磁场

一、有旋无源场

磁场是一个有旋无源场——相反于电场是有源无旋场。无源的性质首先使得我们能够轻易得出磁场的高斯定律。看回数学上的高斯定理：

$$\oiint_{S^+} \bm{F} \cdot d\bm{S} = \iiint div\bm{F}\ dV = \iiint \nabla \cdot \bm{F}\ dV$$

无源则散度为0，从而下式恒成立：

$$\varPhi_B = \oiint \bm{B} \cdot d\bm{S} = 0$$

这是麦克斯韦方程组的第二方程，即对于封闭曲面，穿入面内的磁感线必穿出面外，总磁通必为0。无源场不保守，亦不具有势能。

至今为止，磁场都被认为只能来源于电流或者变化的电场。磁场没有本质性的来源。

磁场的无源性由磁高斯定理体现，而有旋性则由安培环路定理体现——这可以用数学上的斯托克斯定理证明。这会在之后说明。

二、毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律是从实验中总结出来、而非理论推导出的。它的形式是：

$$d\bm{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Id\bm{l} \times \bm{r}_0}{r^2}, \quad dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \cdot sin\theta}{r^2}$$

前者是矢量式，后者是标量式。式中$Id\bm{l}$称为元电流，$\bm{r}_0$是单位径矢，由元电流指向所求点。θ表示由径矢到元电流的较小的角。

其中μ称为磁导率，通常还会展开写为$\mu = \mu_0\mu_r$，其中μ_0称为真空磁导率，μ_r称为相对磁导率。相对磁导率是指介质的磁导率与真空中的磁导率的比值，显然真空的相对磁导率就是1。

注意与介电常数对比。“介”表示阻碍，“导”表示促进，这解释了为何两个常数一个在分母、一个在分子。值得注意的是相对磁导率可以大于1也可以小于1。

由于矢量叉乘的存在，磁感线总是闭合的。而粗看毕萨定律，似乎符合平方反比定律——但仅限形式上符合。元电流$Id\bm{l}$不能称为磁场的源。这是因为从微观上来说，磁场来源于运动的载流子，而非能够单独存在的“磁单极子”。

根据毕萨定律，可以求出几种特殊电流的磁场分布。假设磁介质不变。

1.通电线段磁场分布

假设线段长为L，通有电流I，所求点距离线段r。显然所有磁感强都是同一方向。因此：

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Isin\theta}{(r/sin\theta)^2} \cdot d\left(\frac{r}{tan\theta}\right) = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{sin\theta}{r}$$

$$B = \frac{\mu I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta = \frac{\mu I}{4\pi r}(cos\theta_1 - cos\theta_2)$$

如果是无限长直导线，只需令$\theta_1, \theta_2 \to 0, \pi$：

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

2.圆电流的轴向磁场分布

假设圆半径长R，通有电流I，所求点距离圆心r。由对称性，必然只存在沿轴向的磁感强。

圆上微弧产生的磁感强是$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + r^2}$

沿轴的磁感强是$dB_r = dB \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{RIdl}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$

故$B = \frac{\mu IR}{4\pi(R^2 + r^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu IR}{4\pi(R^2 + r^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu IR^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}}$

在这里引入磁矩的概念。对于闭合通电线圈：$\bm{m} = I\bm{S}$，其中面积$\bm{S}$的方向与电流成右手螺旋定则。磁矩在轴线上产生的磁感强可以直接写为：

$$\bm{B} = \frac{\mu \bm{m}}{2\pi(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

3.螺线管轴线磁场分布

假设螺线管长L，半径为R，单位长度绕n匝线圈，通电流大小为I。假设θ是指所求点与螺线管上某一点所连线与轴线的夹角。

螺线管上沿轴向dl一小段的几匝线圈可合看做一个圆电流$dI = nIdl$。距所求点水平距离x处的圆电流产生磁场：

$$dB = \frac{\mu R^2 dI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu R^2 dI}{2(R/sin\theta)^3} = \frac{n\mu I}{2R} sin^3\theta dl$$

其中$dl = d\left(\frac{R}{tan\theta}\right) = \frac{R}{sin^2\theta} d\theta$，故$dB = \frac{n\mu I}{2} sin\theta d\theta$：

$$B=\frac{n\mu I}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}sin\theta d\theta=\frac{n\mu I}{2}(cos\theta_2-cos\theta_1)$$

若螺线管是无限长直螺线管，只需$\theta_1,\theta_2\to\pi,0$：

$$B=n\mu I$$

4.无限长圆柱导线磁场分布

假设圆柱半径为R，圆柱中通有电流I。在距离圆心r处：

若$r\in[0,R]$，那么$r\sim R$多层的圆柱面对磁感强没有贡献；而$0\sim r$的圆柱相当于将电流集中在一条无限长直导线上，其中通过的电流是$I'=\frac{2\pi r^2}{2\pi R^2}I=\frac{r^2}{R^2}I$。若$r\geqslant R$，也是同样的道理，因此：

$$\begin{cases}B=\frac{\mu Ir}{2\pi R^2},\quad 0\leqslant r\leqslant R\ B=\frac{\mu I}{2\pi R},\quad r\geqslant R\end{cases}$$

5.螺绕环内磁场分布

假设螺绕环共有N匝，通有电流I，对于螺绕环内、距离圆心r的圆上：

由安培定理容易得$B=\frac{\mu NI}{2\pi r}$。而在螺管外，显然有$B=0$。

6.无限大通电平板外磁场分布

假设平板上通有同一方向的电流密度$\bm J$。在这个情形下磁场方向与平板平行、但与电流垂直，并且大小是均匀的。在与平板相离距离$\pm l$处建立安培环路，易得：

$$B=\frac{1}{2}\mu\bm J$$

三、安培环路定理

根据毕萨定律，再结合斯托克斯定理，可以很方便地求出最简形式得安培环路定理，即：

$$\oint_l\bm B\cdot d\bm l=\mu I$$

其中I是指闭合环路所围面内通过的电流的代数和，这提醒我们要注意流入和流出的区别。上式显然还需要取决于磁介质，不妨将上式两端同时除以μ：

$$\oint_l\bm H\cdot d\bm l=I$$

其中$\bm H=\frac{\bm B}{\mu}$，称为磁场强度，这个量不受磁介质影响。从本质而言，磁场强度脱胎于磁介质磁化的分析，即磁场会在磁介质表面激发束缚电流、从而影响原磁场的分布，使得我们必须以一定的方式修正电场分布。因此磁场强度最原初的定义是：

$$\bm H=\frac{\bm B}{\mu_0}-\bm M$$

其中M称为磁化强度，面束缚电流密度和它是大小相等的。对比两式，可知$\bm{M} = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu}\bm{B} = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0\mu_r}\bm{B} = (\mu_r - 1)\bm{H}$ 。

我们也记$\mathcal{X}_m = \mu_r - 1$，称为磁化率。这样就有$\bm{M} = \mathcal{X}_m\bm{H}$。