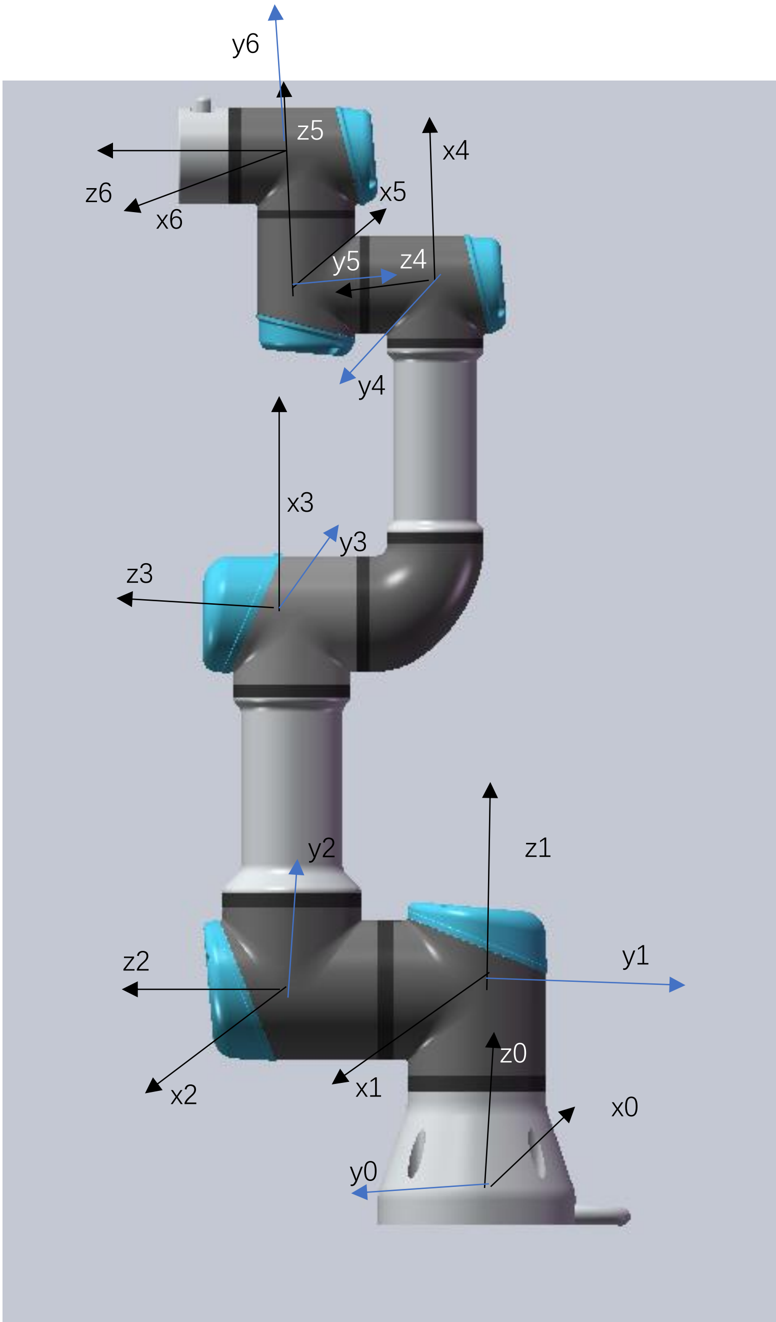
嵌入式机器人开发(2)期末作业

1、D-H 参数法建立坐标系并给出参数表，推导 ${}^{0}T_{6}$表达式

因为 DH 法先确定 z 轴再确定 x 轴，而 y 轴方向是 x、z 轴的叉积方向，故只要确定了 z 和 x，就能确定 y。(斜的 x 轴表示其方向是指向屏幕内/外)。为了显示美观，蓝色是 y 轴，黑色是 x、z 轴。



DH 参数表：

#	θ	d	a	α
0-1	θ_1	151.9	0	0
1-2	θ_2	86.85	0	90
2-3	θ_3	0	243.65	0
3-4	θ_4	92.85	213	0
4-5	θ_5	83.4	0	-90
5-6	θ_6	83.4	0	90

以上建立的 DH 参数表代入了具体的数值，用符号来表示就是：

#	θ	d	a	α
0-1	θ_1	d_1	0	0
1-2	θ_2	d_2	0	90
2-3	θ_3	0	a_3	0
3-4	θ_4	d_4	a_4	0
4-5	θ_5	d_5	0	-90
5-6	θ_6	d_6	0	90

推导 T06 表达式： ${}^{0}T_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

根据公式$A_i = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta C\alpha & S\theta S\alpha & aC\theta \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha & aS\theta \\ 0 & S\alpha & C\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，此处$d, a, \theta, \alpha$下标都是 i，可以算出 A1,A2,A3,A4,A5,A6。代入参数的值之后结果如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 * C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 * s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -s_4 & 0 & a_4 * c_4 \\ S_4 & c_4 & 0 & a_4 * s_4 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ S_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & 0 & s_6 & 0 \\ s_6 & 0 & -c_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经过计算得到 T06:

下方把 T06 每一行每一列的元素列出来了，索引格式为 matlab 索引方式。

$$^0\mathrm{T}_6(1,1)=\mathrm{C}_6*\mathrm{C}_{12}*\mathrm{C}_{345}-\mathrm{S}_6*\mathrm{S}_{12}$$
$$^0\mathrm{T}_6(1,2)=-C_{12}*S_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(1,3)=C_6*S_{12}+S_6*C_{12}*C_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(1,4)=(d_4+d_5)*S_{12}-d6*C_{12}*S_{345}+a_3C_{12}C_3+a_4C_{12}C_{34}$$

$$^0\mathrm{T}_6(2,1)=S_6C_{12}+C_6S_{12}C_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(2,2)=-S_{12}S_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(2,3)=S_6S_{12}C_{345}-C_6C_{12}$$
$$^0\mathrm{T}_6(2,4)=-C_{12}(d_4+d_5)-S_{12}d_6S_{345}+C_3a_3S_{12}+C_{34}a_4S_{12}$$

$$^0\mathrm{T}_6(3,1)=C_6S_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(3,2)=C_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(3,3)=S_6S_{345}$$
$$^0\mathrm{T}_6(3,4)=d_1+d_2+d_6C_{345}+S_3a_3+S_{34}a_4$$

$$^0\mathrm{T}_6(4,1)=0$$
$$^0\mathrm{T}_6(4,2)=0$$
$$^0\mathrm{T}_6(4,3)=0$$
$$^0\mathrm{T}_6(4,4)=1$$

2、推导机器人运动学的逆解显式表达式 $\boldsymbol{\theta_1} \sim \boldsymbol{\theta_6}$ =?

下方的矩阵乘法因为手动计算和坐标系建立的不同，可能会有个别元素计算错误导致表达式不匹配的情况（因为没有正确答案可参考，所以不知道算对了还是算错了），但整体求逆解的过程思路是对的。

首先从正运动学出发，假设要将机器人放置到由 noa 和 p 向量给定的期望位置和姿态，即 $^0T_H={}^0T_6=A_1A_2A_3A_4A_5A_6=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

2.1 逆运动学求解关节角

总体思路是用 A1 的逆左乘 RHS（即 RHS=T06），得到 T16。通过矩阵各元素相等，列出等式方程，逐步消元，求 arctan()得到$\theta_1 \sim \theta_6$的值。方程如下所示：

$$A_1^{-1}*RHS=A_1^{-1}*\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=A_2A_3A_4A_5A_6$$

具体过程如下：

1、求 A1 的逆

转置旋转部分，位置部分求点积负数，得$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2、求等式左边的矩阵乘积$A_1^{-1}*RHS$

3、求等式右边的矩阵乘积$A_1^{-1}*\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4、两个矩阵对应元素建立等式，逐步消元用 arctan 求解。

等式左边： 记为矩阵$M=A_1^{-1}*RHS$

$$A_1^{-1}*RHS(1,1)=S_1C_{12}S_6+S_1C_6C_{345}S_{12}-C_1S_6S_{12}+C_1C_6C_{12}C_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(1,2)=-S_{345}*C_2$$
$$A_1^{-1}*RHS(1,3)=C_6S_2+C_2C_{345}S_6$$
$$A_1^{-1}*RHS(1,4)=(d_4+d_5)S_2-d_6C_2S_{345}+a_4C_2C_{34}+a_3C_2C_3$$

$$A_1^{-1}*RHS(2,1)=S_6C_2+C_6S_2C_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(2,2)=-S_2S_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(2,3)=-C_6C_2+S_2S_6C_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(2,4)=-(d_4+d_5)C_2+S_2(C_3a_3+C_{34}a_4-S_{345}d_6)$$

$$A_1^{-1}*RHS(3,1)=C_6S_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(3,2)=C_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(3,3)=S_6S_{345}$$
$$A_1^{-1}*RHS(3,4)=d_2+d_6*C_{345}+a_3S_3+a_4S_{34}$$

$$A_1^{-1}*RHS(4,1)=0$$
$$A_1^{-1}*RHS(4,2)=0$$
$$A_1^{-1}*RHS(4,3)=0$$
$$A_1^{-1}*RHS(4,4)=1$$

等式右边： 记为矩阵 N

$$A_1^{-1}*\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} C_1n_x+S_1n_y & C_1o_x+S_1o_y & C_1a_x+S_1a_y & C_1p_x+S_1p_y \\ C_1n_y-S_1n_x & C_1o_y-S_1o_x & C_1a_y-S_1a_x & C_1p_y-S_1p_x \\ n_z & o_z & a_z & p_z-d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M、N 两个矩阵的对应元素相等

2.1.1 求解$\boldsymbol{\theta_6}$

通过观察发现，M(3,3)/M(3,1)=tan(θ_6)=N(3,3)/N(3,1)=a_z/n_z

反解$\theta_6 = \arctan(a_z/n_z)$，和$\theta_6 = \theta_6 + 180°$

并且$C_{345} = o_z, S_{345} = n_z/\cos(\theta_6)$，都是已知量

2.1.2 求解$\boldsymbol{\theta_2}$和 $\boldsymbol{\theta_1}$

再观察发现等式方程只有θ_2和 θ_1两个未知数，故可以解两个角度θ_2和 θ_1。

$$\begin{cases} M(2,1) = N(2,1) = S_6C_2 + C_6S_2C_{345} = C_1n_y - S_1n_x \\ M(1,3) = N(1,3) = C_6S_2 + C_2C_{345}S_6 = C_1a_x + S_1a_y \\ M(1,2) = N(1,2) = -S_{345} * C_2 = C_1o_x + S_1o_y \end{cases}$$

对两个等式方程两边平方再相加：

$$\begin{cases} M(2,1)^2 = N(2,1)^2 = (S_6C_2 + C_6S_2C_{345})^2 = (C_1n_y - S_1n_x)\text{^}2 \\ M(1,3)^2 = N(1,3)^2 = (C_6S_2 + C_2C_{345}S_6)\text{^}2 = (C_1a_x + S_1a_y)\text{^}2 \end{cases}$$

将已知系数替换成 F、G、H 等以简洁式子，因为$C_1 = (F^2 + H^2)/G$，$S_1 = \pm\sqrt{1 - C_1^2}$ 得$\theta_1 = \arctan(S_1/C_1)$，再代入原方程$-S_{345} * C_2 = C_1o_x + S_1o_y$，且$S_2 = \pm\sqrt{1 - C_1^2}$ 得 $\theta_2 = \arctan(\mathrm{S}_2,(C_1o_x + S_1o_y)/-S_{345})$

2.1.3 求解$\boldsymbol{\theta_3}$、$\boldsymbol{\theta_4}$、$\boldsymbol{\theta_5}$

观察矩阵 M 可发现，θ_3、θ_4、θ_5基本上都一起出现，形式为S_{345}, S_{34}，所以要**先求$\boldsymbol{\theta_{345} = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5}$，再求$\boldsymbol{\theta_3}$，之后反解$\boldsymbol{\theta_{34} = \theta_3 + \theta_4}$，就可得$\boldsymbol{\theta_5}$和 $\boldsymbol{\theta_4}$的值。**

由方程

$$\begin{cases} M(3,2) = N(3,2) = C_{345} = o_z \\ M(3,3) = N(3,3) = S_6S_{345} = a_z \end{cases}$$

可知$\theta_{345} = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = \arctan(a_z/S_6\,, o_z)$

再由方程

$$\begin{cases} M(2,4) = N(2,4) = -(d_4 + d_5)C_2 - S_2S_{345}d_6 + S_2C_{34}a_4 + S_2C_3a_3 = C_1p_y - S_1p_x \\ M(1,4) = N(1,4) = (d_4 + d_5)S_2 - d_6C_2S_{345} + a_4C_2C_{34} + a_3C_2C_3 = C_1p_x + S_1p_y \\ M(3,4) = N(3,4) = d_2 + d_6 * C_{345} + a_3S_3 + a_4S_{34} = p_z - d_1 \end{cases}$$

其中除了θ_3, θ_{34}，其余都是已知量，故可解得θ_3：

移项改变上面方程 1、2 的形式，将等式右边的已知量记为T_1, T_2，如下所示：

$$\begin{cases} a_4S_2C_{34} + a_3S_2C_3 = C_1p_y - S_1p_x - (-(d_4+d_5)C_2 - S_2S_{345}d_6) = T_1 \\ a_4C_2C_{34} + a_3C_2C_3 = C_1p_x + S_1p_y - (d_4+d_5)S_2 - d_6C_2S_{345} = T_2 \end{cases}$$

两边平方再相加，可解得$a_4C_{34} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 3a_3^2C_3^2} - 2a_3C_3$

再代入第二个方程，令$Q = 3a_3^2 - a_3^2c_2^2$，

$$\theta_3 = arcos(\pm\sqrt{\frac{T_1^2}{Q} + \left(\frac{T_2a_3c_2}{Q}\right)^2} + \frac{T_2a_3c_2}{Q})$$

再用θ_3反解θ_{34}，

$$\theta_{34} = arcos(\frac{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 3a_3^2C_3^2} - 2a_3C_3}{a_4})$$

即可得到$\theta_5 = \theta_{345} - \theta_{34} = \arctan\left(\frac{a_z}{S_6}, o_z\right) - arcos(\frac{\sqrt{T_1^2+T_2^2+3a_3^2C_3^2}-2a_3C_3}{a_4}$

$$\theta_4 = \theta_{34} - \theta_3 = arcos\left(\frac{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 3a_3^2C_3^2} - 2a_3C_3}{a_4}\right)$$

$$- arcos(\pm\sqrt{\frac{T_1^2}{Q} + \left(\frac{T_2a_3c_2}{Q}\right)^2} + \frac{T_2a_3c_2}{Q})$$