量子计算(八)——振幅放大与振幅估计

一、振幅放大的问题背景

这个算法要解决的问题就是寻找符合要求的解。假设解空间可以被表示为二进制字符串，并且已知某种能够确定解空间中各个解的好坏的标准。

> 也就是给出布尔函数$\mathcal{X}$，它将解空间中的解x映射到$\{0,1\}$:
>
> $$\mathcal{X}(x)=\begin{cases}0 & , \quad if\ x\ is\ bad\\ 1 & , \quad if\ x\ is\ good\end{cases}$$

这个目标基本和$Grover$算法要解决的问题是一致的。事实上，$Grover$算法中的核心算法就是振幅放大，这篇论文就是对$Grover$算法的总结推广，使得任意无测量量子算法也可以使用。

1.量子化

显然，由于解空间被表示为二进制串，因而解空间可以作为一个希尔伯特空间，从而允许量子算法的运行。而解的好坏，则将其划分为两个子空间——称为好空间与坏空间。于是解空间的任意纯态$|\psi\rangle$都可以被分解表示为:

$$|\psi\rangle=|\psi_0\rangle+|\psi_1\rangle$$

其中$|\psi_0\rangle$表示落入坏空间的部分，相应地$|\psi_1\rangle$表示落入好空间的部分。于是$b_\psi=\langle\psi_0|\psi_0\rangle$表示了对这个纯态测量后得到坏结果的概率，$a_\psi=\langle\psi_1|\psi_1\rangle$则是得到好结果的概率，以后简记为$a$。显然$a_\psi+b_\psi=1$。

到这一步，我们的目标就已经清晰明朗了：只要让好空间部分的$|\psi_1\rangle$振幅变大，就提高了测到好结果的概率。之后只需要代入$\mathcal{X}$判定其是否确实是好结果即可。

二、振幅放大的构建

1.振幅放大算符$\mathbf{Q}$

假定n是解空间的二进制串的长度。假设无测量量子算法$\mathcal{A}$是作用到解空间上的酉矩阵，并假设纯态$|\Psi\rangle = \mathcal{A}|0^n\rangle$是由其作用到初始零态的结果。那么如下构建的算符即可实现振幅放大：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{X}) = -\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}$$

其中，$\mathbf{S}$代表它会改变振幅的符号，而下标表示改变的条件：

$$\mathbf{S}_0|x\rangle = \begin{cases} -|x\rangle & , \quad if\ x = 0^n \\ |x\rangle & , \quad if\ x \neq 0^n \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|x\rangle = \begin{cases} -|x\rangle & , \quad if\ \mathcal{X}(x) = 1 \\ |x\rangle & , \quad if\ \mathcal{X}(x) = 0 \end{cases}$$

> 显然可以将$\mathbf{S}_0$写为$I - 2|0^n\rangle\langle 0^n|$，于是：
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1} &= \mathcal{A}(I - 2|0^n\rangle\langle 0^n|)\mathcal{A}^{-1} \\ &= I - 2\mathcal{A}|0^n\rangle\langle 0^n|\mathcal{A}^{-1} \\ &= I - 2|\Psi\rangle\langle\Psi| \end{aligned}$$

现在我们来研究算符$\mathbf{Q}$作用到任意态上会发生什么。由于在这个问题中纯态被分解为好纯态和坏纯态，因此研究此算符分别作用到好坏纯态上的结果。首先是坏纯态$|\Psi_0\rangle$：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}|\Psi_0\rangle &= -\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|\Psi_0\rangle \\ &= -\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}|\Psi_0\rangle \\ &= -(I - 2|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_0\rangle \\ &= -|\Psi_0\rangle + 2(1-a)|\Psi\rangle \\ &= (1-2a)|\Psi_0\rangle + 2(1-a)|\Psi_1\rangle \end{aligned}$$

同理对于好纯态$|\Psi_1\rangle$：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}|\Psi_1\rangle &= -\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|\Psi_1\rangle \\ &= (I - 2|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_1\rangle \\ &= |\Psi_1\rangle - 2a|\Psi\rangle \\ &= -2a|\Psi_0\rangle + (1-2a)|\Psi_1\rangle \end{aligned}$$

2.振幅如何被放大

假设对$|\Psi\rangle$施加$k-1$次$\mathbf{Q}$算符后：

$$\mathbf{Q}^{k-1}|\Psi\rangle=S_k|\Psi_0\rangle+T_k|\Psi_1\rangle$$

也就是好纯态的振幅变为T_k，显然可以得到下列递推式：

$$\begin{cases}S_{k+1}=(1-2a)S_k-2aT_k\\T_{k+1}=(2-2a)S_k+(1-2a)T_k\end{cases},\quad\begin{cases}S_1=1\\T_1=1\end{cases}$$

解得：

> 为了解出上式，首先计算S_k与T_k的线性组合：
>
> $$xS_{k+1}+yT_{k+1}=[x(1-2a)+y(2-2a)]S_k+[-2ax+y(1-2a)]T_k$$
>
> 上式能成为等比递推式的条件是：
>
> $$\lambda=\frac{x(1-2a)+y(2-2a)}{x}=\frac{-2ax+y(1-2a)}{y}$$
>
> 显然可取$x=\sqrt{a-1},y=\sqrt{a}$从而$\lambda=1-2a-2\sqrt{a(a-1)}$。记$u_k=\sqrt{a-1}S_k+\sqrt{a}T_k$，则$u_1=\sqrt{a-1}+\sqrt{a}$，则$u_k=\lambda^{k-1}u_1$。于是：
>
> $$S_k=\frac{\lambda^{k-1}u_1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{\frac{a}{a-1}}T_k$$
>
> 代入递推方程组之第二式得：
>
> $$T_{k+1}=\left(1-2a+2\sqrt{a(a-1)}\right)T_k-\frac{2\sqrt{a-1}u_1}{\lambda}\lambda^k$$
>
> 记$A=1-2a+2\sqrt{a(a-1)},B=\frac{2\sqrt{a-1}u_1}{\lambda},C=\lambda=1-2a-2\sqrt{a(a-1)}$。已知递推形式$a_{n+1}=Aa_n+BC^n$在$A\neq C$时具有通项：
>
> $$a_n=a_1A^{n-1}+BC\frac{A^{n-1}-C^{n-1}}{A-C}$$

> 代入可得：
>
> $$\begin{aligned} T_k = &\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a+2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k-1} \\ &+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a-2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

或者说，对于$\mathbf{Q}^k|\Psi\rangle$，若记$a=sin^2\theta$且不等于0或1且限定$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，那么其好纯态的振幅是：

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a+2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k} \\ &\quad+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a-2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k} \\ &= \frac{sin\theta-icos\theta}{2\sqrt{a}}(1-2sin^2\theta+i2sin\theta cos\theta)^k \\ &\quad+\frac{sin\theta+icos\theta}{2\sqrt{a}}(1-2sin^2\theta-i2sin\theta cos\theta)^k \\ &= \frac{-e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{a}}(cos2\theta+isin2\theta)^k+\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}{2\sqrt{a}}(cos2\theta-isin2\theta)^k \\ &= \frac{-e^{i(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\theta)}}{2\sqrt{a}}+\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-(2k+1)\theta)}}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot sin\left((2k+1)\theta\right) \end{aligned}$$

因此，作用$\mathbf{Q}$算符k次后，测得好纯态的概率就是$sin^2\left((2k+1)\theta\right)$。

3.算符$\mathbf{Q}$作用的次数

显然我们希望测得好纯态的概率越大越好，这就要求$sin^2\left((2k+1)\theta\right)\to 1$，即$(2k+1)\theta\to\frac{\pi}{2}$，即$k=\frac{\pi}{4\theta}-\frac{1}{2}\to\left\lfloor\frac{\pi}{4\theta}\right\rfloor$。以后记$\tilde{m}=\frac{\pi}{4\theta}-\frac{1}{2},m=\left\lfloor\frac{\pi}{4\theta}\right\rfloor$。

此时重新计算测得好纯态的概率：

$$
\begin{aligned}
sin^2\left((2m+1)\theta\right) &\approx sin^2\left(\left(\left\lfloor\frac{\pi}{2\theta}\right\rfloor+1\right)\theta\right)\\
&\approx sin^2\left(\left\lfloor\frac{\pi}{2}\right\rfloor+\theta\right)\\
&\geq sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\
&=1-sin^2\theta\\
&=1-a
\end{aligned}
$$

> 虽然$sin^2\left((2m+1)\theta\right)\geq 1-a$这一结论是正确的，但上式的证明是稍有问题的，即$sin^2\left(1+\theta\right)\geq sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$这一步。但至少在$\theta\in[0.2854,1.8562]$范围内是没问题的。错误的根本原因在于向下取整内的分母不能直接约分。要想完美证明，接下来只需证$\theta\in[0,0.2854]$内成立即可，这里不再证明。论文中的证明是引用另一篇文章，请自行观阅。

也就是说测量到好纯态的概率是大于$1-a$的；同时由于本就是对好纯态振幅的放大，因此这个概率也大于a。因此最后测到好纯态的概率至少是$max\{a,1-a\}$。

然而这引申出一个问题：之所以能要求让$\mathbf{Q}$作用$\left\lfloor\frac{\pi}{4\theta}\right\rfloor$次，是因为我们已知了$\theta$值，即已知了$a$值，即已知在最初的时候能够测得好纯态的概率，例如$Grover$算法中就是如此。但在实际问题中，很多时候这个值具有置信度，甚至完全未知，此时则不能确定$\mathbf{Q}$作用的次数。因此，我们有必要从$Grover$搜索算法进一步推广。

4.算符$\mathbf{Q}$的特征值与特征向量

除了数列递推外，我们也可以通过将$\mathbf{Q}$对角化后，简便地得到$\mathbf{Q}^k$。为此假设：

$$
\mathbf{Q}(x|\Psi_0\rangle+y|\Psi_1\rangle)=\lambda(x|\Psi_0\rangle+y|\Psi_1\rangle)
$$

显然有方程：

$$
\lambda=\frac{x(1-2a)+-2ay}{x}=\frac{x(2-2a)+y(1-2a)}{y}
$$

这与之前数列递推所得方程很像，但并没有必然联系。相似地步骤可得特征值与特征向量为：

$$
\begin{cases}
\lambda_{\pm}=1-2a\pm2\sqrt{a(a-1)}=e^{\pm i2\theta}\\
|\Psi_{\pm}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{\sqrt{1-a}}|\Psi_0\rangle+\frac{1}{\sqrt{a}}|\Psi_1\rangle\right)
\end{cases}
$$

三、量子算法的去随机化

由上节我们已经知道，在已知a的情况下，使用$\mathbf{Q}^m\mathcal{A}|0^n\rangle$即可使我们得到好纯态的概率为$sin^2\left((2m+1)\theta\right)\geq max\{a,1-a\}$。然而我们依然有可能使这个概率为$1$，这就是量子算法的去随机化。论文中给出两种方法：

1.θ微调

当$m=\tilde{m}$时，也就是$\frac{\pi}{4\theta}-\frac{1}{2}$恰是整数，那么$\mathbf{Q}^m\mathcal{A}|0^n\rangle$就自然完全得到好纯态。另一方面，若记$\bar{m}=\lceil\tilde{m}\rceil$，那么$\bar{m}$次迭代又稍微多了点，因此不妨使角度$\theta$更小点，取$\bar{\theta}=\frac{\pi}{4\bar{m}+2}$。因此，只要调整算法的初始准确率至$\bar{a}=sin^2\bar{\theta}$，那么$\bar{m}$次迭代就恰恰好了。

于是问题转化为如何使算法$\mathcal{A}$的初始准确率从a变为$\bar{a}$。这很简单：只要构建另一个算法$\mathcal{B}$使得其作用在单个量子位上时：

$$\mathcal{B}|0\rangle=\sqrt{1-\frac{\bar{a}}{a}}|0\rangle+\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}|1\rangle$$

(然后同时作用$\mathcal{A},\mathcal{B}$？这里没太读懂)

2.$\mathbf{Q}$算符的改进(相位附加)

现在我们改进算符$\mathbf{Q}$，使其在符合条件的情况下不是改变符号，而是附加相位：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathcal{A},\mathcal{X},\phi,\varphi)=-\mathcal{A}\mathbf{S}_0(\phi)\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}(\varphi)$$

其中相位$\phi,\varphi\in[0,2\pi]$，并且：

$$\mathbf{S}_0(\phi)|x\rangle=\begin{cases}e^{i\phi}|x\rangle & ,\quad if\ x=0^n\\ |x\rangle & ,\quad if\ x\neq 0^n\end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{X}}(\varphi)|x\rangle=\begin{cases}e^{i\varphi}|x\rangle & ,\quad if\ \mathcal{X}(x)=1\\ |x\rangle & ,\quad if\ \mathcal{X}(x)=0\end{cases}$$

显然：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_0(\phi) &= \sum |result_i\rangle\langle i| \\
&= e^{i\phi}|0^n\rangle\langle 0^n| + \sum_{i=1}^{2^n-1} |i\rangle\langle i| \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle\langle i| + (e^{i\phi}-1)|0^n\rangle\langle 0^n| \\
&= I + (e^{i\phi}-1)|0^n\rangle\langle 0^n|
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{S}_0(\phi)\mathcal{A}^{-1} &= \mathcal{A}\cdot(I + (e^{i\phi}-1)|0^n\rangle\langle 0^n|)\cdot\mathcal{A}^{-1} \\
&= I + (e^{i\phi}-1)\mathcal{A}|0^n\rangle\langle 0^n|\mathcal{A}^{-1} \\
&= I + (e^{i\phi}-1)|\Psi\rangle\langle\Psi|
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}|\Psi_0\rangle &= -\mathcal{A}\mathbf{S}_0(\phi)\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}(\varphi)|\Psi_0\rangle \\
&= -(I + (e^{i\phi}-1)|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_0\rangle \\
&= -|\Psi_0\rangle + (1-e^{i\phi})(1-a)|\Psi\rangle \\
&= (a(e^{i\phi}-1) - e^{i\phi})|\Psi_0\rangle + (1-e^{i\phi})(1-a)|\Psi_1\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}|\Psi_1\rangle &= -e^{i\varphi}(I + (e^{i\phi}-1)|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_1\rangle \\
&= -e^{i\varphi}|\Psi_1\rangle - e^{i\varphi}(e^{i\phi}-1)a|\Psi\rangle \\
&= e^{i\varphi}(1-e^{i\phi})a|\Psi_0\rangle + e^{i\varphi}((1-e^{i\phi})a - 1)|\Psi_1\rangle
\end{aligned}
$$

于是在作用$\lfloor\tilde{m}\rfloor$次$\mathbf{Q}(\mathcal{A},\mathcal{X},\pi,\pi)$后，系统处于叠加态：

$$
\frac{1}{\sqrt{1-a}}cos((2\lfloor\tilde{m}\rfloor+1)\theta)|\Psi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{a}}sin((2\lfloor\tilde{m}\rfloor+1)\theta)|\Psi_1\rangle
$$

之后再作用一次$\mathbf{Q}(\mathcal{A},\mathcal{X},\phi,\varphi)$，但要求相位$\phi,\varphi$符合下式：

$$
\frac{1}{\sqrt{1-a}}cos(...)(a(e^{i\phi}-1)-e^{i\phi}) + \sqrt{a}sin(...)e^{i\varphi}(1-e^{i\phi}) = 0
$$

也就是在这次作用之后，$|\Psi_0\rangle$的振幅为0，那么$|\Psi_1\rangle$的振幅自然就为1了。于是问题转换为最后一次作用时应当如何选取ϕ,φ。如何选取并不是本论文的重要内容，但其存在性是可以保证的。

四、$QSearch$算法

在a未知的情况下，$Grover$算法不能发挥太大的作用，因为不知道算符$\mathbf{Q}$应当作用的次数，使得测得好纯态的概率偏离最优值。为此，我们推广其至$QSearch$算法。

1.算法流程

1. `int l = 1;` `float c = random(start=1, end=2);` c不等于1或2。
2. `l++;` `int M = (int)pow(c, l) + 1;`
3. 将$\mathcal{A}$作用于初始零态$|0^n\rangle$，并测量得到$|x\rangle$。如果是好结果，即$\mathcal{X}(x)=1$，那么 `return x;`
4. 否则，记录$|\Psi\rangle=\mathcal{A}|0^n\rangle$。
5. `int j = (int)random(1, M);`
6. 将算符$\mathbf{Q}$作用到$|\Psi\rangle$上j次，即$\mathbf{Q}^j|\Psi\rangle$。
7. 测量结果得到$|x\rangle$。如果是好结果，那么 `return x;` 否则， `goto step2;`

尽管这个算法看起来比已知a的搜索算法的时间规模更大，但可以证明其依然是$O(\sqrt{N})$的。

2.启发式经典算法的植入

然而很多启发式经典算法也可以做到$O(\sqrt{N})$，这导致我们之前讨论的量子算法看起来没多少优势。但是如果考虑将这些启发式算法改造为量子算法，那不就可以在$\sqrt{N}$的基础上再取一次根号么！可以证明，如果经典算法解决问题的期望时间是T，那么将其改造为量子算法后再使用$QSearch$算法，规模是$O(\sqrt{T})$的。

五、振幅估计

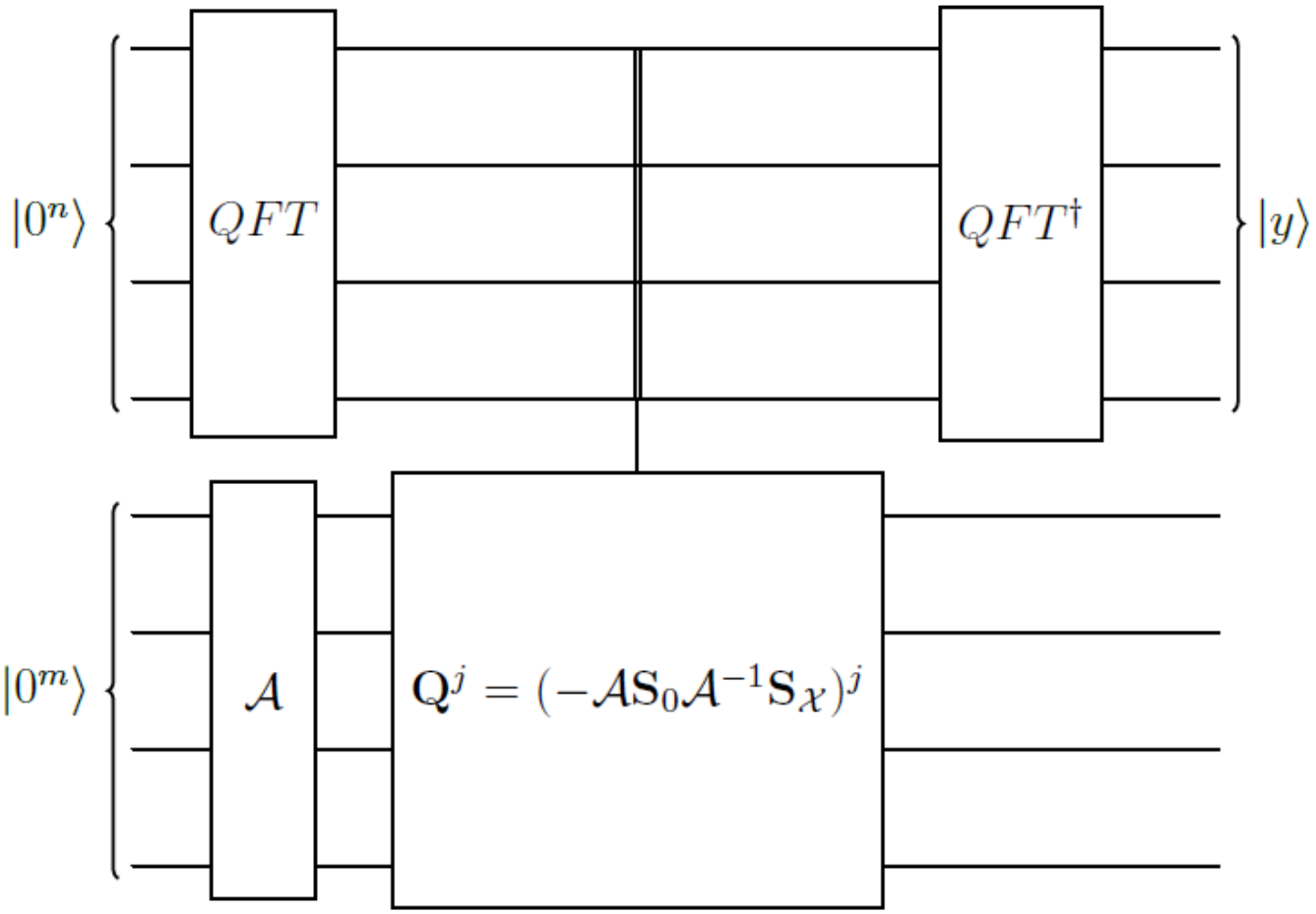
1.振幅估计的问题引入

振幅放大是为了寻找解，但这却不能告诉我们解空间中有多少解是好的。振幅估计就是为了解决这个问题。记$t=|\{x|\mathcal{X}(x)=1\}|$，由于$a$是首次运行$\mathcal{A}$后测量得到好纯态的概率，因此$a=\dfrac{t}{N}$。因此，只要我们能估计振幅$a$，就能估计好解的数量。

注意到$a=sin^2\theta$，现在问题转化为估计θ。注意到算符$\mathbf{Q}$及其作用次数使得好纯态与坏纯态的振幅形成了三角函数，因此估计这些三角函数的最大周期$\dfrac{\pi}{\theta}$亦可。而利用量子傅里叶变换的周期查找则是非常成熟的量子算法。当然另一方面，注意到算符$\mathbf{Q}$的特征根是$e^{\pm i2\theta}$，利用相位估计来获得$\mathbf{Q}$的特征根也是一种可行的方法。

2.利用相位估计的振幅估计

将相位估计中的U矩阵替换为$\mathbf{Q}$即可，如下图所示：



Amplitude Estimation: Phase Estimation with $\mathbf{Q}^j$

于是y就代表了$\mathbf{Q}$特征值中的相位，对比$\mathbf{Q}$的特征值可得$i2\theta = i2\pi\frac{y}{n}$即$\theta = \pi\frac{y}{n}$，从而可以得到$a$的一个估计值：

$$\tilde{a} = sin^2\left(\pi \cdot \frac{y}{n}\right)$$

于是得到好解的数量的估计值为$\tilde{t} = N\tilde{a}$。

> 我们记振幅估计的算法为$AmpEst$，其所需参数显然为$(\mathcal{A}, \mathcal{X}, n)$。而得到好解的数量的估计算法为$Count$，显然这个算法只需计算$N \times AmpEst(...)$。此时$AmpEst$所使用的参数则是$(QFT, \mathcal{X}, n)$，因此$Count$的参数列表是$(\mathcal{X}, n)$。

3.误差分析

首先做点数学上的准备工作。假如已知相位误差$|\tilde{\theta}-\theta| \leq \varepsilon$，那么$|\tilde{a}-a| = |sin^2\tilde{\theta} - sin^2\theta|$的上界应是什么？只需要利用和差化积，一方面：

$$\begin{aligned} sin^2\tilde{\theta} - sin^2\theta &\leq sin^2(\theta+\varepsilon) - sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}cos(2\theta) - \frac{1}{2}cos(2\theta+2\varepsilon) \\ &= sin(2\theta+\varepsilon)sin\,\varepsilon \\ &= (sin(2\theta)cos\,\varepsilon + sin\,\varepsilon cos(2\theta))sin\,\varepsilon \\ &= 2\sqrt{a(1-a)}cos\,\varepsilon\,sin\varepsilon + (1-2a)sin^2\,\varepsilon \\ &= \sqrt{a(1-a)}sin2\varepsilon + (1-2a)sin^2\,\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon\sqrt{a(1-a)} + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

另一方面：

$$\begin{aligned} sin^2\theta - sin^2\tilde{\theta} &\leq sin^2\theta - sin^2(\theta-\varepsilon) \\ &= \sqrt{a(1-a)}sin2\varepsilon + (2a-1)sin^2\,\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon\sqrt{a(1-a)} + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

因此$|\tilde{a}-a| \leq 2\varepsilon\sqrt{a(1-a)} + \varepsilon^2$。如果我们希望误差最小，即取$\varepsilon = \frac{\pi}{n}$(因为$y$是离散的整数值)，那么显然此时$a$的误差上限是：

$$|\tilde{a}-a| \leq \frac{2\pi}{n}\sqrt{a(1-a)} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

t的误差上限是：

$$\begin{aligned} |\tilde{t}-t| &= N|\tilde{a}-a| \\ &\leq \frac{2N\pi}{n}\sqrt{a(1-a)} + \frac{N\pi^2}{n^2} \\ &= \frac{2\pi}{n}\sqrt{t(N-t)} + \frac{N\pi^2}{n^2} \end{aligned}$$

并且由相位估计中的结论，正确的概率至少是$\frac{8}{\pi^2}$。如果允许更大的误差，例如取$\varepsilon = \frac{k\pi}{n}$，那么正确的概率会更大，即$1-\frac{1}{2(k-1)}$。

在最小误差下，应取$n = \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$(至于为什么，论文中尚未说明)。此时进一步得到$t$的误差上限是：

$$
\begin{aligned}
|\tilde{t}-t| &\leq \frac{2\pi}{n}\sqrt{t(N-t)}+\frac{N\pi^2}{n^2} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{t(N-t)}{N}}+\pi^2 \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{t(N-t)}{N}}+11
\end{aligned}
$$

4.给定误差时的好解数量估计算法

假定要求$|\tilde{t}-t| \leq \varepsilon t, \varepsilon \in (0,1]$，那么我们使用算法$BasicApproxCount(\mathcal{X},n)$，其步骤是：

1. $int\ l=0;$
2. $l++;$
3. $int\ \tilde{t}=Count(\mathcal{X},2^l);$
4. $if\ ((\tilde{t}==0)\ \&\&\ (2^l<2\sqrt{N}))\ goto\ step2;$
5. $n=\left\lceil \frac{20\pi^2}{\varepsilon}2^l \right\rceil;$
6. $\tilde{t}=Count(\mathcal{X},n);$
7. $return\ t;$要求$|t-\tilde{t}| \leq \frac{2}{3}$。

根据这个思想，当我们对t没有任何先验估计时，我们可以使用另一算法$ExactCount(\mathcal{X})$：

1. $int\ \tilde{t}_1,\tilde{t}_1=Count\left(\mathcal{X},\left\lceil 14\pi\sqrt{N}\right\rceil\right),Count\left(\mathcal{X},\left\lceil 14\pi\sqrt{N}\right\rceil\right);$
2. $int\ M_i=\left\lceil 30\sqrt{(\tilde{t}_i+1)(N-\tilde{t}_i+1)}\right\rceil;$
3. $int\ M=min\{M_1,M_2\};$
4. $int\ t'=Count(\mathcal{X},M);$
5. $return\ t;$要求$|t-t'| \leq \frac{2}{3}$。