# 磁场

- 磁场
  - · 一、有旋无源场
  - 。 二、毕奥-萨伐尔定律
    - 1.通电线段磁场分布
    - 2.圆电流的轴向磁场分布
    - 3.螺线管轴线磁场分布
    - 4.无限长圆柱导线磁场分布
    - 5.螺绕环内磁场分布
    - 6.无限大通电平板外磁场分布
  - 。 三、安培环路定理

### 一、有旋无源场

磁场是一个有旋无源场——相反于电场是有源无旋场。无源的性质首先使得我们能够轻易得出磁场的高斯定律。看回数学上的高斯定理:

$$ackslash ext{oiint}_{S^+} ackslash ext{bm} F \cdot d ackslash ext{bm} S = \iiint div ackslash ext{bm} F \ dV = \iiint 
abla \cdot ackslash ext{bm} F \ dV$$

无源则散度为0,从而下式恒成立:

$$\Phi_B = \langle \text{oiint} \rangle \text{bm} B \cdot d \rangle \text{bm} S = 0$$

这是麦克斯韦方程组的第二方程,即对于封闭曲面,穿入面内的磁感线必穿出面外,总磁通必为0。无源场不保守,亦不具有势能。

至今为止,磁场都被认为只能来源于电流或者变化的电场。磁场没有本质性的来源。

磁场的无源性由磁高斯定理体现,而有旋性则由安培环路定理体现——这可以用数学上的斯托克斯定理证明。 这会在之后说明。

## 二、毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律是从实验中总结出来、而非理论推导出的。它的形式是:

$$d ackslash \mathbf{bm} B = rac{\mu}{4\pi} \cdot rac{Id ackslash \mathbf{bm} l imes ackslash \mathbf{bm} r_0}{r^2}, \quad dB = rac{\mu}{4\pi} \cdot rac{Idl \cdot sin heta}{r^2}$$

前者是矢量式,后者是标量式。式中 $Id\backslash bml$ 称为元电流, $\backslash bmr_0$ 是单位径矢,由元电流指向所求点。 $\theta$ 表示由径矢到元电流的较小的角。

其中 $\mu$ 称为磁导率,通常还会展开写为 $\mu = \mu_0 \mu_r$ ,其中 $\mu_0$ 称为真空磁导率, $\mu_r$ 称为相对磁导率。相对磁导率是指介质的磁导率与真空中的磁导率的比值,显然真空的相对磁导率就是1。

注意与介电常数对比。"介"表示阻碍,"导"表示促进,这解释了为何两个常数一个在分母、一个在分子。值得注意的是相对磁导率可以大于1也可以小于1。

由于矢量叉乘的存在,磁感线总是闭合的。而粗看毕萨定律,似乎符合平方反比定律——但仅限形式上符合。元电流 $Id\backslash bml$ 不能称为磁场的源。这是因为从微观上来说,磁场来源于运动的载流子,而非能够单独存在的"磁单极子"。

根据毕萨定律,可以求出几种特殊电流的磁场分布。假设磁介质不变。

#### 1. 通电线段磁场分布

假设线段长为L,通有电流I,所求点距离线段r。显然所有磁感强都是同一方向。因此:

$$dB = rac{\mu}{4\pi} \cdot rac{Isin heta}{(r/sin heta)^2} \cdot d\left(rac{r}{tan heta}
ight) = rac{\mu I}{4\pi} \cdot rac{sin heta}{r}$$

$$B=rac{\mu I}{4\pi r}\int_{ heta_1}^{ heta_2}sin heta d heta=rac{\mu I}{4\pi r}(cos heta_1-cos heta_2)$$

如果是无限长直导线,只需令 $\theta_1, \theta_2 \to 0, \pi$ :

$$B = rac{\mu I}{2\pi r}$$

#### 2. 圆电流的轴向磁场分布

假设圆半径长R,通有电流I,所求点距离圆心r。由对称性,必然只存在沿轴向的磁感强。

圆上微弧产生的磁感强是
$$dB=rac{\mu}{4\pi}\cdotrac{Idl}{R^2+r^2}$$

沿轴的磁感强是
$$dB_r=dB\cdotrac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}=rac{\mu}{4\pi}\cdotrac{RIdl}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

故
$$B=rac{\mu IR}{4\pi(R^2+r^2)^{3/2}}\int dl=rac{\mu IR}{4\pi(R^2+r^2)^{3/2}}\cdot 2\pi R=rac{\mu IR^2}{2(R^2+r^2)^{3/2}}$$

在这里引入磁矩的概念。对于闭合通电线圈: $\begin{subarray}{l} bm & f \end{subarray}$ ,其中面积 $\begin{subarray}{l} bm & f \end{subarray}$ 的方向与电流成右手螺旋定则。磁矩在轴线上产生的磁感强可以直接写为:

$$ackslash \mathbf{bm} B = rac{\mu ackslash \mathbf{bm} m}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}}$$

#### 3.螺线管轴线磁场分布

假设螺线管长L,半径为R,单位长度绕n匝线圈,通电流大小为I。假设 $\theta$ 是指所求点与螺线管上某一点所连线与轴线的夹角。

螺线管上沿轴向dl一小段的几匝线圈可合看做一个圆电流dI=nIdl。距所求点水平距离x处的圆电流产生磁场:

$$dB = rac{\mu R^2 dI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = rac{\mu R^2 dI}{2(R/sin heta)^3} = rac{n\mu I}{2R} sin^3 heta dl$$

其中
$$dl=d\left(rac{R}{tan heta}
ight)=rac{R}{sin^2 heta}d heta$$
,故 $dB=rac{n\mu I}{2}sin heta d heta$ :

$$B=rac{n\mu I}{2}\int_{ heta_{1}}^{ heta_{2}}sin heta d heta=rac{n\mu I}{2}(cos heta_{2}-cos heta_{1})$$

若螺线管是无限长直螺线管, 只需 $\theta_1, \theta_2 \to \pi, 0$ :

$$B = n\mu I$$

#### 4.无限长圆柱导线磁场分布

假设圆柱半径为R,圆柱中通有电流I。在距离圆心r处:

若 $r\in[0,R]$  ,那么 $r\sim R$ 多层的圆柱面对磁感强没有贡献;而 $0\sim r$ 的圆柱相当于将电流集中在一条无限长直导线上,其中通过的电流是 $I'=rac{2\pi r^2}{2\pi R^2}I=rac{r^2}{R^2}I$  。若 $r\geqslant R$  ,也是同样的道理,因此:

$$\left\{B=rac{\mu Ir}{2\pi R^2},\ 0\leqslant r\leqslant R\ B=rac{\mu I}{2\pi R},\ r\geqslant R
ight.$$

#### 5.螺绕环内磁场分布

假设螺绕环共有N匝,通有电流I,对于螺绕环内、距离圆心r的圆上:

由安培定理容易得 $B=rac{\mu NI}{2\pi r}$ 。而在螺管外,显然有B=0。

#### 6.无限大通电平板外磁场分布

假设平板上通有同一方向的电流密度 $\backslash bmJ$ 。在这个情形下磁场方向与平板平行、但与电流垂直,并且大小是均匀的。在与平板相离距离 $\pm l$ 处建立安培环路,易得:

$$B = \frac{1}{2}\mu \backslash \mathbf{bm}J$$

### 三、安培环路定理

根据毕萨定律,再结合斯托克斯定理,可以很方便地求出最简形式得安培环路定理,即:

$$\oint_I \backslash \mathbf{bm} B \cdot d \backslash \mathbf{bm} l = \mu I$$

其中I是指闭合环路所围面内通过的电流的代数和,这提醒我们要注意流入和流出的区别。上式显然还需要取决于磁介质,不妨将上式两端同时除以 $\mu$ :

$$\oint_I ackslash \mathbf{bm} H \cdot d ackslash \mathbf{bm} l = I$$

其中 $\backslash bmH = \frac{\backslash bmB}{\mu}$ ,称为磁场强度,这个量不受磁介质影响。从本质而言,磁场强度脱胎于磁介质磁化的分析,即磁场会在磁介质表面激发束缚电流、从而影响原磁场的分布,使得我们必须以一定的方式修正电场分布。因此磁场强度最原初的定义是:

$$ackslash \mathbf{bm} H = rac{ackslash \mathbf{bm} B}{\mu_0} - ackslash \mathbf{bm} M$$

其中M称为磁化强度,面束缚电流密度和它是大小相等的。对比两式,可知  $\begin{subarray}{c} begin{subarray}{c} begin{$ 

我们也记 $\mathcal{X}_m = \mu_r - 1$ ,称为磁化率。这样就有 $ackslash \mathbf{bm} M = \mathcal{X}_m ackslash \mathbf{bm} H$ 。