第十五章 伽马函数与相关分布

如果 $s > 0$ (实际上, $\mathcal{R}(s) > 0$), 那么**伽马函数** $\Gamma(s)$ 就是

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}.$$

实部大于0的复数.

15.1 $\Gamma(s)$ 的存在性.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

① 当 $x \to \infty$ 时. e^{-x} 的衰减速度大于 x^{s-1} 的增长速度. 因此收敛.

用"衰减"约束积分.

或者:

$$\int_1^B e^{-x} x^{s-1} dx$$

$$\leq \int_1^B M! \, x^{-M} x^{s-1} dx \qquad \left(\frac{x^M}{M!} \text{ 是 } e^x \text{级数展开的一项}\right)$$

$$= M! \int_1^B x^{s-1-M} dx$$

$$= M! \cdot \left.\frac{x^{s-M}}{s-M}\right|_1^B$$

$$= M! \cdot \frac{B^{s-M} - 1}{s-M}$$

只需令 $M \geq s + c$ (某常数)

即可证明上界

② 再看 $x \to 0$ 时.

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_0^1 x^{s-1} dx$$

$$= \frac{x^s}{s} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{s}$$

有上界.

现在确保了对于所有 $s>0$. $\Gamma(s)$ 都有良好的定义

再看 $s<0$ 时. ① 的论证显然没有问题.

当 $s=-2$ 时. $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$

$$= \int_0^1 e^{-x} x^{-3} dx$$

$$\geq \int_0^1 \frac{x^{-3}}{e} dx$$

$$= \infty$$

无下界.

15.2 Γ(s) 的函数方程.

解析延拓(亚纯延拓)：将 f 的定义域拓展，成为一个新的函数，记为 g，g 与 f 在公共的定义域下相当.

注意到 $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1)$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2)$.

猜想：$\Gamma(s) = (s-1) \cdot \Gamma(s-1)$

数学归纳法 + 分部积分法可证

$\Gamma(s)$ 的函数方程: 伽马函数满足

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

根据上式, 可以把伽马函数推广到所有 s 上. 这种推广也被称为伽马函数. 除了负整数与 0 以外, 对于所有的 s, 伽马函数都是定义明确且有限的.

Q：为什么对于所有非正整数无意义？

A：当 $s=0$ 时，考察

$$\int_0^1 e^{-x} x^{-1} \, dx$$

$$\leq 1 \cdot \int_0^1 x^{-1} dx$$

$$= \ln x \Big|_0^1$$

$$= -\infty$$

$\Gamma(0)$ 无下界，进而所有非正整数均无意义．（显然，$1 \sim +\infty$ 的积分有界）．

15.3 阶乘函数与 $\Gamma(s)$

$\Gamma(s)$ 与阶乘函数： 如果 n 是一个非负整数，那么 $\Gamma(n+1) = n!$. 因此，伽马函数是阶乘函数的推广.

通过归纳假设可证．

给了我们一个思路：计算阶乘 2024! 的第二种方法．

$$2024! = \Gamma(2025) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{2024} dx$$

15.4 $\Gamma(s)$ 的特殊值.

考察半整数 $s=\frac{1}{2}$

作用：正态分布中我们计算系数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 时.

标准

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

令 $\frac{x^2}{2}=u$.

$$C=2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,d\sqrt{2u}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot u^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

$$=\sqrt{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

因此.我们需要计算 $\Gamma(\frac{1}{2})$

余割等式：如果 s 不是整数, 那么

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi\csc(\pi s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

利用余割等式，我们有

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

因此 $C = \sqrt{2\pi}$

15.5 贝塔函数与伽马函数.

贝塔函数的基本关系式: 当 $a, b > 0$ 时, 我们有

$$B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

贝塔分布: 设 $a, b > 0$. 如果随机变量 X 服从参数为 a 和 b 的**贝塔分布**, 那么它的概率密度函数就是

$$f_{a,b} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t & \text{若 } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

我们记作 $X \sim B(a, b)$.

15.1.1 基本关系式的证明.

$\Gamma(a+b) \cdot \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \Gamma(a)\Gamma(b)$

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}y^{b-1}dy$$

$$=\int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty}e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}dx\,dy$$

令 $x=uy$

原式 $=\int_{u=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty}e^{-(u+1)y}u^{a-1}y^{a+b-2}y\cdot dy\,du$

令 $t=(1+u)y$

原式 $=\int_{u=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}\cdot u^{a-1}\cdot\left(\frac{t}{1+u}\right)^{a+b-1}d\left(\frac{t}{1+u}\right)du$

$$=\int_{u=0}^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{1}{1+u}\right)^{b-1}\left(\int_{t=0}^{+\infty}t^{a+b-1}e^{-t}dt\right)du$$

$$=\Gamma(a+b)\int_{u=0}^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{1}{1+u}\right)^{b+1}du$$

令 $r=\frac{u}{1+u}$

原式 $=\Gamma(a+b)\int_{r=0}^{1}r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr$

$$=\Gamma(a+b)B(a,b)$$

得证.

15.5.2 基本关系式和

求 $\Gamma(\frac{1}{2})$.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})\,B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = 1\times\int_0^1 r^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-r)^{-\frac{1}{2}}\,dr$$

令 $u = r^{\frac{1}{2}}$.

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 u^{-1}\cdot(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2u\,du$$

$$= 2\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

令 $u = \sin\theta$.

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta.$$

$$= \pi.$$

$$\Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

15.6 正态分布与伽马函数.

正态分布三大重要的积分：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

第四大重要的积分：

$$\mu_{2m}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\underline{(2m-1)!!}$$

证明：

记 $t=\frac{x^2}{2}$

$$\mu_{2m}=2\int_{0}^{+\infty}(2t)^m\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t}d\sqrt{2t}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}(2t)^m\cdot e^{-t}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$=\frac{2^m}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{m-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=\frac{2^m}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(m+\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \mu_{2m} = (2m-1)!!$$

15.7 分布族

伽马分布与韦布尔分布：如果随机变量 X 的概率密度函数是

$$f_{k,\sigma}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k)\sigma^k} x^{k-1} \mathrm{e}^{-x/\sigma} & \text{若 } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

那么 X 就服从 (正) 参数为 k 和 σ 的**伽马分布**. 我们把 k 称为**形状**参数, σ 称为**尺度**参数, 并记作 $X \sim \Gamma(k,\sigma)$ 或 $X \sim \mathrm{Gamma}(k,\sigma)$.

如果随机变量 X 的概率密度函数是

$$f_{k,\sigma}(x) = \begin{cases} (k/\sigma)(x/\sigma)^{k-1} \mathrm{e}^{-(x/\sigma)^k} & \text{若 } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

那么 X 就服从 (正) 参数为 k 和 σ 的**韦布尔分布**. 我们把 k 称为**形状**参数, σ 称为**尺度**参数, 并记作 $X \sim W(k,\sigma)$.

这是两个本质不同的分布，都含有多项式因子和 [0,1] 间的指数因子。我们可以通过调整参数得到一些不同却相关的分布 $\Rightarrow$ 分布族.

15.8 余割公式的证明

$$\Gamma(r)\Gamma(1-r) = \pi \csc(\pi r)$$

太难了，懒得抄