,则由$|f(x, \alpha)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$知$F(\alpha)$一致收敛，从而连续.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{2(x+\alpha)\cos x}{\left[1+(x+\alpha)^2\right]^2}$$

考虑$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx = \int_a^{\infty} -\frac{2xcos(x-a)}{(1+x^2)^2} dx$

$$\left|-\frac{2xcos(x-a)}{(1+x^2)^2}\right| \leq \frac{2x}{x^4 + 0\left(x^4\right)} \sim \frac{1}{x^3} \quad (x \to +\infty)$$

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$一致收敛，从而$F(\alpha)$可微.

5.计算下列积分:

(2)

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx \quad (a > -1) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^a e^{-ux}e^{-x}dudx \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} e^{-ux}e^x dx = \int_0^{+\infty} e^{-(u+1)x}dx$在$[min(a,0),+\infty)$上一致收敛.

$$\therefore I(a) = \int_0^a \int_0^{+\infty} e^{-(u+1)x}dxdu = \int_0^a \frac{du}{u+1} = \ln(1+a)$$

(4)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha,\beta > 0) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_\alpha^\beta xe^{-ux^2}dudx \end{aligned}$$

不妨设$\alpha \leqslant \beta$

$$xe^{-ux^2} \leq xe^{-\alpha x^2}, \forall u \in [\alpha,\beta]$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-ux^2}dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛

$$\therefore I = \int_\alpha^\beta \int_0^{+\infty} xe^{-ux^2}dx = \int_\alpha^\beta \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \left[e^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2} - e^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right]dx \quad (0 < a < b) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_a^b \frac{2u}{x^2}e^{-\frac{u^2}{x^2}}dudx \end{aligned}$$

$$\frac{2u}{x^2}e^{-\frac{u^2}{x^2}} \leqslant \frac{2b}{x^2}$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{2u}{x^2}e^{-\frac{u^2}{x^2}}dx$在$(a,b)$上一致收敛.

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int_a^b \int_0^{+\infty} \frac{2u}{x^2}e^{-\frac{u^2}{x^2}}dxdu \\ &= \int_a^b \int_0^{+\infty} 2ue^{-u^2y^2}dxdu \\ &= \int_a^b \int_0^{+\infty} 2e^{-z^2}dzdu \\ &= \int_a^b \sqrt{\pi}du = \sqrt{\pi}(b-a) \end{aligned}$$

6.(1)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \\
=&0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = a
\end{aligned}$$

(3)注意到$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(A)$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{x} dx \\
&= \frac{\pi}{4}[\operatorname{sgn}(a+b) + \operatorname{sgn}(a-b)] \\
&= \begin{cases} 0 & a < b \\ \frac{\pi}{4} & a = b \\ \frac{\pi}{2} & a > b \end{cases}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1}{-2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1} de^{-x^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx^{2n-1} \\
&= \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2(n-1)} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{2n-1}{2} I_{n-1} \\
\Rightarrow I_n &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

2 第十五周作业参考答案(不用交的那次)

2.1 习题13.5

1.略

3.(1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) P\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^3 x d\sin^2 x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt\\ &= \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma(6)}\\ &= \frac{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2\times 5!}\\ &= \frac{3\pi}{512}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-at}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}dt &\xlongequal{u=at} \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}dx &\xlongequal{t=\ln\frac{1}{x}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}t^{\frac{1}{2}}dt\\ &\xlongequal{s=\frac{1}{2}t} \int_0^{+\infty} e^{-s}(2s)^{\frac{1}{2}}2ds\\ &= 2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x-1)^2\cdot\sqrt[n]{\frac{2-x}{x-1}}dx &\xlongequal{t=x-1} \int_0^1 t^{2-\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt\\ &= B\left(3-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\\ &\to B(3,1) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Part II

3 隐函数求导

基础：复合函数求偏导（换元+链式法则）

隐函数求导(以下拷贝自第五周习题课讲义)

一般我们有两种方法进行计算.接下来利用如下一例进行具体说明.

设方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$，唯一确定了隐函数$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

3.1 方法一：链式法则

对x求偏导，得

$$\begin{cases}F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

由此解得$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.
对y求偏导，得

$$\begin{cases}F_y+F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}=0\\G_y+G_u\frac{\partial u}{\partial y}+G_v\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

由此解得$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

3.2 方法二：微分法

直接求微分，得

$$\begin{cases}F_xdx+F_ydy+F_udu+F_vdv=0\\G_xdx+G_ydy+G_udu+G_vdv=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\diamondsuit dx+\heartsuit dy\\dv=\clubsuit dx+\spadesuit dy\end{cases}$$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\diamondsuit,\frac{\partial u}{\partial y}=\heartsuit,\frac{\partial v}{\partial x}=\clubsuit,\frac{\partial v}{\partial y}=\spadesuit$.
实际上两种方法的计算量是差不多的，自己选自己顺手的来就好，不用在选择哪个方法上面花时间.

4 二重积分与三重积分

期中后的第一、二型曲线/面积分均涉及二重积分和三重积分，所以即使期末不单独考二、三重积分，这两个积分也非常重要。可以看期中复习讲义中有关内容进行回顾，此处略。

5 曲线积分和曲面积分

最重要的事情：始终注意对称性

5.1 第一型曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

步骤：

（1）曲线参数化并确定参数范围（若曲线是两个曲面之交，则曲线由两个具有(x,y,z)三个变量的方程决定，则消去一个变量再对剩余两个进行参数化；若曲线分段，则分别计算）

（2）计算$ds = *****dt$

（3）代进去算吧~ ~ ~

§例1.计算$I_1 = \int_L x^2\,ds$和$I_2 = \int_L xy\,ds$，$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解法一

利用轮换对称性，我们有$\int_L x^2\,ds = \int_L y^2\,ds = \int_L z^2\,ds$，故

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{1}{3}a^2\int_L ds = \frac{2\pi a^3}{3}$$

同样利用轮换对称性，有

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_L (xy+yz+zx)\,ds = \frac{1}{6}\int_L \left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]ds = \frac{1}{6}\int_L (0-a^2)\,ds = -\frac{\pi a^3}{3}$$

解法二

消去z得$x^2+y^2+(x+y)^2=a^2 \Rightarrow 2x^2+2y^2+2xy=a^2$

利用线代知识可知作变换$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$，得$3x'^2+y'^2=a^2$.

令$\begin{cases} x' = \frac{a}{\sqrt{3}}cos\,t \\ y' = a\,sin\,t \end{cases}$ 则得曲线参数化：$\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}cos\,t - sin\,t) \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}cos\,t + sin\,t) \\ z = -\sqrt{\frac{2}{3}}a\,cos\,t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 接下来经过简单计算可得$ds = adt$，代入即可算出I_1和I_2.

解法三 旋转坐标系使曲线L落在新坐标系的坐标平面上，这样就能使曲线由一个有两个变量(u,v)的方程决定，进而可以更容易地进行参数化（本题是圆，直接拿角度当参数就好了）。具体做法这里略去，有兴趣的同学可以尝试。

(提示：新的坐标系标架可以是$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$)

5.2 第一型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du\,dv$$

步骤:

（1）曲面参数化并确定参数范围

（2）算出$dS = *****dudv$

（3）代进去算吧 ~ ~ ~ ~

参数化常用的两种方法

1.参数化其中某个变量：以z为例，参数化后化为$\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$，其中D为S在xOy平面的投影。值得一提的是，这里z_x和z_y是z分别对x和y的偏导数，对于曲面显示表示$z = f(x,y)$，显然有$z_x = f'_x, z_y = f'_y$；对于曲面隐式表示$F(x,y,z) = 0$，则有$z_x = \frac{-F'_x}{F'_z}, z_y = \frac{-F'_y}{F'_z}$（不一定要记，会隐函数求导直接就能现场推）

2.球面参数化，则有$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = R^2 \sin\theta$

§例2.计算$I = \iint_S (ax+by+cz+l)^2\,dS, S: x^2+y^2+z^2 = R^2$

由对称性易知

$$\iint_S xy\,dS = \iint_S yz\,dS = \iint_S zx\,dS = \iint_S x\,dS = \iint_S y\,dS = \iint_S z\,dS = 0$$

则

$$\begin{aligned}
I = \iint_S (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+l^2)\,dS &= a^2\iint_S x^2\,dS + b^2\iint_S y^2\,dS + \iint_S z^2\,dS + 4\pi R^2 l^2 \\
&= (a^2+b^2+c^2)\iint_S x^2\,dS + 4\pi R^2 l^2 \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS + 4\pi R^2 l^2 \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_S R^2\,dS + 4\pi R^2 l^2 \\
&= 4\pi R^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}R^2 + l^2\right)
\end{aligned}$$

5.3 第二型曲线积分

$$\begin{aligned}
&\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\
&\quad = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt
\end{aligned}$$

相关计算题计算方法：

（1）参数化,化成上式形式，此时化成了定积分（题目通常是分段的）

（2）利用Green公式：

定理：D是由有线段光滑曲线所围成的平面区域，$P, Q \in C^1(D)$，则

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

注:

$[1]\partial D$方向关于区域D正方向，即沿着边界走，区域在左边

$[2]$实际上$d(Pdx + Qdy) = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy$

$[3]$很多时候区域不满足定理条件，要"挖去"间断的点——这个非常重要！

$[4]$曲面面积计算公式：

$$|D| = \iint_D 1\, dxdy = \oint_L xdy = \oint_L (-y)dx = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$$

（3）利用Stokes公式化为第二型曲面积分来算:

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^*} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{S^*} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

§例3.计算$I = \oint_L e^{-(x^2+y^2)}[cos(2xy)dx + sin(2xy)dy]$，L为单位圆周，方向逆时针.

利用对称性易知$I = 0$.

§例4.计算$I = \oint_\Gamma \frac{e^y}{x^2+y^2}[(xsin\, x + ycos\, x)dx + (ysin\, x - xcos\, x)dy]$，$\Gamma$为单位圆周，顺时针方向.

令$P = \frac{e^y}{x^2+y^2}(xsin\, x + ycos\, x), Q = \frac{e^y}{x^2+y^2}(ysin\, x - xcos\, x)$，可以算得$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

考虑到原点无意义，不能直接用Green公式得出该积分为0，但是,若令$\Gamma_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$，则我们有

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^y}{x^2 + y^2}[(xsin\, x + ycos\, x)dx + (ysin\, x - xcos\, x)dy] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{\Gamma_\varepsilon} e^y[(xsin\, x + ycos\, x)dx + (ysin\, x - xcos\, x)dy] \\ &\overset{Green}{=\!=\!=} \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D (-2e^y cos\, x)\, dx\, dy \\ &\overset{Mean\ value\ thereoms\ for\ definite\ integers}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} -2\pi e^\eta cos\xi \to -2\pi \qquad (\varepsilon \to 0+) \end{aligned}$$

第一型曲线积分和第二型曲线积分的关系:

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz &= \int_{L_{AB}}(P,Q,R)(dx,dy,dz)=\int_{L_{AB}}\vec{F}d\vec{r}\\ &= \int_{L_{AB}}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\int_{L_{AB}}(Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)ds\end{aligned}$$

5.4 第二型曲面积分

$$\iint_{S^*} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

相关计算题计算方法:

（1）合一投影法:

S^*往坐标平面投影得到D,下以往xOy平面投影为例:

令$\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=f(x,y)\end{cases}$，则法向量为

$$\vec{n}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1)$$

从而

$$\begin{aligned}&\iint_{S^*} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\\ =&\iint_D\left[P(x,y,f(x,y))\frac{-f_x}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}+Q\frac{-f_y}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}+R\frac{1}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right]\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy\\ &=\pm\iint_D\left[P(-f_x)+Q(-f_y)+R\right]dxdy\end{aligned}$$

其中S^*上侧取“+”号，下侧取“-”号.

（2）分项处理法:

利用线性性，我们有

$$\iint_{S^*} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{S^*} Pdydz+\iint_{S^*} Qdzdx+\iint_{S^*} Rdxdy$$

而

$$\iint_{S^*} Pdydz=\iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv$$

即每项都可以化成二重积分。需要注意的是，这里S^*有方向，所以雅各比行列式$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$不需要加绝对值。如果加了，那就要按照$S^*$法向量和坐标平面的夹角来决定正负——这里不能搞错了，不然(据我经验)要扣不少分。

（3）直接算$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS$,有时候$\vec{v}\cdot\vec{n}$很好算，那直接用这个式子就将第二型曲面积分化成了第一型曲面积分了。

（4）利用Gauss公式:

$$\oiint_{S^*_{outer}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

注:

[1]注意条件，P，Q，R必须是一阶连续可微的，如果题中被积函数在曲面包含区域内存在非可去间断点，则需要“挖去”包含那个点的一块体积（非常重要）。习题11.5的3就是这样的，很多同学当时都直接算出0了.

[2]注意补曲面使之封闭，到最后算的时候减去补上那一面的积分值——这个非常重要

[3]确保曲面朝向是向外的，如果向内，必须加负号（非常重要）

§例5.习题11.5的3

易算得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

考虑到原点处无意义，我们不能直接得出积分为0的结论。

考虑球面$\partial B_\varepsilon(0)$，则原积分与在这个球面上的第二型曲面积分一样（方向仍然是朝外）

而

$$\begin{aligned}\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} &= \frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &\overset{Gauss}{=\!=} \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{B_\varepsilon(0)} 3dxdydz \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

简单的延伸：计算$I = \iint_{S^*} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(ax^2+by^2+cz^2)^3}}$，$S*: x^2+y^2+z^2 = 1$外侧(a,b,c>0)

答案：$\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$

§例6.计算$I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$，$L: \begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ x/a + z/h = 1 \end{cases}$ $(a, h > 0)$，L从x轴正向看逆时针

$$\begin{aligned} I &\overset{Stokes}{=\!=} -2\iint_{S^*} dydz + dzdx + dxdy \\ &= -2\iint_S (1,1,1)\cdot\vec{n}dS\end{aligned}$$

而$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h, 0, a)$，故

$$I = -\frac{2}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_S (h+a)dS = \frac{2(h+a)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_D \frac{dxdy}{cos\gamma}$$

其中D是S在xOy平面的投影区域，面积很好算，为πa^2，另外$cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$，代入即得答案

应用：求体积

$$\Delta V = \iiint_V 1dV = \frac{1}{3}\oiint_{S^*_{outer}} xdydz + ydzdx + zdxdy = \oiint_{S^*_{outer}} xdydz/ydzdx/zdxdy$$

5.5 梯度、旋度、散度

定义：略

公式：（为防止不必要的记忆，我只列出一部分）以下没有标向量箭头的表示函数

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla[f(u)] = f'(u)\nabla u$$

$$\nabla(f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f\nabla\vec{v}$$

$$\nabla \times (f\vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla(\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot \nabla \times \vec{f} - \vec{f} \cdot \nabla \times \vec{g}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$$

最后两个就是“梯度无旋，旋度无散/无源无汇”

理论证明常用Gauss和Stokes公式的如下形式：

$$Gauss: \quad \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n}dS = \iiint_V \nabla\vec{v}dV$$

$$Stokes: \quad \oint_L \vec{v}\vec{T}ds = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}dS$$

有势场、保守场、无旋场：掌握各自定义及相互关系（略）

Green公式：

第一Green公式：

$$\iiint_V \varphi\Delta\psi dV = \iint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS - \iiint_V \nabla\varphi\nabla\psi dV$$

第二Green公式：

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \iint_S (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS$$

证明：直接利用Gauss公式即得第一Green公式，再交换第一Green公式中的φ和ψ，联立可得第二Green公式.

6 Fourier分析

7 广义积分和含参变量积分

8 Euler积分