电场

在我们说出“电场”这个词的时候，通常指的是“静电场”。静电场的场强与时间无关，仅与空间有关。

一、点源的场

在经典物理学中，有一类定律非常重要，称为平方反比定律。通常平方反比定律会出现在仅有一个点源的空间系统中，这个点源以均匀辐射的形式向四周空间辐散或者辐合某种场。其中空间系统这个前提是重要的，正是空间的三个维度才使其形式为“平方”反比。

点源通常具有某种属性p，而这个属性是产生场f的根源，也是场f作用在另一个点源p'时的承载。

由于点源以均匀辐射的形式向四周空间辐散或者辐合某种场，场线均匀分布在空间中，并且必然指向或者背向点源。

而场强s与场线的密集程度正相关，通常定义场强就是单位面积内通过的场线的数量。这样在距离点源r处的球面上，场强大小必然与球面面积负相关：$s \propto \dfrac{1}{4\pi r^2}$

既然选择属性p为场的根源，自然是不愿意让它以过于复杂的形式出现在场方程中的，比如p^n。属性缩放多少倍，场强也应缩放多少倍，因而两者也是正比关系：$s \propto p$。这样场强大小就能改写为$f = \dfrac{kp}{4\pi r^2}$，其中k是比例系数。

以矢量的形式写出，场强应是$\boldsymbol{f}=\frac{kp}{4\pi r^3}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{kp}{4\pi r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$。其中$\boldsymbol{r}_0$表示单位径矢。

当场作用于另一点源p'时，将产生力$F=fp'=\frac{kpp'}{4\pi r^2}$，或以矢量形式表出$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}p'$。

点源的场有很多种具体的形式。比如质点的引力场，点电荷的电场，点光源的光强。它们都符合上述的性质。

二、点电荷的电场

在点电荷的电场中，基本的属性是电量q，常以$\boldsymbol{E}$表示电场强度。那么场强为$\boldsymbol{E}=\frac{kq}{4\pi r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$，定义单位径矢$\boldsymbol{r}_0$的起点为点电荷。注意电荷有正负之分，故正电荷的电场辐散，负电荷的电场辐合。

事实上由于场强会受介质的影响，我们常将场强方程写为$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$，其中$\varepsilon$称为介电常数，它会随介质的性质改变。

而介电常数又通常拆写为$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$，其中$\varepsilon_0$称为真空介电常数，$\varepsilon_r$称为相对介电常数。相对介电常数是指介质的介电常数与真空中的介电常数的比值，显然真空的相对介电常数就是1。

电场总会在介质中激发感应电荷，这些感应电荷总会抑制电场的传播。因此相对介电常数只有大于等于1的取值。越易导电的物质越易产生感应电荷，因此相对介电常数也越大。

点电荷电场对另一个点电荷q'总会产生力$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{qq'}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$。这称为库仑定律。

三、电场与电势

在空间中给定电场$\boldsymbol{E}$之后，两点P_1,P_2间的电势差$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$也随之确定：

$$\Delta\varphi=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

但因为只能确定电势差，电势零点就显得非常重要。给定电势零点之后，就能唯一确定一个电势场U。相反地，给定一个电势场U，也能唯一确定一个电场：

$$\boldsymbol{E}=\frac{dU}{d\boldsymbol{r}}$$

在点电荷电场中，通常取无穷远处为电势零点。这样真空中点电荷的电势场就是：

$$U=\int_{r}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

如果在积分路径上出现介质不同的情况，就需要分段积分，在每一段上代入各自的介电常数。

由于电场是矢量，电势是标量，两者的叠加运算是不同的。前者以矢量叠加，后者以标量叠加。现给出几种具体情形的电场分布或者电势分布(介质不变)：

1.带电线段中垂线电场分布

由对称性，必然只存在沿中垂线的电场。设线段长L，电荷密度ρ，距离线段r，于是：

在线段上距中点l的微元产生电场$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\rho\,dl}{l^2+r^2}$

以三角函数表示，沿中垂线的电场$dE_{\perp}=\frac{\rho cos\theta}{4\pi\varepsilon r}d\theta$

只需积分$\theta:-\theta\rightarrow\theta$，其中$\theta$是指所求点与线段端点所连直线与中垂线的夹角。得到：

$$E=\frac{\rho sin\theta}{2\pi\varepsilon r}$$

如果是无限长直导线，那么只需令$\theta\rightarrow\frac{\pi}{2}$，得：

$$E=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}$$

2.圆环沿轴电场与电势分布

由对称性，必然只存在轴向的电场。设圆环半径R、带电量Q，距离圆心r，于是：

圆环单位弧上带电量$\rho=\frac{Q}{2\pi R}$

圆环微弧距离圆心r处产生电场$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\rho\,dl}{R^2+r^2}$

故轴向电场$dE_r=\frac{\rho\,dl}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{R^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{r\cdot Rd\theta}{(R^2+r^2)^{3/2}}$

沿圆环周积分一次，即$\theta:0\rightarrow 2\pi$，显然：

$$E=\frac{\rho Rr}{2\varepsilon(R^2+r^2)^{3/2}}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon(R^2+r^2)^{3/2}}$$

对于电势，只需：

$$U=\int\frac{\rho\,dl}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+r^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+r^2}}$$

3.圆面沿轴电场分布

设圆面电荷密度为σ，只需将圆环沿轴电场分布的R视作变量，再沿$R:0\to R$积分：

$$E=\int_0^R\frac{\sigma\cdot 2\pi R\cdot r}{4\pi\varepsilon(R^2+r^2)^{3/2}}dR=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(1-\frac{r}{(R^2+r^2)^{1/2}}\right)$$

如果平面无穷大，那么只需令$R\to+\infty$，于是$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$。

4.球面电场与电势分布

设球面半径R，带电量Q。距离球心r。

由于对称性，球面以内电场为0。而在球面以外，相当于电量都集中在球心：

$$E=\begin{cases}0\ \ (0\leqslant r\leqslant R)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{r^2}\ \ (R\leqslant r)\end{cases}$$

同样的思路，从无穷远到R处，始终有电势；进入球面后，电场为0，电势不再变化：

$$U=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{R}\ \ (0\leqslant r\leqslant R)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{r}\ \ (R\leqslant r)\end{cases}$$

5.球体电场分布

设球体半径R，带电量Q。距离球心r。

在球面以内的r处，$r\sim R$的球体相当于多层球面，对电场不做贡献；$0\sim r$的球体相当于电量集中在球心，且所含电量$Q'=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{r^3Q}{R^3}$。

而在球面以外，相当于电量都集中在球心。于是：

$$E=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^3}\cdot r\ \ (0\leqslant r\leqslant R)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{r^2}\ \ (R\leqslant r)\end{cases}$$

四、电位移矢量

由于电场强度的计算总是涉及介质，因此我们希望找到一种量从而暂时忽略掉介质的影响。这个量称为电位移矢量$\boldsymbol{D}$。简单地把介电常数从场强方程中抹去：

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$$

这样电位移矢量与电场强度之间就存在关系$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$。

从本质而言，电位移矢量脱胎于电介质极化的分析，即电场会在电介质表面激发束缚电荷、从而影响原电场的分布，使得我们必须以一定的方式修正电场分布。因此电位移矢量最原初的定义是：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

其中$\boldsymbol{P}$称为电极化强度。上式只针对电介质中的某一处。

对比可得：

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$$

我们也记$\mathcal{X}=\varepsilon_r-1$，称为电极化率。

五、静电场的性质与高斯定律

首先必须指出，任何形式的静电场总能以一定的点电荷集合产生。而对于单个点电荷来说：

因为场强的形式是$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{q}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}_0$，电势场形式是$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，这个形式只与位置有关，因此对于环路积分：

$$W=\oint q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

必然为0，即做功与路径无关。这样的性质广泛存在于无旋场中，称为场的保守性。任何形式的静电场都是无旋场，也就必然是保守场。或者说，静电场的保守性体现了无旋性。

静电场都是有源场，即使是形式上的无源场也能以有源场的复合产生。而高斯定律就体现了静电场的有源性。在数学上高斯定律体现为：

$$\oiint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdydz=\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

或$\oiint_{S^+} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint div\boldsymbol{E}\, dV = \iiint \nabla \cdot \boldsymbol{E}\, dV$

在物理上这就是说，闭合曲面上的电通量由其所围空间内的源的强度决定。在球坐标系下：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial (r^2\ E_r)}{r^2\ \partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{q}{2\pi\varepsilon r}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon r^2}$$

$$\begin{aligned}\oiint_{S^+} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint \nabla \cdot \boldsymbol{E}\, dV \\ &= \iiint \frac{q}{2\pi\varepsilon r^2} \cdot r^2 sin\varphi\ dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} sin\varphi\ d\varphi \int_0^r dr \\ &= 0\end{aligned}$$

上式之所以为0，是因为闭合面中不包含源——否则会出现瑕点。如果包含源，那么上式积分对任意曲面都是成立的——那么不妨取球面，容易得到：

$$\varPhi_E = \oiint_{S^+} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

上式是麦克斯韦方程组的第一方程。

注意到介质的影响，不妨将上式两边都乘上介电常数：

$$\varPhi_D = \oiint_{S^+} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$$

但需要注意的是上式右边的电量q仅指闭合面内的自由电荷，不包含束缚电荷。常常会利用上式来求束缚电荷。

六、电路

静电平衡下的导体具有特殊的性质。其一，内部各处电量均为0，电荷只存在于导体表面；其二，导体表面是等势面，也即电场线必然垂直于导体表面。

而当导体通电，就会打破静电平衡。此时电路内部会形成沿导线的电场，但是电场强度却并非处处相等的——相等的是电位移矢量。导线的介电常数很大，这会导致导线内的电场$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}$很小，从而导线上

几乎不产生电压降。尤其对于理想导线,$\varepsilon \to \infty$，$\boldsymbol{E} \to 0$。
实际上此时电场的行为是非常复杂的，我们常常抽象为电路来研究。

1.电流

电流指的是单位时间内穿过横截面的电量，即$I = \dfrac{dq}{dt}$。注意到电流是标量，但具有方向；同时它也和所选横截面的面积没有关系。

与横截面面积相关的量是电流密度$\boldsymbol{J}$，定义为$\boldsymbol{J} = \dfrac{dI}{d\boldsymbol{S}}$。电流密度是矢量，并且不仅与横截面积有关、还与横截面方向有关——事实上弥补了电流是标量但具有方向的不足。这样，电流就是电流密度的通量。

若记单位体积内电子个数为n，那么还有$\boldsymbol{J} = ne\bar{\boldsymbol{v}}$。我们称平均定向速度$\bar{\boldsymbol{v}}$为漂移速度。

根据宏观上的欧姆定律，可以推出欧姆定律的微观形式$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$。

2.电容

电容器的基本结构是两块相对的极板，中间填充电介质。极板上总会携带等量异号电荷。这样的结构使得电容器的带电量与两板间电压成正比，记之为$C = \frac{Q}{U}$，称为电容器的电容。

电容的值通常与电容的结构有关。为了计算电容，通常是先求出电场分布，之后积分得到电势分布，最后即可得到电容。

对于平行板电容，两板间为均匀电场$E = \dfrac{Q}{\varepsilon S}$。从而：

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}, \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

对于柱形电容，$C = \dfrac{2\pi\varepsilon L}{lnR_2 - lnR_1}$

对于球形电容，$C = \dfrac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

电容容纳电荷，内部就会容纳电场能。这个能量与质点的动能类似：$W = \frac{1}{2}CU^2$，一次项是它的本质属性，二次项是它从外界获得的属性。

相应地，也能求得电容的能量密度：$w = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$。事实上这一方程适用任意条件下的静电场。