第七章. 离散型随机变量.

7.1 定义:

离散型随机变量: 离散型随机变量 X 就是定义在一个离散的结果空间 Ω (这意味着 Ω 是有限的或至多可数的) 上的实值函数. 具体地说, 我们为每个元素 $\omega \in \Omega$ 指定了一个实数 $X(\omega)$.

如: 投掷一个骰子两次, 求点数和?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \cdots (6,5), (6,6)\}$$

$$R((1,1)) = 2$$

$$R((3,5)) = 8.$$

7.2 概率密度函数 (probability density function)

离散型随机变量的概率密度函数: 设 X 是一个随机变量, 它定义在离散的结果空间 Ω 上 (Ω 是有限的或至多可数的). 那么 X 的**概率密度函数** (常记作 f_X) 就是 X 取某个特定值的概率:

$$f_X(x) = \text{Prob}(\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x).$$

注意, 有些教材用**概率质量函数**的说法, 而非概率密度函数. **概率密度函数的值总是大于或等于 0, 并且和始终为 1.**

一个事件只有真/假2个情况, 连续实验n次. 成功k次的概率为? (单次为p)

$$Pr = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

称为"二项分布".

另一个例子：两次投骰子，点数和的概率密度函数？

$$f_X(r) = \begin{cases} \dfrac{6-|r-7|}{36} & r \in \{2,3,\cdots,12\} \\ 0 & r \in \text{其它} \end{cases}$$

7.3 累积分布函数.

(cumulative distribution function)

离散型随机变量的累积分布函数：设 X 是一个随机变量, 它定义在一个有限的或至多可数的离散结果空间 Ω 上. 回忆一下, X 的**概率密度函数** (常记作 f_X) 就是 X 取某个特定值的概率. **累积分布函数** (常记作 F_X) 则表示 X 不超过某个特定值的概率. 它们分别记作

$$f_X(x) = \text{Prob}(\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x)$$
$$F_X(x) = \text{Prob}(\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leqslant x).$$

※ CDF 在连续型随机变量中更有用.

类比积分，F 一般表示成 f 的原函数。是许多 f 的值叠加得到。可以认为是曲线下面积。

累积分布函数的极限：设 F_X 是离散型随机变量 X 的累积分布函数. 那么

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1,$$

如果 $y > x$, 那么 $F_X(y) \geqslant F_X(x)$.

回顾一下几何级数公式

① $$\sum_{n=k}^{j} ar^n = \frac{a\cdot r^k - a\cdot r^{j+1}}{1-r}.$$

② $$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r} \qquad (|r|<1)$$

例. 结果空间 Ω 由全体整数构成.

$Pr(0) = 0$. $n \neq 0$ 时. $Pr(n) = \frac{1}{2^{|n|+1}}$

试计算 $F_X(m)$

$m = 0$ 时. $F_X(0) = \sum_{-\infty}^{0} \frac{1}{2^{|n|+1}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 1/2.$$

m 为负数时，$F_X(m) = \sum_{-\infty}^{m} \frac{1}{2^{|m|+1}}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=|m|}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{m}}$$

m 为正数时，$F_X(m) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2^m})}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{m+1}}.$$

$$F_X(m) = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & m < 0 \\ \frac{1}{2} & m = 0 \\ 1 - \frac{1}{2^{m+1}} & m > 0 \end{cases}$$