# 级数



## 一、柯西审敛准则

柯西审敛准则是证明一切级数收敛的最基本的准则。它表述的是，收敛级数中充分后的连续任意项之和应当充分小。即：

对于任意$\varepsilon > 0$，总存在一个$N$，使得任意$n \geqslant N$时$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$总成立。其中$p \geqslant 1$任意取定。

## 二、正项级数审敛法

应当注意正项级数不一定恒正，不一定每一项都大于0。事实上，正项级数是每一项都不小于0的级数，$u_n \geqslant 0$。

### 1.比较审敛法

比较审敛法的原理是用一个级数限制另一个级数。即对于正项级数$\sum u_n,\sum v_n$，若从某一项$N$开始时刻存在$u_n\leqslant v_n$：

若$\sum v_n$收敛，那么$\sum u_n$亦收敛；若$\sum u_n$发散，那么$\sum v_n$亦发散。

这个审敛法更常用的形式是极限形式。即对于级数$\sum u_n,\sum v_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=h$：

(1)$0\leqslant h<+\infty$，若$\sum v_n$收敛，那么$\sum u_n$亦收敛；

(2)$0<h\leqslant+\infty$，若$\sum v_n$发散，那么$\sum u_n$亦发散。

普遍而言，只要$h$取非零有穷值，那么两个级数的敛散性相同。

这个审敛法最常用于与$p$级数：$\sum\frac{1}{n^p}$比较。对于$p$级数，当$p\leqslant 1$发散；反之收敛。

## 2.达朗贝尔审敛法

达朗贝尔审敛法的原理是以级数的前一项限制后一项。即对于非零正项级数$\sum u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$：

(1) $l<1$，收敛；

(2) $l>1$，发散；

(3) $l=1$，敛散性不定。此时可转用拉阿伯审敛法。

达朗贝尔审敛法多用于带有阶乘、以及带有$n^\alpha$或者$\alpha^n$的通项式。

## 3.柯西审敛法

柯西审敛法的原理是以等比级数限制充分后的项。对于非零正项级数$\sum u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u}_n=l$：

(1) $l<1$，收敛；

(2) $l>1$，发散；

(3) $l=1$，敛散性不定。此时可转用拉阿伯审敛法。

柯西审敛法多用于带有$\alpha^n$或者$n^n$的通项式。

## 4.拉阿伯审敛法

对于非零正项级数$\sum u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)=l$：

(1) $l<1$，发散；

(2) $l>1$，收敛；

(3) $l=1$，敛散性不定。

由于此审敛法略显复杂，若非不得已一般不用。

## 5.无穷积分审敛法

无穷积分审敛法的原理是以连续函数与$x$轴间面积限制级数之和。即：

若对于正项级数$\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}u_n$，恰有单调下降的非负函数$f(x)$使$u_n=f(n)$，且$\int_{k_0}^{\infty}f(x)dx$收敛，那么级数收敛。反之发散。

如果级数通项式对应的函数恰好可积，使用此审敛法是值得的。

## 三、任意项级数

### 1.交错项级数——莱布尼兹审敛法

形式$\sum(-1)^n u_n$称为交错级数。交错级数的审敛法非常简单，即只要：

(1) $u_n\geqslant u_{n+1}$，即数列单调递减；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，即数列趋于$0$，

那么级数就收敛。这是莱布尼兹审敛法。

### 2.狄利克雷审敛法

对于级数$\sum a_k b_k$，若数列$a_k$单调且$\lim\limits_{n\to\infty}a_k=0$；

且级数$\sum b_k$的部分和数列有界，即$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|<=M$，那么级数$\sum a_k b_k$收敛。

也即，只要其中一个数列单调趋于$0$，而另一个数列的级数有界，那么级数收敛。

### 3.阿贝尔审敛法

对于级数$\sum a_k b_k$，若数列$a_k$单调且有界；且级数$\sum b_k$收敛，那么级数$\sum a_k b_k$收敛。

也即，只要其中一个数列单调有界，而另一个数列的级数收敛，那么级数收敛。

比较重要的收敛级数有$\sum a_k cosk\varphi$，只要数列$a_k$单调趋于0且$\varphi\neq 2n\pi$；

以及$\sum a_k sink\varphi$，只要数列$a_k$单调趋于$0$。

级数的有界和收敛是不同的。收敛必定有界，有界不一定收敛。例如特例$\sum(-1)^n$。

狄利克雷审敛法和阿贝尔审敛法适用于判断条件收敛。绝对收敛还需根据具体条件选择合适的审敛法。

## 四、函数序列的一致收敛

对于函数序列$f_n(x)$，记$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$为极限函数，那么这样称函数序列在区间$X$一致收敛：

若存在数列$a_n$使得当$x\in X$ ,$n\geqslant N$时$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n$恒成立，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

函数序列的一致收敛对于区间具有选择性。同一个函数序列可能在区间$X_1$一致收敛而在$X_2$不一致收敛。

相反地，可以使用下述命题证明$f_n(x)$在区间$X$不一致收敛：

若存在点列$x_n \in X$使$\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=k\neq 0$，则$f_n(x)$在$X$不一致收敛。

## 五、函数项级数的一致收敛

函数项级数的一致收敛有区别于函数序列的一致收敛，但它基于函数序列的一致收敛：

若函数项级数$\sum u_k(x)$的部分和序列$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$在$X$上一致收敛，则级数一致收敛。

这事实上蕴含着一些显然的结论。例如，若级数$\sum u_k(x)$一致收敛，那么其函数序列应当一致收敛于$0$。

### 1.一致收敛的柯西审敛准则

与一般项级数的柯西审敛准则类似，对于一致收敛应有：

对于任意$\varepsilon>0$，总存在一个只依赖于$\varepsilon$的$N$，使得任意$n\geqslant N$时$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$总成立。其中$p\geqslant 1$任意取定。

### 2.强级数审敛法

强级数审敛法的原理是用只与$n$有关的一般项数列限制函数项序列。即：

若存在正项级数$\sum a_n$收敛，且对于一切$x\in X$都存在$|u_n(x)|\leqslant a_n$，那么函数项级数在$X$上一致收敛。

### 3.一致收敛的狄利克雷审敛法

对于级数$\sum u_n(x)=\sum a_n(x)\cdot b_n(x)$，在满足以下条件时在$X$上一致收敛：

(1)对于固定的$x_0\in X$，数列$a_n(x_0)$关于$n$单调，且函数序列$a_n(x)$在$X$上一致收敛于$0$；

(2)级数$\sum b_n(x)$的部分和序列$B_n(x)$在$X$上一致有界。

这较一般项数列的狄利克雷审敛法稍微复杂，但是类似的。

### 4.一致收敛的阿贝尔审敛法

对于级数$\sum u_n(x)=\sum a_n(x)\cdot b_n(x)$，在满足以下条件时在$X$上一致收敛：

(1)对于固定的$x_0\in X$，数列$a_n(x_0)$关于$n$单调，且函数序列$a_n(x)$在$X$上一致有界；

(2)级数$\sum b_n(x)$在$X$上一致收敛。

这较一般项数列的阿贝尔审敛法稍微复杂，但是类似的。

### 5.一致收敛的性质

其一，极限和求和可交换次序，即$\lim\limits_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$。这只要求$u_n(x)$连续。

其二，积分和求和可交换次序，即$\int\sum u_n(x)=\sum\int u_n(x)$。这只要求$u_n(x)$连续。

其三，求导和求和可交换次序，即$\frac{d}{dx}\sum u_n(x)=\sum\frac{d}{dx}u_n(x)$。这只要求$u_n(x)$连续。

# 六、幂级数

## 1.幂级数的收敛半径

幂级数$\sum a_nx^n$的收敛半径$R$指的是：

当$|x|<R$，级数绝对收敛；$|x|>R$，级数发散；$|x|=R$，级数敛散性不定。并且称开区间$(-R,R)$为收敛区间。

收敛域的确定，应当分别判断$x=R,-R$时级数是否收敛。

对于系数非隔几项为0的幂级数，若记$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，那么收敛半径$R=\dfrac{1}{l}$。

或若记$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$，那么收敛半径$R=\dfrac{1}{l}$。

若级数系数隔几项为0，那么应直接使用达朗贝尔审敛法(比值审敛法)。

## 2.泰勒级数

如果$f(x)$在区间内具有任意阶导数，且其泰勒级数的余项$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，那么它能展开为泰勒级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，且系数：

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}$ ,$0<\theta<1$ (拉格朗日余项)；

或者$R_n(x)=\dfrac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$ ,$0<\theta<1$ (柯西余项)。

现给出一些常用函数的泰拉展开式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_0^\infty\frac{x^k}{k!}$$

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_0^\infty(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_0^\infty(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$arctanx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}+\ldots$$

上式按照二项式公式记忆即可。由其申发出两个常用特殊函数：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^nx^n+\ldots=\sum_{0}^{\infty}(-1)^kx^k$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots$$

## 七、傅里叶级数

分段连续且分段单调的函数可以展开成傅里叶级数，但具体计算方法与函数周期有关。

值得注意的是级数的和函数在连续处收敛于该处值，在间断点收敛于左右极限值的平均值。

### 1.函数周期为2pi

若函数周期为$2\pi$，那么可以展开为：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_ncos\ nx+b_nsin\ nx)$$

其中傅里叶系数为：

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos\ nx\ dx\ \ (n=0,1,2...)\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sin\ nx\ dx\ \ (n=1,2,3...)\end{cases}$$

注意到$f(x)$的奇偶性。如果$f(x)$是奇函数，那么$f(x)cos\ nx$是奇函数，$a_n=0$，即展开式只有带$b_n$的项，称级数为正弦级数；

如果$f(x)$是偶函数，那么$f(x)sin\ nx$是奇函数，$b_n=0$，即展开式只有带$a_n$的项，称级数为余弦级数。

### 2.函数周期为2l

若函数周期为$2l$，只需仿射$x\rightarrow\frac{\pi}{l}x$，于是：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_ncos\frac{n\pi}{l}x+b_nsin\frac{n\pi}{l}x)$$

其中傅里叶系数为：

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi}{l}x\ dx\ \ (n=0,1,2...)\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi}{l}x\ dx\ \ (n=1,2,3...)\end{cases}$$

对于只定义在$(0,l)$的函数，可以选择偶延拓展开为余弦级数，或者奇延拓展开为正弦级数。