第八章. 连续型随机变量.

8.1 微积分基本定理.

微积分基本定理: 设 f 是一个分段连续函数, F 是 f 的任意一个原函数. 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

文字叙述: 在曲线 $y = f(x)$ 下方、介于 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的 (有符号的) 面积就等于, f 的原函数在 b 处的值减去 f 的原函数在 a 处的值.

8.2 概率密度函数和累积分布函数.

连续型随机变量、概率密度函数和累积分布函数: 设 X 是一个随机变量. 如果存在一个实值函数 f_X 满足

(1) f_X 是一个分段连续函数

(2) $f_X(x) \geqslant 0$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$,

那么 X 是一个**连续型随机变量**, f_X 是 X 的**概率密度函数**. 有时候, f_X 也被误称为**密度函数**.

X 的**累积分布函数** $F_X(x)$ 就是 X 不大于 x 的概率:

$$F_X(x) = \mathrm{Prob}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

更一般地, 我们还可以考察定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续型随机变量. 这种一般情形要求我们理解多元函数可积的含义 (换句话说, 把一个分段连续的可积函数推广到多维情形是什么样的; 参见习题 8.6.4); 幸运的是, 在很多情况下, 密度函数都是连续且非负的, 并且其积分显然为 1.

8.3 例子.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2+3x-5x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$2+3x-5x^2$ 满足 $f_X(x) > 0$

且连续.

但 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{11}{6} \neq 1$.

我们的构造思路:

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{11}(2+3x-5x^2) & \cdots \\ 0 & \cdots \end{cases}$$

对潜在概率密度函数的标准化: 如果 f_X 是一个非负的分段连续函数, 并且它的积分值是有限的, 那么

$$g_X(x) = \frac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t}$$

就是一个概率密度函数. 还可以这样表述: 存在一个 c, 使得

$$g_X(x) = c f_X(x)$$

是一个概率密度函数, 并且

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t}.$$

g(x) 是概率密度函数. 可以用来计算累积分布函数.

$$G_X(X) = \int_{-\infty}^{X} g(t)\,dt$$

※ 此处的 X 不能是变量.

如果 X 是一个概率密度函数为 f_X 的连续型随机变量, 那么下面这四个概率是相等的:

(1) X 属于 $[a,b]$ 的概率;
(2) X 属于 $(a,b]$ 的概率;
(3) X 属于 $[a,b)$ 的概率;
(4) X 属于 (a,b) 的概率.

原因在于, 对于连续型随机变量 X, 它取任何具体值的概率都是 0. 例如, 由累积分布函数的定义可得

$$F_X(b) - F_X(a) + \text{Prob}(X = a) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t.$$

因为单元素事件的概率是 0, 所以上述表达式可以简化成

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t.$$

对于连续随机变量, 单元素事件的概率是 0.

设 X 是一个连续型随机变量, 它的累积分布函数是 F_X. 那么

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad 且 \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$$

另外, F_X 是一个单调不减的函数: 如果 $y > x$, 那么 $F_X(y) \geqslant F_X(x)$.

8.4 单元素事件的概率.

解释一下 σ代数的可加性只满足可数可加性.

如果 Ω 是不可数集. 不可用加法求两两不相集合(事件)的并.

1° $p=0$. 则 $\sum p = 0 \neq 1$.

2° $p \neq 0$, 则 $\sum p \to +\infty \neq 1$.

只能用积分计算.

Q: 为什么不可数集中的单元素事件概率不能解释为无穷小?

A: 概率是定义在[0,1]上的实数.
无穷小不是实数.