微分方程

一、可分离变量方程

1.整体代换

对于形式$\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$:

只需令$z = ax+by+c$，于是$\dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx} = a + b \cdot f(z)$。

2.齐次函数

将函数凑成$h\left(\dfrac{y}{x}\right)$形式。令$u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$，于是$y' = u'x + u$.

3.分式形式

对于形式$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$:

(1)若$a_1,a_2;b_1,b_2$恰成比例，即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$，即$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，则:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{k(a_2x+b_2y+c_2)+c_3}{a_2x+b_2y+c_2}=k+\frac{c_3}{a_2x+b_2y+c_2}$$

则是可整体代换类型，即令$z=a_2x+b_2y+c_2$，于是$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$。

(2)若$a_1,a_2;b_1,b_2$不成比例，即$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，则解方程:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

则有$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}$

即转化为齐次方程。

二、一阶线性方程

1.一阶线性齐次方程

形式$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$，为一阶线性齐次方程。分离变量得:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx \Longrightarrow ln|y|=-\int P(x)dx+C$$

即$y=Ce^{-\int P(x)dx}$，为通解。

2.一阶线性非齐次方程

形式$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，为一阶线性非齐次方程。其解的结构是其对应齐次方程的通解，加上其一个特解。

已知其对应齐次方程的通解为$y = Ce^{-\int P(x)dx}$，将常数替换为函数$u(x)$后：$y = ue^{-\int P(x)dx}$，再求导一次：

$$
\begin{aligned}
y' &= u'e^{-\int P(x)dx} + u \cdot \frac{d}{dx}(e^{-\int P(x)dx}) \\
&= u'e^{-\int P(x)dx} - P(x)ue^{-\int P(x)dx} \\
&= u'e^{-\int P(x)dx} - P(x)y
\end{aligned}
$$

即$y' + P(x)y = u'e^{-\int P(x)dx}$，对比原方程$y' + P(x)y = Q(x)$可得$Q(x) = u'e^{-\int P(x)dx}$，于是：

$$\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C$$

则通解为$y = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C] \cdot e^{-\int P(x)dx}$

3.伯努利方程

形式$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^k$，为伯努利方程。不妨以$y^k$遍除等式两边：

$$y^{-k}\frac{dy}{dx} + y^{1-k}P(x) = Q(x)$$

不难发现$\frac{d}{dx}(y^{1-k}) = (1-k) \cdot y^{-k}\frac{dy}{dx}$，因此令$z = y^{1-k}$：

$$\frac{1}{1-k}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

这与一阶线性非齐次方程并无差别。

三、二阶方程

1.可降阶方程

(1)形式$F(x, y', y'') = 0$不显含y，但显然可以将y'看做整体函数，解出y'后再积分一次即可。

(2)形式$F(y, y', y'')$不显含x，但可以解出y'关于y的函数。

若$y' = y'(y)$仍然可解，则能得到y关于x的函数。

一般令$p=y'$，则$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$。从而原方程化为$F(y,p,p\frac{dp}{dy})$，为一阶方程。

但是这样并不好记。不妨用物理符号代替，设$y=s,x=t$，则$s'=v,s''=a$。于是：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dv}{ds}=v\frac{ds}{dv}$$

这样能够解出路程s关于速度v的函数，但并不一定总能从其解出v关于t的函数。

四、二阶线性常系数方程

非常系数的二阶线性方程是难于求解的，故我们基本只研究常系数方程。

1.二阶线性常系数齐次方程

形式$y''+py'+qy=0$，为二阶线性常系数齐次方程。

由于函数$y=e^{\lambda x}$具有求导后形式不变的性质，我们总希望二阶方程的解具有类似的结构。

不妨代入可得$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$，而方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$在复数域总有解，这个方程称为特征方程。

从上述方程中解出特征根λ_1,λ_2，这会产生三种情况：

(1)二重根$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$，此时通解形式为$y=C_1e^{\lambda_0x}+C_2xe^{\lambda_0x}$

(2)二实根λ_1,λ_2，此时通解形式为$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

(3)共轭复根$\lambda=\alpha\pm\beta i$，此时会由于欧拉方程$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$的存在引入三角函数。

复根的实部产生共有的指数函数部分$e^{\alpha x}$，虚部分别产生正弦和余弦函数。也就是通解形式为：

$$y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$$

1.1拉普拉斯变换其一

不妨使用拉普拉斯变换研究齐次方程的解。首先给出部分基本变换表：

函数$f(t)$	**象函数$\bar{f}(p)$**
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$

函数$f(t)$	象函数$\bar{f}(p)$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n p^{n+\frac{1}{2}}}$
$sin\ \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos\ \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

由频移定理可以顺便给出：

函数$f(t)$	象函数$\bar{f}(p)$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}t^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n (p-a)^{n+\frac{1}{2}}}$
$e^{at}sin\ \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}cos\ \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$

导数定理可知：

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n\bar{f} - p^{n-1}f(0) - p^{p-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

因此，将齐次方程$y'' + my' + ny = 0$做一次拉普拉斯变换，初始条件可任意选定：

$$(p^2\bar{y} - C_1p - C_2) + m(p\bar{y} - C_1) + n\bar{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + mp + n)\bar{y} = C_1p + C_1m$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{C_1p + C_1m}{p^2 + mp + n}$$

象函数逆变换后的形式显然取决于分母$p^2 + mp + n$，与特征方程是类似的。

解二次方程$p^2 + mp + n = 0$，这将产生三种情况。由于任意常数C任意取值，每个等号前后的任意常数虽然形式相同但不一定相等：

(1)二重根$p_1 = p_2 = p_0$，则$p^2 + mp + n = (p - p_0)^2$，即：

$$\bar{y} = \frac{C_1p + C_1m}{(p - p_0)^2} = \frac{C_1}{(p - p_0)^2} + \frac{C_2}{p - p_0}$$

$y = C_1 x e^{p_0 x} + C_2 e^{p_0 x}$

(2)二实根p_1, p_2，则$p^2 + mp + n = (p - p_1)(p - p_2)$，即：

$$\bar{y} = \frac{C_1 p + C_1 m}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2}$$

$y = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x}$

(3)共轭复根$p = \alpha + \beta i$，则$p^2 + mp + n = 0$在实数域无根，也就必然能够配方成$p^2 + mp + n = (p - \alpha)^2 + \beta^2$，即：

$$\bar{y} = \frac{C_1 p + C_1 m}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{C_1 p}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_2 \beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

2.二阶线性常系数非齐次方程

形式$y'' + py' + qy = f(x)$，为二阶线性常系数非齐次方程。

其解的结构是其对应齐次方程的通解加上其特解。对于下列$f(x)$的形式，建议使用待定系数法求解：

(1)$f(x) = acos\beta x + bsin\beta x$，其中$\pm\beta i$是特征根。特解形式为：

$x(Acos\beta x + Bsin\beta x)$

(2)$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}(acos\beta x + bsin\beta x)$，其中$P_n(x)$代表关于$x$的$n$次多项式。特解形式为：

若$\alpha + \beta i$不是特征根：$e^{\alpha x}(Q_n(x)cos\beta x + R_n(x)sin\beta x)$

若$\alpha + \beta i$是特征根：$xe^{\alpha x}(Q_n(x)cos\beta x + R_n(x)sin\beta x)$

对于下列$f(x)$的形式，建议使用拉普拉斯变换求解：

(1)$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

(2)$f(x) = ae^{\alpha x}$

(3)$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

(4)$f(x) = acos\beta x + bsin\beta x$，其中$\pm\beta i$不是特征根。

对于其余$f(x)$的形式，建议使用常数变易法求解：

原方程$y''+py'+qy=f(x)$对应齐次方程的通解为$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$，将常数变易为函数$u,v$后作为原方程的解：

$$y=u\varphi_1(x)+v\varphi_2(x)$$

代回原方程时注意令$u'\varphi_1(x)+v'\varphi_2(x)=0$，则存在方程组：

$$\begin{cases}u'\varphi_1(x)+v'\varphi_2(x)=0\\u'\varphi_1'(x)+v'\varphi_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

即可解出函数u,v。

2.1拉普拉斯变换其二

如果执意要用拉普拉斯变换求解，需要记下以下拉普拉斯变换表：

函数$f(t)$	**象函数**$\bar{f}(p)$
$t\ sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\ cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$sin\omega t+\omega t\ cos\omega t$	$\frac{2\omega p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$sin\omega t-\omega t\ cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(p^2+\omega^2)^2}$
$cos\omega t+\omega t\ sin\omega t$	$\frac{p(p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^2}$
$cos\omega t-\omega t\ sin\omega t$	$\frac{p(p^2+3\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\bar{f}^{(n)}(p)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$

3.欧拉方程

形式$a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_0y=0$，为欧拉方程。

做变量代换$x=e^t\Leftrightarrow t=lnx\Rightarrow dx=e^tdt$，则：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{e^tdt}=\frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

……

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{d^ky}{dt^k}$$

于是原方程化为：

$$b_n \frac{d^ny}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + b_0 y = 0$$

常系数高阶线性齐次方程是容易解的。