Predictive Control

预测控制

第4章 约束预测控制

控制科学与工程

2019年3月

前言

约束在实际工业控制中大量存在：

- 执行机构饱和（控制量约束）
- 执行机构的动作突变不允许过大（控制增量约束）
- 状态约束
  - 安全生产要求某些系统状态不能超过给定值，如温度
  - 环境保护要求排放浓度不能超过给定值
  - 机械制造限制使某些位置不能到达等

控制系统设计与分析忽略约束的存在，带来的问题：性能变坏、不稳定

一个例子

系统

$$\dot{x}_1(t) = 0.8x_1(t) - 0.5x_2(t) + 0.5u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 0.5u(t)$$

满足控制量约束

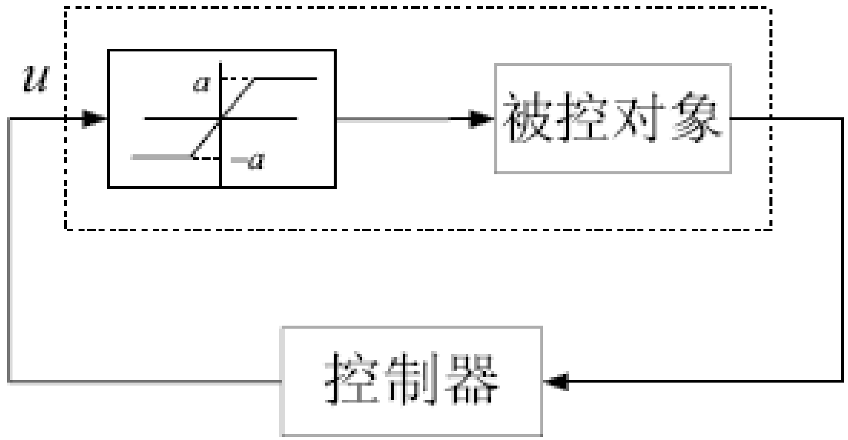
$$|u(t)| \le a,\ \ t \ge 0$$

如不考虑控制量的约束，可设计使系统渐进稳定的状态反馈

$$u(t) = -K\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix} 0.88 & 3.48 \end{bmatrix}$$

一个例子

考虑执行机构（控制量）饱和的仿真框图

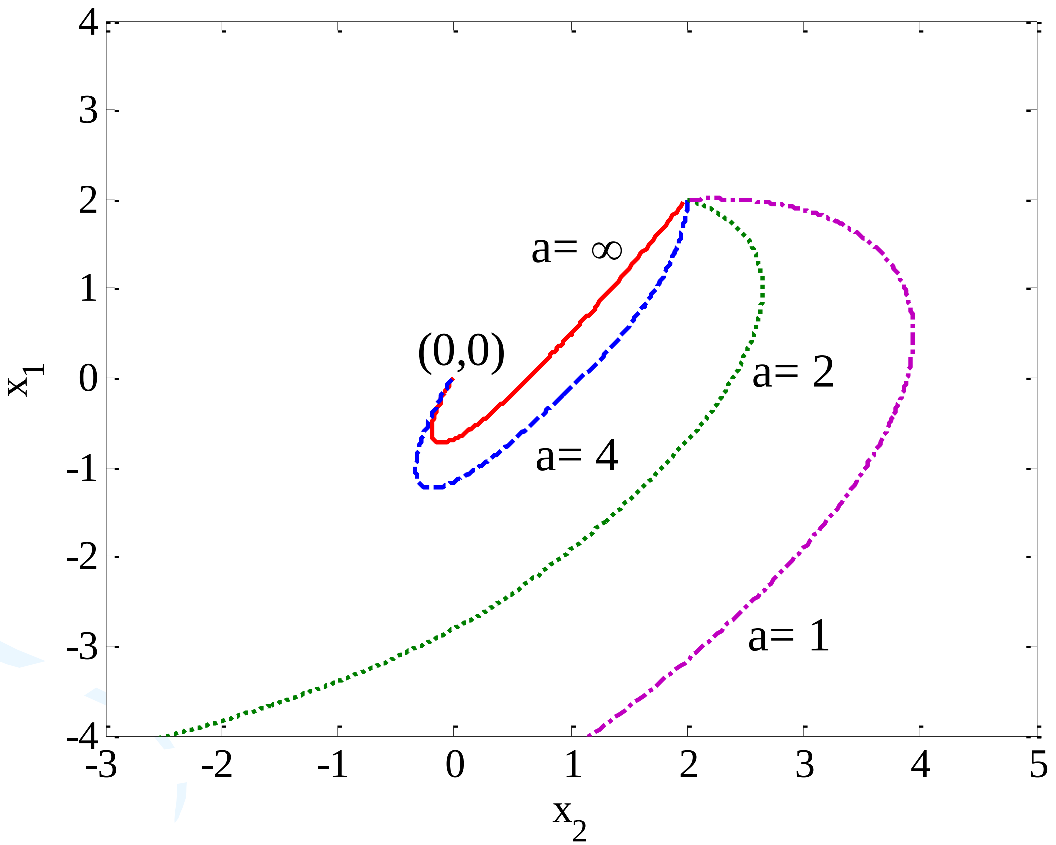


$$|u(t)| \le a,\ t \ge 0$$

控制器：$K = \begin{bmatrix} 0.88 & 3.48 \end{bmatrix}$

一个例子

a 取∞（即无约束）、4、2、1时的闭环响应



$|u(t)| \le a,\ t \ge 0,\ a \le 2$闭环系统不稳定！

4.1 问题描述

4.2 二次规划

4.3 约束优化问题求解

4.4 约束预测控制器实现

4.1 问题描述

问题描述

对于用阶跃响应状态空间模型描述的线性系统：

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$$

$$y(k)=CY(k)$$

存在约束 $y_{\min}(k+i)\le y(k+i)\le y_{\max}(k+i),\ i=1,2\cdots,p$

$$u_{\min}(k+i)\le u(k+i)\le u_{\max}(k+i),\ i=0,1,2\cdots,m-1$$

$$\Delta u_{\min}(k+i)\le \Delta u(k+i)\le \Delta u_{\max}(k+i),\ i=0,1,2\cdots,m-1$$

设计预测控制器，使系统输出跟踪给定的参考输出

→ 优化问题

4.1 问题描述

优化问题描述

$$\min_{\Delta U(\cdot)} \sum_{i=1}^{p} \left\| \Gamma_i^y \left(y(k+i\,|\,k) - r(k+i) \right) \right\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left\| \Gamma_i^u \Delta u(k+i-1) \right\|^2$$

$$\text{s.t.} \quad Y_p(k+1\,|\,k) = \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$

输出约束

$$y_{\min}(k+i) \le y(k+i) \le y_{\max}(k+i),\ i = 1,2\cdots,p$$

控制量约束

$$u_{\min}(k+i) \le u(k+i) \le u_{\max}(k+i),\ i = 0,1,2\cdots,m-1$$

控制增量约束

$$\Delta u_{\min}(k+i) \le \Delta u(k+i) \le \Delta u_{\max}(k+i),\ i = 0,1,2\cdots,m-1$$

4.1 问题描述

优化问题描述（矩阵向量形式）

$$\min_{\Delta U(\cdot)} \left\| \Gamma^{y} \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^{u} \Delta U_m(k) \right\|^2$$

s.t.
$$Y_p(k+1|k) = \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$
$$y_{\min}(k+i) \le y(k+i) \le y_{\max}(k+i),\ i = 1, 2\cdots, p$$
$$u_{\min}(k+i) \le u(k+i) \le u_{\max}(k+i),\ i = 0, 1, 2\cdots, m-1$$
$$\Delta u_{\min}(k+i) \le \Delta u(k+i) \le \Delta u_{\max}(k+i),\ i = 0, 1, 2\cdots, m-1$$

优化问题的求解？一般没有解析表达式。

数值求解方法：**Quadratic Program（QP）**等。

第4章 约束预测控制

4.1 问题描述

4.2 二次规划

4.3 约束优化问题求解

4.4 约束预测控制器实现

4.2 二次规划

二次规划形式

$$\min_x x^T Hx - g^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Cx \ge b$$

其中，***H***为矩阵，***g***为向量

如果没有约束，即没有$Cx \ge b$，则

$$\frac{d(x^T Hx - g^T x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} H^{-1} g$$

$$\frac{d^2(x^T Hx - g^T x)}{dx} = 2H$$

二次规划存在最小值的条件$H > 0$

4.2 二次规划

例：前面的无约束MPC

$$\rho = Ax - b$$

$$\min_x \rho^T \rho = \min_x x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b$$

等价于QP问题

$$\min_x x^T A^T Ax - 2b^T Ax = \min_x x^T Hx - g^T x$$

注： $b^T b$**与x无关，不影响寻优。**

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} H^{-1} g = \frac{1}{2}\left(A^T A\right)^{-1}\left(2b^T A\right)^T = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

与第3章的结果一致

4.2 二次规划

在有不等式约束的情况下，***H*=0**也是可以求解的

$$
\begin{aligned}
&\min_{x} -g^T x \\
&\text{s.t.} \quad Cx \geq b
\end{aligned}
$$

⇨ 线性规划

QP的数值求解有很多方法，已经有商用程序。

$$
\begin{aligned}
&\min_{x}\; x^T H x - g^T x \\
&\text{s.t.} \quad Cx \geq b
\end{aligned}
$$

第4章 约束预测控制

4.1 问题描述

4.2 二次规划

4.3 约束优化问题求解

4.4 约束预测控制器实现

4.3 约束优化问题求解

约束优化问题

$$\min_{\Delta U(\cdot)} \left\| \Gamma^{y} \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^{u} \Delta U_m(k) \right\|^2$$

$$\text{s.t.} \quad Y_p(k+1|k) = \bar{M}_{ss} \overset{\frown}{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$

$$y_{\min}(k+i) \le y(k+i) \le y_{\max}(k+i), \; i = 1, 2 \cdots, p$$

$$u_{\min}(k+i) \le u(k+i) \le u_{\max}(k+i), \; i = 0, 1, 2 \cdots, m-1$$

$$\Delta u_{\min}(k+i) \le \Delta u(k+i) \le \Delta u_{\max}(k+i), \; i = 0, 1, 2 \cdots, m-1$$

将约束优化问题转换为QP描述

4.3 约束优化问题求解

目标函数

$$J = \left\| \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^u \Delta U_m(k) \right\|^2$$

其中

$$Y_p(k+1|k) = \bar{M}_{ss} \widehat{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$

$$\Rightarrow \quad J = x^T H x - g^T x$$

4.3 约束优化问题求解

转换后的目标函数

$$J = \left\| \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^u \Delta U_m(k) \right\|^2$$

$$= \left(\Delta U_m(k) \right)^T H \Delta U_m(k) - G(k+1) \Delta U_m(k)$$

其中

$$H = \bar{S}_u^T \left(\Gamma^y \right)^T \Gamma^y \bar{S}_u + \left(\Gamma^u \right)^T \Gamma^u, \; G(k+1) = 2 \bar{S}_u^T \left(\Gamma^y \right)^T \Gamma^y E_p(k+1)$$

$\Delta U_m(k)$ 为**QP**问题的独立变量，即$x = \Delta U_m(k)$

注：$\left(E_p(k+1) \right)^T E_p(k+1)$ 与独立变量无关，已略去

控制增量约束

$$\Delta u_{\min}(k+i) \le \Delta u(k+i) \le \Delta u_{\max}(k+i),\ i = 0,1,2\cdots,m-1$$

$$\Longrightarrow \qquad Cx \ge b$$

4.3 约束优化问题求解

转换后的控制增量约束

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U_m(k) \geq \begin{bmatrix} -\Delta u_{\max}(k) \\ -\Delta u_{\max}(k+1) \\ \vdots \\ -\Delta u_{\max}(k+m-1) \\ -\Delta u_{\min}(k) \\ -\Delta u_{\min}(k+1) \\ \vdots \\ -\Delta u_{\min}(k+m-1) \end{bmatrix}$$

其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

4.3 约束优化问题求解

控制量约束

$$u_{\min}(k+i) \le u(k+i) \le u_{\max}(k+i),\ i=0,1,2\cdots,m-1$$

其中

$$\Delta u(k+i) = u(k+i)\text{-}u(k+i\text{-}1)$$

$$\Rightarrow \qquad Cx \ge b$$

4.3 约束优化问题求解

转换后的控制量约束

$$\begin{bmatrix} -L \\ L \end{bmatrix} \Delta U_m(k) \geq \begin{bmatrix} u(k-1)-u_{\max}(k) \\ u(k-1)-u_{\max}(k+1) \\ \vdots \\ u(k-1)-u_{\max}(k+m-1) \\ u_{\min}(k)-u(k-1) \\ u_{\min}(k+1)-u(k-1) \\ \vdots \\ u_{\min}(k+m-1)-u(k-1) \end{bmatrix}$$

其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

4.3 约束优化问题求解

输出约束

$$y_{\min}(k+i) \le y(k+i) \le y_{\max}(k+i),\ i=1,2\cdots,p$$

其中

$$Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{ss}\overset{\frown}{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

$$\Rightarrow \quad Cx \ge b$$

4.3 约束优化问题求解

转换后的输出约束

$$\begin{bmatrix} -\bar{S}_u \\ \bar{S}_u \end{bmatrix} \Delta U_m(k) \geq \begin{bmatrix} \bar{M}_{ss}\hat{Y}(k) + \bar{S}_d \Delta d(k) - Y_{\max}(k) \\ Y_{\min}(k) - \bar{M}_{ss}\hat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k) \end{bmatrix}$$

其中

$$Y_{\max}(k) = \begin{bmatrix} y_{\max}(k+1) \\ y_{\max}(k+2) \\ \vdots \\ y_{\max}(k+p) \end{bmatrix}, \quad Y_{\min}(k) = \begin{bmatrix} y_{\min}(k+1) \\ y_{\min}(k+2) \\ \vdots \\ y_{\min}(k+p) \end{bmatrix}$$

4.3 约束优化问题求解

约束优化问题的QP描述

$$\min_{\Delta U_m(k)} \left(\Delta U_m(k)\right)^T H \Delta U_m(k) - G(k+1)\Delta U_m(k)$$

$$\text{s.t.} \quad C\Delta U_m(k) \geq b(k+1)$$

其中

$$H = \bar{S}_u^T \left(\Gamma^y\right)^T \Gamma^y \bar{S}_u + \left(\Gamma^u\right)^T \Gamma^u$$

$$G(k+1) = 2\bar{S}_u^T \left(\Gamma^y\right)^T \Gamma^y E_p(k+1)$$

$$C = \begin{bmatrix} -I \\ I \\ -L \\ L \\ -\bar{S}_u \\ \bar{S}_u \end{bmatrix}$$

4.3 约束优化问题求解

$$
b(k+1)=\begin{bmatrix}
-\Delta u_{\max}(k) \\
\vdots \\
-\Delta u_{\max}(k+m-1) \\
-\Delta u_{\min}(k) \\
\vdots \\
-\Delta u_{\min}(k+m-1) \\
u(k-1)-u_{\max}(k) \\
\vdots \\
u(k-1)-u_{\max}(k+m-1) \\
u_{\min}(k)-u(k-1) \\
\vdots \\
u_{\min}(k+m-1)-u(k-1) \\
\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)-Y_{\max}(k) \\
Y_{\min}(k)-\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)-\bar{S}_d\Delta d(k)
\end{bmatrix}
$$

第4章 约束预测控制

4.1 问题描述

4.2 二次规划

4.3 约束优化问题求解

4.4 约束预测控制器实现

4.4 约束预测控制器实现

约束预测控制算法：

1） $k=0$时刻，初始化

- 模型参数M_{ss}，S_u，S_d
- 预测方程参数$\bar{M}_{ss}$，$\bar{S}_u$，$\bar{S}_d$
- 控制器参数Γ^y，Γ^u，p，m
- H，C
- 初始状态$\widehat{Y}(-1)=\begin{bmatrix} y_0 & y_0 & \cdots & y_0 \end{bmatrix}$

4.4 约束预测控制器实现

约束预测控制算法：

2） $k \geq 0$时刻，基于最新的测量信息进行状态估计

- 直接校正方程

$$Y(k|k-1) = M_{ss}\hat{Y}(k-1) + S_u\Delta u(k-1) + S_d\Delta d(k-1)$$

$$\hat{Y}(k) = Y(k|k-1) + K_I\left(\bar{y}(k) - y(k|k-1)\right)$$

- 状态观测器

$$\hat{Y}(k) = M_{ss}\hat{Y}(k-1) + S_u\Delta u(k-1) + S_d\Delta d(k-1) + K_F\left(\bar{y}(k) - C\hat{Y}(k-1)\right)$$

$\Rightarrow \hat{Y}(k)$

4.4 约束预测控制器实现

约束预测控制算法：

3）计算误差项、$G(k+1)$、$b(k+1)$

$$E_p(k+1) = R_p(k+1) - \bar{M}_{ss}\hat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k)$$

$$G(k+1) = 2\bar{S}_u^T \left(\Gamma^y\right)^T \Gamma^y E_p(k+1)$$

$$b(k+1) = \begin{bmatrix} -\Delta u_{\max}(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{\min}(k) - \bar{M}_{ss}\hat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k) \end{bmatrix}$$

4.4 约束预测控制器实现

约束预测控制算法：

4）求解QP问题，如有解

$$\Delta U_m^*(k) = \left[\Delta u^*(k) \quad \Delta u^*(k+1) \quad \cdots \quad \Delta u^*(k+m-1) \right]^T$$

$$\Delta u(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \Delta U_m^*(k)$$

如无解，则控制器失败，需另行处理

注：QP问题有解的条件$H > 0$ （可通过选择加权阵）

5）k+1时刻，获得新的测量信息，返回第2）步

本章小结

本章主要内容：

1）约束预测控制器的设计

转化为求解开环优化问题， 如何求解?

2）二次规划

实现了约束优化问题的求解

3）约束预测控制算法实现

后面章节重点讲解：约束预测控制器稳定性分析