第十讲. 卷积和变量替换

10.1 卷积的定义和性质

↳ 讨论随机变量的和

定义 10.1.1 设 X 和 Y 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度函数分别是 f_X 和 f_Y. X 和 Y 的卷积记作 $f_X * f_Y$, 其表达式为

$$(f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\mathrm{d}t.$$

如果 X 和 Y 都是离散型随机变量, 那么

$$(f_X * f_Y)(z) = \sum_n f_X(x_n) f_Y(z - x_n).$$

当然, 要注意, 除非 $z - x_n$ 等于 Y 有正概率时的取值 (即 $z - x_n$ 取某个具体的 y_m), 否则 $f_Y(z - x_n) = 0$.

定理 10.1.2 设 X 和 Y 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个相互独立的连续型或离散型随机变量, 它们的概率密度函数分别是 f_X 和 f_Y. 如果 $Z = X + Y$, 那么

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z).$$

另外, 卷积是可交换的: $f_X * f_Y = f_Y * f_X$.

证明: 设 $Z = X + Y$

$$\Rightarrow Y = Z - X$$

$$F_Z(m) = \Pr(Z \leq m)$$

$$= \Pr(Y \leq m - x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot F_Y(m-t)\,dt.$$

均值算法.

$$\Rightarrow f_Z(m) = \frac{d}{dm} F_Z(m)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot \frac{d}{dm} F_Y(m-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(m-t)\, dt$$

$$= (f_X * f_Y)(m)$$

尽管卷积常常难以得到漂亮简洁的算式.

但还是可以用来探究随机变量和的性质.

10.2 卷积：掷骰子的例子.

10.3 多变量的卷积.

丢两个骰子，求点数和的pdf.

$$f_{X_1+X_2}(z) = \begin{cases} \frac{z-1}{36} & z \in \{2,3,\cdots,7\} \\ \frac{13-z}{36} & z \in \{8,9,\cdots,12\} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

丢三个骰子，求？

$$f_{X_1+X_2+X_3}(z) = (f_{X_1} * f_{X_2}) * f_{X_3}(z)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sum_{z=2}^{7}(f_{x_1} * f_{x_2})(z) + \sum_{z=8}^{12}(f_{x_1} * f_{x_2})(z)\right]$$

$$= \cdots$$

丢四个骰子，求？

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

$$f_Z(z) = (f_{X_1} * f_{X_2}) * (f_{X_2} * f_{X_3})(z).$$

$(f_{X_1} * f_{X_2})(z)$ 与 $(f_{X_3} * f_{X_4})(z)$ 对称.

$$\Rightarrow f_Z(z) = \sum_{t=2}^{12} f_{X_{1,2}}(t)\, f_{X_{3,4}}(z-t)$$

如 $f_Z(6) = \sum_{t=2}^{12} \cdots$

$$= \sum_{t=2}^{4} f_{X_{1,2}}(t)\, f_{X_{3,4}}(6-t)$$

$$= \frac{1}{36} \times \frac{5}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{4}{36} + \cdots$$

$$= \frac{5}{648}$$

类似地, 我们还能求出其余 20 个函数值. 这比把 $6^4 = 1296$ 种可能的结果全都写出来要好得多. 图 10-3 显示了其结果.

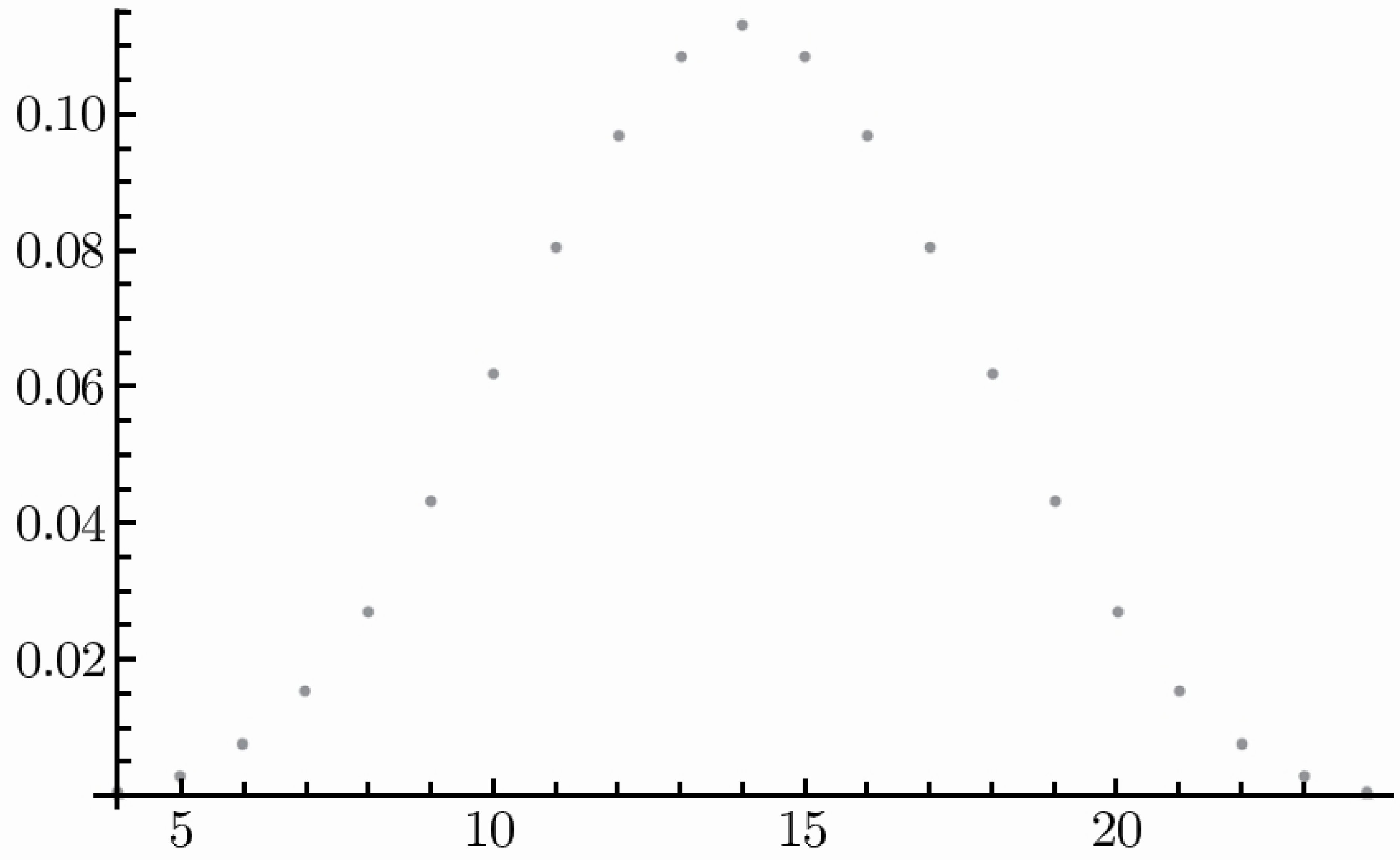

图 10-3　独立地抛掷四颗均匀的骰子, 得到的数字和的概率密度函数

"中心极限定理".

10.4 变量替换公式

我们已知 X 的 pdf. 同时存在一个性质足够好的函数 g. 使 $Y=g(X)$, 可以通过 $f_X(x)$ 与 g 得到 Y 的 pdf.

定理 10.4.1 (变量替换公式)　设 X 是一个概率密度函数为 f_X 的连续型随机变量, 并设存在一个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 使得当 $x \notin I$ 时, $f_X(x) = 0$ (换句话说, X 只有在 I 中取值时, 其概率密度函数才可能不为 0, 其中 I 可以是整个实直线). 设 $g : I \to \mathbb{R}$ 是一个可微函数, 其反函数是 h. 除了在有限多个点处的导数值可能为 0 外, g 的导数在 I 中始终为正或者始终为负. 如果令 $Y = g(X)$, 那么

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|.$$

要求：① 在R中的某子集I上有足够好的性质即可，不要求R.

② I上处处可微.

③ I上严格单调.

验证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(h(y))\cdot|h'(y)|dy$$

1° $h'(y)>0$.

$$原式 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(h(y))\,d(h(y))$$

$$= [F_X(u)]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= 1-0$$

$$= 1.$$

2° $h'(y)<0$

同理.

例. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$.

考察 $Y = g(x)$, 令 $g(x) = X^2$:

① $g'(x) = 2x$, 在 I 内 >0. ↑

② I 内处处可微.

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$\sqrt{y} \in [0, 2]$, 有

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad (y \in I).$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 \le y \le 4 \\ 0 & 其它 \end{cases}.$$

10.5 变量替换公式的证明

$Y = g(X)$, $X = h(Y)$

1° $g'(x) > 0$ 时:

$y \in [g(a), g(b)]$

$$F_Y(y) = Prob(Y \le y)$$
$$= Prob(g(a) \le Y \le y)$$
$$= Prob(a \le X \le h(y))$$
$$= F_X(h(y)) - F_X(a)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$
$$= f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

2° $g'(x) < 0$ 时:

$y \in [g(b), g(a)]$

$$F_Y(y) = \text{Prob}(Y \le y)$$
$$= \text{Prob}(g(b) \le Y \le y)$$
$$= \text{Prob}(h(y) \le X \le b)$$
$$= F_X(b) - F_X(h(y))$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$= -f_X(h(y)) \cdot h'(y)$$

由于 $g'(x) < 0$, $h'(y) < 0$.

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|.$$

这个变量替代方法称作
"累积分布函数法".

也可以选择现推公式，以上为例. (p6)

$$F_Y(y) = \text{Prob}(Y \le y)$$

$$= \text{Prob}(X^2 \le y)$$

$$= \text{Prob}(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y})$$

$$= \text{Prob}(0 \le x \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

累积分布函数法 (替代形式)：设 X 是一个概率密度函数为 f_X 的随机变量，并设 $Y = g(X)$，其中 g 是可微函数. 为了方便起见，不妨设 $g'(x) \geqslant 0$. 为了求出 f_Y，需要如下操作.

(1) 用 X 和 g 来表示 Y 的 CDF：$F_Y(y) = \text{Prob}(Y \leqslant y) = \text{Prob}(g(X) \leqslant y)$.

(2) 通过逆运算，把涉及 $g(X)$ 的不等式替换成与 X 有关的不等式. 例如，可能有一个隐含条件 $g(X) \geqslant 0$，由此可得 $F_Y(y) = \text{Prob}(g^{-1}(0) \leqslant X \leqslant g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) - F_X(g^{-1}(0))$.

(3) 利用链式法则求导：$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)$.

10.6 附录：随机变量的乘积与商.

设 X 和 Y 是相互独立的非负随机变量，它们的概率密度函数分别是 f_X 和 f_Y，累积分布函数分别是 F_X 和 F_Y. 设 $Z = XY$，那么

$$f_Z(z) = \int_{t=0}^{\infty} f_X(t) f_Y(z/t) \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

↳ 乘积.

证明：

$$F_Z(z) = \text{Prob}(Z \leq z)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{z}{x}} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \int_{y=0}^{\frac{z}{x}} f_Y(y)\, dy\, dx.$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot [F_Y(\tfrac{z}{x}) - F_Y(0)]\, dx$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot \frac{d}{dz} \cdot F_Y(\tfrac{z}{x})\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(\tfrac{z}{x}) \cdot \frac{dx}{x}$$

设 X 和 Y 是相互独立的非负随机变量, 它们的概率密度函数分别是 f_X 和 f_Y, 累积分布函数分别是 F_X 和 F_Y. 设 $Z = X/Y$, 那么

$$f_Z(z) = z^{-2}\int_{t=0}^{\infty} f_X(x) f_Y(x/z) x \mathrm{d}x.$$

$\longrightarrow$ 商.

$$F_Z(z) = \mathrm{Prob}(Z \le z)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=\frac{x}{z}}^{\infty} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

关于积分上下限的说明:

要求覆盖 X、Y 的全情况, 令 $x \in \mathbb{R}$,

$Z = \frac{X}{Y} \le z \Rightarrow Y \geq \frac{X}{z}$

因此 $Y \in [\frac{X}{z}, +\infty)$.

$$\text{原式} = \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \int_{y=\frac{x}{z}}^{\infty} f_Y(y)\, dy\, dx.$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot \left[F_X(\infty) - F_X\left(\frac{x}{z}\right)\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot \left[1 - F_X\left(\frac{x}{z}\right)\right] dx$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \frac{d}{dz} [1 - F_X(\tfrac{x}{z})] \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot [- f_X(\tfrac{x}{z})] \cdot \frac{x}{-z^2} \, dx$$

$$= z^{-2} \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) \, f_X(\tfrac{x}{z}) \, x \, dx.$$