第十三章. 连续型随机变量:

均匀分布与指数分布.

13.1 均匀分布

均匀分布:如果随机变量 X 满足

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & 若\ a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

那么我们说 X 服从区间 $[a,b]$ (其中 $-\infty<a<b<\infty$) 上的均匀分布, 并记作 $X\sim \mathrm{Unif}(a,b)$.

13.1.1 均匀分布均值与方差.

设 $X\sim \mathrm{Unif}(a,b)$. 那么 X 的均值 μ_X 和方差 σ_X^2 分别是

$$\mu_X \;=\; \frac{b+a}{2} \quad 和 \quad \sigma_X^2 \;=\; \frac{(b-a)^2}{12}.$$

当 $[a,b]=[0,1]$ 时, 均值为 $1/2$ 且方差为 $1/12$; 但如果 $[a,b]=[-1/2,1/2]$, 那么均值为 0 且方差为 $1/12$. 另外一种重要情形是 $[a,b]=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, 此时的均值为 0, 方差为 1.

证:

$$\mu_X = \int_a^b x\cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \int_a^b (x-\mu_x)^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mu_x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-\mu_x)^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

13.1.2 服从均匀随机变量的和

设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 并且都服从 $\mathrm{Unif}(0,1)$, 那么 $Z=X+Y$ 的概率密度函数就是

$$f_Z(z)=\begin{cases} z & 若\ 0\leqslant z\leqslant 1\\ 2-z & 若\ 1\leqslant z\leqslant 2\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

随机变量标准化：先考虑 $U\sim \mathrm{Unif}(0,1)$

对于任意 $X\sim \mathrm{Unif}(a,b)$，有

$$X=(b-a)\cdot U+a.$$

由卷积公式：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_X(z-x)\, dx$$

又有 $f_X(u) = \begin{cases} 1 & 0 \le u \le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z-x \le 1 \quad (z-1 \le x \le z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{\max(z-1,0)}^{\min(1,z)} 1 \cdot 1\, dx$$

① $0 \le z \le 1$：

$$f_Z(z) = \int_0^z 1\, dx = z$$

② $1 < z \le 2$：

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\, dx = 2-z$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \le z \le 1 \\ 2-z & 1 < z \le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

当有更多的变量参与卷积，函数图象将会趋于(具有同均值、方差)的正态分布图象。

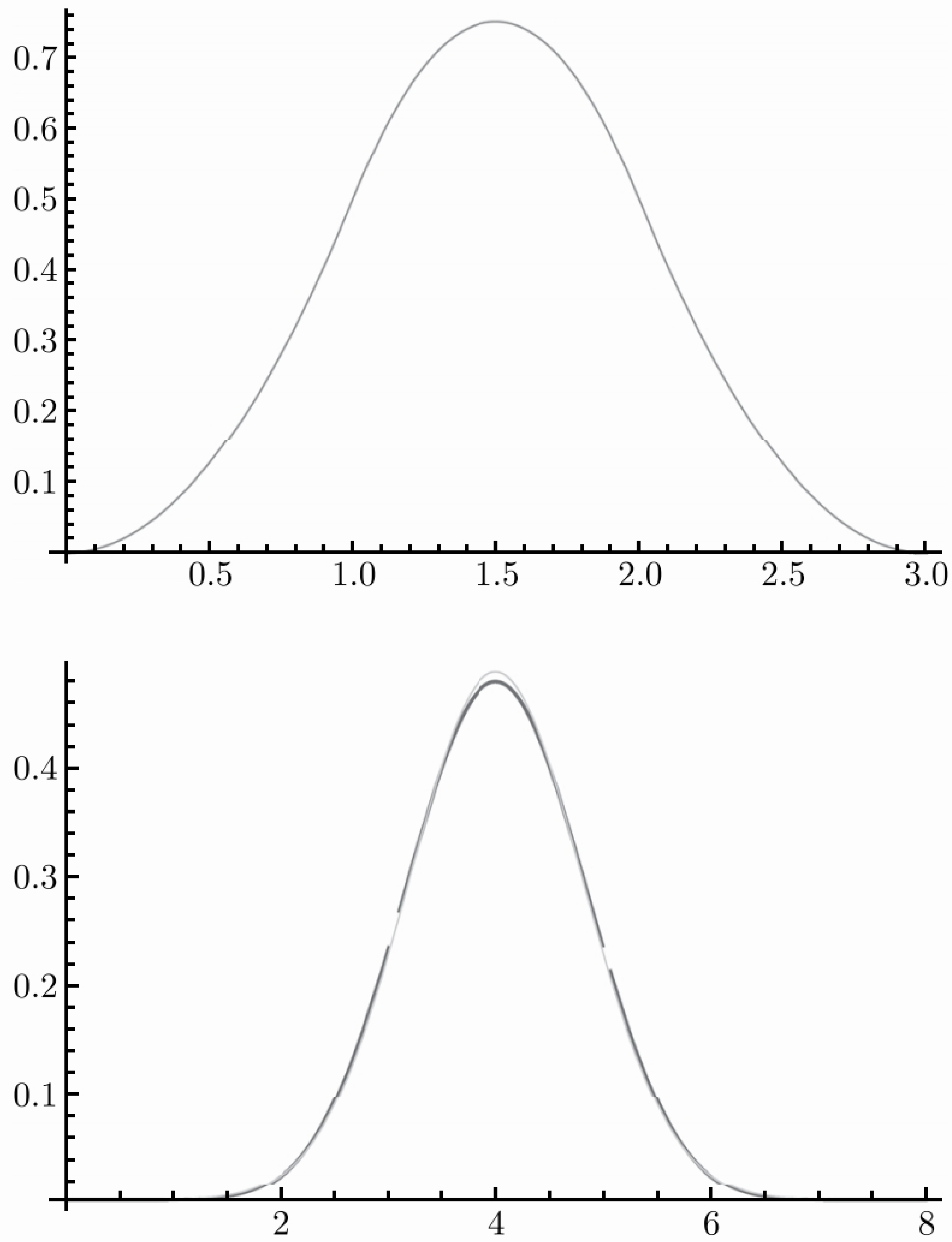

图 13-2　$X_1 + \cdots + X_n$ 的概率密度函数图, 其中 X_i 是相互独立且均服从 Unif(0,1) 的随机变量：(上图)$n = 3$, (下图)$n = 8$ 以及具有相同均值与方差的正态分布

13.1.3 例子

例一、 $X, Y \sim \text{Unif}(0,1)$，求 $Z = X+Y$

落在$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$的概率.

解:

$$f_X(z)=\begin{cases} z & 0\le z\le 1 \\ 2-z & 1<z\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$Prob(\tfrac{1}{2}\le Z\le \tfrac{3}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_X(z)\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}} f_X(z)\,dx$$

$$=\frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+2z-\frac{z^2}{2}\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{4}$$

例二、$\tilde{X}.\tilde{Y}\sim Unif(1,3)$,求$\tilde{Z}=\tilde{X}+\tilde{Y}$

落在区间$[3,5]$上的概率.

$$\tilde{Z}=\tilde{X}+\tilde{Y}$$

$$=2X+1+2Y+1$$

$$=2Z+2$$

$$\text{Prob}(3 \le \tilde{z} \le 5) = \text{Prob}(3 \le 2z+2 \le 5)$$

$$= \text{Prob}(\tfrac{1}{2} \le z \le \tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{3}{4}.$$

法2：（变量替换公式）

$$f_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = f_z\left(\frac{\tilde{z}}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}.$$

$$= \begin{cases} \frac{\tilde{z}}{4} - \frac{1}{2} & 2 \le \tilde{z} \le 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{\tilde{z}}{4} & 4 \le \tilde{z} \le 6 \end{cases}$$

13.1.4 均匀地生成随机数.

现在考虑抛掷硬币，正面记1，反面记0.

n次抛掷可以得到 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

构造二进制小数 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n$

由此可以得到十进制小数

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \in [0,1]$$

该小数共有 2^n 种可能，均匀分布在集合 $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots \frac{n-1}{2^n}\}$ 中

当 n 足够大时，可以认为与 [0, 1] 上的连续均匀分布没有区别.

13.2 指数分布

指数分布： 如果随机变量 X 满足

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-x/\lambda} & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

那么说 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 并记作 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

注意：很遗憾，这个符号是非标准的，有些教材会使用 $\mathbf{e}^{-\lambda x}\boldsymbol{\lambda}$ 来表示参数为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的指数分布. 这两个定义当然是相关的，但你应该选择其中一个定义并始终坚持下去.

13.2.1 均值和方差

设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 均值 μ_X 和方差 σ_X^2 分别是

$$\mu_X = \lambda \quad \text{和} \quad \sigma_X^2 = \lambda^2.$$

特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 均值和方差都等于 1.

证：

均值 $\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$

$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} d(\frac{x}{\lambda})$

$= \lambda \cdot 1$

$= \lambda$

方差：

$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_x)^2 f_x(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \lambda)^2 \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda} dx$

$\xlongequal{t=\frac{x}{\lambda}} \lambda^2 \int_{0}^{+\infty} (t-1)^2 e^{-t} dt$

$= \dots$

$= \lambda^2$

利用伽马函数 $\Gamma(s)$ 可以更好地计算

①：当 $Re(s) > 0$ 时，$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{t} t^{s-1} dt$

②：若 n 是正整数，$\Gamma(n+1) = n!$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 x &= \lambda^2 \int_0^{+\infty} (t-1)^2 e^{-t} dt \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} (t^2 - 2t + 1) e^{-t} dt \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} (t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + e^{-t}) dt \\
&= \lambda^2 \cdot (\Gamma(3) - 2\Gamma(2) + \Gamma(1)) \\
&= \lambda^2 \cdot (2! - 2 \times 1! + 0!) \\
&= \lambda^2
\end{aligned}
$$

13.2.2 服从指数分布的随机变量之和

Erlang

爱尔朗分布：设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，它们均服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布. 那么 $X = X_1 + \cdots + X_n$ 的概率密度函数是

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1} \mathrm{e}^{-x/\lambda}}{\lambda^n (n-1)!} & \text{若 } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

如果一个随机变量的概率密度函数是上面的 f_X，那么这个随机变量就服从参数为 λ 和 n 的爱尔朗分布，其均值为 $n\lambda$，方差为 $n\lambda^2$.

警告！ 与指数分布的情况类似，有些教材会使用 $1/\lambda$ 而不是 λ，因此在使用任何一本教材之前，你必须仔细检查.

先考虑两个变量卷积得到的标准指数分布和.

$$f_{Z_2}(z) = \int_0^{+\infty} f_X(x) f_X(z-x)\, dx$$

$$= \int_0^{z} e^{-x} \cdot e^{x-z}\, dx$$

$$= \int_0^{z} e^{-z}\, dx$$

$$= e^{-z} \cdot z$$

三个变量：

$$f_{Z_3}(z) = f_{Z_2} * f_X(z)$$

$$= \int_0^{+\infty} f_{Z_2}(t) f_X(z-t)\, dt$$

$$= \int_0^{z} e^{-t} \cdot t \cdot e^{t-z}\, dt$$

$$= \int_0^{z} t \cdot e^{-z}\, dt$$

$$= e^{-z} \cdot \frac{z^2}{2}$$

猜想：$f_{Z_n}(z) = \dfrac{z^{n-1} e^{-z}}{(n-1)!}$

$$f_{Z_{n+1}}(z) = \int_0^{+\infty} f_{Z_n}(t) f_X(z-t)\, dt$$

$$= \int_0^{z} \frac{z^{n-1} e^{-z}}{(n-1)!} \cdot e^{t-z}\, dt$$

$$= \frac{z^n e^{-z}}{n!}$$

得证

带一般的入证明同理.

当 n → ∞ 时，这些和趋于正态分布

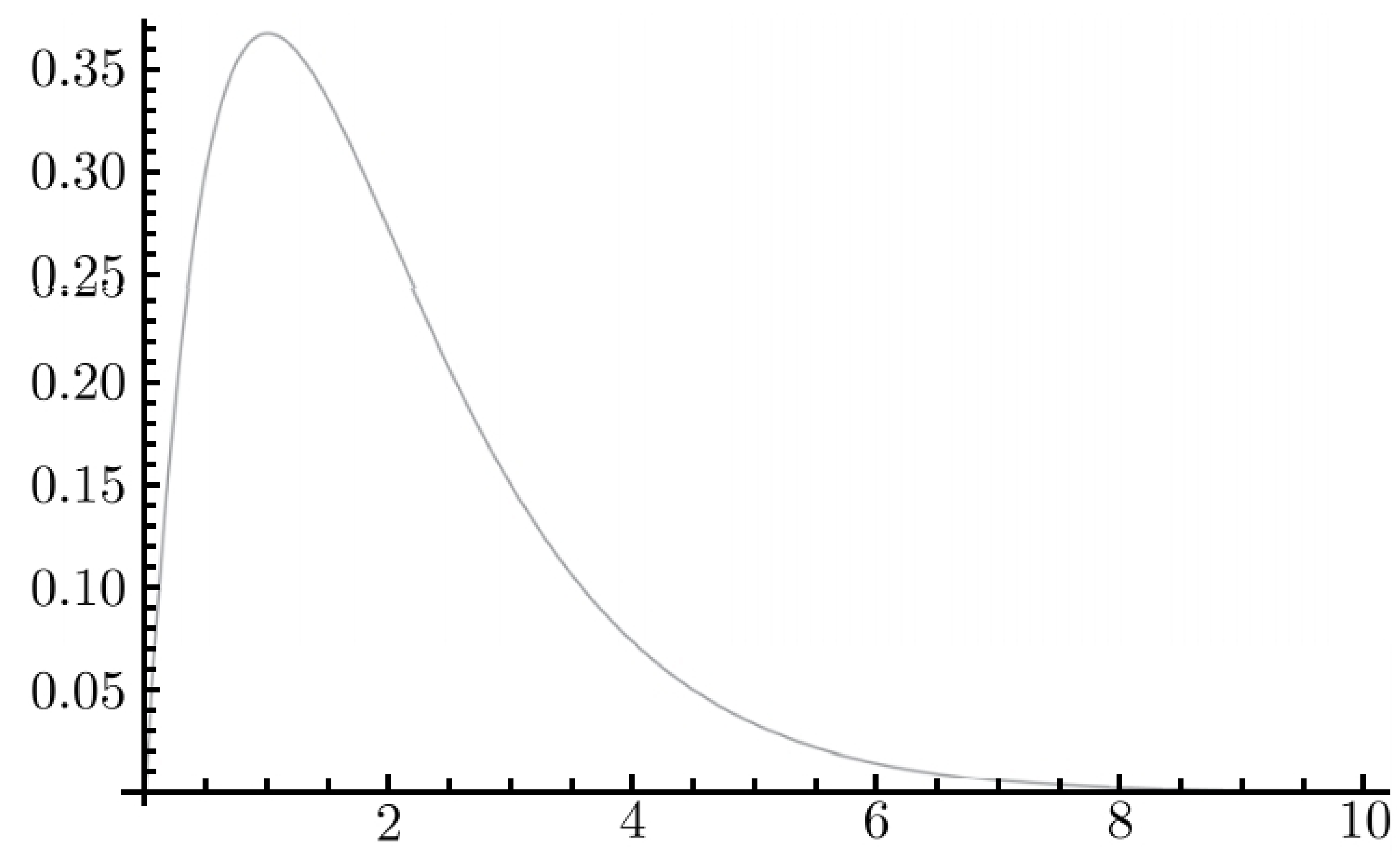

图 13-3　$X+Y$ 的概率密度函数图, 其中 X 和 Y 是相互独立且均服从 Exp(1) 的随机变量

我们可以继续下去. 在图 13-4 中, 我们分别绘制了 8 个和 30 个相互独立且均

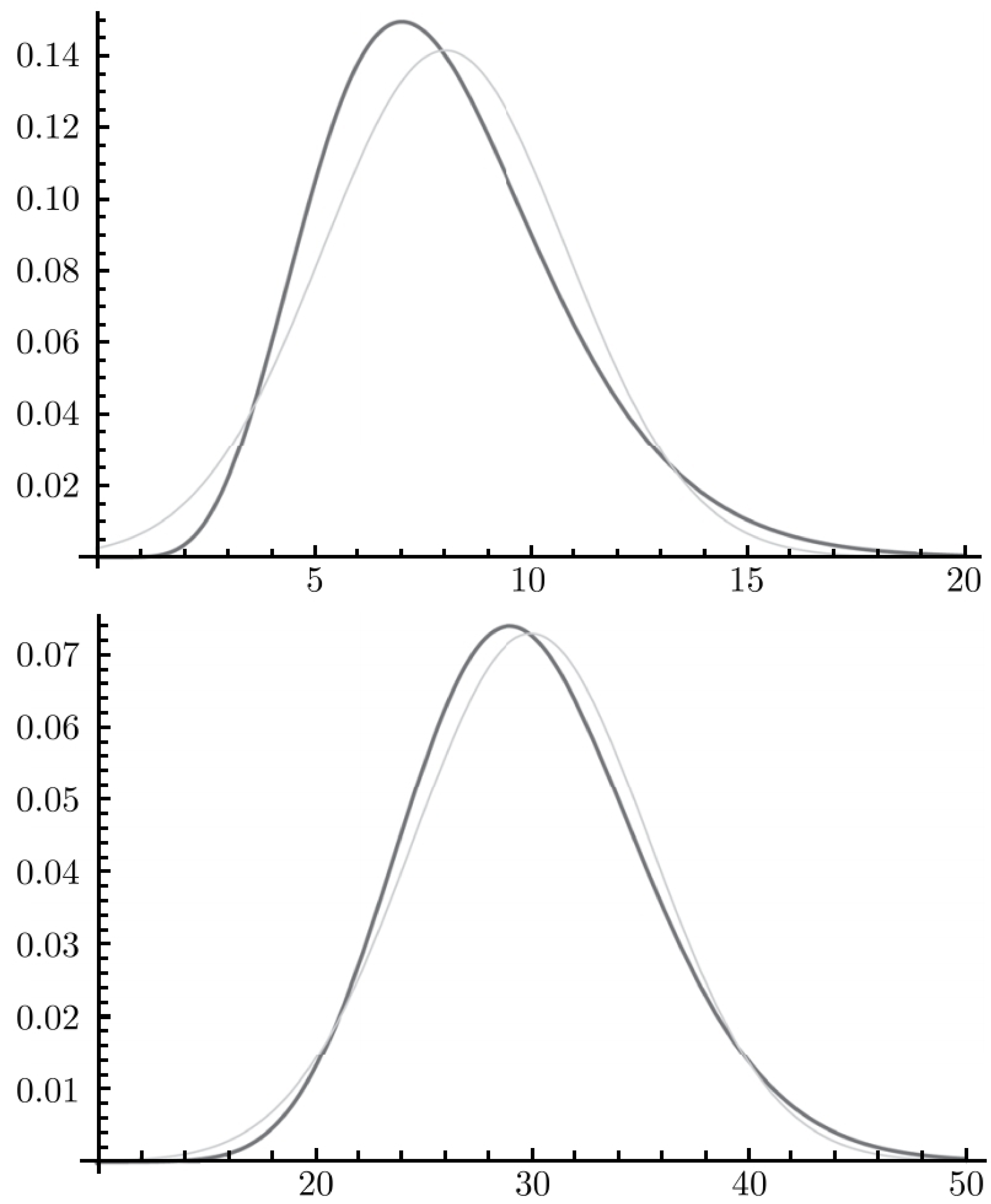

图 13-4　$X_1+\cdots+X_8$ 的概率密度函数与均值和方差均是 8 的正态分布的概率密度函数 (上图), $X_1+\cdots+X_{30}$ 的概率密度函数与均值和方差都是 30 的正态分布的概率密度函数 (下图), 其中 X_i 是相互独立且均服从 Exp(1) 的随机变量

12.3.3 服从指数分布的随机变量的例子与应用

例一. 某球赛中直到下次进球的时间间隔为服从 $\lambda = 30\,min$ 的指数分布的随机变量，前 45 min 未进球的概率?

$$Pr(x \geq 45) = \int_{45}^{+\infty} \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}} dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{30}} \Big|_{45}^{+\infty}$$

$$= e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\doteq 22.3\%$$

例二. 神经元激活动作电位是泊松过程. 现有一组 10 个神经元. 平均 12 ms 激活一次动作电位. 问 10 个神经元各激活一次共需时间 $\leq 0.1\,s$ 的概率?

$X \sim \text{Erlang}(10, 12)$.

$$\Pr(X \le 100) = F(100)$$

$$= \int_0^{100} \frac{x^{10-1} \cdot e^{-\frac{x}{12}}}{12^{10} \cdot (10-1)!} dx$$

$$= \cdots$$

$$\doteq 32.55\%$$

12.3.4 从指数分布函数生成随机数.

生成随机数的累积分布法: 设 X 是一个随机变量, 它的概率密度函数是 f_X, 累积分布函数是 F_X. 如果 Y 是一个服从 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量, 那么

$$X = F_X^{-1}(Y).$$

这也被称为逆变换抽样或者逆变换法.

先记 $Z = F_X^{-1}(Y)$

$F_X(x)$、$F_X^{-1}(x)$ 都是单调不减的函数.

$$\text{Prob}(Z \le z) = \text{Prob}(-\infty < F_X^{-1}(Y) \le z)$$

$$= \text{Prob}(F_X(-\infty) < Y \le F_X(z))$$

$$= Prob(0 < Y \le F_X(z))$$

$$= \int_0^{F_X(z)} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{F_X(z)} 1\, dy$$

$$= F_X(z)$$

$\Rightarrow$ Z 等价于 X

现在考察指数分布函数.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \ge 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}\, dt$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

如果 $y = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$

有 $x = -\lambda \ln(1-y)$

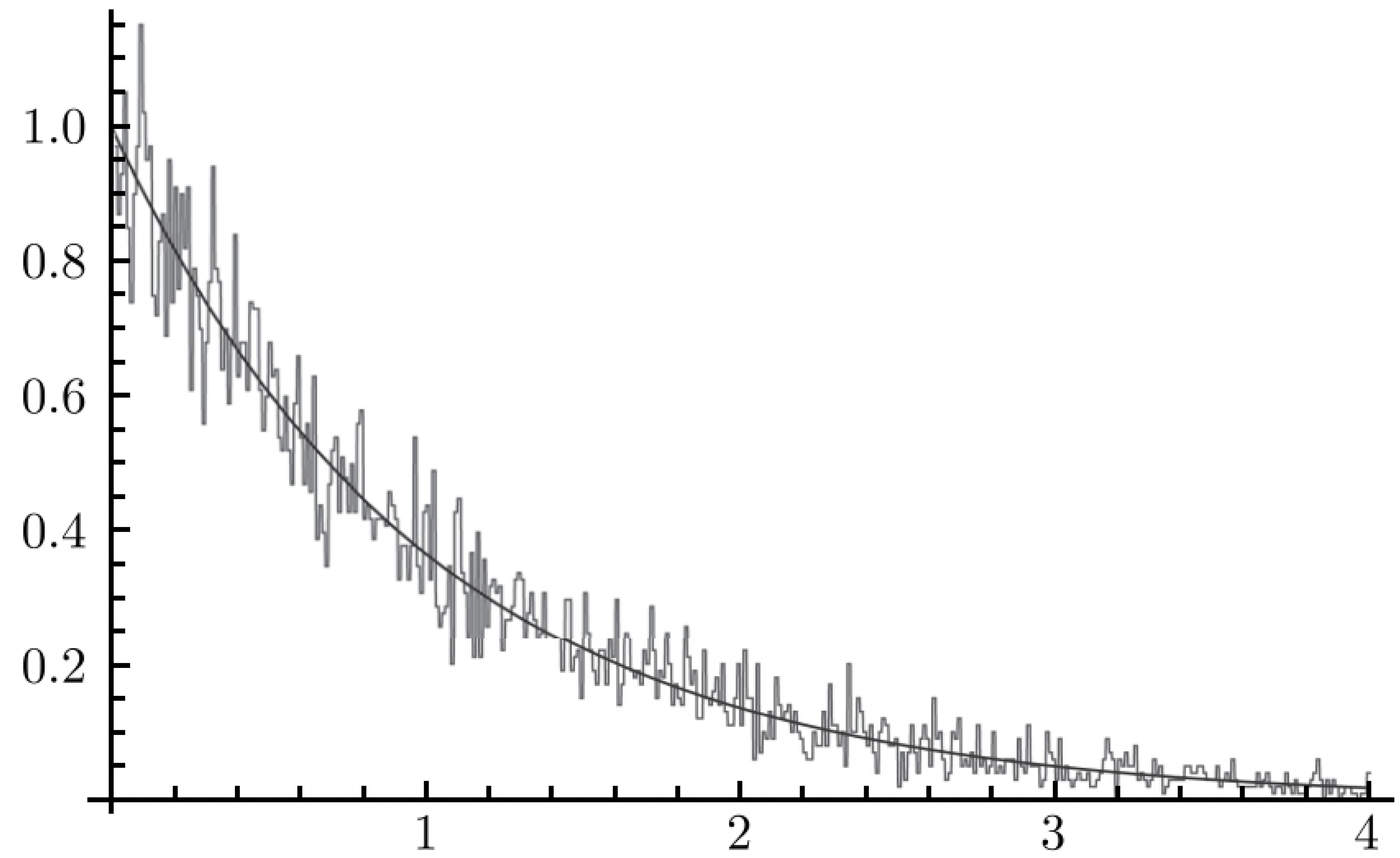

图 13-5　利用累积分布函数法生成的 10 000 个值 (上图) 以及从标准指数分布中随机选出的 100 000 个数 (下图), 并把这些结果与标准指数分布进行比较

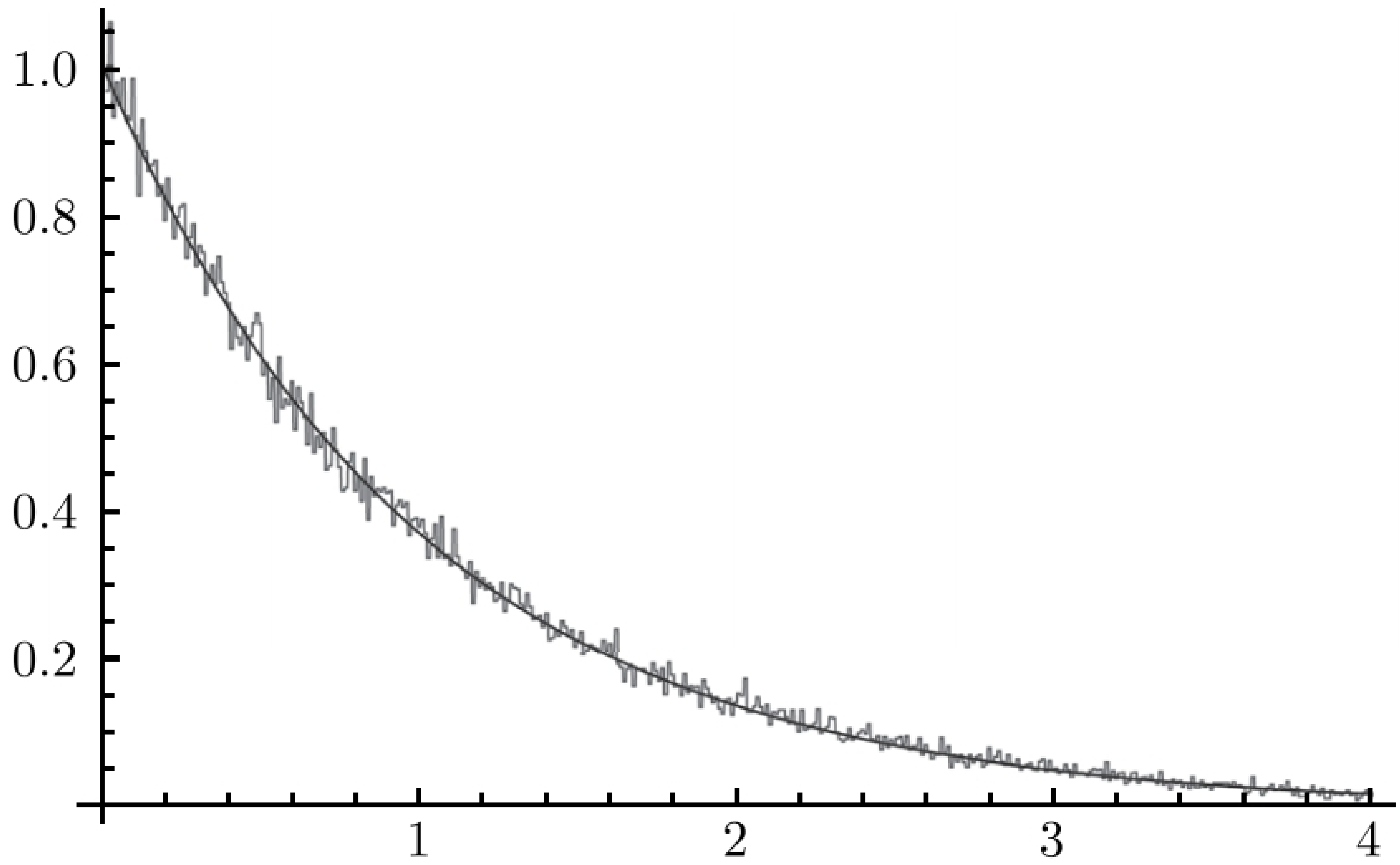

图 13-5　(续)