Predictive Control

预测控制

第3章 无约束预测控制

控制科学与工程

2019年3月

内容回顾

第2章所讲的主要内容：

- 阶跃响应模型
- 脉冲响应模型
- CARIMA模型
- 状态空间模型
- 状态估计（利用最新测量信息获得系统状态）
- 预测（预测系统未来输出）
- 数据驱动建模与预测

内容回顾

预测控制：

- 建模：获得预测模型
- 预测：获得对系统未来输出的预测值
- 设计：将预测控制器的设计问题转化为求解一个优化问题，从而获得控制律/控制序列
- 分析：稳定性、跟踪性能

介绍不同系统的预测控制器设计与性能分析方法

内容回顾

接下来：

- 无约束线性系统
  - 预测控制器设计与性能分析 ----第3章
- 约束线性系统
  - 预测控制器设计 ----第4章
  - 稳定性分析 ----第5章
  - 显式预测控制 ----第6章
- 非线性系统
  - 准无限时域非线性预测控制器设计----第7章

第3章 无约束预测控制

3.1 问题描述

问题描述

对于用阶跃响应状态空间模型描述的线性系统：

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

设计预测控制器，使系统输出跟踪给定的参考输出

→ 优化问题

3.1 问题描述

目标函数，例：希望系统输出接近参考输出

$$J=\sum_{i=1}^{p}\left\|y(k+i\mid k)-r(k+i)\right\|^{2}$$

其中$r(k+i), i=1,2,\ldots,p$为参考输出序列。

多个输出，还可对输出加权

$$J=\sum_{i=1}^{p}\left\|\Gamma_i^y\left(y(k+i\mid k)-r(k+i)\right)\right\|^{2}$$

- 加权因子Γ_i^y越大，则输出越接近参考轨迹
- 在整个预测过程中，Γ_i^y是可以变化的

3.1 问题描述

目标函数，如果我们不希望控制动作变化太大

$$J=\sum_{i=1}^{p}\left\|\Gamma_i^y\left(y(k+i\,|\,k)-r(k+i)\right)\right\|^2+\sum_{i=1}^{m}\left\|\Gamma_i^u\Delta u(k+i-1)\right\|^2$$

- 加权因子Γ_i^u越大，则控制动作变化越小
- 在整个预测过程中，Γ_i^u是可以变化的
- $\Gamma_i^u\neq 0$对控制动作的约束是软约束（无约束**MPC**）
- $\Delta u_{\min}\leq\Delta u(k+i)\leq\Delta u_{\max}$为硬约束（约束**MPC**）

3.1 问题描述

优化问题：

无约束预测控制器设计问题

Find $\min\limits_{\Delta u(k),\Delta u(k+1),\ldots,\Delta u(k+m-1)} J$

with $J=\sum_{i=1}^{p}\left\|\Gamma_i^y\left(y(k+i\,|\,k)-r(k+i)\right)\right\|^2+\sum_{i=1}^{m}\left\|\Gamma_i^u\Delta u(k+i-1)\right\|^2$

s.t.

$$Y_p(k+1\,|\,k)=\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

其中

$\Gamma_i^y, i=1,2,\ldots,p$ 为输出加权因子

$\Gamma_i^u, i=1,2,\ldots,m$ 为控制增量加权因子

开环优化

第3章 无约束预测控制

3.1 问题描述

3.2 开环优化问题

3.3 滚动时域与闭环控制

3.4 无约束预测控制性能分析

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

3.2 开环优化问题

开环优化问题（矩阵向量形式）：

$$\text{Find} \quad \min_{\Delta U_m(k)} J$$

$$\text{with} \quad J = \left\| \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^u \Delta U_m(k) \right\|^2$$

s.t.

$$Y_p(k+1|k) = \bar{M}_{ss} \widehat{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$

其中

$$\Gamma^y = \mathrm{diag}(\Gamma_1^y, \Gamma_2^y, \cdots, \Gamma_p^y), \quad \Gamma^u = \mathrm{diag}(\Gamma_1^u, \Gamma_2^u, \cdots, \Gamma_m^u)$$

$$R_p(k+1) = \begin{bmatrix} r(k+1) & r(k+2) & \cdots & r(k+p) \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta U_m(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) & \Delta u(k+1) & \cdots & \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}^T$$

3.2 开环优化问题

定义

$$\rho = \begin{bmatrix} \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \\ \Gamma^u \Delta U_m(k) \end{bmatrix}$$

$$\rho = Ax - b$$

其中 $Y_p(k+1|k) = \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$

则 $J = \left\| \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^u \Delta U_m(k) \right\|^2$

$$J = \rho^T \rho$$

3.2 开环优化问题

开环优化问题的等价形式：

$$\text{Find} \quad \min_{x} \rho^T \rho, \quad \text{s.t.} \quad \rho = Ax - b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma^y \bar{S}_u \\ \Gamma^u \end{bmatrix}$$

$$x = \Delta U_m(k)$$

$$b = \begin{bmatrix} \Gamma^y E_p(k+1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_p(k+1) = R_p(k+1) - \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k)$$

3.2 开环优化问题

对于优化问题：

$$\text{Find} \quad \min_x \rho^T \rho, \quad \text{s.t.} \quad \rho = Ax - b$$

极小值存在的条件

$$\frac{d^2\left(\rho^T \rho\right)}{dx^2} > 0$$

对向量的求导：

$$\frac{dX^T Y}{dx} = \frac{dX^T}{dx} Y + \frac{dY^T}{dx} \left(X^T\right)^T$$

3.2 开环优化问题

极小值存在条件：

$$\frac{d^2\left(\rho^T\rho\right)}{dx^2}=2A^TA>0$$

极小值：

$$\frac{d\rho^T\rho}{dx}=2(\frac{d\rho}{dx})^T\rho=2A^T(Ax-b)=0\Rightarrow x=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$A=\begin{bmatrix}\Gamma^y\bar{S}_u\\ \Gamma^u\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}\Gamma^yE_p(k+1)\\ 0\end{bmatrix}$$

3.2 开环优化问题

开环优化问题的解（**k时刻的最优控制序列**）：

$$\frac{d\rho^T\rho}{dx}=0$$

$$\boxed{\Delta U_m(k)=\left(\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y\bar{S}_u+\left(\Gamma^u\right)^T\Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y E_p(k+1)}$$

其中 $E_p(k+1)=R_p(k+1)-\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)-\bar{S}_d\Delta d(k)$

误差项

第3章 无约束预测控制

3.3 滚动时域与闭环控制

k时刻的最优控制序列:

$$\Delta U_m(k)=\left(\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y\bar{S}_u+\left(\Gamma^u\right)^T\Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y E_p(k+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta U_m(k)=\left[\Delta u(k)\quad \Delta u(k+1)\quad \cdots\quad \Delta u(k+m-1)\right]^T$$

k时刻实际施加到系统中的控制增量: $\Delta u(k)$

k+1时刻，新的测量值 $y(k+1)$**，重新计算**$\Delta u(k+1)$

3.3 滚动时域与闭环控制

k时刻作用于系统的控制增量:

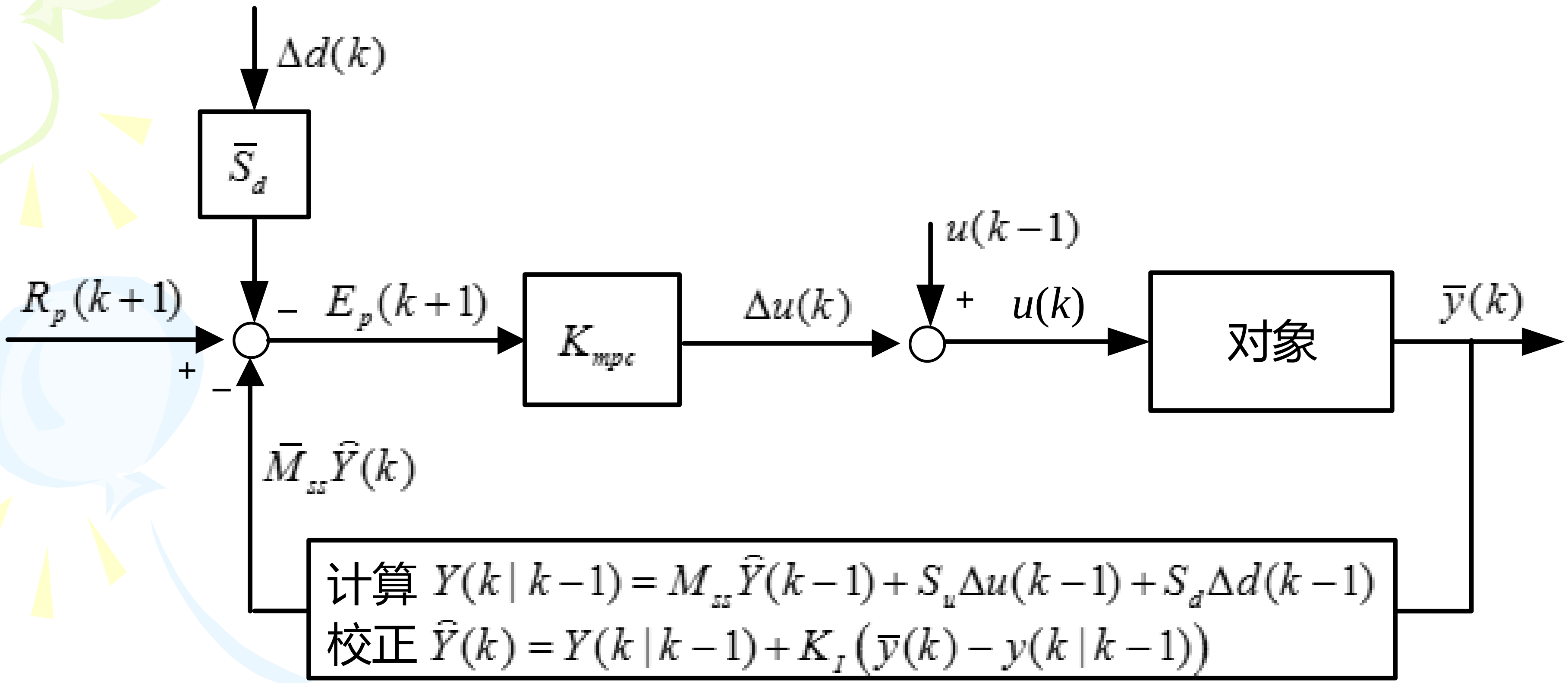
$$\Delta u(k) = K_{mpc} E_p(k+1)$$
$$= K_{mpc}\left(R_p(k+1) - \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k)\right)$$

其中

$$\boxed{K_{mpc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\left(\left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y \bar{S}_u + \left(\Gamma^u\right)^T \Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y}$$

$\Longrightarrow$ 显式控制律、可离线计算

3.3 滚动时域与闭环控制



直接校正方程/状态观测器

无约束预测控制：前馈+基于状态估计的反馈控制

3.3 滚动时域与闭环控制

无约束预测控制算法：

1） $k=0$时刻，初始化

- 模型参数 M_{ss}，S_u，S_d
- 预测方程参数 $\bar{M}_{ss}$，$\bar{S}_u$，$\bar{S}_d$
- 控制器参数 Γ^y，Γ^u，p，m
- K_{mpc}
- 初始状态 $\widehat{Y}(-1)=\begin{bmatrix} y_0 & y_0 & \cdots & y_0 \end{bmatrix}$

3.3 滚动时域与闭环控制

无约束预测控制算法：

2） $k \geq 0$时刻，基于最新的测量信息进行状态估计

- 直接校正方程

$$Y(k|k-1) = M_{ss}\widehat{Y}(k-1) + S_u\Delta u(k-1) + S_d\Delta d(k-1)$$

$$\widehat{Y}(k) = Y(k|k-1) + K_I\left(\bar{y}(k) - y(k|k-1)\right)$$

- 状态观测器

$$\widehat{Y}(k) = M_{ss}\widehat{Y}(k-1) + S_u\Delta u(k-1) + S_d\Delta d(k-1) + K_F\left(\bar{y}(k) - C\widehat{Y}(k-1)\right)$$

$\Rightarrow \widehat{Y}(k)$

3.3 滚动时域与闭环控制

无约束预测控制算法：

3）计算误差项

$$E_p(k+1) = R_p(k+1) - \bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) - \bar{S}_d \Delta d(k)$$

4）计算控制增量

$$\Delta u(k) = K_{mpc} E_p(k+1)$$

5）k+1时刻，获得新的测量信息，返回第2）步

3.3 滚动时域与闭环控制

无约束预测控制算法：

1）初始化 ⟵ $k=0$时刻

2）状态估计

3）计算误差项

4）计算控制增量

$k \geq 0$时刻

5）下一时刻，获得新的测量信息，返回第2）步

内容回顾

对于给定无约束系统

$$Y(k+1)=M_{ss}Y(k)+S_u\Delta u(k)+S_d\Delta d(k)$$

预测控制器设计问题 ⇨ 开环优化问题

$$\Delta U_m(k)=\left(\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y\bar{S}_u+\left(\Gamma^u\right)^T\Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y E_p(k+1)$$

滚动时域与闭环控制

$$\Delta U_m(k)=\left[\Delta u(k)\quad \Delta u(k+1)\quad \cdots\quad \Delta u(k+m-1)\right]^T$$

控制系统稳定性/跟踪性能？

3.1 问题描述

3.2 开环优化问题

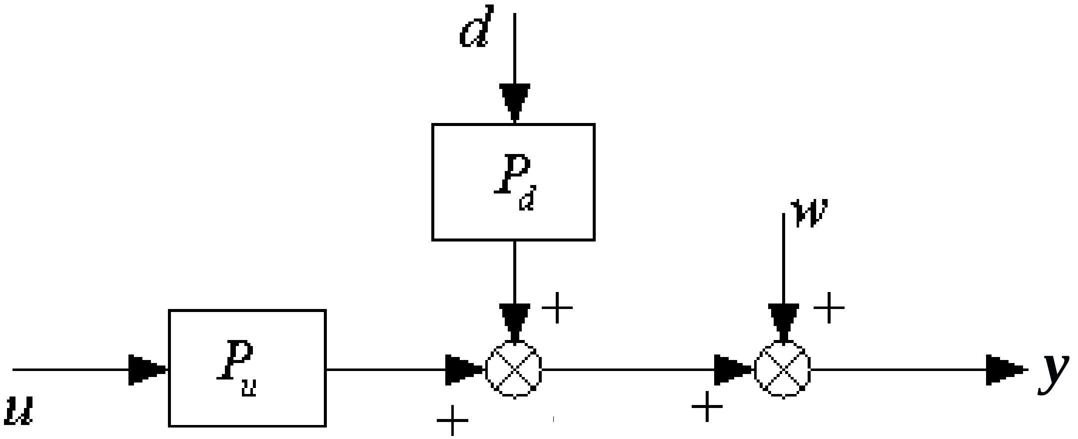
3.3 滚动时域与闭环控制

3.4 无约束预测控制性能分析

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

3.4 无约束预测控制性能分析

系统模型



$$Y(k+1)=M_{ss}Y(k)+S_u\Delta u(k)+S_d\Delta d(k)+S_w\Delta w(k)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

3.4.1 稳定性分析

稳定性分析的一般思路

系统模型

$$Y(k+1) = M_{ss}Y(k) + S_u\Delta u(k) + S_d\Delta d(k) + S_w\Delta w(k)$$

反馈控制律

$$\Delta u(k) = K_{mpc}R_p(k+1) - K_{mpc}\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k) - K_{mpc}\bar{S}_d\Delta d(k)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

将反馈控制律代入系统模型：

$$Y(k+1)=M_{ss}Y(k)-S_uK_{mpc}\bar{M}_{ss}\hat{Y}(k)+\left(S_d-S_uK_{mpc}\bar{S}_d\right)\Delta d(k)$$
$$+S_uK_{mpc}R_p(k+1)+S_w\Delta w(k)$$

能否说M_{ss}的特征根在单位圆内，系统就是稳定的？

3.4 无约束预测控制性能分析

状态观测器：

$$\hat{Y}(k+1) = M_{ss}\hat{Y}(k) + S_u \Delta u(k) + S_d \Delta d(k) + K_F\left(\bar{y}(k) - C\hat{Y}(k)\right)$$

$$= M_{ss}\hat{Y}(k) + S_u \Delta u(k) + S_d \Delta d(k) + K_F\left(CY(k) - C\hat{Y}(k)\right)$$

反馈控制律

$$\Delta u(k) = K_{mpc}R_p(k+1) - K_{mpc}\bar{M}_{ss}\hat{Y}(k) - K_{mpc}\bar{S}_d \Delta d(k)$$

将反馈控制律代入状态观测器：

$$\hat{Y}(k+1) = K_F C Y(k) + \left(M_{ss} - S_u K_{mpc}\bar{M}_{ss} - K_F C\right)\hat{Y}(k)$$

$$+\left(S_d - S_u K_{mpc}\bar{S}_d\right)\Delta d(k) + S_u K_{mpc} R_p(k+1)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

组成扩展系统：

$$\begin{bmatrix} Y(k+1) \\ \hat{Y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ K_F C & M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} - K_F C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(k) \\ \hat{Y}(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} S_d - S_u K_{mpc} \bar{S}_d \\ S_d - S_u K_{mpc} \bar{S}_d \end{bmatrix} \Delta d(k) + \begin{bmatrix} S_u K_{mpc} \\ S_u K_{mpc} \end{bmatrix} R_p(k+1) + \begin{bmatrix} S_w \\ 0 \end{bmatrix} \Delta w(k)$$

闭环系统稳定性取决于 $\begin{bmatrix} M_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ K_F C & M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$

3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ K_F C & M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

需要解决两个问题，即K_{mpc} $\begin{cases} \text{是否存在？} \\ \text{如何选取？} \end{cases}$

3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ K_F C & M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

选取非奇异阵***P***

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

作相似变换

3.4 无约束预测控制性能分析

相似变换结果

$$P\begin{bmatrix} M_{ss} & -S_u K_{mpc}\bar{M}_{ss} \\ K_F C & M_{ss}-S_u K_{mpc}\bar{M}_{ss}-K_F C \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} M_{ss}-S_u K_{mpc}\bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc}\bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss}-K_F C \end{bmatrix}$$

3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

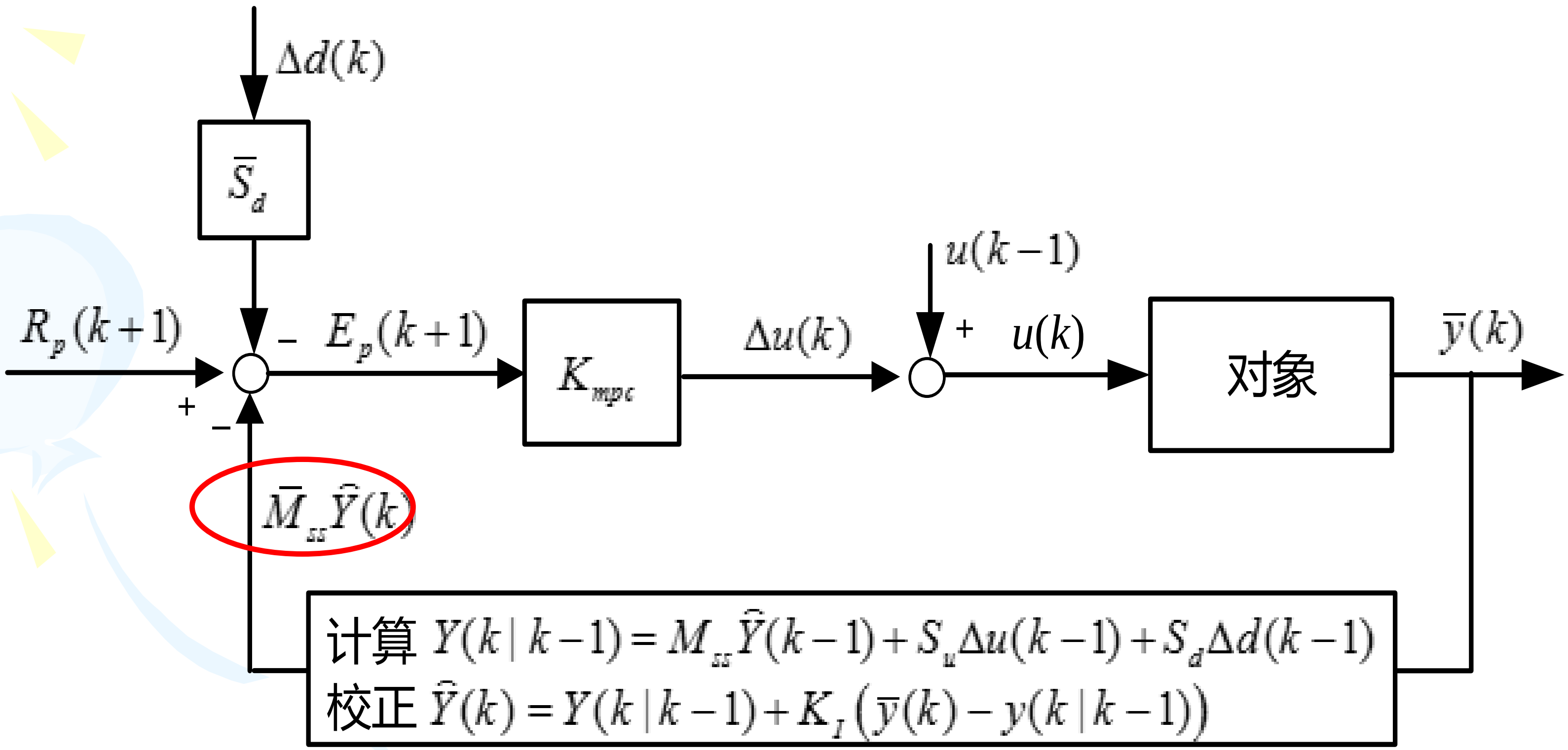
$$\begin{bmatrix} M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

代入反馈控制律后的系统模型：

$$Y(k+1) = M_{ss} Y(k) - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \widehat{Y}(k) + \left(S_d - S_u K_{mpc} \bar{S}_d \right) \Delta d(k)$$
$$+ S_u K_{mpc} R_p(k+1) + S_w \Delta w(k)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

无约束预测控制系统框图



3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

代入反馈控制律后的系统模型：

$$\begin{aligned} Y(k+1) = {} & M_{ss} Y(k) - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \widehat{Y}(k) + \left(S_d - S_u K_{mpc} \bar{S}_d \right) \Delta d(k) \\ & + S_u K_{mpc} R_p(k+1) + S_w \Delta w(k) \end{aligned}$$

稳定性取决于没有观测器直接反馈系统的稳定性。

3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

状态观测器：

$$\widehat{Y}(k+1) = M_{ss}\widehat{Y}(k) + S_u \Delta u(k) + S_d \Delta d(k) + K_F \left(\bar{y}(k) - C\widehat{Y}(k) \right)$$

稳定性取决于状态观测器的稳定性。

3.4 无约束预测控制性能分析

闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

代入反馈控制律后的系统模型：

$$Y(k+1) = M_{ss} Y(k) - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \hat{Y}(k) + \left(S_d - S_u K_{mpc} \bar{S}_d \right) \Delta d(k) + S_u K_{mpc} R_p(k+1) + S_w \Delta w(k)$$

状态观测器：

$$\hat{Y}(k+1) = M_{ss} \hat{Y}(k) + S_u \Delta u(k) + S_d \Delta d(k) + K_F \left(\bar{y}(k) - C \hat{Y}(k) \right)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

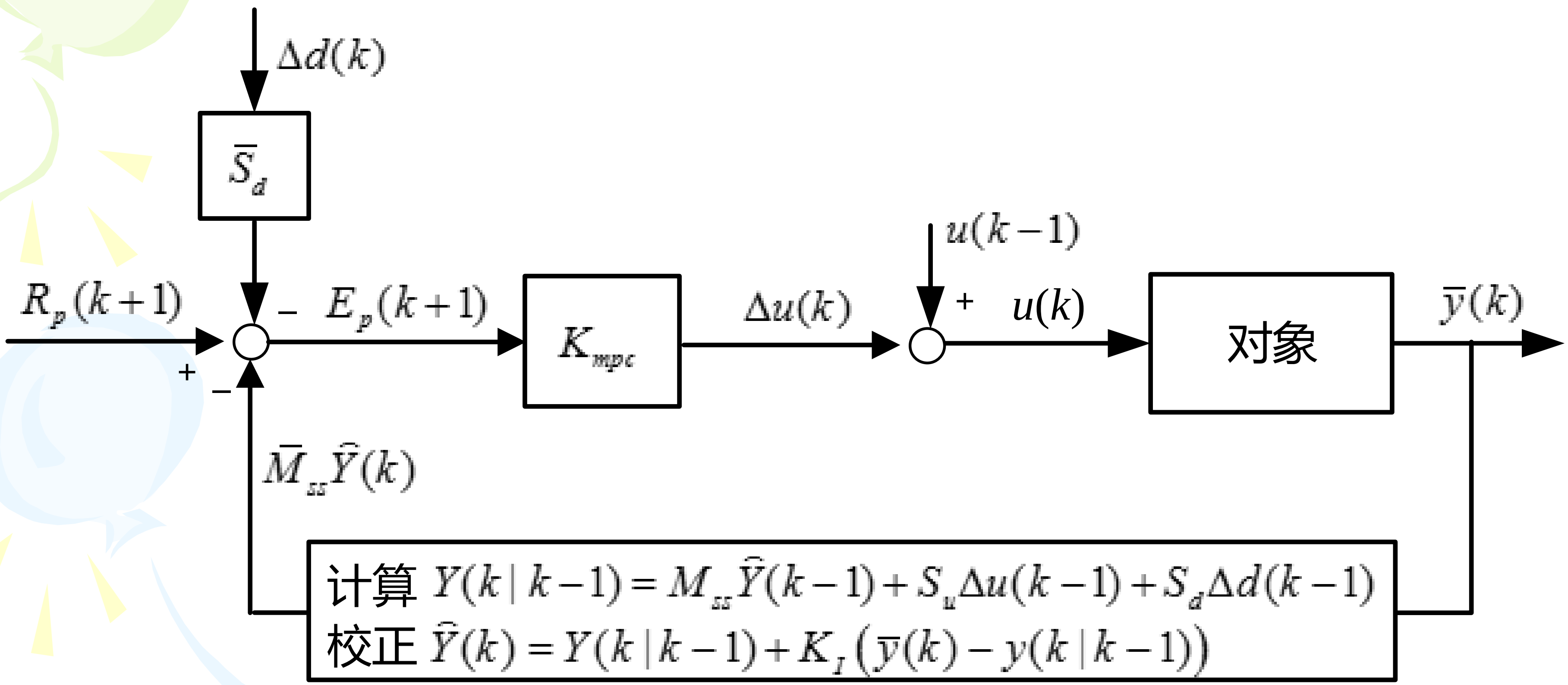
闭环系统稳定性取决于

$$\begin{bmatrix} M_{ss} - S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} & -S_u K_{mpc} \bar{M}_{ss} \\ 0 & M_{ss} - K_F C \end{bmatrix}$$

- 闭环系统的极点由状态反馈控制器的极点和状态观测器的极点组成
- 对无约束预测控制系统分离原理成立
- 无约束预测控制是基于观测器的状态反馈控制

结论：无约束预测控制闭环系统稳定，当且仅当状态反馈控制器稳定和状态观测器稳定。

3.4 无约束预测控制性能分析



K_{mpc}的存在条件：没有观测器的直接反馈系统**可镇定**

K_F 的存在条件：系统**可观测**

3.4 无约束预测控制性能分析

3.4.2 跟踪性能分析

系统模型

$$Y(k+1)=M_{ss}Y(k)+S_u\Delta u(k)+S_d\Delta d(k)+S_w\Delta w(k)$$

$$y(k+1)=CY(k+1)$$

假设闭环系统渐进稳定，且

- 估计误差已经为零，$Y(k)=\hat{Y}(k),\ k\geq 0$
- 外部干扰趋于不变，$\Delta d(k)=0,\ \Delta w(k)=0,\ k\geq 0$

为简化推导，取 $m=p,\ \Gamma^y=I,\ \Gamma^u=0$

3.4 无约束预测控制性能分析

***k*时刻最优解**

$$\Delta u(k)=K_{mpc}\left(R_p(k+1)-\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)-\bar{S}_d\Delta d(k)\right)$$

$$K_{mpc}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\left(\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y\bar{S}_u+\left(\Gamma^u\right)^T\Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y$$

$$\bar{S}_u=\begin{bmatrix}s_1^u & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ s_2^u & s_1^u & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ s_m^u & s_{m-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & s_1^u\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ s_p^u & s_{p-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & s_{p-m+1}^u\end{bmatrix}_{p\times m}$$

3.4 无约束预测控制性能分析

则

$$K_{mpc}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\left(\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y\bar{S}_u+\left(\Gamma^u\right)^T\Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y\bar{S}_u\right)^T\Gamma^y$$

$$=\begin{bmatrix}\left(s_1^u\right)^{-1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{1\times p}$$

$$\Delta u(k)=K_{mpc}\left(R_p(k+1)-\bar{M}_{ss}\hat{Y}(k)-\bar{S}_d\Delta d(k)\right)$$

$$=\left(s_1^u\right)^{-1}\left(r(k+1)-\hat{y}(k+1)\right)$$

系统模型

$$Y(k+1)=M_{ss}Y(k)+S_u\Delta u(k)+S_d\Delta d(k)+S_w\Delta w(k)$$

3.4 无约束预测控制性能分析

输出序列

$$y(k+1)=CY(K+1)$$

$$=\underline{y(k+1)+r(k+1)-\widehat{y}(k+1)}$$

$$=r(k+1)$$

用到估计误差已经为零的假设

$$y(k+2)=CY(k+2)$$

$$=CM_{ss}Y(k+1)+CS_u\left(s_1^u\right)^{-1}\left(r(k+2)-\widehat{y}(k+2)\right)$$

$$=r(k+2)$$

$$\vdots$$

3.4 无约束预测控制性能分析

基于阶跃响应模型的无约束预测控制系统

$$y(k+1)=r(k+1)$$

$$y(k+2)=r(k+2)$$

$$\vdots$$

结论：当外部干扰趋于不变时，系统对非零参考输入信号的跟踪是无静差的。

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

3.5.1 有限时域预测控制

线性稳定SISO系统离散时间状态空间模型

$$x(k) = Ax(k-1) + B_u u(k-1) + B_d d(k-1)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

增量模型

$$\Delta x(k) = A\Delta x(k-1) + B_u \Delta u(k-1) + B_d \Delta d(k-1)$$
$$y(k) = C\Delta x(k) + y(k-1)$$

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

问题描述

$$\text{Find}\quad \min_{\Delta U_m(k)} \left\| \Gamma^y \left(Y_p(k+1|k) - R_p(k+1) \right) \right\|^2 + \left\| \Gamma^u \Delta U_m(k) \right\|^2$$

s.t.

$$Y_p(k+1|k) = \bar{S}_x \Delta\hat{x}(k) + Ly(k) + \bar{S}_u \Delta U_m(k) + \bar{S}_d \Delta d(k)$$

其中

$$\Gamma^y = \mathrm{diag}(\Gamma_1^y, \Gamma_2^y, \cdots, \Gamma_p^y),\ \Gamma^u = \mathrm{diag}(\Gamma_1^u, \Gamma_2^u, \cdots, \Gamma_m^u)$$

$$R_p(k+1) = \left[r(k+1) \quad r(k+2) \quad \cdots \quad r(k+p) \right]^T$$

$$\Delta U_m(k) = \left[\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \cdots \quad \Delta u(k+m-1) \right]^T$$

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

$$\bar{S}_x = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 + CA \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} CA^i \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{S}_d = \begin{bmatrix} CB_d \\ CAB_d + CB_d \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} CA^{i-1} B_d \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_u = \begin{bmatrix} CB_u & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB_u & CB_u & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} CA^{i-1} B_u & \sum_{i=1}^{p-1} CA^{i-1} B_u & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^{p-m+1} CA^{i-1} B_u \end{bmatrix}$$

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

k时刻作用于系统的控制增量:

$$\Delta u(k) = K_{mpc} E_p(k+1)$$
$$= K_{mpc}\left(R_p(k+1) - \bar{S}_x \Delta\hat{x}(k) - Ly(k) - \bar{S}_d \Delta d(k)\right)$$

其中

$$\boxed{K_{mpc} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\left(\left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y \bar{S}_u + \left(\Gamma^u\right)^T \Gamma^u\right)^{-1} \left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y}$$

$\longrightarrow$ 可离线计算

无约束预测控制：前馈+基于状态估计的反馈控制

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

3.5.2 无限时域预测控制

问题描述

$$\text{Find} \min_{\Delta U(k)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\| \Gamma^{y} \left(y(k+i\,|\,k) - r(k+i) \right) \right\|^{2} + \left\| \Gamma^{u} \Delta u(k+i-1) \right\|^{2} \right)$$

s.t.

$$Y_{p}(k+1\,|\,k) = \bar{S}_{x} \Delta \hat{x}(k) + L y(k) + \bar{S}_{u} \Delta U_{m}(k) + \bar{S}_{d} \Delta d(k)$$

其中$\Gamma^{y} = ?$ $\Gamma^{u} = ?$ 与i有关吗?

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

反馈控制律

$$\Delta u(k) = K_{mpc}\left(R_p(k+1) - \bar{S}_x \Delta\hat{x}(k) - Ly(k) - \bar{S}_d \Delta d(k))\right)$$

其中

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\left(\left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y \bar{S}_u + \left(\Gamma^u\right)^T \Gamma^u\right)^{-1}\left(\Gamma^y \bar{S}_u\right)^T \Gamma^y$$

p很大的时候，会导致计算困难。

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

状态空间增量模型

$$\Delta x(k) = A\Delta x(k-1) + B_u \Delta u(k-1)$$

$$y(k) = C\Delta x(k) + y(k-1)$$

目标函数

$$J = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\Gamma^y\left(y(k+i) - r(k+i)\right)\right\|^2 + \left\|\Gamma^u \Delta u(k+i-1)\right\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(k) - r(k) = y(k-1) - r(k-1) + CA\Delta x(k-1) + CB_u \Delta u(k-1) - \Delta r(k)$$

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

构建系统

$$\begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k)-r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k-1) \\ y(k-1)-r(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ CB_u \end{bmatrix} \Delta u(k-1) - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Delta r(k)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}(k) = \tilde{A}\tilde{x}(k-1) + \tilde{B}_u \Delta u(k-1) - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Delta r(k)$$

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

重新描述优化问题

$$\text{Find}\ \min_{\Delta U(k)} \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\tilde{\Gamma}^{y}\tilde{x}(k+i)\right\|^{2}+\left\|\Gamma^{u}\Delta u(k+i-1)\right\|^{2}\right)$$

s.t.

$$\tilde{x}(k)=\tilde{A}\tilde{x}(k-1)+\tilde{B}_{u}\Delta u(k-1)$$

其中 $\tilde{\Gamma}^{y}=\mathrm{diag}(0,\Gamma^{y})$

无限时域预测控制器设计问题被转化为无限时域线性最优二次型调节器问题

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

最优解

$$\Delta u(k) = -K\tilde{x}(k) = -K\begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) - r(k) \end{bmatrix}$$

其中 $K = \tilde{A}^T \Pi \tilde{B}(\tilde{B}^T \Pi \tilde{B} + \tilde{R})^{-1}$

Π 通过求解以下**ARE**方程获得

$$\Pi - \tilde{A}\Pi\tilde{A}^T + \tilde{A}^T \Pi \tilde{B}(\tilde{B}^T \Pi \tilde{B} + \tilde{R})^{-1} \tilde{B}\Pi\tilde{A} - \tilde{Q} = 0$$

其中 $\tilde{R} = \Gamma^{uT}\Gamma^{u}$，$\tilde{Q} = \tilde{D}\tilde{D}^T$，$\tilde{D} = \Gamma^{y}\Gamma^{yT}$

无穷时域带来的计算问题解决了！

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

稳定性分析

结论：

1） $\tilde{R} = \Gamma^{uT}\Gamma^{u} > 0$

$\tilde{R} = 0$ 意味着什么？

$$\text{Find} \quad \min_{\Delta U(k)} \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\tilde{\Gamma}^{y}\tilde{x}(k+i)\right\|^{2} + \left\|\Gamma^{u}\Delta u(k+i-1)\right\|^{2}\right)$$

s.t.

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}\tilde{x}(k-1) + \tilde{B}_{u}\Delta u(k-1)$$

对控制量的惩罚不可以没有！

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

稳定性分析

结论：

2）$(\tilde{A}, \tilde{B})$可镇定

可控与可镇定哪个要求更苛刻些？区别？

$$\text{Find} \quad \min_{\Delta U(k)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\| \tilde{\Gamma}^{y} \tilde{x}(k+i) \right\|^{2} + \left\| \Gamma^{u} \Delta u(k+i-1) \right\|^{2} \right)$$

s.t.

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}\tilde{x}(k-1) + \tilde{B}_{u} \Delta u(k-1)$$

保证闭环系统稳定：控制量的存在性！

3.5 基于状态空间模型的无约束预测控制

稳定性分析

结论：

3）$(\tilde{D},\tilde{A})$可检测

可观测与可检测哪个要求更苛刻些？区别？

$$\tilde{x}(k)=\tilde{A}\tilde{x}(k-1)+\tilde{B}_u\Delta u(k-1)$$

$$y(k)=\tilde{D}^T\tilde{x}(k),\ \ \tilde{Q}=\tilde{D}\tilde{D}^T$$

$$\sum\left(\|\tilde{x}(k)\|_{\tilde{Q}}^2+\|\Delta u(k)\|_{\tilde{R}}^2\right)=\sum\left(y^T(k)y(k)+\Delta u^T(k)\tilde{R}\Delta u(k)\right)$$

找到的控制量满足条件！

本章小结

本章主要内容：

1）无约束预测控制器的设计

转化为求解开环优化问题，实施闭环控制

2）稳定性分析

当且仅当状态反馈控制器稳定和状态观测器稳定

3）无限时域无约束预测控制

后面章节重点讲解：约束预测控制器设计与分析