第十一讲. 工具：微分恒等式.

11.1 几何级数的例子.

计算：$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$

考察一个更一般的形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

当 $|x|<1$ 时. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

x 的所有取值构成了一个连续区间

由此可以对等式两端进行微分.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

得到答案.

容易计算的是：$\sum_{n=1} \frac{1}{2^{n-1}}$、$\sum_{n=1} \frac{1}{2^n}$

考虑 $\frac{d}{dn}\sum_{n=1}(\frac{1}{2})^n$

$$= \frac{d}{dn}\frac{\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d}{dn}(1-\frac{1}{2^n})$$

$$= -n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1} n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$$

前提是微分和求和的次序可换

即"和的微分等于微分的和".

11.2 微分恒等式法

微分恒等式法：设 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\omega$ 是一些参数. 设

$$\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} f(n;\alpha,\beta,\cdots,\omega) = g(\alpha,\beta,\cdots,\omega),$$

其中 f 和 g 是关于 α 的可微函数. 如果 f 退化到足以保证求和与求微分的次序可以交换, 那么

$$\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \frac{\partial f(n;\alpha,\beta,\cdots,\omega)}{\partial\alpha} = \frac{\partial g(\alpha,\beta,\cdots,\omega)}{\partial\alpha}.$$

11.3 在二项分布随机变量上的运用

$$\mathrm{Prob}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k \in [0,k] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

推导二项分布的均值、方差：

为避免"0 = 0"，先考察一般化的

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

其中 p 是我们进行微分的自由变量.

$$p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \right) = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = np \cdot (p+q)^{n-1} \quad ①$$

代换 $q = 1-p$，有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k \cdot (1-p)^{n-k} = np$$

$\Rightarrow \quad E(X) = np .$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

往求 $E(X^2)$

① 式两边作用 $p\frac{\partial}{\partial p}$，有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} = np\left[(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2}\right]$$

代入 $p+q=1$，有

$$E(X^2) = np + np^2 \cdot (n-1)$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$= np \cdot (1-p) .$$

11.4 在正态分布随机变量上的应用.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

表示 X 是一个服从均值为 μ, 方差为 σ^2 的正态分布变量

标准正态分布:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

我们考察其均值, 方差和矩.

K阶矩 $M(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$

① 标准方法:

奇数阶矩为 0

二阶矩 $M(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot x \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-x)\, d \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \left[-\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= 0 + M(0)$$

$$= 1.$$

更一般地，由归纳得到

$$M(2k) = (2k-1)!!$$

此处双阶乘表示连续奇数积.

证：

$$M(2k+2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= 0 + (2k+1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= (2k+1) M(2k)$$

$$= (2k+1)!!$$

（数学归纳法）.

② 微分恒等式法.

同样注意到 $M(2k)=(2k-1)!!$

$$M(2k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

上式没有自由参数.

抽象化：考察具有自由参数的一系列pdf.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx.$$

（均值为0，方差为 σ^2）

$$\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

等式两边作用 $\sigma^3\frac{d}{d\sigma}$，有

$$\sigma^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx. \quad ②$$

不妨记 $I(k;\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

则有 $I(2;\sigma)=\sigma^3$

并且 $I(k;1)=M(k)$

② 等式左右两边再次作用 $\sigma^3\frac{d}{d\sigma}$，有

$$\sigma^3\cdot 3\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$3\sigma^5=I(4;\sigma)$$

再次作用，可以得到

$$\sigma^3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\sigma^4=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdots dx$$

$$\sigma^7\cdot 1\cdot 3\cdot 5=I(6;\sigma)$$

同样归纳得到归律：

$$(2k-1)!!\cdot\sigma^{2k+1}=I(2k,\sigma)$$

在此式上两边再次作用 $\sigma^3\frac{d}{d\sigma}$.

得到 $(2k+1)!!\,\sigma^{2k+3}=I(2k+2,\sigma)$

由数学归纳法得证.

当 $6=1$ 时. $M(2k) = (2k-1)!!$

11.5 在指数分布随机变量上的应用.

pdf 与若干参数有关. 至少一个参数可微，那么 k 阶矩可写作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\,dx$$

从 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\,dx$ 入手

使用微分运算符，得到 k 阶矩.

现考察满足指数分布的变量 x. 有

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \geq 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$1 = \int_0^{+\infty} \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

等式两边作用 $\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}$

$$\lambda^2 = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \quad ③$$

$$\lambda = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$\Rightarrow$ 均值 $E(x) = \lambda$

$$Var(X) = E(x^2) - E^2(x)$$

往求 $E(x^2)$：

③ 等式两边作用 $\lambda^2 \cdot \frac{d}{d\lambda}$ 有

$$2\lambda^3 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$2\lambda^2 = E(x^2)$$

故 $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$= 2x^2 - x^2$$

$$= x^2$$

令 $\lambda = 1$ 即可得到标准指数分布的相关结果.