量子计算(八)——振幅放大

一、问题背景

这个算法要解决的问题就是寻找符合要求的解。假设解空间可以被表示为二进制字符串，并且已知某种能够确定解空间中各个解的好坏的标准。

> 也就是给出布尔函数$\mathcal{X}$，它将解空间中的解x映射到$\{0,1\}$：
>
> $$\mathcal{X}(x)=\begin{cases}0 & , & if\ x\ is\ bad\\ 1 & , & if\ x\ is\ good\end{cases}$$

这个目标基本和$Grover$算法要解决的问题是一致的。事实上，$Grover$算法中的核心算法就是振幅放大，这篇论文就是对$Grover$算法的总结推广，使得任意无测量量子算法也可以使用(存疑)。

1.量子化

显然，由于解空间被表示为二进制串，因而解空间可以作为一个希尔伯特空间，从而允许量子算法的运行。而解的好坏，则将其划分为两个子空间——称为好空间与坏空间。于是解空间的任意纯态$|\psi\rangle$都可以被分解表示为：

$$|\psi\rangle=|\psi_0\rangle+|\psi_1\rangle$$

其中$|\psi_0\rangle$表示落入坏空间的部分，相应地$|\psi_1\rangle$表示落入好空间的部分。于是$b_\psi=\langle\psi_0|\psi_0\rangle$表示了对这个纯态测量后得到坏结果的概率，$a_\psi=\langle\psi_1|\psi_1\rangle$则是得到好结果的概率，以后简记为$a$。显然$a_\psi+b_\psi=1$。

到这一步，我们的目标就已经清晰明朗了：只要让好空间部分的$|\psi_1\rangle$振幅变大，就提高了测到好结果的概率。之后只需要代入$\mathcal{X}$判定其是否确实是好结果即可。

二、振幅放大的构建

1.振幅放大算符$\mathbf{Q}$

假定n是解空间的二进制串的长度。假设无测量量子算法$\mathcal{A}$是作用到解空间上的酉矩阵，并假设纯态$|\Psi\rangle=\mathcal{A}|0^n\rangle$是由其作用到初始零态的结果。那么如下构建的算符即可实现振幅放大：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathcal{A},\mathcal{X})=-\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}$$

其中，$\mathbf{S}$代表它会改变振幅的符号，而下标表示改变的条件：

$$\mathbf{S}_0|x\rangle=\begin{cases}-|x\rangle & , \quad if\ x=0^n \\ |x\rangle & , \quad if\ x\neq 0^n\end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|x\rangle=\begin{cases}-|x\rangle & , \quad if\ \mathcal{X}(x)=1 \\ |x\rangle & , \quad if\ \mathcal{X}(x)=0\end{cases}$$

> 显然可以将$\mathbf{S}_0$写为$I-2|0^n\rangle\langle 0^n|$，于是：
>
> $$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}&=\mathcal{A}(I-2|0^n\rangle\langle 0^n|)\mathcal{A}^{-1}\\&=I-2\mathcal{A}|0^n\rangle\langle 0^n|\mathcal{A}^{-1}\\&=I-2|\Psi\rangle\langle\Psi|\end{aligned}$$

现在我们来研究算符$\mathbf{Q}$作用到任意态上会发生什么。由于在这个问题中纯态被分解为好纯态和坏纯态，因此研究此算符分别作用到好坏纯态上的结果。首先是坏纯态$|\Psi_0\rangle$：

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}|\Psi_0\rangle&=-\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|\Psi_0\rangle\\&=-\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}|\Psi_0\rangle\\&=-(I-2|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_0\rangle\\&=-|\Psi_0\rangle+2(1-a)|\Psi\rangle\\&=(1-2a)|\Psi_0\rangle+2(1-a)|\Psi_1\rangle\end{aligned}$$

同理对于好纯态$|\Psi_1\rangle$：

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}|\Psi_1\rangle&=-\mathcal{A}\mathbf{S}_0\mathcal{A}^{-1}\mathbf{S}_{\mathcal{X}}|\Psi_1\rangle\\&=(I-2|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Psi_1\rangle\\&=|\Psi_1\rangle-2a|\Psi\rangle\\&=-2a|\Psi_0\rangle+(1-2a)|\Psi_1\rangle\end{aligned}$$

2.振幅如何被放大

假设对$|\Psi\rangle$施加$k-1$次$\mathbf{Q}$算符后:

$$\mathbf{Q}^{k-1}|\Psi\rangle = S_k|\Psi_0\rangle + T_k|\Psi_1\rangle$$

也就是好纯态的振幅变为T_k，显然可以得到下列递推式:

$$\begin{cases} S_{k+1} = (1-2a)S_k - 2aT_k \\ T_{k+1} = (2-2a)S_k + (1-2a)T_k \end{cases}, \quad \begin{cases} S_1 = 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

解得:

> 为了解出上式，首先计算S_k与T_k的线性组合:
>
> $$xS_{k+1} + yT_{k+1} = [x(1-2a) + y(2-2a)]S_k + [-2ax + y(1-2a)]T_k$$
>
> 上式能成为等比递推式的条件是:
>
> $$q = \frac{x(1-2a) + y(2-2a)}{x} = \frac{-2ax + y(1-2a)}{y}$$
>
> 显然可取$x = \sqrt{a-1}, y = \sqrt{a}$从而$q = 1 - 2a - 2\sqrt{a(a-1)}$。记$u_k = \sqrt{a-1}S_k + \sqrt{a}T_k$，则$u_1 = \sqrt{a-1} + \sqrt{a}$，则$u_k = q^{k-1}u_1$。于是:
>
> $$S_k = \frac{q^{k-1}u_1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{\frac{a}{a-1}}T_k$$
>
> 代入递推方程组之第二式得:
>
> $$T_{k+1} = \left(1 - 2a + 2\sqrt{a(a-1)}\right)T_k - \frac{2\sqrt{a-1}u_1}{q}q^k$$
>
> 记$A = 1 - 2a + 2\sqrt{a(a-1)}, B = \dfrac{2\sqrt{a-1}u_1}{q}, C = q = 1 - 2a - 2\sqrt{a(a-1)}$。已知递推形式$a_{n+1} = Aa_n + BC^n$在$A \neq C$时具有通项:
>
> $$a_n = a_1A^{n-1} + BC\frac{A^{n-1} - C^{n-1}}{A - C}$$

> 代入可得：

$$
\begin{aligned}
T_k = &\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a+2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k-1} \\
&+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a-2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

或者说，对于$\mathbf{Q}^k|\Psi\rangle$，若记$a=sin^2\theta$且不等于0或1，那么其好纯态的振幅是：

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a+2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k} \\
&\quad+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a}}\left(1-2a-2\sqrt{a(a-1)}\right)^{k} \\
&= \frac{sin\theta-icos\theta}{2\sqrt{a}}(1-2sin^2\theta+i2sin\theta cos\theta)^k \\
&\quad+\frac{sin\theta+icos\theta}{2\sqrt{a}}(1-2sin^2\theta-i2sin\theta cos\theta)^k \\
&= \frac{-e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{a}}(cos2\theta+isin2\theta)^k+\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}{2\sqrt{a}}(cos2\theta-isin2\theta)^k \\
&= \frac{-e^{i(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\theta)}}{2\sqrt{a}}+\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-(2k+1)\theta)}}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{i}{\sqrt{a}}\cdot sin\left((2k+1)\theta\right)
\end{aligned}
$$

因此，作用$\mathbf{Q}$算符k次后，测得好纯态的概率就是$sin^2\left((2k+1)\theta\right)$。