第五章 容斥原理

5.1 阶乘和二项式问题

5.1.1 "有多少个"与"概率是什么"

5.1.2 选组

5.1.3 循环次序问题

例. 5个人坐在一个圆桌上吃饭. 请问有多少种排序方法?

分析: 与5个人坐在"一条"桌子上不同. 圆桌中无"第一个"与"最后个"的说法. 旋转桌椅时. 相对次序不会变化

思路是固定1个人的位置, 创建1个由其余四人位置构成的列表. 方法共有 $4! = 24$ 种

拓展地. n个人围在圆桌上. 共有 $(n-1)!$ 种方法

5.1.4 选择套装

⇒ 引出了解决"至少1个"型问题的2种思路.
- 容斥方法 ※
- 对立事件.

5.2 容斥方法.

计算事件的并常常比计算事件的交要难.

一个简单的例子是

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

5.2.2 公式

一般地,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_{ij}| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_{ijk}| + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_{12\cdots n}|$$

其中 A_{ij} 表示 $A_i \cap A_j$

特殊地. 等可能集合的容斥原理.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \binom{n}{1} A_1 - \binom{n}{2} A_{12} + \cdots +$$

$$(-1)^{n-2} \binom{n}{n-1} A_{12\cdots n-1} + \binom{n}{n} A_{12\cdots n} (-1)^{n-1}$$

5.2.3 证明(2):

考虑某个元素 x 同时属于 $A_1, A_2, \cdots A_n$.

对于上式，我们有

$$1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}$$

由二项式定理，$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} x^i y^{k-i} \cdot \binom{k}{i}$

知 $0 = -1 \cdot \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}$

同乘 -1，有 $0 = (1-1)^n = 0$

成立.

5.2.4 例子，同花.

5.2.5 从"至少"到"恰好".

Pr(恰好有 k 个发生) = Pr(至少有 k 个) − Pr(至少有 k+1 个)

是"累积分布方法"的基础.

例. 四个人抽扑克(52张), 问恰有2人抽到全同花的概率是多少?

解: $Pr(\text{恰有1人}) = Pr(\text{至少1人}) - Pr(\text{至少2人})$

$$Pr(\text{至少1人}) = \binom{4}{1}\frac{\binom{4}{1}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{4}{2}\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13}\cdot 2!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}} + \binom{4}{3}\frac{\binom{4}{1}\binom{13}{13}\binom{4}{3}3!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}} - \binom{4}{4}\cdot\frac{\binom{4}{4}\cdot 4!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}}$$

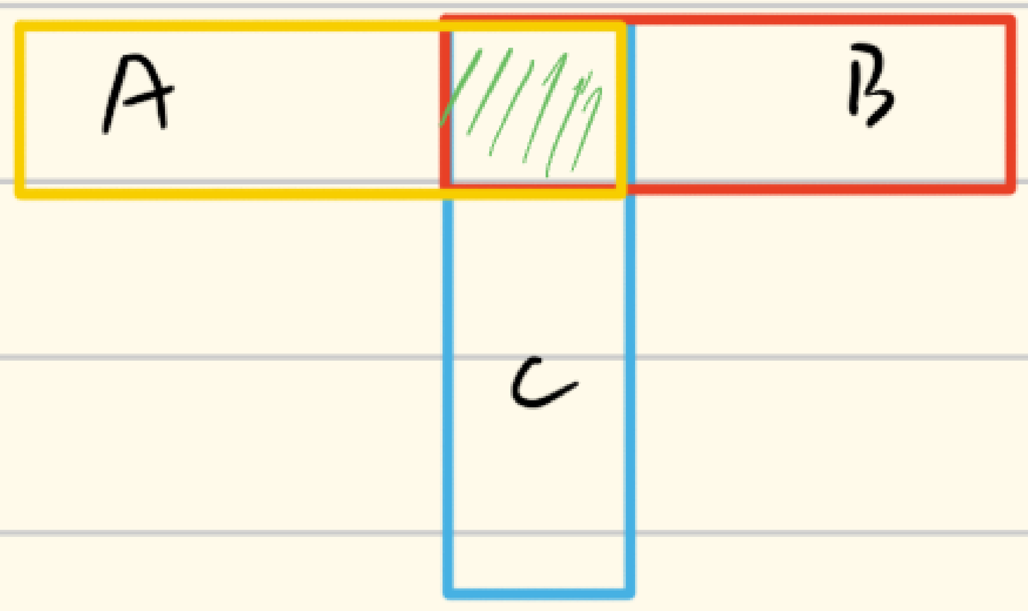
$$= \cdots$$

2人同花的情况: $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$.

$$Pr(\text{至少2人}) = 6\cdot Pr(A_{12}) - \binom{6}{2}Pr(A_{12}\cap A_{13}) + \binom{6}{3}Pr(A_{12}\cap A_{13}\cap A_{14}) - \cdots - \binom{6}{6}Pr(A_{12}\cap A_{13}\cdots\cap A_{34})$$

$$= 6\times\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{13}{26}\cdot 2!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}} - 15\times\frac{4!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}} + \cdots - \frac{4!}{\binom{52}{13}\cdots\binom{13}{13}}$$

$$= \cdots$$



从集合论的角度稍好理解

如图，任意2个集合的交，与三个集合的交都是完全相等的一部分。

计算三集合的并需要：

$A+B+C-\binom{3}{2}\cdot$"合"$+\binom{3}{3}\cdot$"合"

言归正传. Pr(恰好2人) $= Pr$(至少1人)

$- Pr$(至少2人)

$= \ldots$

5.3 错排.

计算：至少有1个元素正确匹配

记 A_i 为元素 i 被正确匹配.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{1\le i<j<n} A_{ij} + \cdots + \sum_{\cdots} A_{i_1\cdots i_n}$$

注意到：$A_i = (n-1)!$

$$A_{ij} = (n-2)!$$

有原式 $= \binom{n}{1}\cdot(n-1)! - \binom{n}{2}\cdot(n-2)! + \cdots$

$$+ \binom{n}{n}\cdot(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2!} + \cdots + 1\cdot(-1)^{n-1}$$

$$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot(-1)^{n+1}$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

则全部错排的情况：

$$D_n = n! - n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

$$= n!\cdot\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

e^x 的泰勒展开式：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

知 当 n 足够大时，$D_n = n!\cdot\frac{1}{e}$.

$$P_r = \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

5.3.4 错排的应用.

图论与计算机通信