反常积分

一、无穷积分

无穷积分，一般是指类似形式的积分：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，而这样的积分无可避免地涉及收敛和发散的问题。定义为：

若$f(x)$在$[a,A]$上有定义且可积，且$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$存在，那么无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛且与上式相等；反之发散。

而对于下限无穷大、或者上下限皆无穷大的无穷积分，敛散性是类似的。

与p级数类似，对于无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$而言，$p\leqslant 1$时发散，反之收敛。这常用于无穷积分的比较审敛法。

1.柯西审敛原则

与级数的柯西审敛原则类似，收敛无穷积分中充分后的区间上的积分应当充分小。即：

对于任意$\varepsilon>0$，总存在正数$A_0>a$，使得任意$A\geqslant A_0$时$\left|\int_{A_0}^A f(x)dx\right|<\varepsilon$总成立。

这样可以给出一种基本的审敛法：

若$f(x)$在积分区间是非负函数，且对一切$A\geqslant a$积分$\int_a^A f(x)dx$总有界，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。这个命题可逆。

绝对收敛与条件收敛的概念也是类似的。

2.比较审敛法

比较审敛法的一般形式是：

对于在$[a,+\infty)$上有定义且可积的函数$f(x),g(x)$，若恒有$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$：

若$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$亦收敛；若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$亦发散。

极限形式是：

对于在$[a,+\infty)$上有定义且可积的函数$f(x),g(x)$，若恒有$f(x)\geqslant 0$,$g(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=h$：

(1) $0\leqslant h<+\infty$，若$\int g(x)dx$收敛，那么$\int f(x)dx$亦收敛；

(2) $0<h\leqslant+\infty$，若$\int f(x)dx$发散，那么$\int g(x)dx$亦发散。

普遍而言，只要h取非零有穷值，那么两个无穷积分的敛散性相同。

3.狄利克雷审敛法

对于无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$，若对一切$A\geqslant a$，$\displaystyle\int_a^A f(x)dx$恒有界，且$g(x)$在积分区间上单调趋于$0$，那么无穷积分收敛。

4.阿贝尔审敛法

对于无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$，若$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，且$g(x)$在积分区间上单调且有界，那么无穷积分收敛。

二、瑕积分

瑕积分指的是被积函数在积分区间上某一点附近无界。不妨约定：一般假设这个点a为积分下界，并称此点为瑕点，那么这样定义敛散性：

若对于瑕积分$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，极限$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$存在，那么瑕积分收敛且等于上式；否则发散。

与p级数结论相反，对于瑕积分$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$，$p\geqslant 0$时发散，反之收敛。更一般的瑕积分形式是$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$，结论相同。

如果积分上限是瑕点、或者上下限都是瑕点，敛散性判定是类似的。

值得注意的是，对于瑕积分，一定存在恰当的变换方式将其转化为无穷积分。因此瑕积分的审敛法与无穷积分审敛法是完全类似的。

1.瑕积分的柯西审敛原则

瑕积分收敛要求的是，在瑕点附近充分小的区间上的积分充分小。即：

对瑕积分$\int_a^b f(x)dx$：对于任意$\varepsilon > 0$，总存在一个$\delta > 0$，使得任意$\delta_1, \delta_2 \in (0, \delta)$，$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$总成立。

三、含参量的反常积分

含参量的反常积分常常类比为函数项级数，因为它们都同时涉及两个变量。一致收敛在这里非常重要。在此之前，先了解含参正常积分的性质。

1.含参量的正常积分

若二元函数$f(x,y)$在闭矩形域$[a,b] \times [c,d]$内连续，那么：

其一，连续性。含参正常积分$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$亦连续。

其二，可积性。积分次序可交换，即$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ 。

其三，可微性。积分与求导次序可交换，即$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$ 。

在含参反常积分一致收敛的情况下，上述性质皆成立。而一致收敛的定义和审敛法，以含参无穷积分为例，如下：

2.含参反常积分的一致收敛

一致收敛的概念的关键，在于敛散性与新引入变量无关。

具体而言，界定所选取判断区间的“充分后”，与新引入变量无关。

例如对于含参无穷积分$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$：

若对任给的$\varepsilon > 0$，总存在与y无关的$N > a$，使一切$A > N$时，$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ 恒成立。

对于含参瑕积分$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$：

若对任给的$\varepsilon > 0$，总存在与y无关的$\delta_0 > 0$，使一切$\delta \in (0, \delta_0)$时，$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ 恒成立。

3.M审敛法

M审敛法类似于函数项级数中的强级数审敛法，是用仅与x有关的函数$\varphi(x)$来限制二元函数$f(x,y)$。对于含参无穷积分：

若在积分区间上$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)$恒成立，且$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$收敛，那么$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$一致收敛。

对于含参瑕积分：

若在积分区间上$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)$恒成立，且$\int_a^{b}\varphi(x)dx$收敛，那么$\int_a^{b}f(x,y)dx$一致收敛。

4.含参无穷积分的狄利克雷审敛法

对于无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)g(x,y)dx$，在满足以下条件时在$Y$上一致收敛：

(1)当x充分大之后，在$x\to+\infty$时$g(x,y)$关于x单调，且一致趋于0；

(2)对任意$A>a$，$\int_a^{A}f(x,y)dx$一致有界。

5.含参无穷积分的阿贝尔审敛法

对于无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)g(x,y)dx$，在满足以下条件时在$Y$上一致收敛：

(1)当x充分大之后，在$x\to+\infty$时$g(x,y)$关于x单调，且一致有界；

(2)$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$一致收敛。

在含参无穷积分中，比较重要的就是形如$\int_a^{+\infty}e^{-px}f(x,y)dx$的积分。函数$e^{-px}$总能使积分契合狄利克雷或者阿贝尔审敛法。

事实上，将下限定为0，这个无穷积分正是拉普拉斯变换$\bar{f}(p)=\int_0^{+\infty}e^{-px}f(x,y)dx$，$e^{-px}$称为变换的核。

6.Gamma函数

伽马函数$\Gamma(a)$定义为：

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx$$

它也是函数x^{a-1}拉普拉斯变换后$p=1$的特例。若作变换$x=t^2$可得伽马函数的另一种表达形式：

$$\Gamma(a)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2a-1}dx$$

上式多用于a是$\frac{1}{2}$的倍数的时候的求值。

伽马函数具有递推性质$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$。对于整数的a而言，这意味着$\Gamma(a+1)=a!$。

而对于a是$\frac{1}{2}$的倍数的时候，也可以利用递推性质从$\Gamma(\frac{1}{2})$递推到所求值。其中$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$。

事实上此函数的拉普拉斯变换也确是基于此：

$\mathcal{L}(t^{n-\frac{1}{2}})=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n p^{n+\frac{1}{2}}}\ \ (n\geqslant 1)$

令$p=1$即可知$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}\ \ (n\geqslant 1)$

7.Beta函数

贝塔函数$\Beta(p,q)$定义为:

$$\Beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx$$

贝塔函数函数具有对称性$\Beta(p,q)=\Beta(q,p)$。同时，它可以展开成伽马函数:

$$\Beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

较常用的是$\Beta(1,1)=1$，$\Beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$。

在变量代换下，它也能计算三角函数的积分值:

$$\Beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2p-1}\theta\cdot sin^{2q-1}\theta\ d\theta$$

但这要求$p,q>0$。