第一章. 导入.

四个问题.
- ① 生日问题
- ② 方块问题
- ③ 投篮问题
- ④ 爱国者队的赌博问题

一. 生日问题.

班级中至少有多少人时,可以保证有至少2人生日同一天的概率大于50%?

解:

$$\bar{P} = 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}$$

其中 $n \geq 1$, 为班级人数.

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times [365-(n-1)]}{365^n}$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

$$P > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \bar{P} = 1-P \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln(\bar{P}) = \ln \frac{365}{365} + \ln \frac{364}{365} + \cdots + \ln \frac{365-n+1}{365}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{365-i}{365}$$

当 $x \doteq 1$ 时. 有 $\ln x \doteq x-1$

故 $\ln(\bar{P}) \doteq -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{365}$

$$= -\frac{1}{365} \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= -\frac{1}{365} \cdot \frac{(1+n-1)\cdot(n-1)}{2} \leq -\ln 2$$

解得 $n \geq 23$

一般地：一个独立重复实验有 D 种可能结果，
概率分布均匀，则在进行
$n = \sqrt{D \cdot 2\ln 2}$ 次实验后，可以保证
"至少有2次实验结果相等"的概率 ≥ 0.5

几何级数公式：

r 是一个绝对值小于1的实数。

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = r^0 + r^1 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

比较证明法 or
故事证明法。

二、投篮问题。

Pole 与 Kobe 投篮比赛，Pole 的命中率是 p，Kobe 的命中率是 q，Pole 先投，则 Pole 获胜的概率是？

解1：$P(p) = p + (1-p)\cdot(1-q)\cdot p + [(1-p)(1-q)]^2 \cdot p + \cdots$

$$= p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} r^i \quad (r = (1-p)(1-q))$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-r}$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)(1-q)}$$

解2：$P(p) = p + (1-p)\cdot(1-q)\cdot P(p)$

有 $P(p) = \dfrac{p}{1-(1-p)(1-q)}$

解2被称为"无记忆过程"．※．

三．方块问题．

A、B、C三人玩有放回的抽牌游戏．先抽到方块的人胜利．问三人获胜的概率？

解1：$P(A) = \frac{1}{4} + (\frac{3}{4})^3\cdot\frac{1}{4} + (\frac{3}{4})^6\cdot\frac{1}{4} + \cdots$

令 $I = \sum_{i=0}^{\infty} p^{3i} \quad (|p|<1)$

利用 $I = \sum_{i=0}^{\infty} p^i - \sum_{i=0}^{\infty} p^{3i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} p^{3i+2}$

求解即可．

$P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + (\frac{3}{4})^4\cdot\frac{1}{4} + (\frac{3}{4})^7\cdot\frac{1}{4} + \cdots$

$P(C) = \cdots$

解2：$P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot P(B)$ ×

$P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot P(B)$ ✓

$P(B)$ 指的是 A 起手，B 赢的概率.

同理，$P(C) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot P(C)$

解3：

$$\begin{cases} P(B) = \frac{3}{4}P(A) \\ P(C) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot P(A) \\ P(A) + P(B) + P(C) = 1 \end{cases}$$

由此可解.

高度的"无记忆化"

四. "爱国者队"的赌博问题.

"对冲(hedging)"

期望(expectation)

Bob下注爱国者队全胜，在最后一场对阵巨人队的比赛中，如果前者赢，可以由500\$博得500 000\$，输则一无所获。试分析在巨人队方Bob下注的收益情况。

P：爱国者队获胜的概率

X：巨人队获胜后每1\$可博得的钱数

B：下了多少注。

$$W = 500{,}000 \cdot p + (1-p) \cdot B \cdot x - (500 + B)$$

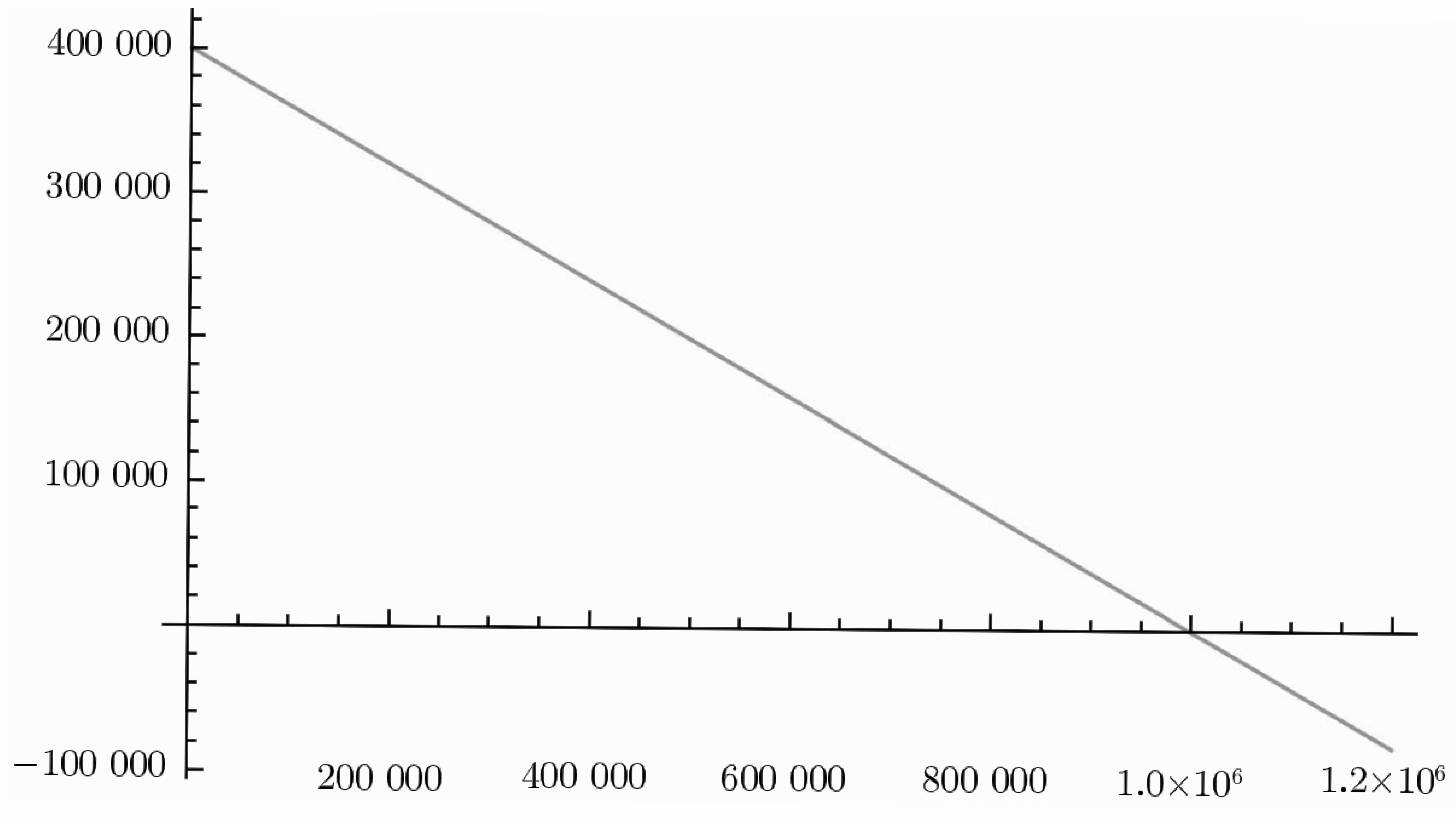

图 1-6　对巨人队额外投注 B 美元之后的预期收益图．假设爱国者队有 80% 的机会获胜，如果巨人队赢了，投注在他们身上的每 1 美元可以获得 3 美元的回报

纯粹的期望分析是不理智的，因为不是所有人都能接受最坏结果

我们关注下注多少钱可以保证赚多少钱？

无论哪个队赢，我们至少可以得到 B×$ 与 500,000$ 中较少的一份.

因此，$W_{min} = \min(Bx, 500{,}000) - 500 - B$

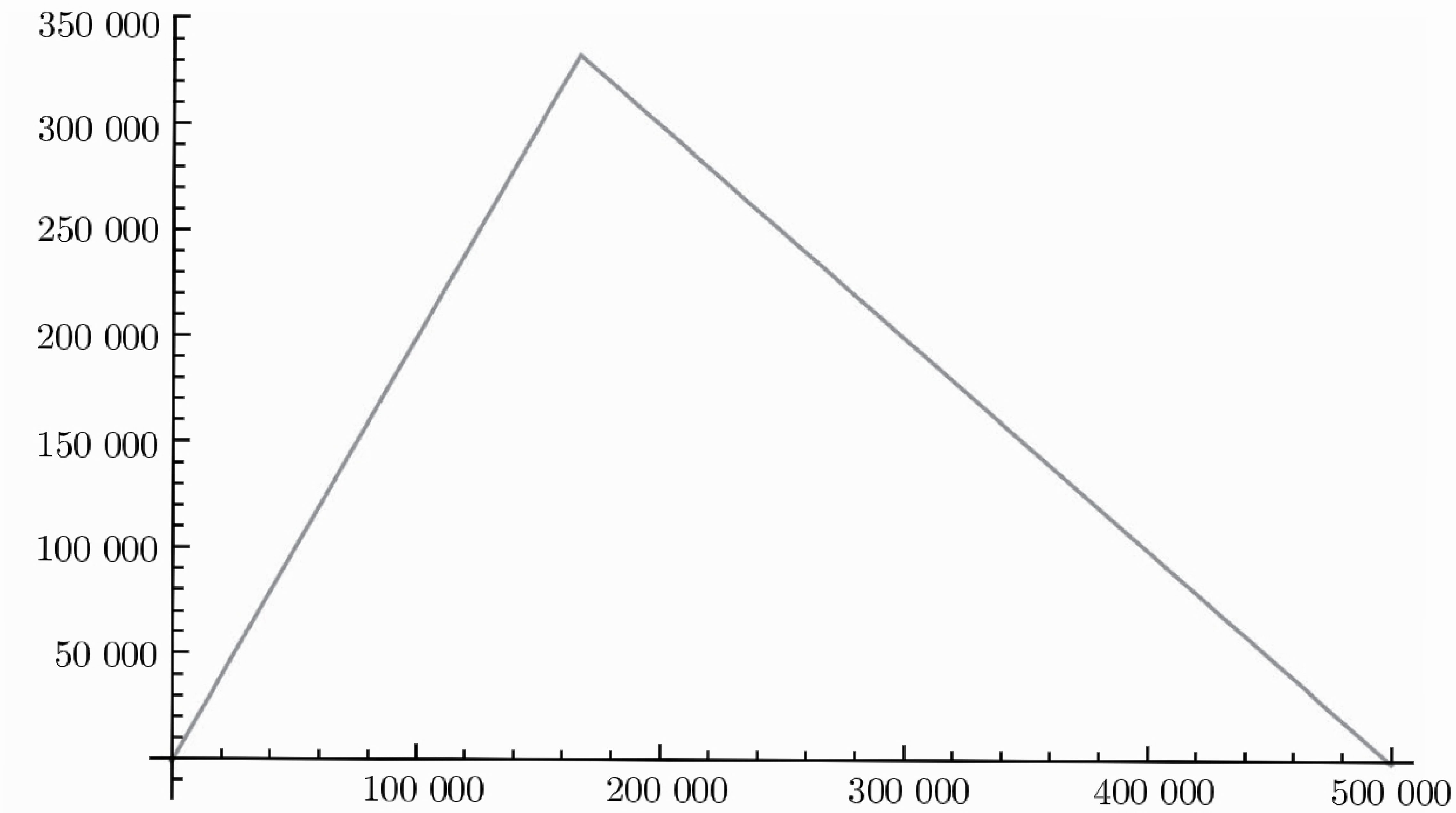

图 1-7　对巨人队额外投注 B 美元之后的最低保证收益图. 假设爱国者队有 80% 的机会获胜, 如果巨人队赢了, 投注在他们身上的每 1 美元可以获得 3 美元的回报

算出最高点对应的 B 值即可.

习题

习题 1.5.8 你认为需要多少人才能使至少三个人的生日在同一天的概率为 50%? 需要多少人才能使至少有两对人生日相同的概率为 50%? 作者在曼荷莲学院讲授概率论时, 在他与全班 31 个学生中间, 任意三个人的生日都不在同一天, 但共有三对人的生日在同一天.

解: $\bar{P} = P(\text{任意两人不同日生}) + P(\text{有且仅有两人同日生})$

$$= \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n} + P(\cdots)$$

n个人中有1对: $P_{(1)} = \dfrac{C_n^2 \cdot 365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+2)}{365^n}$

n个人中有2对. $P_{(2)} = \dfrac{C_n^2 \cdot 365 \times C_{n-2}^2 \cdot 364 \times \cdots (365-n+3)}{365^n}$

$$P_{(1)} \gg P_{(2,3,4,\cdots)}$$

故 $\bar{P} \doteq \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{365-i}{365} + C_n^2/365 \cdot \prod_{i=0}^{n-2} \dfrac{365-i}{365}$

$$= \frac{365-n+1+C_n^2}{365} \cdot \prod_{i=0}^{n-2} \frac{365-i}{365}$$

$$\doteq \prod_{i=0}^{n-2} \frac{365-i}{365}$$

$$P > 0.5 \iff \bar{P} \le 0.5 .$$

$$\ln \bar{P} = \sum_{i=0}^{n-2} \ln\left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

$$\doteq -\frac{1}{365} \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$= -\frac{1}{365} \cdot \frac{(1+n-2)\cdot(n-2)}{2}$$

$$= -\frac{(n-2)(n-1)}{730} \le -\ln 2$$

$$\doteq \frac{(n-\frac{3}{2})^2}{730} \geqslant \ln 2 .$$

$$n \geqslant 24$$

当 $n \geq 24$ 时，至少3人同天生日的概率 ≥ 0.5.

$$P(1,2,3,4\cdots) \doteq P(1) = \frac{C_n^2}{365} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{365-i}{365}$$

记为 I. $\ln I = \ln C_n^2 - \ln 365 + \sum_{i=0}^{n-2} \ln \frac{365-i}{365}$

$$= \ln (n-1)\cdot n - \ln 2 - \ln 365 - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$= \ln(n-1) + \ln n - \ln 2 - \ln 365$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq -\ln 2$$

由此可解 n.