

## 一维传感网中混合数据传输的能量均衡<sup>\*</sup>

夏先进, 李士宁, 张 羽, 李志刚, 杨 哲

(西北工业大学 计算机学院, 陕西 西安 710129)

通讯作者: 夏先进, E-mail: jinchenxia@mail.nwpu.edu.cn

**摘 要:** 无线传感器网络的固有通信特征会引发能耗不均衡现象, 进而产生能量空洞问题; 混合数据传输是新近提出的一种能量空洞避免策略, 其能量均衡性能主要取决于各节点的传输概率。然而, 传输概率的设置还缺乏相关理论模型的指导, 而且在节点传输距离受限的条件下能否通过混合传输策略实现全网能量均衡, 还有待进一步研究。将一维网络中混合传输策略的能量均衡问题转化为传输概率的优化分配问题, 通过相应的形式化模型, 推导传输概率的精确表达。研究中发现: 传输概率主要取决于节点的位置, 但当网络片段的个数超过某一阈值时, 传输概率的取值非法, 无法应用混合传输策略均衡网络能耗。在此基础上, 从理论上给出了全网能量均衡的条件, 证明仅当网络片段数不超过  $m_0$  时全网能量均衡才能实现,  $m_0$  仅取决于一个文中新发现的系数  $\alpha$ ,  $\alpha$  是通信系统的能耗溢价率。还分析了传输距离设置对能量均衡的影响, 给出了一般情况下混合传输策略的能量均衡上限。通过仿真实验对所给出的能量均衡条件进行了验证, 实验结果与理论分析表明: 该条件下, 基于所提方法设置传输概率, 能够均衡所有节点的能耗。

**关键词:** 无线传感器网络; 混合数据传输; 全网能量均衡; 传输概率; 能量均衡条件

**中图法分类号:** TP391

中文引用格式: 夏先进, 李士宁, 张羽, 李志刚, 杨哲. 一维传感网中混合数据传输的能量均衡. 软件学报, 2015, 26(8): 1983–2006. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4710.htm>

英文引用格式: Xia XJ, Li SN, Zhang Y, Li ZG, Yang Z. Energy balance of mixed data transmission in 1D sensor networks. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(8): 1983–2006 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4710.htm>

## Energy Balance of Mixed Data Transmission in 1D Sensor Networks

XIA Xian-Jin, LI Shi-Ning, ZHANG Yu, LI Zhi-Gang, YANG Zhe

(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** Energy hole is an inherent problem in multi-hop sensor networks. It may cause the early death of some nodes and result in a short network lifetime. Mixed data transmission, which randomly propagates data one-hop or two-hop away in each step, has been developed for energy balancing. The performance of this scheme depends heavily on the setting of transmission probabilities. However, no general rules have been proposed to guide the calculation of these probabilities, and little study has done on whether the energy of all nodes are able to be balanced by this scheme, especially under the constraints of limited communication ranges. This paper formulates the problem of energy balancing as an optimal transmission probability allocation problem. It reveals that the transmission probability is mainly determined by the locations of each node; however, the values of the probability become invalid if the network size exceeds a threshold. This work theoretically investigates the energy balance conditions and presents guidelines for allocating the transmission probabilities. It proves that the global energy balance can be achieved if and only if the network size is not greater than  $m_0$ . It further reveals that  $m_0$  only depends on the communication profiles of the network. Such a profile is indicated by a newly discovered parameter, which is defined as the premium power ratio of the system. Finally, it extends the two-hop based mixed data transmission scheme to a general model and investigates the impact of the combinations of transmission ranges on energy balancing. Comprehensive simulations are

<sup>\*</sup> 基金项目: 国家重大科技专项(2012ZX03005007); 陕西省自然科学基金(2013JQ8041); 西北工业大学基础研究基金(JC20110268)

收稿时间: 2014-01-02; 修改时间: 2014-05-07; 定稿时间: 2014-07-19

conducted to validate the energy balance conditions. Both the numerical results and theoretical analysis confirm that the global energy balance can be achieved if transmission probabilities are allocated according to the proposed rules.

**Key words:** wireless sensor network; mixed data transmission; global energy balance; transmission probability; energy balance condition

无线传感器网络具有广阔的应用前景,近年来引起了社会的广泛关注.其中,一维传感网是一种重要的网络类型,已成功用于隧道、桥梁和能源管道等基础设施的结构健康监测<sup>[1,2]</sup>.这些应用中,传感网主要用于多跳数据收集,其多对一的通信模式<sup>[3]</sup>使得网络中节点负载不均,靠近 Sink 的节点因承担了更多的通信活动而过早失效,形成能量空洞<sup>[1]</sup>;同时,这些节点的失效又会进一步增大其周围节点的负载,加快它们的失效,这种现象被称为漏斗效应<sup>[4]</sup>.漏斗效应会引起 Sink 与其他节点的连接中断,导致网络瘫痪,而遗留节点的剩余电量又无法有效利用,造成资源浪费.已有研究表明:大多数网络在失效时剩余的能量高达 70%,中等以上规模的网络中甚至高达 90%<sup>[4,5]</sup>.因此,为提高网络的能量使用效率,需要解决能量空洞问题,而能量均衡是避免能量空洞的有效手段.

混合传输策略通过调节无线收发器的传输功率,均衡不同节点的能耗,其基本思想是:传输数据时,离 Sink 较远的节点通过增大传输功率,使数据报文绕过某些负载较高的“下游”节点,这样既能减小离 Sink 较近节点的通信负载,推迟能量空洞的出现,又能提高离 Sink 较远的节点的能量利用率,有助于延长网络寿命.利用混合传输策略均衡网络能耗的关键,在于如何设置各传输模式的使用率.Guo 等人<sup>[6]</sup>提出分时段地应用两种数据传输模式,所有节点以最小功率多跳通信或者与 Sink 直接通信,以均衡网络能耗,但两种模式的使用率只能通过实验获取.Efthymiou 和 Nikolettseas 等人<sup>[7,8]</sup>提出的方案允许节点随机地选择这两种传输模式,他们形式化地推导了各节点的传输概率.然而,这些研究假设所有节点都能与 Sink 直接通信,它们仅适用于半径小于节点最大传输距离的网络.文献[9]中提出的逐跳/逐 2 跳混合传输策略考虑了传感器节点传输距离受限的特点,文中假设节点只有  $r_1$  和  $r_2$  两种传输距离, $r_2=2r_1$ ,通过合理选择  $r_1$  和  $r_2$  的使用概率,均衡不同节点的能耗.然而,文中没有分析在节点传输距离受限的条件下,能否通过混合传输策略实现全网能量均衡的问题.该问题的研究有助于了解混合传输策略的能量均衡“能力”上限,使相关人员在系统开发早期就可以获知网络性能对应用需求的满足程度,从而指导传感器网络的建设.

在文献[9]的基础上,本文从对逐跳/逐 2 跳混合传输策略的理论分析出发,研究一维传感网中的能量均衡条件和全网能量均衡的实现方法.不同于文献[9]的是:本文提供了相关的理论模型以指导传输概率的设置,并从数学上证明了所提出的方法的能量均衡性能.本文通过一个带状模型分析一维传感网中基于逐跳/逐 2 跳的混合传输策略,将混合数据传输中的能量均衡问题转化为传输概率的优化分配问题,通过构建该问题的形式化模型,推导传输概率的精确表达.在此基础上,进一步分析了全网能量均衡的条件,并得出相关结论.研究表明:混合传输策略的能量均衡“能力”是有限的,且仅与系统的通信参数有关.我们新发现了一个平台无关的系数  $\alpha$ ,  $\alpha$  表示通信系统的能耗溢价率,它是决定混合传输策略的能量均衡能力的关键系数.

本文的主要贡献包括:

- 建立了逐跳/逐 2 跳混合传输策略的分析模型,形式化地推导了传输概率的精确表达并提供了相关方法指导传输概率的设置;文中进一步给出了全网能量均衡的条件,证明仅当网络片段的个数不超过  $m_0$  时全网能量均衡才能实现.
- 发现混合传输策略的能量均衡能力仅取决于系统的通信参数,其中,  $\alpha$  是决定能量均衡能力的关键系数,其值为  $\alpha = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_0}$ ,  $c_i$  表示通信能耗.分析表明,  $m_0$  就是逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限:当  $0 < \alpha < 2$  时,  $m_0 = \lfloor \alpha + 2 \rfloor$ ; 当  $\alpha \geq 2$  时,  $m_0 \approx \lfloor \alpha + 1 \rfloor$ .
- 将逐跳/逐 2 跳混合传输策略扩展至更通用的应用场景,分析了一般情况下传输距离设置与能量均衡的关系.研究发现:为实现全网能量均衡,最大网络片段数( $n$ )与传输距离配置( $r_1, r_2, \dots, r_L$ )需要满足关系:

$$n \leq r_L + \sum_{i=1}^L k_i \cdot \alpha_i, \text{ 其中, } k_i = r_i - r_{i-1}, \alpha_i = \frac{c_L - c_i}{c_i + c_0}.$$

- 通过仿真实验对全网能量均衡的条件和方法进行了验证,实验结果与理论分析都表明:该条件下,利用本文所给出的方法设置传输概率,能够完全均衡所有节点的能耗; $r_2=2r_1$ 时, $m_0$ 是能量均衡能力的准确上界;但 $r_2 \neq 2r_1$ 时,文中给出的 $m_0$ 偏小.

本文第1节回顾相关工作.第2节介绍系统模型并阐述研究问题.第3节和第4节推导传输概率的精确表达并分析全网能量均衡的条件.第5节讨论不同因素对能量均衡的影响,分析一般情况下混合传输策略的能量均衡上限.第6节通过仿真实验对全网能量均衡的条件和方法进行验证.最后总结全文并指出未来的工作.

## 1 相关工作

能量均衡是避免能量空洞的有效手段,混合传输策略通过调节节点的传输功率/传输距离均衡网络能耗.本节综述无线传感器网络中基于混合传输策略的能量均衡研究.

Li 等人<sup>[3]</sup>首次从理论上分析能量空洞问题,指出,能量空洞是由传感网中多对一的通信模式所决定的.文献[10]进一步分析了网络中可能出现能量空洞的具体区域和起止时间,分析表明:多跳平面传感网中,能量空洞只会在以 Sink 为中心的 2 跳圆形区域内.

文献[11]在数据传输中,通过控制数据聚合的等待时间,自适应地调节各节点的通信负载,从而均衡它们的能耗.文献[12–14]研究如何均衡路由树中节点的通信负载,以最大化网络生存期.文中证明这是一个 NP 完全问题,并提供了针对树形拓扑的迭代调整算法.然而,树形拓扑容易形成通信瓶颈,文献[15]将数据传输建模成一个凸优化问题,使用网状拓扑和调度技术,从时间和空间两个维度均衡节点的通信负载.在数据传输中,使用传输距离调节也是均衡网络能耗的重要方法,根据数据的传输方式,相关研究可以分为以下两类:

### (1) 多跳传输

Olariu 和 Stojmenovic<sup>[16]</sup>首次从理论上探讨了数据传输中能否利用传输距离调节避免能量空洞的问题,文中使用环状模型分析多跳传输策略,各环的宽度即为该环节点的传输距离.作者证明:各环宽度相等时,可以最小化数据的端到端传输能耗,但这会在 Sink 周围形成能量空洞.为避免能量空洞,需要合理设置各环宽度,使外环节点的传输距离大于内环节点.文中得出结论:无线通信的链路衰减指数( $\gamma$ )大于 2 时,可以通过调整各环宽度均衡网络能耗,但 $\gamma$ 等于 2 时能量空洞不可避免.文献[17]进一步指出:即使 $\gamma$ 大于 2,也只能在有限范围的网络区域中达到全网能量均衡.

在 Olariu 环状模型<sup>[16]</sup>的基础上,Song<sup>[14]</sup>提出了改进的环状网络模型,将前者的一环划分为多个等宽的子环,允许各子环独立选择传输距离.作者通过合理分配各环的传输距离,最大化网络的生存期.该问题被建模成一个多目标优化模型,其最优解可通过集中式和分布式的算法近似求解.文献[18–20]进一步提供了该问题的不同求解模型和算法.

Azad 和 Kamruzzaman<sup>[21]</sup>系统地研究了多跳数据传输中的能量均衡问题,作者将网络区域划分成等宽的同圆心圆环,圆环宽度( $w$ )和跳距( $h$ )是模型中的两个参数,以二者之积作为节点的单跳传输距离( $d$ ).文中发现, $d = \hat{w} \cdot \hat{h}$ 时网络性能最优,并基于 $\hat{w}$ 和 $\hat{h}$ 提出了 FHS,SVHS 和 AVHS 这 3 种数据传输方案:FHS 将所有节点的单跳传输距离都设置为 $\hat{w} \cdot \hat{h}$ ;SVHS 引入调度策略,周期性地改变所有环的 $h$ 值( $d = \hat{w} \cdot h$ ),以避免特定圆环成为能耗热点;AVHS 独立调度各环的跳距 $h$ ,以进一步提高网络的能量均衡程度.实验结果表明:相对于基本的多跳传输策略,FHS,SVHS 和 AVHS 使网络寿命分别提高了 1 倍、1.5 倍和 2 倍,其中,SVHS 和 AVHS 能够完全均衡各环节点的能耗.然而,调度策略不适用于大规模的传感器网络,而且文中没有考虑节点的通信能力约束.

### (2) 混合传输

文献[6,22,23]分析了网络中单跳和多跳数据传输的能耗分布,并指出:单跳和多跳的传输模式都会出现能耗热点,但二者的能耗分布刚好互补.利用这一特性,文献[6]首次提出结合单跳传输和多跳传输均衡网络能耗:传输数据时,通过调节节点的传输距离,分时段单跳或多跳地传输数据.然而,两种模式的最优工作时间比例仅来自实验仿真,文中没有给出形式化的推导.

Efthymiou 等人<sup>[7]</sup>扩展了文献[6]的工作,首次提出了混合传输策略的分析模型.他们将网络区域划分成同心

圆环,传输数据时,第  $i$  环节点随机选择 Sink 或第  $(i-1)$  环中的节点作为下一跳.文中定义第  $(i-1)$  环的选中概率  $p_i$  为节点的传输概率,并利用能量均衡关系形式化地推导  $p_i$ .Powell 等人<sup>[24]</sup>进一步探讨了能量均衡不能实现时,如何设置  $p_i$  以最大化网络生存期.Leone 等人<sup>[25]</sup>则将 Efthymiou 的研究扩展至非均匀网络,根据节点密度自适应地计算传输概率,并提出了传输概率的分布式求解算法<sup>[26,27]</sup>.Nikolteas<sup>[8]</sup>证明:这种基于单跳/多跳的混合传输策略既可均衡网络能耗,还能最大化网络的生存期.然而,这种数据传输方案只适用于半径不超过节点最大传输距离的网络.

Zhang 等人<sup>[28,29]</sup>提出使用异构分簇技术应对普通节点通信能力的不足,通过引入能力更强的节点作为簇头,让普通节点与簇头、簇头与 Sink 分别应用基于单跳/多跳的混合传输策略,逐层均衡节点的能耗.但是,网络区域的范围仍然受限于簇头的最大传输距离.

文献[30]首次通过实验考察了单跳/多跳混合传输策略中,节点的最大传输距离与能量均衡的关系,实验中,不能与 Sink 直接通信的节点使用其最大传输距离传输数据.实验中发现:最大传输距离越小,网络的能量均衡程度就越低.

在文献[30]的基础上,Deng<sup>[31]</sup>假设节点的传输距离有限且只有  $L$  级传输距离可供调节,提出了混合传输方案 DER.DER 为节点选出每级传输距离下的候选中继( $R_1$  到  $R_L$ ), $R_1$  距该节点最近,称为该节点的最优中继.传输数据时,DER 工作如下:如果该节点的估计寿命小于最优中继,则将报文转发给  $R_1$ ;否则,根据其余候选中继的估计寿命,按比例分配通信流量给  $R_2$  到  $R_L$ .实验结果表明,DER 能够使网络生存期接近最优.

Jin 等人<sup>[32]</sup>将 Efthymiou<sup>[7]</sup>的工作扩展至半径大于节点最大传输距离的网络,网络区域被划分为等距的圆环.文中假设节点只有  $m$  级传输距离,数据由第  $i$  环传输至第  $(i-k)$  环,  $1 \leq k \leq m$ ,  $k$  是由节点在传输数据时随机选择的.作者将这种  $m$  级混合数据传输建模成一个线性规划问题,集中式地求解不同环中各级传输距离的使用概率,从而实现各环间的能量均衡.实验结果显示:与多跳传输相比,这种数据传输方案可使网络寿命提高 10 倍,使通信时延降低 70%.

Jarry 等人<sup>[9]</sup>首次提出基于逐跳/逐 2 跳的混合传输策略,其工作方式类似于 Efthymiou 等人<sup>[7]</sup>和 Jin 等人<sup>[32]</sup>的数据传输方案,但节点只有 2 种传输距离: $r_1, r_2(=2r_1)$ .文中提出了相关算法,分布式地计算各邻居节点之间的数据传输概率,但该传输策略的能量均衡性能没有得到形式化的证明.文献[9,31,32]均未考虑在节点传输距离受限的条件下,能否通过混合传输策略实现全网能量均衡的问题.

在文献[9]的基础上,本文从理论上研究一维传感网中全网能量均衡的条件和实现方法.与文献[9]的区别在于:本文提供了相关的理论模型用于指导传输概率的设置,并给出了逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限.在研究方法上,本文类似于文献[7,28-30],但本文考虑了节点的通信能力约束.

## 2 系统模型与问题陈述

考虑如图 1 所示的一维传感器网络,节点只有两种传输距离: $r_1$  和  $r_2, r_2=2r_1$ ,其通信能耗分别对应于  $c_1, c_2(c_2 > c_1)$ ,用  $c_0$  表示单位比特的接收能耗.假设节点均匀地分布于一个条形区域, Sink 位于网络的一端,各节点随机地产生数据,用  $k$  表示任意子区域的平均数据产生速率,假设所有节点同构且初始能量都等于  $E_0$ , Sink 的资源不受限制.网络中采用基于逐跳/逐 2 跳的混合传输策略,传输过程中无数据聚合,本文只考虑节点的通信能耗,并假设没有通信冲突,这可以通过基于 TDMA 的 MAC 协议加以保证.

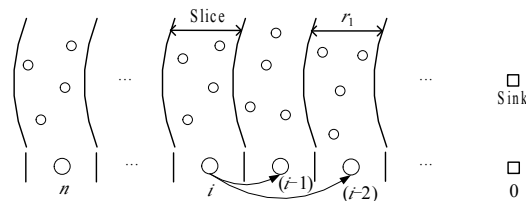


Fig.1 Slice model for 1D sensor network

图 1 一维传感网的带状模型 Slice

本文通过如图 1 所示的带状模型分析逐跳/逐 2 跳混合传输策略,整个网络区域被等距地划分为  $n$  个宽度为  $r_1$  的片段.片段  $i$  中的数据以  $p_i$  的概率传输到片段  $(i-1)$ ,以  $(1-p_i)$  的概率传输到片段  $(i-2)$ ,定义  $p_i$  为片段  $i$  中节点的传输概率(下文简称为片段  $i$  的传输概率),同一片段中的节点具有相同的传输概率.

设片段  $i$  中节点的平均能耗速率为  $\varepsilon_i$ ,全网能量均衡时,  $\varepsilon_i = \varepsilon_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 本文研究逐跳/逐 2 跳混合传输策略中的能量均衡问题,具体包括以下两方面的内容:

- 为实现全网能量均衡,如何设置各片段的传输概率?网络中通信流量的分布取决于各片段的传输概率,在仅考虑通信能耗的前提下,传输概率成为影响能量均衡的关键参数.因此,混合数据传输中的能量均衡问题可以转化为传输概率的优化分配问题.本文的目的在于形式化地推导各片段的传输概率,并提供相应方法指导传输概率的设置.
- 什么条件下才能通过逐跳/逐 2 跳混合传输策略实现全网能量均衡?广义上,逐跳/逐 2 跳混合传输策略仍然以“多跳”的方式上报数据,其能量均衡“能力”是有限的<sup>[16,17,33]</sup>.本文从理论上分析逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限,给出一维网络的能量均衡条件.

通过对上述问题的研究,本文旨在解决一维传感网中全网能量均衡能否实现以及如何实现的问题.对该问题的研究,有助于了解在节点传输距离受限的条件下混合传输策略的能量均衡能力及其影响因素,从而为网络性能的优化提供理论依据和方法指导.

### 3 传输概率的精确求解

混合传输策略中,传输概率是影响能量均衡的关键参数.本节建立逐跳/逐 2 跳混合传输策略的分析模型,利用网络的能量均衡关系形式化地推导传输概率,由此得出的传输概率是实现全网能量均衡的必要非充分条件.

#### 3.1 求解模型

一维传感网中应用逐跳/逐 2 跳混合传输策略时,其流量模型如图 2 所示,其中,  $g_i$  和  $h_i$  分别表示片段  $i$  到片段  $(i-1)$  和  $(i-2)$  的数据传输速率,其传输距离分别等于  $r_1$  和  $r_2$ .

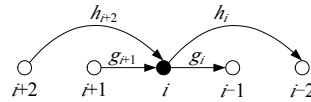


Fig.2 Flow model

图 2 流量模型

用  $f_i$  表示片段  $i$  的数据量接收速率,则有:  $f_i = g_{i+1} + h_{i+2}, i = 0, 1, \dots, n-2$ .  $g_i, h_i$  和  $f_i$  都是随机变量,为简化书写,下文将  $E[f_i], E[g_i]$  和  $E[h_i]$  分别表示为  $F_i, G_i$  和  $H_i$ ,从而  $F_i = G_{i+1} + H_{i+2}$ ,它们满足初始条件:  $F_0 = n \cdot k, F_{n-1} = G_n, H_1 = 0$ .

网络中的通信流量需要满足流量守恒关系,该关系可表示为

$$F_{i+k} = G_i + H_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

结合流量  $F_i$  的定义 ( $F_i = G_{i+1} + H_{i+2}$ ) 消去  $H_i$  可得:  $G_i - G_{i-1} = F_i - F_{i-2} + k, i = 2, 3, \dots, n$ ,进而可以推出  $G_i, F_i$  满足以下关系(推导过程见附录 A):

$$G_i = F_i + F_{i-1} + (i-n) \cdot k, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

另一方面,网络中通信流量的分布还取决于各片段的传输概率,结合传输概率的定义,有如下定理:

**定理 1.**  $G_i = p_i (F_i + k)$ .

证明:详见附录 B. □

该定理表明,  $p_i$  可以通过  $G_i$  和  $F_i$  求出.接下来,我们推导  $G_i$  和  $F_i$ ,进而计算传输概率的精确表达.

#### 3.2 能量均衡条件下的传输概率

在一维传感网中,片段  $i$  中所有节点的平均能耗速率( $E_i$ )可计算如下:

$$E_i = c_0 \cdot F_i + c_1 \cdot G_i + c_2 \cdot H_i = (c_1 - c_2) \cdot G_i + (c_0 + c_2) \cdot F_i + c_2 \cdot k.$$

令  $a=c_1-c_2, b=c_0+c_2, c=c_2 \cdot k$ , 则

$$E_i = a \cdot G_i + b \cdot F_i + c, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

当全网能量均衡时, 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, E_i = E_j$ , 进而有以下结论:

**定理 2.** 在一维传感网中, 当全网能量均衡时,  $F_i$  满足递推关系:

$$(1+t) \cdot F_i - t \cdot F_{i-1} - F_{i-2} = -k, \forall i \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (3)$$

其中,  $t = \frac{b}{a} = \frac{c_0 + c_2}{c_1 - c_2}, t \in (-\infty, -1)$ .

证明: 全网能量均衡时,  $E_i = E_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 取  $j = i-1, i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 则有:

$$a \cdot G_i + b \cdot F_i + c = a \cdot G_{i-1} + b \cdot F_{i-1} + c.$$

令  $t = \frac{b}{a}$ , 则

$$G_i - G_{i-1} = t(F_{i-1} - F_i), \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

由前文可知,  $G_i - G_{i-1} = F_i - F_{i-2} + k, \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ . 因此,

$$t(F_{i-1} - F_i) = F_i - F_{i-2} + k.$$

整理可得:

$$(1+t) \cdot F_i - t \cdot F_{i-1} - F_{i-2} = -k, \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

又因为  $c_2 > c_1 > 0, c_0 > 0$ , 所以  $(c_2 + c_0) > (c_2 - c_1)$ .

所以,  $t = \frac{c_0 + c_2}{c_1 - c_2} < -1, t \in (-\infty, -1)$ .

因此, 原命题得证. □

结合通信流量的初始条件, 即可从上述递推关系中解出  $F_i$  的精确表达式.

接下来, 通过以下步骤推导传输概率:

- 化简公式(3)以减少递归变量的数目, 并利用母函数法求解化简后的递归式;
- 根据化简前后递归变量之间的关系计算  $F_i$ , 然后, 基于公式(1)推导  $G_i$ ;
- 利用定理 1 计算  $p_i$  的精确表达式.

公式(3)是一个 2 阶非齐次递推关系, 从中直接求解  $F_i$  的难度较大, 因此, 我们需要首先对公式(3)降阶.

令  $\Delta_i = F_i - F_{i-1}$ , 公式(3)可等价变换为  $(1+t) \cdot \Delta_i + \Delta_{i-1} = -k, \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 从而,  $i=3, 4, \dots, n$  时,  $(1+t) \cdot \Delta_{i-1} + \Delta_{i-2} = -k$ , 结合两式消去  $-k$ , 可以得到与公式(3)等价的齐次递推关系:

$$(1+t) \cdot \Delta_i - t \cdot \Delta_{i-1} - \Delta_{i-2} = 0, i=3, 4, \dots, n \quad (4)$$

$\Delta_i$  满足的初始条件是(见附录 C):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \Delta_i = -n \cdot k \\ m \cdot \Delta_1 + \Delta_n = -(m \cdot n + 1) \cdot k \end{cases}.$$

其中,  $t = \frac{c_0 + c_2}{c_1 - c_2}, m = \frac{c_0 + c_1}{c_1 - c_2}$ . 这是一个 2 阶齐次递推关系, 可以利用母函数法直接计算  $\Delta_i$ .

**定理 3.** 设  $\Delta_i = F_i - F_{i-1}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 则  $\Delta_i$  满足递推关系:

$$(1+t) \cdot \Delta_i - t \cdot \Delta_{i-1} - \Delta_{i-2} = 0, i=3, 4, \dots, n.$$

其中,  $\sum_{i=1}^n \Delta_i = -n \cdot k$  且  $m \cdot \Delta_1 + \Delta_n = -(m \cdot n + 1) \cdot k$ .  $\Delta_i$  的精确表达式为

$$\Delta_i = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot k + \frac{\alpha^{i-1}}{\alpha^n - 1} \cdot nk, & \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ -\frac{n+3}{2} \cdot k + i \cdot k, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\alpha = -\frac{1}{1+t} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_0}$ .

证明:将公式(4)化成标准形式:

$$\Delta_i - \frac{t}{1+t} \cdot \Delta_{i-1} - \frac{1}{1+t} \cdot \Delta_{i-2} = 0, \forall i \in \{3, 4, \dots, n\} \quad (6)$$

其特征多项式为  $C(x) = x^2 - \frac{t}{1+t} \cdot x - \frac{1}{1+t}$ , 令  $C(x)=0$ , 可得特征方程  $x^2 - \frac{t}{1+t} \cdot x - \frac{1}{1+t} = 0$ ;  $t < -1 \wedge t \neq -2$  时, 特征方程的根为  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{1+t}$ ;  $t = -2$  时,  $x_1 = x_2 = 1$ . 以下分两种情况求解  $\Delta_i$ :

(1)  $t < -1 \wedge t \neq -2$

此时, 特征方程的两个实根互异, 令  $\alpha = -\frac{1}{1+t}$ , 则  $x_1 = 1, x_2 = \alpha$ . 设递归式(6)的母函数为  $G(x)$ , 则

$$G(x) = \frac{P(x)}{1 - \frac{t}{1+t}x - \frac{1}{1+t}x^2},$$

其中,  $P(x)$  是 1 次多项式. 对  $G(x)$  等价变换如下:

$$G(x) = \frac{P(x)}{(1-x)(1-\alpha x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-\alpha x} = A \cdot (1+x+x^2+\dots) + B \cdot (1+\alpha x+\alpha^2 x^2+\dots).$$

因此,  $\Delta_i$  的表达式具有如下形式:

$$\Delta_i = A + B \cdot \alpha^i,$$

其中, 待定参数  $A$  和  $B$  的求解需要利用  $\Delta_i$  的初始条件, 有:

$$\begin{cases} n(\alpha-1)A + \alpha(\alpha^n-1)B = -n(\alpha-1)k \\ (\alpha-1)A + \alpha(\alpha^n-1)B = (n-\alpha)k \end{cases}.$$

解该方程组得:

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot k \\ B = \frac{n}{\alpha(\alpha^n-1)} \cdot k \end{cases}.$$

因此,  $t < -1 \wedge t \neq -2$ , 即  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$  时,  $\Delta_i = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot k + \frac{\alpha^{i-1}}{\alpha^n-1} \cdot nk, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 其中,  $\alpha = -\frac{1}{1+t} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_0}$ .

(2)  $t = -2$

当  $t = -2$  时,  $\alpha = 1$ . 此时, 特征方程存在二重根, 这仅对  $G(x)$  的函数形式有所影响,  $\Delta_i$  的求解与  $t \neq -2$  时类似, 求得:

$$\Delta_i = -\frac{n+3}{2} \cdot k + i \cdot k, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

因此, 综上所述, 递推关系  $(1+t) \cdot \Delta_i - t \Delta_{i-1} - \Delta_{i-2} = 0$  的解为

$$\Delta_i = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot k + \frac{\alpha^{i-1}}{\alpha^n-1} \cdot nk, & \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ -\frac{n+3}{2} \cdot k + i \cdot k, & \alpha = 1 \end{cases},$$

其中,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha = -\frac{1}{1+t} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_0}$  且  $\alpha \in (0, +\infty)$ . □

由此可见,  $\Delta_i$  是  $\alpha$  和  $n$  的函数, 其中,  $\alpha$  是通信系统的能耗系数, 定义为  $(c_2 - c_1)$  与  $(c_1 + c_0)$  之比,  $c_0$  表示无线收发器的数据接收能耗,  $c_1$  和  $c_2$  分别表示无线收发器以  $r_1$  和  $r_2$  为通信半径时的传输能耗.  $(c_1 + c_0)$  表示了通信系统以  $r_1$  作为单跳传输距离时的基础能耗,  $(c_2 - c_1) = (c_2 + c_0) - (c_1 + c_0)$ , 表示节点的单跳传输距离由  $r_1$  变为  $r_2$  后所带来的能耗增量. 因此,  $\alpha$  的物理意义为: 节点的传输距离增至  $r_2$  后, 其通信能耗相对于原传输距离  $r_1$  的增加比率.

由 $\Delta_i = F_i - F_{i-1}$ 可推得 $F_i = F_0 + \sum_{j=1}^i \Delta_j = nk + \sum_{j=1}^i \Delta_j$ , 因此 $F_i$ 的精确表达式为

$$F_i = \begin{cases} nk + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot ik + \frac{1-\alpha^i}{(1-\alpha)(\alpha^n-1)} \cdot nk, & \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ nk - \frac{n-i+2}{2} \cdot ik, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (7)$$

进一步地,利用公式(1)可以得到 $G_i$ 的表达式,有:

$$G_i = \begin{cases} (n+i) \cdot k + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot (2i-1) \cdot k + \frac{2-\alpha^i-\alpha^{i-1}}{(1-\alpha)(\alpha^n-1)} \cdot nk, & \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ \left[ \frac{3}{2}(n+1)+i \right] \cdot k - (n-i+3) \cdot ik, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8)$$

现在,基于 $F_i$ 和 $G_i$ 可以直接求出传输概率的精确表达式:

$$p_i = \frac{G_i}{F_i + k} = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)(\alpha^n-1)(n+i) + \alpha(\alpha^n-1)(2i-1) + (2-\alpha^i-\alpha^{i-1}) \cdot n}{(1-\alpha)(\alpha^n-1)(n+1) + \alpha(\alpha^n-1) \cdot i + (1-\alpha^i) \cdot n} \cdot n, & \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ \frac{3(n+1)-2i \cdot (n-i+2)}{2(n+1)-i \cdot (n-i+2)}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中, $i=1,2,\dots,n$ ,  $\alpha = \frac{c_2-c_1}{c_0+c_1}$ .

这样就完成了传输概率的形式化推导.关于 $p_i$ 有如下说明:

- $p_i$ 与数据产生速率( $k$ )无关,它是网络规模( $n$ )、节点位置( $i$ )和能耗系数( $\alpha$ )的函数;在具体给定的网络中, $p_i$ 仅取决于节点的位置.
- 公式(9)只是实现全网能量均衡的必要非充分条件.传输概率的求解是以全网能量均衡为前提的,而该前提条件是否始终成立还需进一步的讨论.

#### 4 混合传输策略的分析

在精确求解传输概率的基础上,本节对逐跳/逐2跳混合传输策略展开进一步的分析,以解决全网能量均衡能否实现以及如何实现的问题.我们首先分析通信流量和传输概率的取值分布,由此引出对传输概率取值合法性的讨论.

图3展示了全网能量均衡时 $F_i, G_i, T_i$ 的取值随 $i$ 的变化,其中, $T_i = F_i + k$ ,是节点 $i$ 所传输的数据总量, $f(x), g(x), \lambda(x)$ 对应于 $F_i, G_i, T_i$ 的连续函数;数据显示,当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $\lambda(x) \geq g(x)$ .图4和表1进一步展示了 $G_i$ 的取值分布,数据表明:虽然 $g(x)$ 是一个凹函数,但当 $x=1,2,\dots,8$ 时, $g(x)$ 的取值数列 $\{G_i\}$ (见表1)仍表现出以下规律:当 $\alpha \geq 8$ 时, $G_i$ 非负且随 $i$ 单调递减;当 $\alpha \leq 6$ 时, $G_i$ 的值先从一正数递减为负,随后增加,但最终 $G_8$ 依旧小于0.这一特征可以通过 $G_i$ 和 $F_i$ 的函数性质加以解释(证明过程详见附录D).

**性质1.**  $G_i \leq F_i + k, i=1,2,\dots,n$ .

**性质2.** 如果 $G_n \geq 0$ ,则 $G_{i-1} - G_i \geq 0, i=1,2,3,\dots,n$ .

图3刚好验证了性质1,即,在能量均衡条件下,任意片段的逐跳通信量( $G_i$ )不会超过其传输的数据总量( $T_i$ ).性质2则表明:当 $G_n \geq 0$ 时, $G_i$ 是关于 $i$ 的非递增数列.表1中,当 $\alpha=8$ 和 $\alpha=10$ 时, $G_i$ 的取值呈现出这一特征.

$G_i$ 的取值分布还揭示了一个问题: $\alpha=4, \alpha=6$ 时, $G_7 < 0, G_8 < 0$ .然而作为通信流量, $G_i$ 取负值是无意义的,此时无法应用逐跳/逐2跳混合传输策略均衡网络能耗.图5和图6进一步分析了 $G_i p_i$ 的取值与片段个数( $n$ )的关系,数据显示: $n > 6$ 时, $G_i$ 和 $p_i$ 才开始出现负值.因此我们猜测: $\alpha$ 固定时,仅当网络片段的个数增大至一定程度后,通信流量和传输概率才会出现非法取值.

传输概率的求解建立于全网能量均衡的基础上,然而初步的分析显示,这一前提条件并不总是成立的.为保



证传输概率取值的合法性,接下来分析全网能量均衡的条件,由此推导混合传输策略的能力上限.本节最后给出传输概率的近似求解规则.

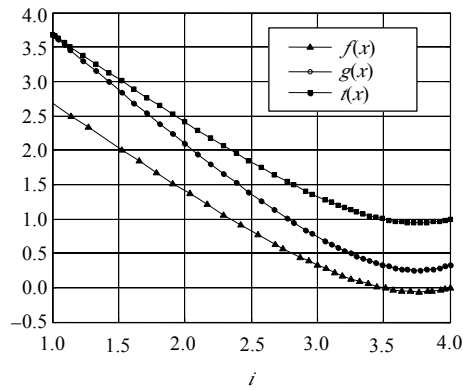


Fig.3 Distribution of flow  $F_i$ ,  $G_i$  and  $T_i$  in an energy-balanced network ( $n=4, \alpha=4$ )

图3 当  $n=4, \alpha=4$  时,能量均衡的网络中流量  $F_i, G_i, T_i$  的分布

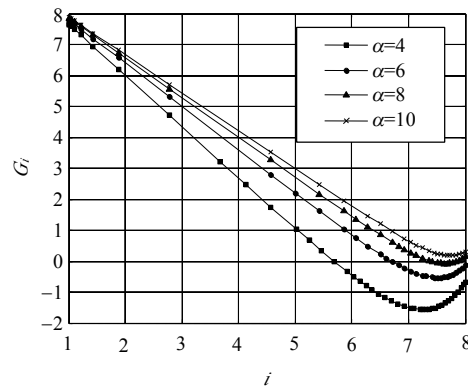


Fig.4 Distribution of flow  $G_i$  in an energy-balanced network under different  $\alpha$  ( $n=8$ )

图4 当  $n=8, \alpha$  取不同的值时,能量均衡的网络中流量  $G_i$  的分布

**Table 1** Values of  $G_i$  when  $n=8$

表1 当  $n=8$  时,  $G_i$  的取值

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$
$\alpha=4$	7.67	6.00	4.34	2.68	1.05	<b>-0.46</b>	<b>-1.50</b>	<b>-0.67</b>
$\alpha=6$	7.80	6.40	5.00	3.60	2.21	0.85	<b>-0.29</b>	<b>-0.13</b>
$\alpha=8$	7.86	6.57	5.29	4.00	2.72	1.45	0.30	0.14
$\alpha=10$	7.89	6.67	5.44	4.22	3.00	1.79	0.65	0.31

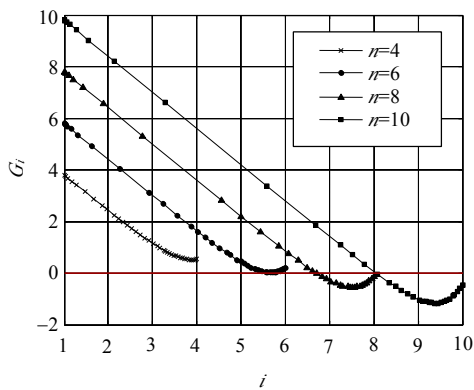


Fig.5 Distribution of flow  $G_i$  under different  $n$  ( $\alpha=6$ )

图5 当  $\alpha=6, n$  取不同值时,流量  $G_i$  的分布

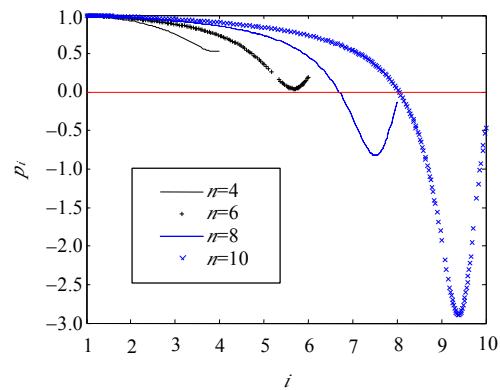


Fig.6 Distribution of transmission probability  $p_i$  under different  $n$  ( $\alpha=6$ )

图6 当  $\alpha=6, n$  取不同值时,传输概率  $p_i$  的分布

#### 4.1 全网能量均衡的条件

一维传感网中,合法的通信流量必须满足以下条件:

- (1)  $G_i \leq F_i + k, i=1, 2, \dots, n;$
- (2)  $G_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n;$
- (3)  $F_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n.$

由通信流量的函数性质(附录 D)可知,条件 1 恒成立.因此,判断通信流量是否合法时,只需考察条件 2 和条件 3 能否得到满足.

**定理 4.** 一维传感网中,全网能量均衡时通信流量取值合法的充要条件是  $G_n \geq 0$ .

证明:通信流量取值合法,则对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $G_i \geq 0$ ,因此  $G_n \geq 0$ ,命题的必要性得证.

接下来证明充分性.由通信流量的函数性质(附录 D,性质 2 和性质 3)可知,当  $G_n \geq 0$  时,  $G_{i-1} - G_i \geq 0$  且  $F_{i-1} - F_i \geq 0$ .因此,对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $G_i \geq G_n \geq 0$ ,  $F_i \geq F_n = 0$ .所以,  $G_n \geq 0$  时通信流量的取值是合法的.

为了证明这些合法的通信流量能够均衡地消耗所有节点的能量,需要计算各网络片段中节点的平均能耗速率,对任意的片段  $i$ ,将公式(7)和公式(8)代入公式(2)可得:

$$\begin{aligned} E_i &= (c_0 + c_2)k \cdot \left[ n + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot i + \frac{1-\alpha^i}{(1-\alpha)(\alpha^n-1)} \cdot n \right] + (c_1 - c_2)k \cdot \left[ (n+i) + \frac{\alpha}{1-\alpha} (2i-1) + \frac{2-\alpha^i-\alpha^{i-1}}{(1-\alpha)(\alpha^n-1)} \cdot n \right] + c_2 k \\ &= (c_0 + c_1)k \cdot \left( \frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^n}{\alpha^n-1} \cdot n \right) + c_2 k. \end{aligned}$$

不难发现,  $E_i$  的取值与片段编号  $i$  无关.从而有  $E = E_i, \forall i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .因此,合法的通信流量  $(G_i, F_i)$  能够完全均衡所有节点的能耗.

所以,当  $G_n \geq 0$  时,通信流量取值合法且全网能量均衡能够实现.命题的充分性得证.  $\square$

在逐跳/逐 2 跳混合传输策略中,传输概率是影响全网能量均衡的关键参数,而传输概率的求解需要借助通信流量  $G_i$  和  $F_i$ ,因此,  $G_n \geq 0$  也是判定传输概率的取值是否合法的充要条件.进一步有如下结论:

**推论 1.** 一维传感网中,当  $G_n \geq 0$  时,如果根据公式(9)设置各网络片段的传输概率,则全网所有节点都能以相同的速率  $\varepsilon$  消耗能量:  $\varepsilon = (c_0 + c_1)k \cdot \left( \frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^n}{\alpha^n-1} \cdot n \right) + c_2 k$ .

推论 1 提供了一种通过混合传输策略实现全网能量均衡的具体方法,但全网能量均衡能否实现还有赖于传输概率取值的合法性.基于定理 4,可进一步得出全网能量均衡的条件:

**定理 5.** 一维传感网中,当且仅当网络片段的个数  $n \leq m_0$  时,才能通过逐跳/逐 2 跳混合传输策略实现全网能量均衡,其中,  $m_0 = \max \{n | n \in \mathbf{N} \wedge G_n \geq 0\}$ .

证明:当  $\alpha \neq 1$  时,  $G_n = \frac{k \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^n)} \cdot [\alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1]$ , 设  $f(n) = \alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1$ .

因为  $f(n) - f(n-1) = \alpha^{n-3} \cdot (\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+1-n)$ , 且  $f(1) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0$ ,  $f(2) = (\alpha-1)^2 > 0$ ,

所以,  $1 \leq n \leq \lfloor \alpha+1 \rfloor$  时,  $f(n)$  大于 0, 且随  $n$  递增;  $n \geq \lfloor \alpha+1 \rfloor$  时,  $f(n)$  的取值随  $n$  由正数递减至负数.

$G_n$  与  $f(n)$  同号, 而且具有相同的函数单调性, 设  $m_0 = \max \{n | n \in \mathbf{N}^+ \wedge G_n \geq 0\}$ , 则当  $n \leq m_0$  时,  $G_n \geq 0$ ; 当  $n > m_0$  时,  $G_n < 0$ . 因此, 当  $\alpha \neq 1$  时, 仅当  $n \leq m_0$  时, 全网能量均衡才能实现, 原命题成立.

使用相同的方法可以证明当  $\alpha=1$  时命题也成立, 从而, 定理得证.  $\square$

## 4.2 混合传输策略的能力上限

全网能量均衡的条件是  $n \leq m_0$ , 因此, 网络片段的个数由 1 增至  $m_0$  的过程中, 逐跳/逐 2 跳混合传输策略都可以完全均衡所有节点的能耗; 一旦超过  $m_0$ , 全网能量均衡就不能实现. 从根本上来讲, 这是因为混合传输策略的能量均衡“能力”有限, 而  $m_0$  正是利用逐跳/逐 2 跳混合传输策略所能达到全网能量均衡的最大网络片段数, 因此可以得出如下结论.

**定理 6.** 如果用能够达到全网能量均衡的最大网络片段数来衡量混合传输策略的能量均衡能力,  $m_0$  就是逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限.  $m_0$  可计算如下:

- (1) 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $m_0=2$ ;
- (2) 当  $1 \leq \alpha < 2$  时,  $m_0=3$ ;

$$(3) \text{ 当 } \alpha \geq 2 \text{ 时, } n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha-1} \left( \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} \right) \right\rfloor.$$

证明:由定理 5 可知,  $n_0 = \max \{n | n \in \mathbf{N} \wedge G_n \geq 0\}$ . 当  $\alpha=1$  时, 代入公式(8)可得  $n_0=3$ .

当  $\alpha \neq 1$  时,  $G_n = \frac{k \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^n)} \cdot f(n)$ , 其中,  $f(n) = \alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1$ ,  $G_n$  与  $f(n)$  同号.

当  $0 < \alpha < 1$  时, 因为  $f(2) = (\alpha-1)^2 > 0$ ,  $f(3) = (\alpha-1)^3 < 0$ , 所以  $n_0=2$ .

当  $1 < \alpha < 2$  时, 因为  $f(3) = (\alpha-1)^3 > 0$ ,  $f(4) = (\alpha-1)^2 \cdot [\alpha(\alpha-2) - 1] < 0$ , 所以  $n_0=3$ .

当  $\alpha \geq 2$  时, 令  $f(n)=0$ , 可得方程  $\alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1 = 0$ , 等式两边同除以  $\alpha^n$ , 有:  $1 + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \cdot n - \frac{1}{\alpha^n} = 0$ . 设该方程的解为  $\hat{n}$ , 则

$$\hat{n} = \frac{\alpha^2}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\alpha^{\hat{n}-2}} = (\alpha+1) + \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\alpha^{\hat{n}-2}} \right).$$

因为  $\alpha \geq 2$ , 所以  $0 < \frac{1}{\alpha-1} < 1$ ,  $0 < 1 - \frac{1}{\alpha^{\hat{n}-2}} < 1$ , 进而有  $\alpha+1 < \hat{n} < \alpha+2$ . 而  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 所以  $n_0 = \lfloor \alpha+1 \rfloor$  或  $n_0 = \lfloor \alpha+2 \rfloor$ . 取  $\hat{n} \approx \alpha+1$ , 则有:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\alpha^2}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\alpha^{\hat{n}-2}} \\ &\approx \frac{1}{\alpha-1} \left( \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha-1} \left( \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} \right) \right\rfloor.$$

因此, 综上所述, 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $n_0=2$ ; 当  $1 \leq \alpha < 2$  时,  $n_0=3$ ; 当  $\alpha \geq 2$  时,  $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha-1} \left( \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^{\alpha-1}} \right) \right\rfloor$ . □

给定  $\alpha$  后,  $n_0$  可以通过如下推论估算:

**推论 2.** 当  $0 < \alpha < 2$  时,  $n_0 = \lfloor \alpha+2 \rfloor$ ; 当  $\alpha \geq 2$  时,  $n_0 \approx \lfloor \alpha+1 \rfloor$ .

在此, 针对定理 6 说明如下:

逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能量均衡能力是由系数  $\alpha$  决定的, 与网络规模等其他因素无关.

$n_0$  从理论上给出了混合传输策略的能力上限, 其物理意义是, 利用逐跳/逐 2 跳混合传输策略所能达到全网能量均衡的最大网络片段数.

由于  $n_0 \geq 2$ , 在  $n=2$  的一维传感网中, 全网能量均衡一定可以实现, 这与  $\alpha$  的取值无关.

欲通过逐跳/逐 2 跳混合传输策略实现全网能量均衡, 需要将一维网络区域的长度控制在  $n_0 \cdot r_1$  以内; 当长度超过  $n_0 \cdot r_1$  时, 需要结合其他策略才能完全均衡所有节点的能耗.

图 7 和图 8 分析了  $n_0$  的数值特征, 其中,  $n_0$  由定理 6 给出. 作为对比,  $\hat{n}_0$  和  $\tilde{n}_0$  分别表示  $n_0$  的准确值(定理 5)和近似值(推论 1). 由图 7 可以看出:  $n_0$  的取值随  $\alpha$  阶梯型地增加, 且与  $\hat{n}_0$  的曲线完全重合. 图 8 分析了  $\tilde{n}_0$  的近似精度, 数据显示: 当  $2 \leq \alpha \leq 10$  时,  $\tilde{n}_0$  与  $\hat{n}_0$  (和  $n_0$ ) 才存在明显的偏差, 此时二者的关系是  $\tilde{n}_0 = \hat{n}_0 - 1$ ; 而当  $\alpha > 10$  时,  $\tilde{n}_0$  与  $\hat{n}_0$  和  $n_0$  几乎完全重合, 这可以用  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{\alpha^{\alpha-2}} \right) = 0$  来解释. 因此, 使用推论 1 估计  $n_0$  是合理的, 不仅形式简洁, 精度也较高.

至此, 本文已形式化地推导了有关混合传输策略的能量均衡性能的两个重要参数: 传输概率( $p_i$ )和能力上限( $n_0$ ). 我们发现:  $p_i$  和  $n_0$  的表达式都主要取决于系数  $\alpha$ , 这是决定能量均衡性能的关键系数. 由其定义可知,  $\alpha$  表示  $r_2$  在  $r_1$  基础上的能耗增加率, 它同时也反映了该通信系统为实现能量均衡需要付出的能耗代价, 本文将  $\alpha$  定义为通信系统的能耗溢价率.  $\alpha$  独立于通信系统的硬件平台和能耗模型, 其典型取值见表 2. 其中, CC2420 的数据来源于该芯片的数据手册<sup>[34]</sup>,  $d^2$  和  $d^4$  model 表示无线通信能耗模型  $E(d) = \varepsilon_{elec} + \varepsilon_{amp} \cdot d^\gamma$  在  $\gamma$  等于 2 和 4 时的场景,  $\varepsilon_{elec}$

和 $\varepsilon_{amp}$ 的取值参考了文献[35,36].为方便数据展示,CC2420, $d^2$  model和 $d^4$  model采取了不同的能耗单位(见表2),这不影响 $\alpha$ 的计算.

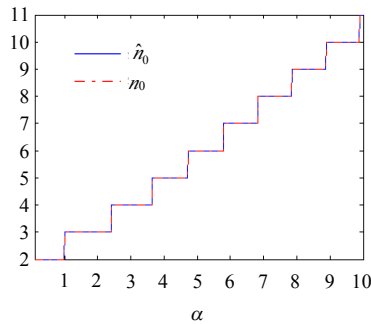


Fig.7 Comparison of the value of  $\hat{n}_0$  and  $n_0$

图7  $\hat{n}_0$ 与 $n_0$ 的取值对比

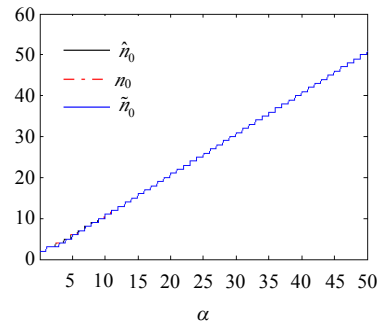


Fig.8 Comparison of the value of  $\hat{n}_0$ ,  $n_0$  and  $\tilde{n}_0$

图8  $\hat{n}_0, n_0$ 和 $\tilde{n}_0$ 的取值对比

**Table 2** Typical values of  $\alpha$

**表 2**  $\alpha$ 的典型取值

	$r_1$	$r_2$	$c_1$	$c_2$	$c_0$	$\alpha$
CC2420	5	10	8.5	9.9	18.8 (mA)	0.051 3
	10	20	9.9	15.2	18.8	0.184 7
	5	20	8.5	15.2	18.8	0.245 4
$d^2$ model	5	10	2.55	10.05	0.05 (uJ)	2.884 6
	10	20	10.05	40.05	0.05	2.970 3
	5	20	2.55	40.05	0.05	14.423 1
$d^4$ model	5	10	50.000 8	50.013 0	50 (nJ)	0.000 122
	10	20	50.013 0	50.208 0	50	0.001 950
	5	20	50.000 8	50.208 0	50	0.002 072

### 4.3 传输概率的近似表达式

当网络片段数不超过 $n_0$ 时,可以根据公式(9)设置各片段的传输概率,以实现全网能量均衡.但公式(9)中 $p_i$ 的表达式过于复杂,本节给出传输概率的近似求解规则,在保证精度的前提下简化计算.

**定理 7.** 在 $n \leq n_0$ 的一维传感网中,为实现全网能量均衡,逐跳/逐2跳混合传输策略的传输概率 $p_i$ 可以通过以下规则确定:

- (1) 对 $\forall n \leq n_0, p_1=1$ ;
- (2) 当 $n=2$ 时,  $p_2=1-\frac{1}{\alpha+1}$ ;
- (3) 当 $n=3$ 时,  $p_2=1-\frac{\alpha+2}{2\alpha^2+1}, p_3=1-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}$ ;
- (4) 当 $n \geq 4$ 时,  $p_i=1-\frac{l(i)}{n+1-\alpha \cdot [n+l(i)]}, i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 其中,  $l(i)=n \cdot \alpha^{(i-1)-n}-(i-1)$ .

证明:在任意的一维传感网中,因为 $G_1=F_1+k$ ,所以 $p_1=\frac{G_1}{F_1+k}=1$ ,故规则(1)成立.将 $n=2$ 和 $n=3$ 分别代入公式(9),即可得到规则(2)和规则(3).接下来重点推导规则(4).

由推论 1 可知, $n_0=\lfloor \alpha+1 \rfloor$ .因为 $n \leq n_0$ ,所以当 $n \geq 4$ 时, $\alpha \geq 3$ ;又因为 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^n}=0$ ,所以当 $n \geq 4$ 时,可用 0 作为 $\frac{1}{\alpha^n}$ 的近似.对公式(9)的分子分母同除以 $\alpha^n$ 得:

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(n+i)+\alpha\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(2i-1)+\frac{2-\alpha^i-\alpha^{i-1}}{\alpha^n} \cdot n}{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(n+1)+\alpha\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right) \cdot i+\frac{1-\alpha^i}{\alpha^n} \cdot n} \\
 &\approx \frac{n+i-\alpha \cdot(n+1-i)-n(1+\alpha) \cdot \alpha^{i-1-n}}{n+1-\alpha \cdot(n+1-i)-n \cdot \alpha^{i-n}} \\
 &= 1-\frac{n \cdot \alpha^{i-1-n}+1-i}{n+1-\alpha \cdot(n+1-i)-n \cdot \alpha^{i-n}}.
 \end{aligned}$$

注意到,  $\alpha \cdot(n+1-i)+n \cdot \alpha^{i-n}=\alpha \cdot n+\alpha \cdot(n \cdot \alpha^{i-1-n}+1-i)$ , 令  $l(i)=n \cdot \alpha^{(i-1)-n}-(i-1)$ , 则

$$p_i = 1 - \frac{l(i)}{n+1-\alpha \cdot[n+l(i)]}.$$

因此, 当  $n \geq 4$  时,  $p_i = 1 - \frac{l(i)}{n+1-\alpha \cdot[n+l(i)]}$ ,  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 其中,  $l(i) = n \cdot \alpha^{(i-1)-n} - (i-1)$ . 故, 规则(4)成立.

综上所述, 原命题得证.  $\square$

定理 7 给出的  $p_i$  求解规则不仅形式简单而且精度较高. 图 9 展示了  $p_i$  的绝对误差: 当  $2.5 \leq \alpha \leq 5$  时, 误差较为明显, 但最大误差不超过 0.12; 当  $\alpha > 5$  时, 误差已无限趋近于 0.

图 10~图 12 进一步分析了  $p_i$  的数值特征. 图 10 展示了  $p_n$  (右轴) 随  $\alpha$  的变化关系,  $n=n_0$ , 表示网络片段的个数, 图中  $n_0$  (左轴) 示于曲线  $p_n$  的上方以作参考. 片段  $n$  的传输概率  $p_n$  随  $\alpha$  呈现出明显的锯齿状变化特征, 当网络片段数 ( $n$ ) 改变时,  $p_n$  的值骤减, 但整体而言,  $p_n$  随  $n$  的增大呈下降趋势; 当  $n$  取值相同时,  $p_n$  随  $\alpha$  递增. 由此得出结论: 网络片段数  $n$  对传输概率的影响大于能耗系数  $\alpha$ , 而当  $n$  相同时, 传输概率与  $\alpha$  正相关.

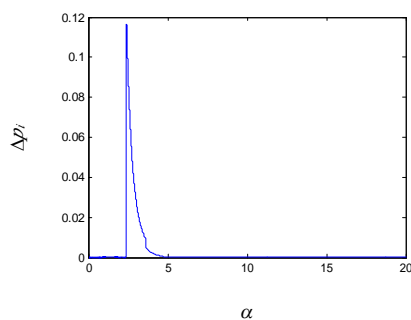


Fig.9 Variations of  $p_i$ 's absolute error ( $\Delta p_i$ ) with  $\alpha$   
图 9  $p_i$  的绝对误差 ( $\Delta p_i$ ) 随  $\alpha$  的变化

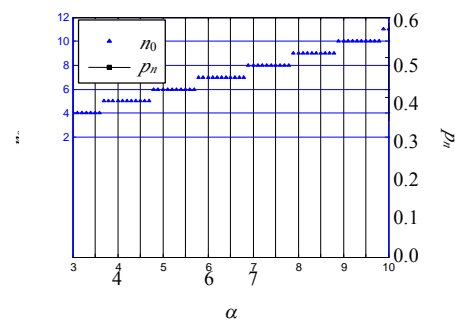


Fig.10 Variations of  $p_n$  with  $\alpha$   
图 10  $p_n$  随  $\alpha$  的变化

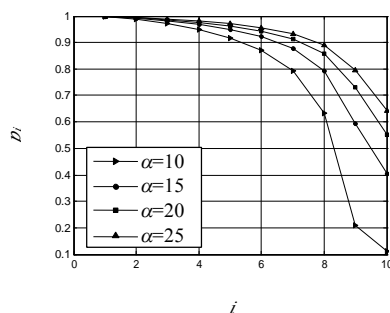


Fig.11 Values of  $p_i$  under different  $\alpha$  ( $n=10$ )  
图 11 当  $n=10$ ,  $\alpha$  取不同值时,  $p_i$  的取值

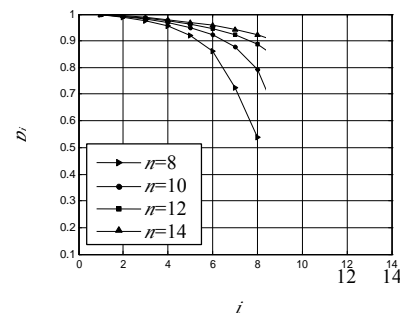


Fig.12 Values of  $p_i$  under different  $n$  ( $\alpha=15$ )  
图 12 当  $\alpha=15$ ,  $n$  取不同值时,  $p_i$  的取值

在具体给定的网络中,传输概率主要取决于节点的位置.图 11 和图 12 展示了  $p_i$  分布的共同特征:其值随  $i$  递减,其中,  $i$  是节点所在片段的编号,反映了节点与 Sink 的距离.尽管  $\alpha$  和  $n$  也会对  $p_i$  产生影响,但是  $p_i$  递减的总体趋势不变,这是由通信负载的分布特征决定的.

除了节点位置,网络片段数  $n$  和能耗系数  $\alpha$  也是影响传输概率的重要因素.图 11 分析了  $\alpha$  与  $p_i$  的关系,当  $n$  一定时,各节点的传输概率都随  $\alpha$  的增大而增加.这是因为  $\alpha$  增大后,  $r_2$  的通信代价随之增加,为保持能耗均衡,所有节点只能相应地增加  $r_1$  的使用频率( $p_i$ ).图 12 则展示了当  $\alpha$  一定时,  $n$  对  $p_i$  的影响.当  $n$  增大后,原有节点的传输概率也整体增加.原因在于:片段个数( $n$ )增大后,新增节点加重了原有节点的通信负载,后者只有通过更多地使用代价较低的逐跳( $r_1$ )传输模式才能维持新的能量均衡.

## 5 讨论

到目前为止,本文的分析都集中在片段间的能量均衡.本节探讨片段内的能量均衡问题,分析传输距离设置与能量均衡的关系,并将逐跳/逐 2 跳混合传输策略的分析扩展至更通用的应用场景.

### 5.1 片段内的能量均衡

带状模型中片段是数据传输的基本单元,这有助于片段间的能量均衡分析.但是由于传输距离有限,节点的空间分布会导致片段内的能量不均衡现象,如图 13 所示,片段  $i$  中的点  $A$  位于更多片段( $i+1$ )中节点的通信范围,与  $B$  相比,  $A$  处的节点具有更高的通信负载.

为了均衡同一片段内各节点的能耗,我们提出改进的带状模型(如图 14 所示):将基本带状模型中的每一个片段划分成  $m$  个等宽的子片段,数据传输只发生在对应的子片段之间.以图 14 为例,片段  $i$  的 3 个子片段分别表示为  $i.1, i.2$  和  $i.3$ ,子片段  $(i+1).1$  中的数据只会被传输到子片段  $i.1$  或  $(i-1).1$ ,传输距离仍然是  $r_1$  和  $r_2$ .

改进的带状模型通过片段细分的方法在相邻片段的子片段之间建立起一一映射,子片段之间仍是一个逐跳/逐 2 跳通信系统,因此,前文的分析结论依然成立.理论上讲,只要适当地选择子片段数( $m$ ),即可均衡同一片段内所有节点的能耗<sup>[29,32]</sup>.

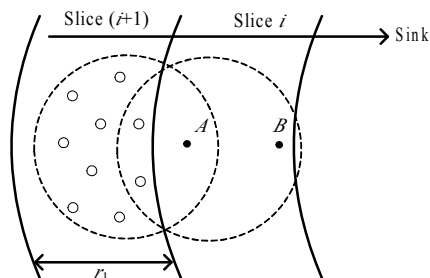


Fig.13 Illustration of the intra-slice energy imbalance

图 13 片段内的能量不均衡现象

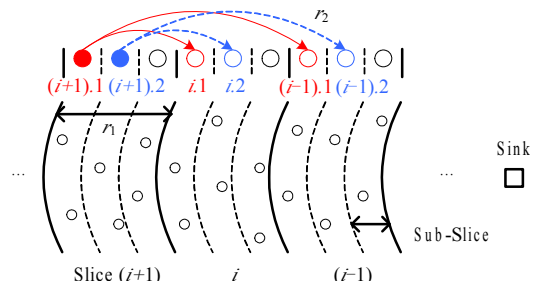


Fig.14 Extended slice model

图 14 改进的带状模型

### 5.2 传输距离设置与能量均衡的关系

考虑到实际应用中节点通常具有多种传输距离,而且各传输距离不一定满足简单的整数倍数关系,本节提出一个通用的数学模型,以分析传输距离设置与混合传输策略的能量均衡性能的关系.对这一关系的分析,有助于解决一些实际的网络设计与部署问题.

#### (1) 通用分析模型

考虑到片段内能量均衡的需要,以改进带状模型中子片段的宽度为基本单位,将一维网络划分为  $n$  个带状区域(如图 15 所示).假设节点具有  $L$  级可离散调节的传输功率,对应的传输距离分别为  $r_1, r_2, \dots, r_L$  ( $r_1 < r_2 < \dots < r_L$ , 不要求  $r_1$  到  $r_L$  是连续的整数),设单位比特的传输能耗分别为  $c_1, c_2, \dots, c_L$  ( $c_1 < c_2 < \dots < c_L$ ),接收能耗为  $c_0$ .区域  $i$  中的数据可以随机地传输到  $(i-1)$  到  $(i-r_L)$  中的任一区域,通过合理地设置各区域间的传输概率,可以实现全网的能量均

衡.传输数据时,区域  $i$  中的节点使用  $r_1$  级功率与区域  $(i-1)$  到  $(i-r_1)$  中的节点通信,使用  $r_2$  级功率与区域  $(i-r_1-1)$  到  $(i-r_2)$  中的节点通信,依此类推.

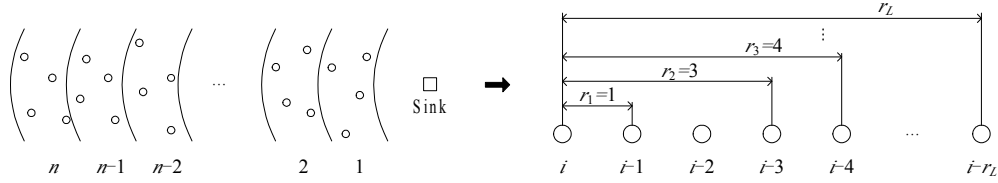


Fig.15 General model of mixed data transmission

图 15 通用的混合数据传输模型

我们使用文献[32]中的方法分析  $r_1, r_2, \dots, r_L$  与达到全网能量均衡时网络的最大片段数( $n$ )之间的关系.用  $Z$  表示网络寿命,时间  $Z$  内各区域产生的数据相等,设为  $\lambda_0, f_{ij}$  是这段时间内由区域  $i$  流向区域  $j$  的数据总量,另设各区域的初始能量为  $b_0$ .通过能量均衡实现网络寿命最大化的问题则可以建模为如下的线性规划模型:

Maximize  $Z$

S.T.

$$\sum_{j=1}^n f_{j,i} + Z \cdot \lambda_0 = \sum_{j=0}^n f_{i,j}, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n f_{j,i} c_0 + \sum_{j=0}^n f_{i,j} \cdot C_i(i, j) = b_0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$f_{i,j} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ and } (i-j > r_L \text{ or } j \geq i) \quad (12)$$

$$f_{i,j} \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ and } j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

其中,  $C_i(i, j) \in \{c_1, c_2, \dots, c_L\}$ .  $C_i(i, j)$  表示  $f_{i,j}$  的传输能耗,其值取决于区域  $i, j$  的距离与  $r_L (L=1, \dots, L)$  的关系.公式(10)是对区域  $i$  的流量守恒约束.公式(11)表示区域  $i$  在整个网络生命周期内的总能耗刚好等于其初始能量,该式保证了全网的能量均衡.最后,公式(12)和公式(13)是传输距离受限条件下对流量取值的基本约束.

该线性规划模型中包含了网络片段数  $n$  和传输距离配置  $(r_1, r_2, \dots, r_L)$ ,通过分析其可行解的存在情况,可以得到  $n$  与  $r_1, r_2, \dots, r_L$  的关系.

(2) 一般情况下的能量均衡上限

**定理 8.** 在节点随机均匀分布的一维网络中,使用混合传输策略实现全网能量均衡时,最大网络片段数( $n$ )与传输距离配置  $(r_1, r_2, \dots, r_L)$  需要满足如下关系:

$$n \leq r_L + \sum_{i=1}^L k_i \cdot \alpha_i \quad (14)$$

其中,  $k_i = r_i - r_{i-1}$  (取  $r_0 = 0$ ),  $\alpha_i = \frac{c_L - c_i}{c_i + c_0}$ .

证明:对公式(10)所描述的  $n$  个等式的等号两边分别求和,得:

$$n \lambda_0 \cdot Z = \sum_{i=1}^n f_{i,0} = \sum_{i=1}^{r_L} f_{i,0} \quad (15)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ , 公式(10)  $\times (-c_0)$  + 公式(11)可得:  $\sum_{j=0}^n f_{i,j} \cdot [C_i(i, j) + c_0] = b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z$ .

结合公式(12)的约束,该式等价于

$$\sum_{j=0}^{i-1} f_{i,j} \cdot [C_i(i, j) + c_0] = b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z, i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

当  $i = 1, 2, \dots, r_1$  时,  $C_i(i, 0) = c_1$ , 公式(16)可写成:

$$f_{i,0} + \sum_{j=1}^{i-1} f_{i,j} \cdot \frac{C_i(i,j) + c_0}{c_1 + c_0} = \frac{b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z}{c_1 + c_0}.$$

类似地,当  $i=r_{u-1}+1, r_{u-1}+2, \dots, r_u$  时,  $C_i(i,0)=c_u, u=2,3,\dots,L$ , 公式(16)可写成:

$$f_{i,0} + \sum_{j=1}^{i-1} f_{i,j} \cdot \frac{C_i(i,j) + c_0}{c_u + c_0} = \frac{b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z}{c_u + c_0}.$$

因此,对公式(16)的前  $r_L$  个等式求和可得:

$$\sum_{i=1}^{r_L} f_{i,0} + \sum_{i=1}^{r_L} \sum_{j=1}^{i-1} f_{i,j} \cdot \frac{C_i(i,j) + c_0}{c_u + c_0} = (b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0},$$

其中,  $k_i=r_i-r_{i-1}$  (令  $r_0=0$ ),  $\sum_{i=1}^{r_L} k_i = r_L$ . 因此,  $\sum_{i=1}^{r_L} f_{i,0} \leq (b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0}$ . 结合公式(15)有:

$$n \lambda_0 \cdot Z \leq (b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{另一方面,当 } i=n \text{ 时,根据公式(10), } Z \cdot \lambda_0 &= \sum_{j=n-r_L}^{n-1} f_{n,j}; \text{ 由公式(11), } b_0 = \sum_{j=n-r_L}^{n-1} f_{n,j} \cdot C_i(n,j) \leq c_L \cdot \sum_{j=n-r_L}^{n-1} f_{n,j}. \text{ 从而} \\ b_0 &\leq c_L \lambda_0 \cdot Z \end{aligned} \quad (18)$$

结合公式(17)和公式(18)可得:

$$\begin{aligned} n \cdot \lambda_0 Z &\leq (b_0 + c_0 \lambda_0 \cdot Z) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0} \\ &\leq (c_L \lambda_0 \cdot Z + c_0 \lambda_0 \cdot Z) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0} \\ &= \lambda_0 Z \cdot (c_L + c_0) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} n &\leq (c_L + c_0) \cdot \sum_{i=1}^{r_L} \frac{k_i}{c_i + c_0} \\ &= \sum_{i=1}^{r_L} k_i \cdot \left( 1 + \frac{c_L - c_i}{c_i + c_0} \right) \\ &= r_L + \sum_{i=1}^{r_L} k_i \cdot \alpha_i. \end{aligned}$$

故,原命题得证. □

定理 8 表明,一维网络中为实现全网能量均衡,网络区域的大小(即,片段个数  $n$ )不能超过  $r_L + \sum_{i=1}^{r_L} k_i \cdot \alpha_i$ , 其中,  $r_L$  是节点单跳传输的最远距离.与  $\alpha$  类似,  $\alpha_i$  的物理意义为  $r_L$  相对于  $r_i$  的能耗增加率,  $\alpha_i$  也是决定能量均衡性能的关键系数.在使用混合传输策略时,当网络片段的个数超过一定阈值时,无法达到全网能量均衡;而且,只要节点的传输距离是有限的,这种阈值效应就一直存在.这一分析结果符合人们的直观认识,因为当片段增多时,逐跳、逐 2 跳、逐  $n$  跳的差别逐渐减小.本文为揭示这一直观认识的合理性提供了理论依据.

一维网络的最大能量均衡区域主要取决于  $r_L$ , 其他传输距离则通过  $\alpha_i$  对能量均衡的上限施加影响.同时,由  $c_i \geq c_1, i=1, \dots, n$ , 可得  $\alpha_i \leq \alpha_1$ . 因此,  $n \leq r_L + \sum_{i=1}^{r_L} k_i \cdot \alpha_i < r_L + \alpha_1 \cdot \sum_{i=1}^{r_L} k_i = r_L \cdot (1 + \alpha_1)$ . 由此可见,  $r_L$  和  $r_1$  是决定能量均衡上限的重要因素,可通过  $r_L$  和  $r_1$  粗略地估计出一维网络的最大能量均衡区域.

定理 8 是针对一般情况下的混合传输策略得出的结论,其分析模型从两方面突破了原问题模型的限制:  
(a) 允许节点具有多种离散可调的传输距离;(b) 不对传输距离间的数值关系进行约束.逐跳/逐 2 跳通信系统仅是这种通用的混合传输模型在  $L=2$  且  $r_2=2r_1$  时的特例,此时,  $n \leq r_2 + r_1 \cdot \alpha_1 = r_1 \cdot (2 + \alpha)$ , 这正是推论 2 中的结论.



为了在一维网络中应用上述混合传输策略,本文提出如下方法:

- 首先,找出  $r_1, r_2, \dots, r_L$  的最大公约数  $d$ , 将网络区域划分为  $n$  个宽度为  $d$  的片段;
- 其次,计算并设置各片段的传输概率表,片段  $i$  和  $j$  之间的传输概率为  $p_{ij} = \frac{f_{i,j}}{\sum_{k=0}^n f_{i,k}}$ , 其中  $f_{i,j}$  可通过情形 1) 中的线性规划模型解出;
- 传输数据时,片段  $i$  中的节点根据传输概率表随机地从  $(i-1)$  到  $(i-r_L)$  中选择一个片段,使用对应的功率通信。

由定理的证明过程可知,公式(14)成立并不保证全网能量均衡可以实现,但仍然可以利用这一关系解决一些网络设计与部署中的实际问题。例如,为了使大小(即,网络片段数)为  $n$  的一维网络达到全网能量均衡,所选择的传输距离必须满足关系:  $r_L \cdot (1 + \alpha_1) > n$ 。在所有待选的传输距离中,  $r_L$  是决定能量均衡上限的主要因素,需要优先决定;但同时,剩下  $(L-1)$  种传输距离的选择,包括  $L$  的取值,直接决定节点的通信能耗,进而影响网络寿命。在特定的性能约束下,如何设置通信系统的传输距离是我们的后续工作。

## 6 实验仿真

本节通过仿真实验,分析逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限,验证全网能量均衡的条件以及传输概率的设置规则。实验中,为了得到真实的能量均衡上限,我们将基于逐跳/逐 2 跳的混合数据传输建模成一个优化问题,从该问题的最优解中,计算所能达到全网能量均衡的最大网络片段数。

定义片段  $i$  和  $j$  之间的数据传输速率为  $T_{i,j}$ ,  $T_{i,j}$  需要满足流量守恒:

$$1 + \sum_{0 < (k-i) \cdot r \leq r_2} T_{k,i} = \sum_{0 < (i-j) \cdot r \leq r_2} T_{i,j}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (19)$$

基于  $T_{i,j}$ , 片段  $i$  中节点的平均能耗速率为

$$\varepsilon_i = c_0 \cdot \sum_{0 < (k-i) \cdot r \leq r_2} T_{k,i} + c_1 \cdot \sum_{0 < (i-j) \cdot r \leq r_1} T_{i,j} + c_2 \cdot \sum_{r_1 < (i-h) \cdot r \leq r_2} T_{i,h}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

则能量均衡问题(energy balance problem, 简称 EBP)可建模成以  $\min_{T_{i,j}} \{\max_{1 \leq i \leq n} (\varepsilon_i) - \min_{1 \leq j \leq n} (\varepsilon_j)\}$  为目标函数、以公式(19)

为约束条件的线性规划问题。

实验中,使用 LINGO11 求解上述优化问题,通过对比  $m_0$  与 EBP 取得最优解时网络的最大能量均衡区域,验证逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限。主要的仿真参数见表 3。  $r_2$  的通信能耗  $c_2$  未在表中列出,我们将其设置为  $c_2 = \alpha \cdot (c_0 + c_1) + c_1$ 。实验重点考察网络片段数  $n$ 、能耗系数  $\alpha$  以及传输距离设置  $(r_1, r_2)$  对  $m_0$  的影响。

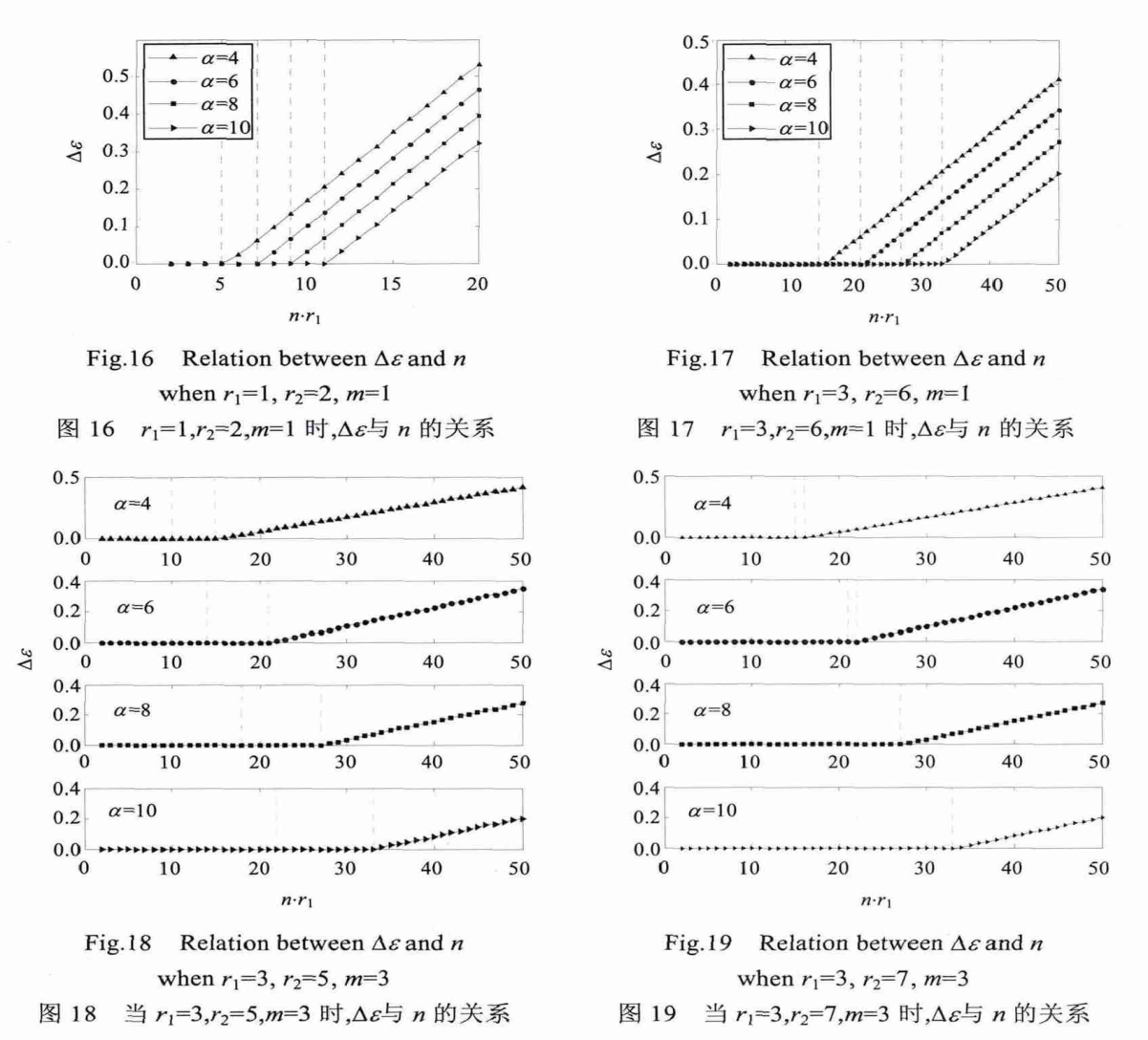
**Table 3** Simulation parameters

**表 3** 仿真参数

参数	值
数据产生速率( $k$ )	0.533 bits/s
接收能耗( $c_0$ )	0.034 uJ/bit
$r_1$ 的通信能耗( $c_1$ )	0.034 uJ/bit

图 16~图 19 展示了 EBP 取得最优解时,  $\Delta\varepsilon$  与网络片段数( $n$ )的关系, 其中,  $\Delta\varepsilon = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}$ ,  $\Delta\varepsilon=0$  表示全网能量均衡的状态。数据显示:网络中始终存在一个临界点  $\tilde{n}$ , 使得  $n \leq \tilde{n}$  时  $\Delta\varepsilon=0$ ,  $n > \tilde{n}$  时  $\Delta\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{n}$  是使用该传输策略所能达到全网能量均衡的实际最大网络片段数。这一现象表明:逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能量均衡能力是有限的;而且其能力上限正是  $\tilde{n}$ , 全网能量均衡的条件是  $n \leq \tilde{n}$ 。

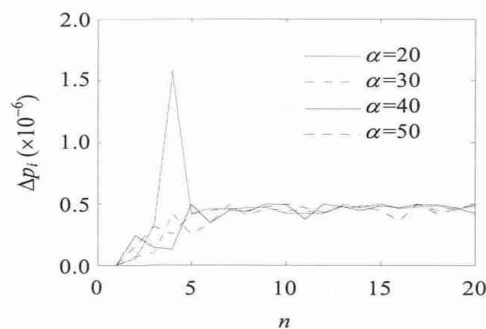
我们通过对比  $\tilde{n}$  与  $m_0$ , 进一步验证定理 6。图 16~图 19 用虚线标出了  $\tilde{n}$  和  $m_0$ , 图 16 和图 17 中,  $m_0$  与  $\tilde{n}$  完全重合;而图 18 和图 19 中,  $m_0$  与  $\tilde{n}$  存在偏差,  $n_0 \leq \tilde{n}$ 。因此,  $r_2=2r_1$  时, 定理 6 给出的是逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能量均衡能力的准确上界;但当  $r_2 \neq 2r_1$  时, 定理 6 给出的  $m_0$  偏小, 仅可作为  $\tilde{n}$  的近似。



接下来,我们对比  $p_i$  与 EBP 取得最优解时各节点的传输概率 ( $\hat{p}_i$ ), 以进一步验证定理 7 中  $p_i$  的求解规则.当  $n=9$  时,  $\hat{p}_i$  和  $p_i$  的取值见表 4, 二者几乎完全相等.图 20 进一步展示了不同规模的网络中  $p_i$  与  $\hat{p}_i$  的取值偏差, 偏差的绝对值不超过  $2 \times 10^{-6}$ . 这些实验数据再次表明, 定理 7 中传输概率的近似求解规则具有很好的精度.

**Table 4** Comparison of transmission probabilities ( $n_1=1, n_2=2, \alpha=10, n=9$ )  
**表 4** 传输概率对比( $n_1=1, n_2=2, \alpha=10, n=9$ )

节点编号	$\hat{p}_i$	$p_i$
1	1	1
2	0.985 714	0.985 714
3	0.966 667	0.966 667
4	0.940 000	0.940 000
5	0.900 004	0.900 004
6	0.833 413	0.833 413
7	0.701 792	0.701 792
8	0.366 055	0.366 055
9	0.211 111 0	0.211 111 1

Fig.20 Maximum deviation of transmission probability ( $\Delta p_i$ ) when  $n_1=1, n_2=2$ 图 20 当  $n_1=1, n_2=2$  时,传输概率的最大偏差( $\Delta p_i$ )

综合以上实验结果可以得出如下结论:

- 混合传输策略的能量均衡能力是有限的,仅当网络规模不超过  $m_0$  时,全网能量均衡才能实现.
- 能量均衡能力仅与系统的通信参数有关,其中,能耗溢价率  $\alpha$  是决定能量均衡能力的关键系数.当  $r_2=2r_1$  时,逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限由定理 6 精确给出;但当  $r_2 \neq 2r_1$  时,定理 6 给出的  $m_0$  偏小.
- 定理 7 中,传输概率的近似求解规则精度较高,由此设置的传输概率能够均衡所有节点的能耗.

不可否认,当  $r_2 \neq 2r_1$  时,定理 6 给出的  $m_0$  与其实际值之间还存在着偏差,某些网络中偏差甚至高达 30%,这种误差是本模型所不能避免的.但是,实际应用中可以通过合理地选择传输距离( $r_1, r_2$ )刻意规避  $r_2 \neq 2r_1$  的网络场景.然而,欲精确分析当  $r_2 \neq 2r_1$  时能量均衡能力的理论上限还需借助新的模型,这是我们的后续工作.

实验结果和理论分析都表明,  $m_0$  的值非常有限.在实际应用中,网络片段的个数往往大于  $m_0$ , 不能通过混合传输策略实现全网能量均衡.然而实际应用中,人们更加关心网络的生存时间能否达到其预期寿命,此时,次优能量均衡也是一种足以接受的优化结果,甚至更具实用价值.在片段数大于  $m_0$  的网络中,研究如何应用混合传输策略使网络工作至预期寿命,是我们未来的研究内容.

## 7 结束语

本文研究混合数据传输中的能量均衡问题,从理论上探讨一维传感网中全网能量均衡能否实现以及如何实现.文中形式化地推导了传输概率的精确表达,给出了全网能量均衡的条件及其实现方法.研究发现:混合传输策略的能量均衡能力仅与系统的通信参数有关,其中,  $\alpha$  是决定能量均衡能力的关键系数.文中证明  $m_0$  是逐跳/逐 2 跳混合传输策略的能力上限,仅当网络规模不超过  $m_0$  时,利用本文所提出的方法设置传输概率才能完全均衡所有节点的能耗.本文通过仿真实验,对全网能量均衡的条件和方法进行了验证.

通过分析混合传输策略的能量均衡能力,开发人员在设计阶段就可以了解到网络性能是否满足应用的需要,为了达到预定的性能指标,可能还需要结合其他的能量均衡策略,本文的工作可以为这些前期决策提供指导.另一方面,虽然网络片段数大于  $m_0$  时全网能量均衡无法实现,但很多实际应用中并不要求全网能量均衡,次优能量均衡也是一个重要的优化目标.研究如何结合应用需求均衡网络能耗,是我们未来的重要研究内容;此外,我们还准备将本文的研究拓展至二维随机网络.

## References:

- [1] Stoianov I, Nachman L, Madden S, Tokmouline T, Csail M. PIPENET: A wireless sensor network for pipeline monitoring. In: Proc. of the IEEE IPSN. New York: IEEE, 2007. 264–273. [doi: 10.1109/IPSIN.2007.4379686]
- [2] Stajano F, Houlte N, Wassell I, Bennett P, Middleton C, Soga K. Smart bridges, smart tunnels: Transforming wireless sensor networks from research prototypes into robust engineering infrastructure. Ad Hoc Networks, 2010,8(8):872–888. [doi: 10.1016/j.adhoc.2010.04.002]

- [3] Li J, Mohapatra P. Analytical modeling and mitigation techniques for the energy hole problem in sensor networks. *Pervasive and Mobile Computing*, 2007,3(3):233–254. [doi: 10.1016/j.pmcj.2006.11.001]
- [4] Song C, Liu M, Cao JN, Zheng Y, Gong HG, Chen GH. Maximizing network lifetime based on transmission range adjustment in wireless sensor networks. *Computer Communications*, 2009,32(11):1316–1325. [doi: 10.1016/j.comcom.2009.02.002]
- [5] Lian J, Naik K, Agnew GB. Data capacity improvement of wireless sensor networks using non-uniform sensor distribution. *Int'l Journal of Distributed Sensor Networks*, 2006,2(2):121–145. [doi: 10.1080/15501320500201276]
- [6] Guo WH, Liu ZY, Wu GB. An energy-balanced transmission scheme for sensor networks. In: *Proc. of the ACM SenSys*. New York: ACM Press, 2003. 300–301. [doi: 10.1145/958491.958530]
- [7] Efthymiou C, Nikolettseas S, Rolim J. Energy balanced data propagation in wireless sensor networks. *Wireless Networks*, 2006, 12(6):691–707. [doi: 10.1007/s11276-006-6529-y]
- [8] Nikolettseas S. On the energy balance problem in distributed sensor networks. *Computer Science Review*, 2010,4(2):65–79. [doi: 10.1016/j.cosrev.2010.03.001]
- [9] Jarry A, Leone P, Nikolettseas S, Rolim J. Optimal data gathering paths and energy-balance mechanisms in wireless networks. *Ad Hoc Networks*, 2011,9(6):1036–1048. [doi: 10.1016/j.adhoc.2010.11.003]
- [10] Liu A, Liu ZH, Nurudeen M, Jin X, Chen Z. An elaborate chronological and spatial analysis of energy hole for wireless sensor networks. *Computer Standards & Interfaces*, 2013,35(1):132–149. [doi: 10.1016/j.csi.2012.06.005]
- [11] Li Z, Peng Y, Qiao DJ, Zhang WS. LBA: Lifetime balanced data aggregation in low duty cycle sensor networks. In: *Proc. of the IEEE INFOCOM*. New York: IEEE, 2012. 1844–1852. [doi: 10.1109/INFCOM.2012.6195559]
- [12] Wu Y, Fahmy S, Shroff NB. On the construction of a maximum-lifetime data gathering tree in sensor networks: NP-Completeness and approximation algorithm. In: *Proc. of the IEEE INFOCOM*. New York: IEEE, 2008. 356–360. [doi: 10.1109/INFCOM.2008.80]
- [13] Wu Y, Mao ZJ, Fahmy S, Shroff NB. Constructing maximum-lifetime data gathering forests in sensor networks. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 2010,18(5):1571–1584. [doi: 10.1109/TNET.2010.2045896]
- [14] Liang JB, Wang JX, Cao JN, Chen JE, Lu MM. An efficient algorithm for constructing maximum lifetime tree for data gathering without aggregation in wireless sensor networks. In: *Proc. of the IEEE INFOCOM*. New York: IEEE, 2010. 1–5. [doi: 10.1109/INFCOM.2010.5462181]
- [15] Lee H, Keshavarzian A, Aghajan H. Near-Lifetime-optimal data collection in wireless sensor networks via spatio-temporal load balancing. *ACM Trans. on Sensor Networks*, 2010,6(3):1–26. [doi: 10.1145/1754414.1754422]
- [16] Olariu S, Stojmenovic I. Design guidelines for maximizing lifetime and avoiding energy holes in sensor networks with uniform distribution and uniform reporting. In: *Proc. of the IEEE INFOCOM*. New York: IEEE, 2006. 1–12. [doi: 10.1109/INFCOM.2006.296]
- [17] Ammari HM, Das SK. Promoting heterogeneity, mobility, and energy-aware voronoi diagram in wireless sensor networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2008,19(7):995–1008. [doi: 10.1109/TPDS.2008.31]
- [18] Liu M, Song C. Ant-Based transmission range assignment scheme for energy hole problem in wireless sensor networks. *Int'l Journal of Distributed Sensor Networks*, 2012,2012:Article ID 290717. [doi: 10.1155/2012/290717]
- [19] Tran-Quang V, Miyoshi T. A transmission range adjustment algorithm to avoid energy holes in wireless sensor networks. In: *Proc of the IEEE APSITT*. New York: IEEE, 2010. 1–6.
- [20] Song C, Liu M, Gong HG, Chen GH, Wang XM. ACO-Based algorithm for solving energy hole problems in wireless sensor networks. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2009,20(10):2729–2743 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3462.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03462]
- [21] Azad AKM, Kamruzzaman J. Energy-Balanced transmission policies for wireless sensor networks. *IEEE Trans. on Mobile Computing*, 2011,10(7):927–940. [doi: 10.1109/TMC.2010.238]
- [22] Mhatre V, Rosenberg C. Design guidelines for wireless sensor networks: Communication, clustering and aggregation. *Ad Hoc Networks*, 2004,2(1):45–63. [doi: 10.1016/S1570-8705(03)00047-7]
- [23] Liu ZY, Xiu DX, Guo WH. An energy-balanced model for data transmission in sensor networks. In: *Proc. of the IEEE VTC*. New York: IEEE, 2005. 2332–2336. [doi: 10.1109/VETECF.2005.1558965]

- [24] Powell O, Leone P, Rolim J. Energy optimal data propagation in wireless sensor networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2007,67(3):302–317. [doi: 10.1016/j.jpdc.2006.10.007]
- [25] Leone P, Nikolettseas S, Rolim J. Stochastic models and adaptive algorithms for energy balance in sensor networks. *Theory of Computing Systems*, 2010,47(2):433–453. [doi: 10.1007/s00224-009-9193-7]
- [26] Boukerche A, Efstathiou D, Nikolettseas S, Raptopoulos C. Close-to-Optimal energy balanced data propagation via limited, local network density information. In: *Proc. of the ACM MSWiM*. New York: ACM Press, 2011. 85–92. [doi: 10.1145/2068897.2068915]
- [27] Boukerche A, Efstathiou D, Nikolettseas S, Raptopoulos C. Exploiting limited density information towards near-optimal energy balanced data propagation. *Computer Communications*, 2012,35(18):2187–2200. [doi: 10.1016/j.comcom.2012.07.022]
- [28] Zhang HB, Shen H, Tan YS. Optimal energy balanced data gathering in wireless sensor networks. In: *Proc. of the IEEE IPDPS*. New York: IEEE, 2007. 1–10. [doi: 10.1109/IPDPS.2007.370248]
- [29] Zhang HB, Shen H. Balancing energy consumption to maximize network lifetime in data-gathering sensor networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2009,20(10):1526–1539. [doi: 10.1109/TPDS.2008.252]
- [30] Deng J. Multihop/Direct forwarding (MDF) for static wireless sensor networks. *ACM Trans. on Sensor Networks (TOSN)*, 2009, 5(4):1–35. [doi: 10.1145/1614379.1614387]
- [31] Deng J, Huang SCH, Han YS. An online relay selection scheme in power controllable wireless sensor networks. *Int'l Journal of Distributed Sensor Networks*, 2012,2012:Article ID 213598. [doi: 10.1155/2012/213598]
- [32] Jin N, Chen KJ, Gu T. Energy balanced data collection in wireless sensor networks. In: *Proc. of the IEEE ICNP*. New York: IEEE, 2012. 1–10. [doi: 10.1109/ICNP.2012.6459987]
- [33] Perillo M, Cheng Z, Heinzelman W. On the problem of unbalanced load distribution in wireless sensor networks. In: *Proc. of the IEEE GlobeCom*. New York: IEEE, 2004. 74–79. [doi: 10.1109/GLOCOMW.2004.1417552]
- [34] Chipcon AS. Chipcon SmartRF CC2420, 2.4 GHz IEEE 802.15.4/ZigBee-ready RF Transceiver. 2006.
- [35] Wang Q, Hempstead M, Yang W. A realistic power consumption model for wireless sensor network devices. In: *Proc. of the IEEE SECON*. New York: IEEE, 2006. 286–295. [doi: 10.1109/SAHCN.2006.288433]
- [36] Mallinson M, Drane P, Hussain S. Discrete radio power level consumption model in wireless sensor networks. In: *Proc. of the IEEE MASS*. New York: IEEE, 2007. 1–6. [doi: 10.1109/MOBHOC.2007.4428756]

#### 附中文参考文献:

- [20] 宋超,刘明,龚海刚,陈贵海,王晓敏.基于蚁群优化解决传感器网络中的能量洞问题. *软件学报*, 2009,20(10):2729–2743. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3462.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03462]

#### 附录 A: 流量关系式 $G_i = F_i + F_{i-1} + (i-n) \cdot k$ 的推导

由流量守恒及  $F_i$  的定义可知:  $G_i - G_{i-1} = F_i - F_{i-2} + k, i=2,3,\dots,n$ , 从而有:

$$\begin{aligned} G_i - G_{i-1} &= F_i - F_{i-2} + k, \\ G_{i-1} - G_{i-2} &= F_{i-1} - F_{i-3} + k, \\ &\vdots \\ G_3 - G_2 &= F_3 - F_1 + k, \\ G_2 - G_1 &= F_2 - F_0 + k, \end{aligned}$$

等式两边分别求和可得:

$$G_n - G_1 = F_n + F_{n-1} - F_1 - F_0 + (n-1) \cdot k.$$

根据片段 1 的流量守恒关系,  $F_1 + k = G_1 + H_1$ , 可得:  $F_1 - G_1 = H_1 - k$ ; 而  $H_1 = 0, F_0 = n \cdot k$ , 代入上式可得:

$$G_i = F_i + F_{i-1} + (i-n) \cdot k, i=2,3,\dots,n.$$

当  $i=1$  时, 由  $F_1 + k = G_1 + H_1$  可得:

$$G_1 = F_1 + k + H_1 = F_1 + k + (n \cdot k - n \cdot k) = F_1 + n \cdot k + (1-n) \cdot k = F_1 + F_0 + (1-n) \cdot k.$$

因此,  $G_i = F_i + F_{i-1} + (i-n) \cdot k, i=1, 2, \dots, n$ .

## 附录 B: $G_i = p_i(F_i + k)$ 的证明

设  $t_i = f_i + k, t_i$  表示片段  $i$  所传输的数据总量, 显然有  $E[t_i] = E[f_i] + k$ . 定义随机变量  $\delta_{i,j}$ :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{片段的第 } j \text{ 个报文传输给片段 } (i-1) \\ 0, & \text{片段的第 } j \text{ 个报文传输给片段 } (i-2) \end{cases}$$

$\delta_{i,j}$  的值完全取决于片段  $i$ , 编号  $j$  仅用于区分不同的报文, 根据传输概率的定义,  $E[\delta_{i,j}] = p_i$ .

另外, 由  $g_i$  的定义可知,  $g_i = \sum_{j=1}^{t_i} \delta_{i,j}$ , 则

$$E[g_i] = E\left[\sum_{j=1}^{t_i} \delta_{i,j}\right] = \sum_{t=0}^N E\left[\sum_{j=1}^t (\delta_{i,j} | t_i = t)\right] \cdot P\{t_i = t\},$$

其中,  $N = n \cdot k$ , 表示 1 个数据收集周期内网络中的总通信量. 进一步来说,

$$E\left[\sum_{j=1}^t (\delta_{i,j} | t_i = t)\right] = E\left[\sum_{j=1}^t \delta_{i,j}\right] = \sum_{j=1}^t E[\delta_{i,j}] = t \cdot E[\delta_{i,j}].$$

代入上式, 可得:

$$E[g_i] = \sum_{t=0}^N t \cdot E[\delta_{i,j}] \cdot P\{t_i = t\} = E[\delta_{i,j}] \cdot \sum_{t=0}^N t \cdot P\{t_i = t\} = E[\delta_{i,j}] \cdot E[t_i].$$

因此,  $E[g_i] = p_i(E[f_i] + k)$ , 原命题得证.  $\square$

## 附录 C: $\Delta_i$ 的初始条件

可以根据边缘片段的通信活动推导  $\Delta_i$  的初始条件, 考虑如图 21 所示的网络, 片段 1 和片段  $n$  分别位于网络链的两端, 它们的通信流量具有如下特征:

$$\begin{cases} F_n = 0, G_n + H_n = k, G_n = F_{n-1} \\ H_1 = 0, F_1 + k = G_1 \end{cases},$$

则片段 1 和片段  $n$  的能耗速率分别为  $E_1 = (c_0 + c_1) \cdot F_1 + c_1 \cdot k, E_n = (c_1 + c_2) \cdot F_{n-1} + c_2 \cdot k$ . 在能量均衡条件下,  $E_n = E_1$ . 因此,

$(c_1 + c_2) \cdot F_{n-1} = (c_0 + c_1) \cdot F_1 + (c_1 + c_2) \cdot k$ ; 令  $m = \frac{c_0 + c_1}{c_1 + c_2}$ , 则有:

$$F_{n-1} = m \cdot F_1 + k.$$

因为  $\begin{cases} \Delta_n = F_n - F_{n-1} \\ \Delta_1 = F_1 - F_0 \end{cases}$ , 所以  $\begin{cases} F_{n-1} = -\Delta_n \\ F_1 = \Delta_1 + n \cdot k \end{cases}$ , 代入上式可得:  $m \cdot \Delta_1 + \Delta_n = -(m \cdot n + 1) \cdot k$ .

同样地, 因为  $\Delta_i = F_i - F_{i-1}$ , 所以  $\sum_{i=1}^n \Delta_i = F_n - F_0 = -n \cdot k$ . 因此,  $\Delta_i$  满足的初始条件是:  $\begin{cases} \sum_{i=1}^n \Delta_i = -n \cdot k \\ m \cdot \Delta_1 + \Delta_n = -(m \cdot n + 1) \cdot k \end{cases}$ .

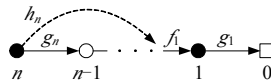


Fig.21 Illustration of communications in edge slices

图 21 边缘片段的通信示意图

附录 D:  $G_i$  和  $F_i$  的函数性质

一维传感网中,全网能量均衡时通信流量具有以下性质:

性质 1.  $G_i \leq F_i + k, i=1, 2, \dots, n$ .

性质 2. 如果  $G_n \geq 0$ , 则  $G_{i-1} - G_i \geq 0, i=2, 3, \dots, n$ .

性质 3. 如果  $G_n \geq 0$ , 则  $F_{i-1} - F_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n$ .

证明:首先,我们使用倒推法证明性质 1.由公式(1)可知:

$$G_i - F_i = F_{i-1} + (i-n) \cdot k, i=1, 2, \dots, n.$$

因此,

$$G_i \leq F_i + k \Leftrightarrow G_i - F_i - k \leq 0 \Leftrightarrow F_{i-1} + (i-n-1) \cdot k \leq 0.$$

令  $\Delta(i) = F_{i-1} + (i-n-1) \cdot k, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 设  $\Delta(x)$  是  $\Delta(i)$  所对应的连续函数, 其中  $x \in [1, n]$ . 欲证  $G_i \leq F_i + k$  恒成立, 只需证明  $\Delta_{\max}(x) \leq 0, x \in [1, n]$ . 根据  $\alpha$  的取值, 分以下 3 种情况讨论:

(1)  $\alpha=1$

由公式(7)可知, 当  $\alpha=1$  时,  $\Delta(i) = \frac{k}{2} [i^2 - (n+2) \cdot i + n+1]$ . 设  $h(x) = x^2 - (n+2) \cdot x + n+1$ , 则  $\Delta(x) = \frac{k}{2} \cdot h(x)$ . 因为  $h''(x) = 2 > 0$ , 所以当  $x \in [1, n]$  时,  $h(x)$  是一个凹函数,  $\Delta_{\max}(x) = \max\{\Delta(1), \Delta(n)\}$ . 而  $\Delta(1) = 0, \Delta(n) = 1 - n \leq 0$ , 所以  $\Delta_{\max}(x) \leq 0$ . 因此, 当  $\alpha=1$  时, 对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \Delta(i) \leq 0$ .

(2)  $0 < \alpha < 1$

同样地, 根据公式(7)可得: 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $\Delta(i) = \frac{k}{1-\alpha} \cdot \left( i - 1 + \frac{1-\alpha^{i-1}}{\alpha^n - 1} \cdot n \right)$ .

令  $h(x) = x - 1 + \frac{1-\alpha^{x-1}}{\alpha^n - 1} \cdot n$ , 则  $\Delta(x) = \frac{k}{1-\alpha} \cdot h(x)$ ,  $\Delta(x)$  和  $h(x)$  在相同的  $x$  处取得最大值. 对  $h(x)$  求导得:

$$h'(x) = \frac{\alpha^n - 1 - \ln \alpha^n \cdot \alpha^{x-1}}{\alpha^n - 1}, h''(x) = -\frac{n \cdot (\ln \alpha)^2 \cdot \alpha^{x-1}}{\alpha^n - 1}.$$

与情况(1)相同, 因为  $h''(x_0) > 0$ , 所以  $\Delta_{\max}(x) = \max\{\Delta(1), \Delta(n)\}$ .

而  $\Delta(1) = 0, \Delta(n) = \frac{k}{1-\alpha} \cdot \left( n - 1 + \frac{1-\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \cdot n \right)$ ,

因此, 欲证  $\Delta_{\max}(x) \leq 0$ , 只需证明  $\Delta(n) \leq 0$ . 我们将  $\Delta(n)$  看作  $n$  的函数, 分析当  $n \geq 1$  时  $\Delta(n)$  的最大值. 对  $\Delta(n)$  求导:

$$\frac{d\Delta(n)}{dn} = -\frac{k \cdot \alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \cdot \left( 1 - \frac{\ln \alpha^n}{\alpha^n - 1} \right).$$

当  $0 < \alpha < 1$  时, 因为  $-\frac{k \cdot \alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} > 0, 1 - \frac{\ln \alpha^n}{\alpha^n - 1} = \frac{\alpha^n - 1 - \ln \alpha^n}{\alpha^n - 1} < 0$ , 所以  $\frac{d\Delta(n)}{dn} < 0$ , 所以  $\Delta(n) \leq \Delta(n)|_{n=1} = 0$ .

因此,  $\Delta_{\max}(x) = \max\{\Delta(1), \Delta(n)\} \leq 0$ . 所以, 当  $0 < \alpha < 1$  时, 对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \Delta(i) \leq 0$ .

(3)  $\alpha > 1$

当  $\alpha > 1$  时, 使用情况(2)中相同的方法可证得:  $\Delta(i) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

综合上述分析, 当  $i=1, 2, \dots, n$  时,  $G_i \leq F_i + k$  恒成立, 性质 1 得证.

接下来继续证明性质 2 和性质 3, 分以下两种情况:

(1)  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$

当  $\alpha \neq 1$  时, 由公式(7)和公式(8)可得:

$$G_{i-1} - G_i = \frac{k \cdot (1 + \alpha)}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^n)} \cdot [\alpha^n - 1 + n(1 - \alpha)\alpha^{i-2}],$$

$$F_{i-1} - F_i = \frac{k \cdot \alpha}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^n)} \cdot [\alpha^n - 1 + n(1 - \alpha)\alpha^{i-2}].$$

显然,  $\frac{k \cdot (1+\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha^n)} > 0, \frac{k \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^n)} > 0$ . 因此,  $G_{i-1}-G_i$  和  $F_{i-1}-F_i$  的正负都取决于  $[\alpha^n-1+n(1-\alpha)\alpha^{i-2}]$ .

设  $f(x)=\alpha^n-1+n(1-\alpha)\alpha^{x-2}, 2 \leq x \leq n$ , 则有  $f'(x)=n(1-\alpha)\ln \alpha \cdot \alpha^{x-2}$ . 当  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$  时, 因为  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x) \geq f(n)$ .

另一方面, 由于  $G_n = \frac{k \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^n)} \cdot [\alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1]$ , 利用  $G_n \geq 0$  的条件可得:  $[\alpha^n - n\alpha^{n-1} + n\alpha^{n-2} - 1] \geq 0$ .

而  $f(n)=\alpha^n-n\alpha^{n-1}+n\alpha^{n-2}-1$ , 因此, 当  $G_n \geq 0$  时,  $f(n) \geq 0$ ; 又因为  $f(x) \geq f(n)$ , 所以  $f(x) \geq 0$ . 从而, 当  $G_n \geq 0$  时,

$$[\alpha^n-1+n(1-\alpha)\alpha^{i-2}] \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

因此, 当  $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$  时, 如果  $G_n \geq 0$ , 则  $G_{i-1}-G_i \geq 0$  且  $F_{i-1}-F_i \geq 0$ .

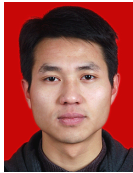
(2)  $\alpha=1$

当  $\alpha=1$  时,  $G_{i-1}-G_i \geq n+3-2i, i=2, 3, \dots, n$ , 因为  $G_{i-1}-G_i$  是关于  $i$  的递减数列, 所以  $G_{i-1}-G_i \geq n+3-2n=3-n$ .

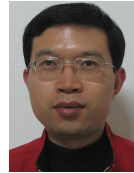
另外, 因为  $G_n = \frac{3-n}{2} \geq 0$ , 所以  $G_{i-1}-G_i \geq 3-n \geq 0$ .

由于当  $\alpha=1$  时,  $F_{i-1}-F_i = \frac{1}{2}(n+3-2i), i=1, 2, \dots, n$ , 同理可得: 当  $G_n \geq 0$  时,  $F_{i-1}-F_i \geq 0$ .

因此, 综上所述, 如果  $G_n \geq 0$ , 则  $G_{i-1}-G_i \geq 0$  且  $F_{i-1}-F_i \geq 0$ . 性质 2 和性质 3 得证.  $\square$



夏先进(1988—),男,四川达县人,博士生,主要研究领域为无线传感器网络,移动计算,能量管理.



李志刚(1975—),男,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为传感器网络,嵌入式系统.



李士宁(1967—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为嵌入式系统,无线传感器网络,物联网.



杨哲(1983—),男,博士,副教授,主要研究领域为无线通信,无线传感器网络,物联网.



张羽(1975—),男,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为无线传感器网络,移动计算,能量管理.