第十八讲、斯特林公式

斯特林公式：当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n};$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

更准确地说，有下列级数展开式：

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \cdots\right).$$

验证：

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot e \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot e \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$n \to \infty$ 时，原式 $= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot e \cdot 1$

$$= \frac{1}{n+1}$$

18.1 斯特林公式与概率

例. 抛掷一枚硬币 2N 次，恰出现 N 次正面，N 次反面的概率是：

$$Pr(\text{恰出现}N\text{次正面}) = \binom{2N}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$= \frac{(2N)!}{N!N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

$$\doteq \frac{(2N)^{2N} \cdot e^{-2N} \sqrt{2\pi \cdot 2N}}{(N^N \cdot e^{-N})^2 \cdot 2\pi N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

$$= 2^{2N} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \cdot 2^{-2N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi N}}$$

若 $N = 100$，则概率将略小于 6%

例. 年初总统大选，共 1,2002 张选票，问希拉里和奥巴马平票的概率（假设民调时二人均势）

$$Pr(\text{平票}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} = \frac{1}{\sqrt{6001\pi}} \doteq 0.007283$$

18.2 斯特林公式与级数的收敛性

（看不懂）

18.3 从斯特林公式到中心极限定理

考察伯努利分布

$$Prob(X_i = n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = -1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

记 $S_{2N} = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{2N}$

其均值 $\mu = 2N \cdot 0 = 0$

方差 $\sigma^2 = 2N \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = 2N$

标准差 $\sigma = \sqrt{2N}$

首先注意到，$S_{2N}=2k+1$（奇数）的概率为0.

再看 $S_{2N}=2k$：

$$\Pr(S_{2N}=2k)=\binom{2N}{N+k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+k}$$

$$=\binom{2N}{N+k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

$$=\frac{(2N)!}{(N-k)!\,(N+k)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

当 $N\to\infty$ 时，有原式 =

$$\frac{(2N)^{2N}\cdot e^{-2N}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2N}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}}{(N-k)^{N-k}e^{-N+k}\cdot\sqrt{2\pi(N-k)}\cdot(N+k)^{N+k}e^{-N-k}\cdot\sqrt{2\pi(N+k)}}$$

$$=\frac{2^{2N}}{\sqrt{\pi N}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}+k}\cdot\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}-k}}$$

引理 18.3.1 对于任意的 $\epsilon\leqslant 1/9$，当 $|k|\leqslant(2N)^{1/2+\epsilon}$ 时，如果 $N\to\infty$，那么有

$$\left(1+\frac{k}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}+k}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}-k}\longrightarrow \mathrm{e}^{k^2/N}\mathrm{e}^{O(N^{-1/6})}.$$

由切比雪夫不等式

$$\text{Prob}\left(|S_{2N}-0| \geq (2N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{(2N)^{2\varepsilon}}$$

由引理 18.3.1. 考察 $|k| \leq (2N)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}}$ 的 k.

$$\text{有 原式} \doteq \frac{2^{2N}}{\sqrt{\pi N}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{k^2}{N}} e^{O(N^{-1/6})}}$$

$$\doteq \frac{2^{2N}}{\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{k^2}{N}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \cdot e^{-\frac{k^2}{N}} = \Pr(S_{2N}=2k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pr(S_{2N}=2k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi \cdot 2N}} \cdot e^{-\frac{(2k)^2}{2\cdot 2N}}$$

上式表明 S_{2N} 服从均值为 0,

方差为 $2N$ 的正态分布.

系数 2 的出现是因为只有偶数次结果有可能出现，样本空间缩小 $\frac{1}{2}$.

18.4 积分判别法到较弱的斯特林公式.

较弱的斯特林公式：设 $n \geqslant 3$ 是正整数. 那么

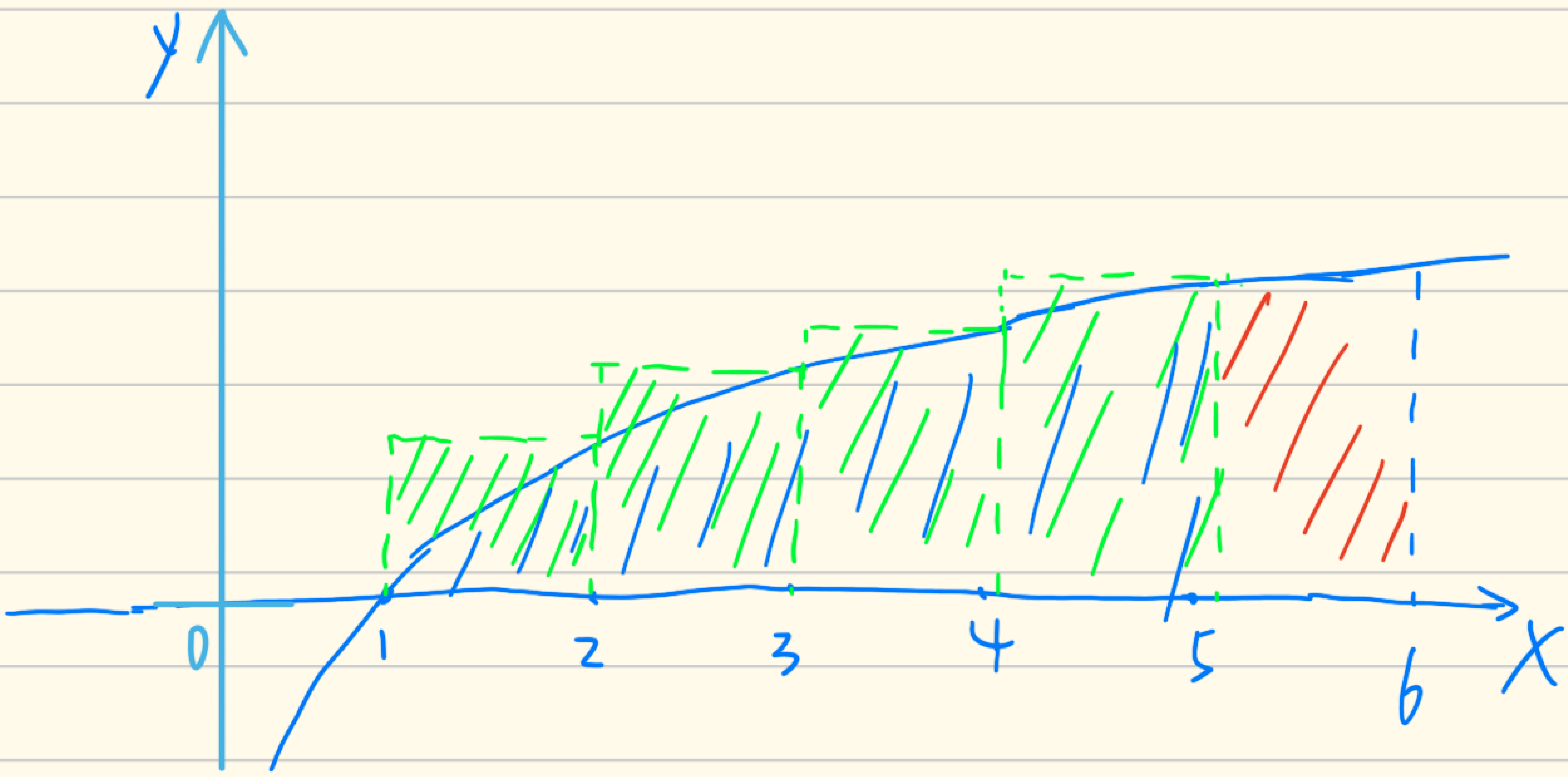
$$n^n e^{-n} \cdot e \leqslant n! \leqslant n^n e^{-n} \cdot en.$$

如何得到这个公式:

先取对数 $\ln(n!)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

由 $\int_1^n \ln x \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_2^{n+1} \ln x \, dx$



$$\int_1^n \ln(x)\,dx = x\ln x - x \Big|_1^n \quad ①$$

$$= n\ln(n) - n + 1$$

$$\int_2^{n+1} \ln(x)\,dx = x\ln x - x \Big|_2^{n+1} \quad ②$$

$$=(n+1)\ln(n+1) - 2\ln 2 + 2$$

（分部积分法）

① 式经指数运算，有

$$e^{n\ln(n) - n + 1} \leq n!$$

即 $\quad n \cdot e^{-n} \cdot e \leq n!$

②：

原式 $= (n+1)\cdot \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] - 2\ln 2 - n + 1$

$$= (n+1)\ln(n) + (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2\ln 2 - n + 1$$

$$= (n+1)\ln(n) + (n+1)\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right) - 2\ln 2 - n + 1$$

$$\le (n+1)\ln(n) + (n+1)\cdot\frac{1}{n} - 2\ln 2 - n + 1$$

$$= (n+1)\ln(n) + \frac{1}{n} - n - 2\ln 2 + 2$$

如果 $n \geq 3$，有 $\frac{1}{n} - 2\ln 2 + 2 < 1$

即 $n! \le n^n e^{-n}\cdot en$.

得到 $n\cdot e^{-n}\cdot e \le n! \le n^n e^{-n}\cdot en$

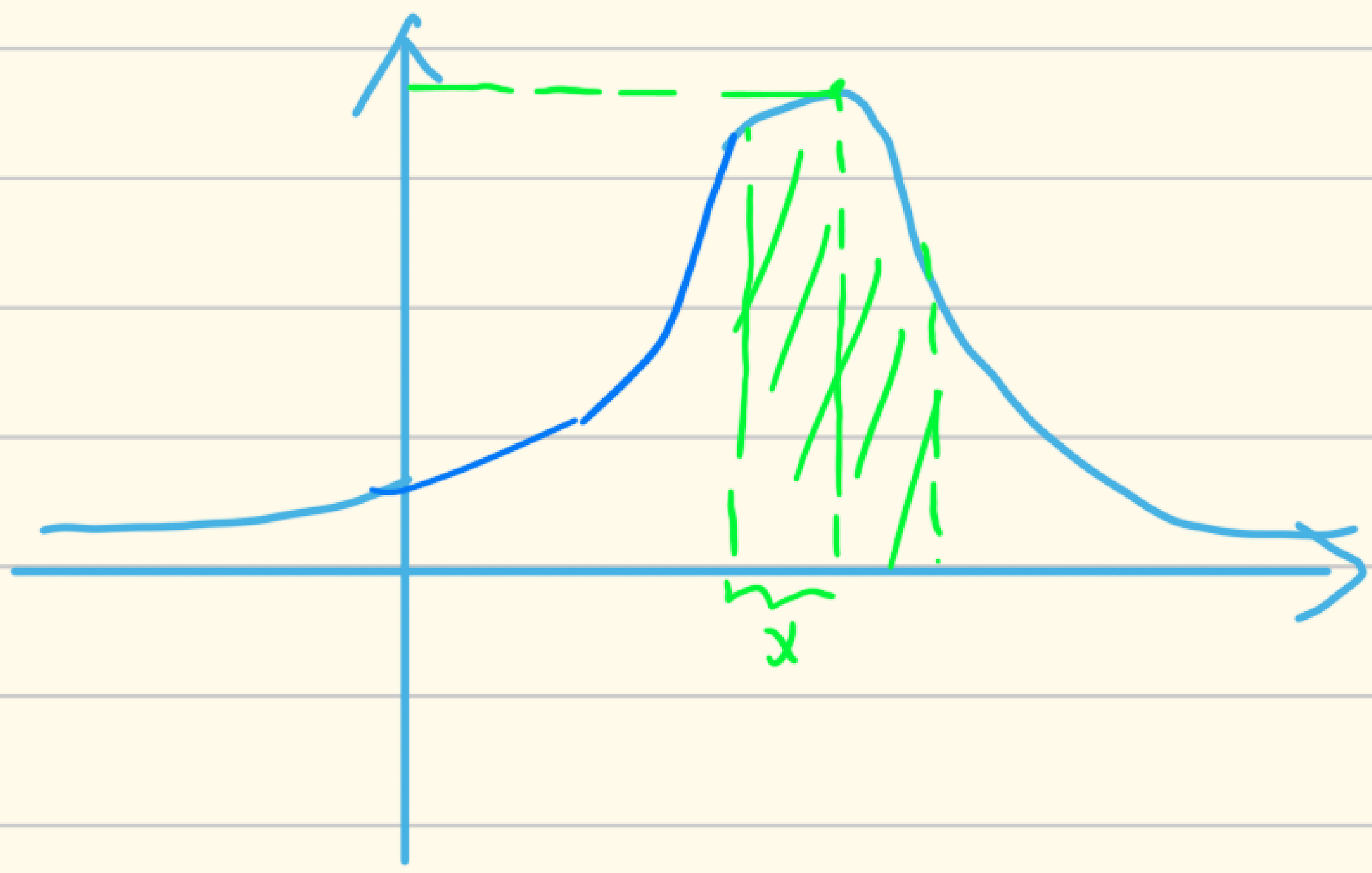
18.5 得到斯特林公式的基本方法

（懒得抄）

18.6 静态相位与斯特林公式.

静态相位法概述:

复杂积分的贡献主要来自被积函数极值点附近



现在看伽马函数 $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

$$= n!$$

$x^n e^{-x}$ 最大化 $\Leftrightarrow$ $\ln(x^n e^{-x})$ 最大化

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(n\ln x - x) = 0$$

$$x_0 = n.$$

假设对积分占主导地位的点 $x=n+\alpha$

$|\alpha| \ll n$

因此 $\ln x = \ln(n+\alpha)$

$= \ln[n\cdot(1+\frac{\alpha}{n})]$

$= \ln n + \ln(1+\frac{\alpha}{n})$

$\Rightarrow \ln x = \ln n + \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{n^2} + \cdots$

$\Rightarrow \ln(x^n e^{-x}) = n\ln x - x$

$\doteq n(\ln n + \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2}) - (n+\alpha)$

$= n\ln n - \frac{\alpha^2}{2n} - n$

$\Rightarrow x^n e^{-x} = \mathrm{Exp}(n\ln n - \frac{\alpha^2}{2n} - n)$

$= n^n\cdot e^{-n}\cdot \mathrm{Exp}(-\frac{\alpha^2}{2n})$

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

$$\doteq \int_{-n}^{+\infty} n^n \cdot e^{-n} \cdot Exp\left(-\frac{\alpha^2}{2n}\right) d\alpha$$

静态相位法.

$$\doteq n^n \cdot e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} Exp\left(-\frac{\alpha^2}{2n}\right) d\alpha$$

$$= n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

18.7 中心极限定理与斯特林公式

用泊松分布的中心极限定理证明斯特林公式.

$X \sim Pois(\lambda)$

有 $Prob(X=n) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!} & n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

变量 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

当 n 足够大时. Y 会服从均值为 n. 方差为 n 的正态分布.

$$\text{Prob}(n-\tfrac{1}{2} \le Y \le n+\tfrac{1}{2})$$

$$= \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \text{Exp}\left(-\frac{(x-n)^2}{2n}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2n}} \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot 1$$

等式左边的式子可以近似为泊松分布中 $Y=n$ 的概率.

即 $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

$$\Longleftrightarrow \quad n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (n \to \infty)$$