控制系统(二)——反馈控制

一、偏差信号

假设控制器和受控对象的传递函数为$G_c(s), G(s)$。假设三种输入信号：参考输入$R(s)$，干扰信号$T_d(s)$，测量噪声$N(s)$。系统的输出信号为$Y(s)$。从而可以定义跟踪误差信号$E(s)$：

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

假定系统为单位反馈系统，即$H(s) = 1$。那么输出信号$Y(s)$写为：

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s)$$

因此跟踪误差信号$E(s)$展开为：

$$E(s) = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s) + \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s)$$

由于$H(s) = 1$，所以开环传递函数$L(s)$与前向通路传递函数相同：

$$L(s) = G_c(s)G(s)$$

从而化简$E(s)$为：

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s) + \frac{L(s)}{1+L(s)}N(s)$$

现在定义$F(s) = 1 + L(s)$，于是定义灵敏度函数$S(s)$：

$$S(s) = \frac{1}{F(s)} = \frac{1}{1+L(s)}$$

以及补灵敏度函数$C(s)$：

$$C(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

显然有$S(s) + C(s) = 1$。于是将跟踪误差信号$E(s)$重写为：

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + C(s)N(s)$$

二、系统灵敏度

系统灵敏度定义为系统传递函数的变化率与受控对象传递函数变化率之比。取系统传递函数$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$，那么系统灵敏度S为：

$$S=\frac{\partial T/T}{\partial G/G}=\frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}=\frac{\partial\ ln\ T}{\partial\ ln\ G}$$

现在来研究一些典型系统的灵敏度。开环系统中$T(s)=G(s)$，因此显然其灵敏度为1。对于单位闭环反馈系统，其传递函数：

$$T(s)=\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}$$

从而灵敏度为：

$$S_G^T=\frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}=\frac{1}{1+G_c(s)G(s)}$$

显然，根据链式法则，下式是成立的：

$$S_\alpha^T=S_G^T S_\alpha^G$$

另一方面，如果将$T(s)$表示为分式的形式即$T(s,\alpha)=\frac{N(s,\alpha)}{D(s,\alpha)}$，那么：

$$S_\alpha^T=\frac{\partial\ ln\ T}{\partial\ ln\ \alpha}=\frac{\partial\ ln\ N}{\partial\ ln\ \alpha}-\frac{\partial\ ln\ D}{\partial\ ln\ \alpha}=S_\alpha^N-S_\alpha^D$$

三、干扰信号

开环传递函数$L(s)$越大，干扰信号$T_d(s)$对跟踪误差$E(s)=-S(s)G(s)T_d(s)$的影响程度越小，灵敏度函数越小。

但另一方面，$L(s)$越小，测量噪声$N(s)$对跟踪误差$E(s)=C(s)N(s)$的影响程度越小，补灵敏度函数越小。

一般而言，干扰信号是低频的，测量噪声是高频的。

四、稳态误差

稳态误差是指瞬态响应消失后，系统的持续响应与预期响应的误差。已知单位闭环反馈系统的误差是:

$$E_c(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s)$$

根据终值定理$\lim\limits_{t\to+\infty}e(t)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)$，所以当输入信号为单位阶跃信号，即$R(s)=\frac{1}{s}$时:

$$e_{ss}=e_c(+\infty)=\frac{1}{1+G_c(0)G(0)}$$

在三种典型测试信号下:

1.阶跃输入

若输入是幅度为A的阶跃信号，那么稳态误差是:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{1+G_c(s)G(s)}=\frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_c(s)G(s)}$$

从而稳态误差由$\lim\limits_{s\to 0}G_c(s)G(s)$决定，将其称为**位置误差常数**$K_p$，即:

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_c(s)G(s)$$

一般而言，开环传递函数$G_c(s)G(s)$可以表示为分式形式:

$$G_c(s)G(s)=\frac{K\prod\limits_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod\limits_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

其中，N代表系统中积分器的个数，称之为系统的**型数**，显然K_p的结果受其支配。对于零型系统，稳态误差是:

$$e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}$$

当$N\geq 1$时，稳态误差则为0。

2.斜坡输入

相似地，当输入为斜率为A的斜坡信号时，稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^2}}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{A}{\lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)}$$

记**速度误差常数**K_v为：

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

当系统是一型系统时，稳态误差是：

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$$

而当$N \geq 2$时稳态误差为0。

3.加速度输入

类似地，当输入为$r(t) = \dfrac{A}{2}t^2$时，稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^3}}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{A}{\lim_{s \to 0} s^2 G_c(s)G(s)}$$

记**加速度误差常数**K_a为：

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G_c(s)G(s)$$

当系统是二型系统时，稳态误差是：

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$$

而当$N \geq 3$时稳态误差为0。

五、二阶系统的性能

一个典型二阶闭环反馈控制系统的输入输出关系是$Y(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$。当$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$，则可以展开为：

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}R(s)$$

一般而言使用单位阶跃响应来定义系统的性能指标。

1.上升时间

上升时间T_r定义为幅值的$10\% \sim 90\%$的变化时间。

2.峰值时间

峰值时间T_p定义为幅值的$0\% \sim 100\%$的变化时间。对于二阶系统：

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

3.超调量

超调量$P.O.$定义为$\frac{M_{pt}-f_v}{f_v}\times 100\%$，其中$M_{pt}$是时间响应的峰值，$f_v$是时间响应的终值。对于二阶系统：

$$M_{pt}=1+e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

于是：

$$P.O.=100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

4.调节时间

调节时间T_s是指系统响应达到并维持在稳态值某个误差百分比δ范围内所需的时间。当$\delta=2\%$时，$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$。

六、