重积分

一、基本变换

1.体积分的变换

对于球坐标系：

$$\{ x = r\ sin\varphi cos\theta\ y = r\ sin\varphi sin\theta\ z = r\ cos\varphi$$

$$J = r^2 sin\varphi$$

对于广义球坐标系：

$$\{ x = a\ r\ sin\varphi cos\theta\ y = b\ r\ sin\varphi sin\theta\ z = c\ r\ cos\varphi$$

$$J = abc\ r^2 sin\varphi$$

对于柱坐标系：

$$\{ x = rcos\theta\ y = rsin\theta\ z = z$$

$$J = r$$

2.面积分的变换

对于变换：

$$\{ x = x(u,v)\ y = y(u,v)\ z = z(u,v)$$

可以知道法向量表示为：

$$\backslash \mathrm{bm}n = |\ \backslash\mathrm{bm}i \quad \backslash\mathrm{bm}j \quad \backslash\mathrm{bm}k\ x_u \quad y_u \quad z_u\ x_v \quad y_v \quad z_v\ | = A\backslash\mathrm{bm}i + B\backslash\mathrm{bm}j + C\backslash\mathrm{bm}k$$

从而与z轴夹角为：

$$cos\gamma = \frac{\backslash\mathrm{bm}n \cdot \backslash\mathrm{bm}k}{n \cdot k} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中$A^2+B^2+C^2 = EG - F^2$

其中：

$$\{ E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

故$dxdy = |J|dudv = |C|dudv$

$$dS = \frac{dxdy}{|cos\gamma|} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|} \cdot |C|\ dudv \qquad = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\ dudv = \sqrt{EG-F^2}\ dudv$$

二、曲线积分

1.第一型曲线积分

对于标量积分$\int_L f(x,y,z)dl$，只需将弧微分展开即可。 在二维情况下：

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

其中第二个等式有变换：

$$\{ x = \varphi(t)\ y = \psi(t)$$

在三维情况下，空间曲线应有参数方程形式：

$\{ x=x(t) \; y=y(t) \; z=z(t)$

从而弧微分为：

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \qquad =\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

并且，切向量即为(x',y',z')，方向余弦$(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)=\frac{d\bm r}{dr}=\left(\frac{dx}{dl},\frac{dy}{dl},\frac{dz}{dl}\right)$。

2.第二型曲线积分

对于矢量积分$\int_L \bm F(x,y,z)\cdot dl=\int Pdx+Qdy+Rdy$

只需将微分展开即可。

三、曲面积分

1.第一型曲面积分

对于标量积分$\iint_S f(x,y,z)dS$，只需将面积微元dS展开即可。

若曲面S表示为$f(x,y,z)=C$，显然全微分可以表示成：

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=(f_x,f_y,f_z)\cdot(dx,dy,dz)=0$$

(dx,dy,dz)显然可看作曲面的切向量，从而(f_x,f_y,f_z)与其垂直，可看作法向量。将其单位化后即可得到方向余弦：

$$\begin{cases} cos\alpha=\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \; cos\beta=\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \; cos\gamma=\frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \end{cases}$$

因此若曲面S表示为$z=g(x,y)\Leftrightarrow z-g(x,y)=0$，显然能写出法向量为$(-g_x,-g_y,1)$。单位化后即可得到方向余弦：

$$\begin{cases} cos\alpha=\frac{-g_x}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}} \; cos\beta=\frac{-g_y}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}} \; cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}} \end{cases}$$

因此，$dS=\frac{dxdy}{cos\gamma}=\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy$。

若有变换：

$\{ x=x(u,v) \; y=y(u,v) \; z=z(u,v)$

则有$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，替换即可。

2.第二型曲面积分

对于向量积分$\iint_S \bm F(x,y,z)\cdot d\bm S=\iint_S Pdyzx+Qdzdx+Rdxdy$ ：

曲面S有法向量$\bm n=(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)$使得：

$$\iint_S \bm F(x,y,z)\cdot d\bm S=\iint_S (Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)\,dS$$

与第一型曲面积分类似，若曲面S表示为$f(x,y,z)=C$，方向余弦为：

$$\begin{cases} cos\alpha=\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \; cos\beta=\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \; cos\gamma=\frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} \end{cases}$$

于是：

$$\iint_S \bm F(x,y,z)\cdot d\bm S \;=\iint_S (Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)\,dS \qquad =\iint_S (P\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}+Q\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}+R\frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}})\cdot dS$$

若曲面S表示为$z=f(x,y)\Leftrightarrow z-f(x,y)=0$，法向量为$(-f_x,-f_y,1)$。方向余弦为：

$$\begin{cases} cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} \; cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} \; cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} \end{cases}$$

于是：

$$\iint_S \bm F(x,y,z)\cdot d\bm S \;=\iint_S (P\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}+Q\frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}+R\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}})\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy \qquad =\iint_S (P(-f_x)+Q(-f_y)+R)\,dx$$

若有变换：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

则法向量为：

$$\bm{n} = \begin{vmatrix} \bm{i} & \bm{j} & \bm{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\bm{i} + B\bm{j} + C\bm{k}$$

单位化后即可得到方向余弦：

$$\begin{cases} cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

于是：

$$\iint_S \bm{F}(x,y,z) \cdot d\bm{S} = \iint_S (P\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + Q\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + R\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}) \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}\ dudv \qquad = \iint_S (AP+BQ+CR)$$

以$EG-F^2$代$A^2+B^2+C^2$亦可。

四、高斯定理，斯托克斯定理，格林定理

1.高斯定理

对于闭合曲面内的向量面积分，可以变换为标量体积分。是通量与源强度（散度）的联系。即：

$$\oiint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdydz = \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

或简记为$\oiint_{S^+} \bm{F} \cdot d\bm{S} = \iiint div\bm{F}\ dV = \iiint \nabla \cdot \bm{F}\ dV$

2.斯托克斯定理

对于闭合曲线上的向量线积分，可以变换为向量面积分。是环量与旋量的通量的联系。即：

$$\oint_{l^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

或简记为$\oint_{l^+} \bm{F} \cdot d\bm{l} = \iint rot\bm{F} \cdot d\bm{S} = \iint \nabla \times \bm{F} \cdot d\bm{S}$

3.格林定理

对于闭合平面曲线上的向量线积分，可以变换为向量面积分。是斯托克斯定理的二维形式。只需令$z=0$即可。即：

$$\oint_{l+} Pdx + Qdy = \iint \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy$$

另外，对于闭合平面曲线，其具有单位切向量$(cos\alpha, cos\beta) = (cos\alpha, sin\alpha)$。容易得出其具有单位法向量$(cos\beta, -cos\alpha)$。

再者，对于闭合平面曲线上的向量线积分$\oint_{l+} Pdx + Qdy$，其路径无关的条件是$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。

其原理是，对于某函数$z=f(x,y)$，其具有全微分$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$。显然存在$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$。

不妨记$P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}$。反过来说，如果$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，那么$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$一定能化为某函数$z=f(x,y)$的全微分$dz$。而积分$\int_A^B dz$仅与函数$z=f(x,y)$的始末状态$A,B$有关，亦即路径无关。