第二章 基本概率公式

2.1 罗素悖论

定义一个集合 $R = \{x \mid x \notin x\}$

情况一：R在R中，依据定义，R由所有不属于R的元素构成，故 $R \notin R$，这与假设前提 $R \in R$ 矛盾。

情况二：R不在R中，而依据定义，有一切不属于X的元素应在R中，则 $R \in R$，与前提 $R \notin R$ 矛盾。

由此可见，松散定义和非正式论述非常危险。

2.2 集合论综述

2.2.1 编程漫谈

2.2.2 无穷大的大小和概率

大小：$\text{有限集} < \underbrace{\text{可数集} < \text{不可数集}}_{\text{无限集}}$

可数集：元素可与自然数集一一对应（单射）

不…集：不能与…应，举例：实数集。

不可数个事件的并，不可计算其概率！

2.2.3 开集和闭集

开集. $U \subseteq \mathbb{R}^n$, 对于每一个点 $x \in U$, 存在 $r > 0$, 球体

$$B(x, r) = \{x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$$

对于 $a = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \mathbb{R}^n$ 成立.

闭集则将"<"改为"≤".

2.3 结果空间, 事件和概率公理

结果空间 / 样本空间 = Ω.

概率函数 = $Pr(x)$

事件: Ω 中的元素.

2.4 概率公理

(柯尔莫戈洛夫的) 概率公理: Ω 是一个结果空间, $\sum$ 是一个 σ 代数. 如果概率函数满足下列条件, 那么 $(\Omega, \sum, \mathrm{Prob})$ 就是一个概率空间.

- 如果 $A \in \sum$, 那么 $\Pr(A)$ 是有定义的, 并且 $0 \leqslant \Pr(A) \leqslant 1$.
- $\Pr(\varnothing) = 0$ 且 $\Pr(\Omega) = 1$.
- 设 $\{A_i\}$ 是由①有限个或可数个②两两互不相交的集合构成的集族, 并且每一个集合都是 $\sum$ 中的元素. 那么 $\Pr(\cup_i A_i) = \sum_i \Pr(A_i)$.

利用对称法求解概率.

Q1: 抛置硬币5次, 求奇数次正面朝上的概率

Q2: 〃偶数次, 结果如何?

A1,2: 1/2.

2.5 基本概率规则.

概率空间的有用规则: 设 $(\Omega, \Sigma, \mathrm{Prob})$ 是一个概率空间, 那么可以得到如下结论.

(1) "**全概率公式**": 如果 $A \in \Sigma$, 那么 $\Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$. 也就是说, $\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$.

(2) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. 这个式子可以进一步推广. 例如, 如果有三个事件, 那么

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =&\Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)\\&- \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3)\\&- \Pr(A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

这也被称为"**容斥原理**".

(3) 如果 $A \subset B$, 那么 $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$. 然而, 如果 A 是 B 的真子集, 那么不一定有 $\Pr(A) < \Pr(B)$, 但我们确定有 $\Pr(B) = \Pr(A) + \Pr(B \cap A^c)$, 其中 $B \cap A^c$ 指的是 B 中不属于 A 的所有元素.

(4) 如果对于任意的 i, 均有 $A_i \subset B$, 那么 $\Pr(\cup_i A_i) \leqslant \Pr(B)$.

Q: 班上27名同学, 现要求其离开座位全部随机打乱重坐, 问小V或小C回到原座的概率. (容斥原理)

$P = P(V) + P(C) - P(V \wedge C)$

$= \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{27} - \dfrac{1 \times 1 \times 25 \times \cdots \times 1}{27 \times 26 \times \cdots \times 1}$

$= \dfrac{17}{234}$

2.6. 代数空间和σ代数.(sigma)

选择公理:

选择公理的定义

选择公理可以用多种等价的方式来表述,其中最常见的形式是:

- **选择公理**:对于任意的非空集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$,如果每个集合 A_i 都是非空的,那么存在一个选择函数 f,使得对于每个 $i \in I$,有 $f(i) \in A_i$。

换句话说,如果我们有一族非空集合,那么我们可以从每个集合中选择一个元素,形成一个新的集合。

对于可数/有限集合理,因为我们知道如何遍历指标集.

但对于不可数集则不然.

首先,很容易知道,对于不可数事件,无法分配概率

(飞镖扎圆盘)

⇒ 为了解决这个问题,我们决定重新定义"事件"

用σ代数.

设 Ω 是一个集合, Σ 是由 Ω 的子集构成的一个非空集合. 那么在如下前提下, Σ 是一个 σ 代数.

(1) 如果 $A \in \Sigma$, 那么有 $A^c \in \Sigma$. 补集性

(2) Σ 的子集的可数并仍属于 Σ: 如果每一个 A_i 均满足 $A_i \in \Sigma$, 那么 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

可数封闭性.

延拓：(1) $\emptyset$ 和 $\Omega \in \Sigma$

(2) Σ 的子集不仅对可数并封闭，可数交亦是.

举例：① 对于任意 Ω，都有 σ代数 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ 即：有/无事发生（最小σ代数）

2. **包含一个单元素集合的σ-代数**:
   - 例如，$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$
   - 这个σ-代数包含了样本空间中一个单独的元素$\{1\}$及其补集$\{2,3\}$。

3. **包含两个单元素集合的σ-代数**:
   - 例如，$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$
   - 这个σ-代数更复杂，包含了样本空间中两个单独的元素$\{1\}$和$\{2\}$及其所有可能的并集。

④ $\mathcal{F} = P(\Omega)$，$P(\Omega)$ 为 Ω 之幂集（最大…）

σ代数 Σ（或$\mathcal{F}$）中的每一个元素都是1个事件

(柯尔莫戈洛夫的) 概率公理：设 Σ 是结果空间 Ω 的一个 σ 代数. 我们可以定义一个概率函数 $\text{Prob} : \Sigma \to [0,1]$. 换言之, 可以为 Σ 中满足以下性质的每个元素分配一个 0 和 1 之间的概率.

(1) 对于任意的事件 $A \in \Sigma$, 均有 $0 \leqslant \Pr(A) \leqslant 1$. 有些教材会称之为概率第一公理.

(2) 如果 Ω 是结果空间, 那么 $\Pr(\Omega) = 1$. 这有时被称为概率第二公理.

(3) 如果 $\{A_i\}$ 是 Σ 中可数个两两互不相交的集合, 那么 $\Pr(\cup_i A_i) = \sum_i \Pr(A_i)$. 你应该能够想到, 这通常被称为概率第三公理. 由此可以直接推出的一个重要结果是**全概率公式**, 稍后我们将更详细地讨论：$\Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$. 另外, 如果 $A \subset B$, 那么 $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$.

教材中提到一个有趣的反证"概率第三公理"只满足可数可加性的方法.

对于不可数集, 必须把正的概率分配给不可数个事件. 我们看一下事件 A_n, 它是 A 中所有概率属于 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 的元素的集合. 像 A_n 这样的子集有可数多个; 因为 A 中每个事件的概率都是正的, 所以每个事件都一定属于**某个**A_n. 因此

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

那么至少有一个 A_n 包含了无穷多个元素, 否则 A 中只能包含可数个元素 (我们会用到集合论附录中的一些结果, 尤其是"可数集的可数并包含了可数多个元素").

因此, 存在某个 m 使得 A_m 中包含无穷多个元素, 并且每个元素的概率至少为 $\frac{1}{m+1}$. 我们得出了一个矛盾 —— 我们刚刚证明了 A_m 的概率为无穷大, 但这是不可能的!