Predictive Control

预测控制

第2章 模型与预测

控制科学与工程

2019年3月

内容回顾

为什么会出现预测控制？

预测控制起源于工业应用，解决实际控制问题，成功应用后才有相应的理论研究。

实际系统中存在各种各样的约束

- 控制输入约束（执行机构饱和）
- 系统状态和输出约束（安全生产和环境保护）
- 对系统动力学的约束（能量守恒定理等代数方程）

预测控制是处理约束系统控制问题的有效方法之一。

内容回顾

为什么会出现预测控制？

预测控制是在最优控制的基础上发展起来的。

系统建模过程中面临众多问题

- 未建模动态（部分模型动力学特性过于复杂）
- 扰动（环境作用产生的不可测扰动等）
- 参数摄动（系统运行过程中的参数变化）

预测控制是处理约束系统优化控制的一种可行的方法。

内容回顾

预测控制的基本原理：

Find $\min\limits_{u(*)} J \qquad \{u(k), u(k+1), \cdots u(k+T_c)\}$

with $\quad J = \sum_{i=0}^{T_p} \left\| y(k+i) - r(k+i) \right\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{T_c} \left\| u(k+i) \right\|_R^2$

s.t.

$$y(k+i+1) = f(y(k+i), u(k+i))$$

$$y(k+i) \in Y \qquad i = 0, 1, 2, \cdots T_p$$

$$u(k+i) \in U \qquad i = 0, 1, 2, \cdots T_c$$

内容回顾

预测控制的基本特点：

- 基于模型的预测
- 滚动优化
- 反馈控制
- 显式处理约束

$$\text{Find} \quad \min_{u(*)} J \qquad \{u(k), u(k+1), \cdots u(k+T_c)\}$$

$$\text{with} \quad J = \sum_{i=0}^{T_p} \left\| y(k+i) - r(k+i) \right\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{T_c} \left\| u(k+i) \right\|_R^2$$

s.t.

$$y(k+i+1) = f(y(k+i), u(k+i))$$

$$y(k+i) \in Y \quad i = 0, 1, 2, \cdots T_p$$

$$u(k+i) \in U \quad i = 0, 1, 2, \cdots T_c$$

内容回顾

预测控制：

- 建模：获得预测模型
- 预测：获得对系统未来输出的预测值
- 设计：将预测控制器的设计问题转化为求解一个优化问题，从而获得控制律/控制序列
- 分析：稳定性、跟踪性能

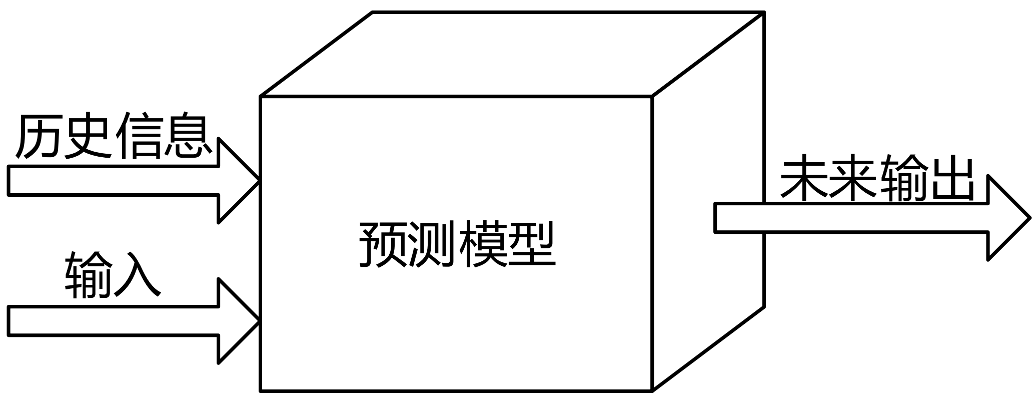
如何建立系统的预测模型？如何基于系统模型预测系统未来的输出？

预测模型：只注重模型的功能，不注重模型的形式

能够预测对象未来的输出即可

- 传递函数
- 非参数模型
  - 阶跃响应模型
  - 脉冲响应模型
- 状态空间模型
- 非线性模型

……



第2章 模型与预测

2.1 阶跃响应模型

2.2 脉冲响应模型

2.3 CARIMA模型

2.4 离散状态空间模型

2.5 状态估计

2.6 多步预测

2.7 数据驱动建模与预测

2.1 阶跃响应模型

2.1.1 稳定系统的阶跃响应模型

考虑单输入单输出（**Signal Input Signal Output, SISO**）系统，其传递函数为

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}$$

其中 $u(s)$为输入，$y(s)$为输出。

如何建立系统阶跃响应模型的状态空间描述？

2.1 阶跃响应模型

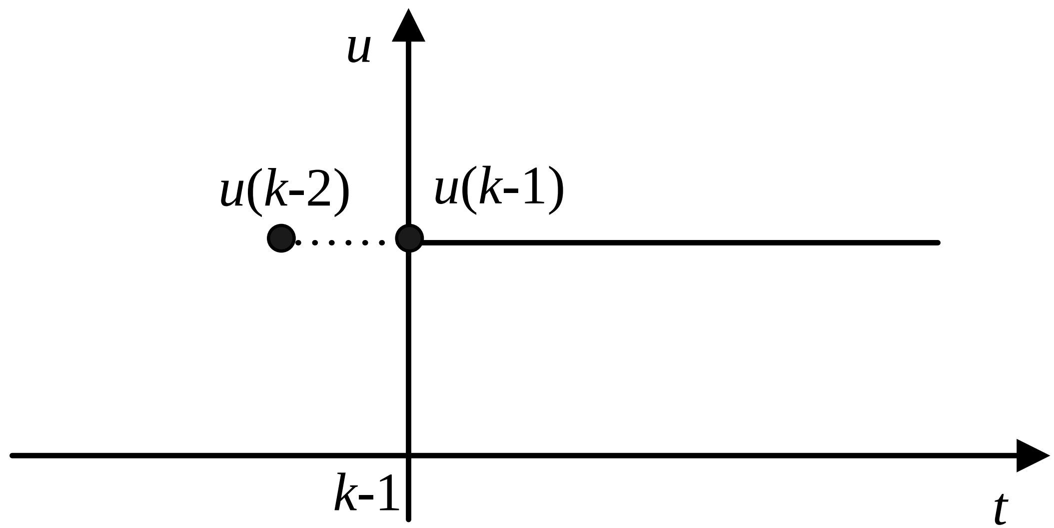
思路： 根据线性系统的叠加原理，在非零初始状态下系统对任意输入变化的响应，可分解为

1）输入保持不变时系统的非零初始状态响应

2）初始状态为零时系统的输入响应

2.1 阶跃响应模型

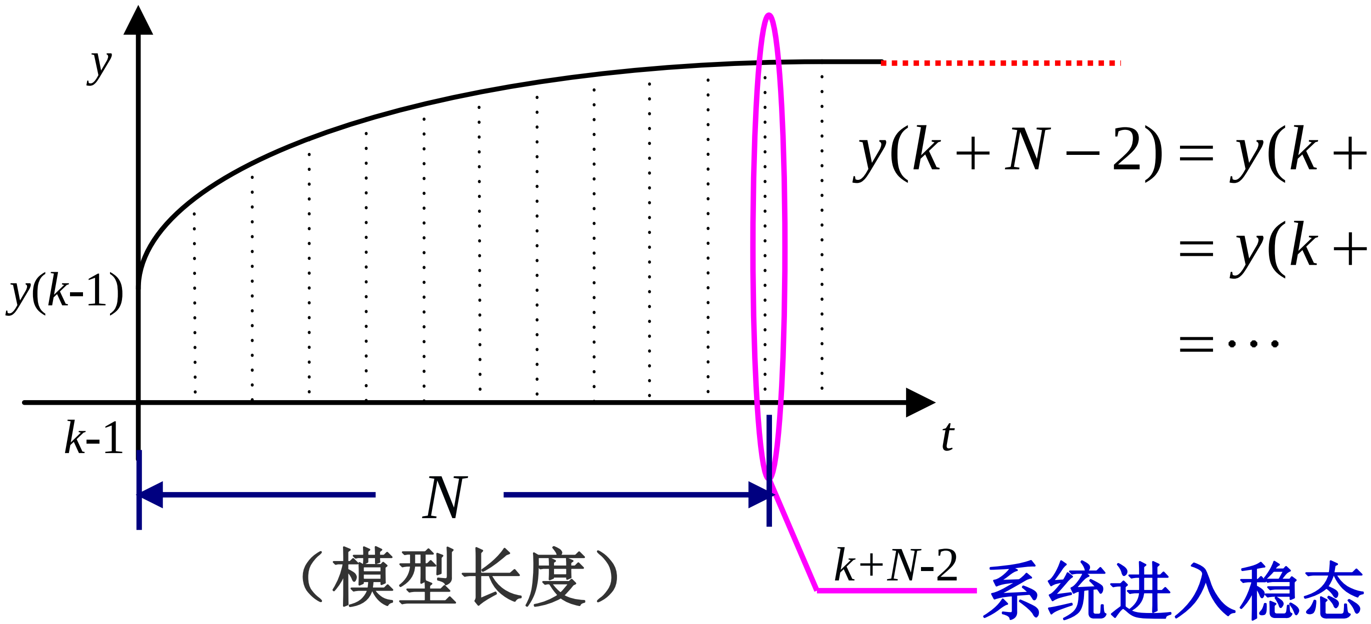
1. 输入保持不变时系统的非零初始状态响应



假设：

1）系统*k*－1时刻及之后输入不变，即$\Delta u(k-1)=\Delta u(k)=\cdots=0$；

2.1 阶跃响应模型



$$y(k+N-2)=y(k+N-1)$$
$$=y(k+N)$$
$$=\cdots$$

假设：

2）系统过渡过程为*N*个采样时间间隔，之后进入稳态。

2.1 阶跃响应模型

定义状态变量

对于根据系统动力学机理建立的状态空间模型，往往选择有物理意义的量（包括它们的导数）作为系统的状态变量。

状态变量的核心特征是它在时间上的因果性，即一个系统的状态变量在当前时刻的取值与未来时刻的输入无关。

2.1 阶跃响应模型

定义

$$Y(k-1)=\begin{cases}[y(k-1),y(k),\cdots,y(k+N-3),y(k+N-2)]^T\\ for\quad \Delta u(k-1)=\Delta u(k)=\Delta u(k+1)=\cdots=0\end{cases}$$

Y*(*k*-1)**与k*-1**时刻之前的输入信息有关，与***k*-1**时刻及以后的输入信息无关。***K*-1**时刻及以后的输入信息已经固定在***Y*(*k*-1)**的定义中了。

因此，称***Y*(*k*-1)**为系统在***k*-1**时刻的“状态”。

注意： ***k*-1**时刻的输入变化即$\Delta u(k-1)\neq 0$将影响***k***时刻的输出，这将影响***k***时刻的状态***Y*(*k*)**。

2.1 阶跃响应模型

同样，定义系统在*k*时刻的状态为

$$Y(k)=\begin{cases}[y(k),y(k+1),\cdots,y(k+N-2),y(k+N-1)]^T\\ for\quad \Delta u(k)=\Delta u(k+1)=\Delta u(k+2)=\cdots=0\end{cases}$$

系统状态的物理意义：

在输入不变条件下系统非零初始状态响应的N步输出，即系统外部输入不变的“自由响应”的N步输出为状态变量的N个分量。

2.1 阶跃响应模型

***K*-1时刻系统状态**

$$Y(k-1)=\begin{cases}[y(k-1),y(k),\cdots,y(k+N-3),y(k+N-2)]^T\\ for\quad \Delta u(k-1)=\Delta u(k)=\Delta u(k+1)=\cdots=0\end{cases}$$

***k*时刻系统状态**

$$Y(k)=\begin{cases}[y(k),y(k+1),\cdots,y(k+N-2),y(k+N-1)]^T\\ for\quad \Delta u(k)=\Delta u(k+1)=\Delta u(k+2)=\cdots=0\end{cases}$$

当$\Delta u(k-1)=0$时***Y*(*k*)**与***Y*(*k*-1)**之间的关系？

2.1 阶跃响应模型

用***k*-1**时刻系统状态表示***k***时刻系统状态：

$$Y(k) = M_{ss} Y(k-1)$$

不变输入
非零初始
状态响应

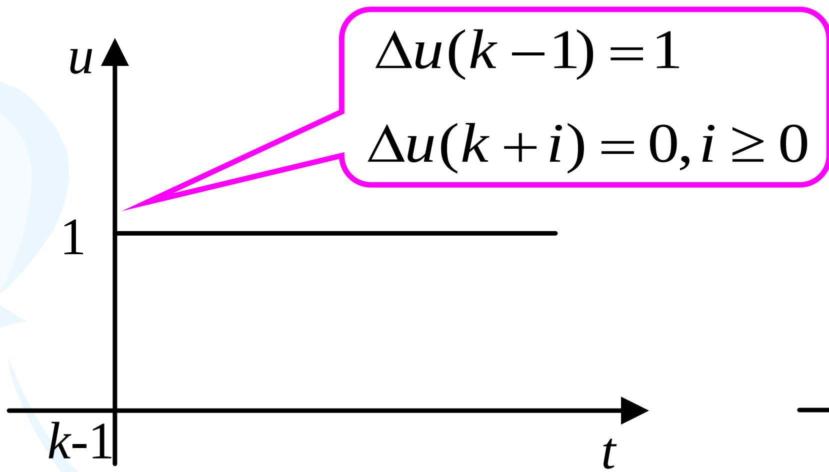
其中

$$M_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]_{N \times N}$$

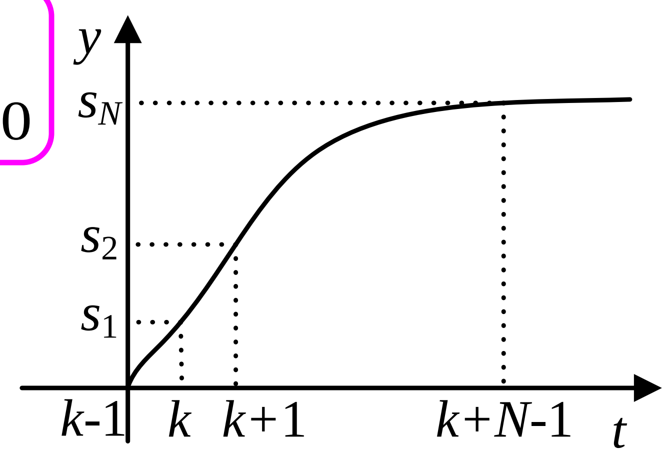
2.1 阶跃响应模型

2. 初始状态为零时系统的输入响应

开环稳定系统的单位阶跃响应实验：



单位阶跃输入



单位阶跃响应

采样的系统单位阶跃响应序列： $\{s_1, s_2, \cdots, s_N, s_N, \cdots\}$

对于任意 $\Delta u(k-1)\neq 0$ 有： $\{s_1, s_2, \cdots, s_N, s_N, \cdots\}\Delta u(k-1)$

2.1 阶跃响应模型

对于任意 $\Delta u(k-1) \neq 0$ 有： $\{s_1, s_2, \cdots, s_N, s_N, \cdots\}\Delta u(k-1)$

记单位阶跃响应系数阵为： $S = [s_1, s_2, \cdots, s_N]^T$

则零初始状态下，系统对任意变化输入的响应可描述为：

$$Y(k) = S\Delta u(k-1)$$

2.1 阶跃响应模型

输入不变时系统的非零初始状态响应：

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)$$

初始状态为零时系统的输入响应：

$$Y(k)=S\Delta u(k-1)$$

由线性系统的叠加原理，在非零初始状态下系统对任意输入变化的响应：

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{模型长度}N\text{（采样时间}T\text{）}\\ \text{单位阶跃响应系数阵}S\end{array}\right.$

状态变量N维一般不是系统的最小实现

2.1 阶跃响应模型

稳定SISO系统的阶跃响应模型：

输出方程：

$$\boxed{\begin{aligned} &Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1) \\ &y(k)=CY(k) \end{aligned}}$$

阶跃响应模型的状态空间描述

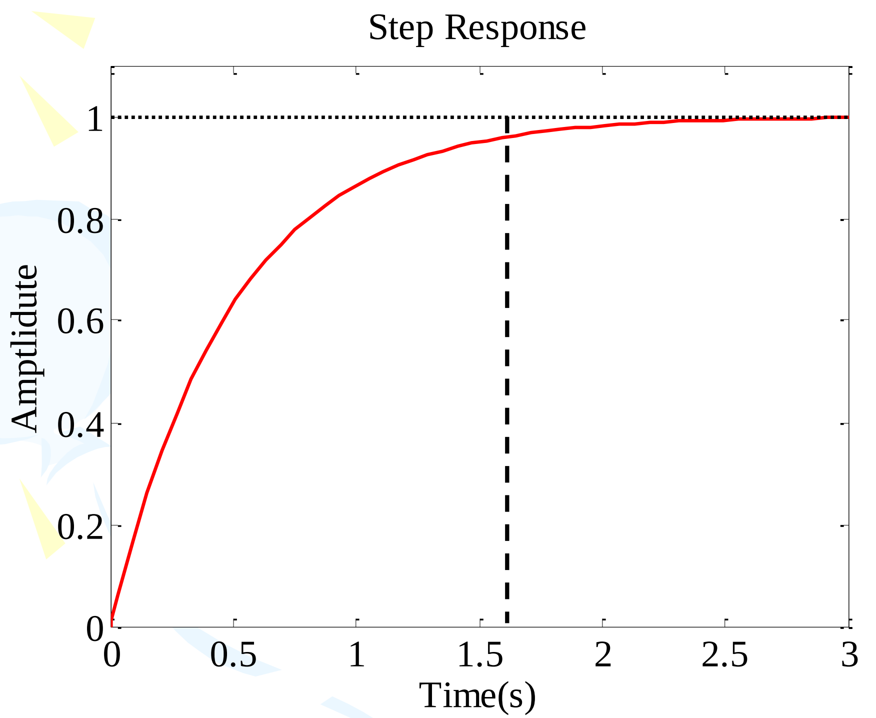
其中

$$M_{ss}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$S=\left[s_1,s_2,\cdots,s_N\right]^T \qquad C=\left[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\right]_{1\times N}$$

2.1 阶跃响应模型

例1：传递函数 $G(s)=\dfrac{1}{0.5s+1}$ 的单位阶跃响应



输出保持在系统稳态值的±5%进入稳态

系统过渡时间约为1.6s

取采样时间T为0.2s

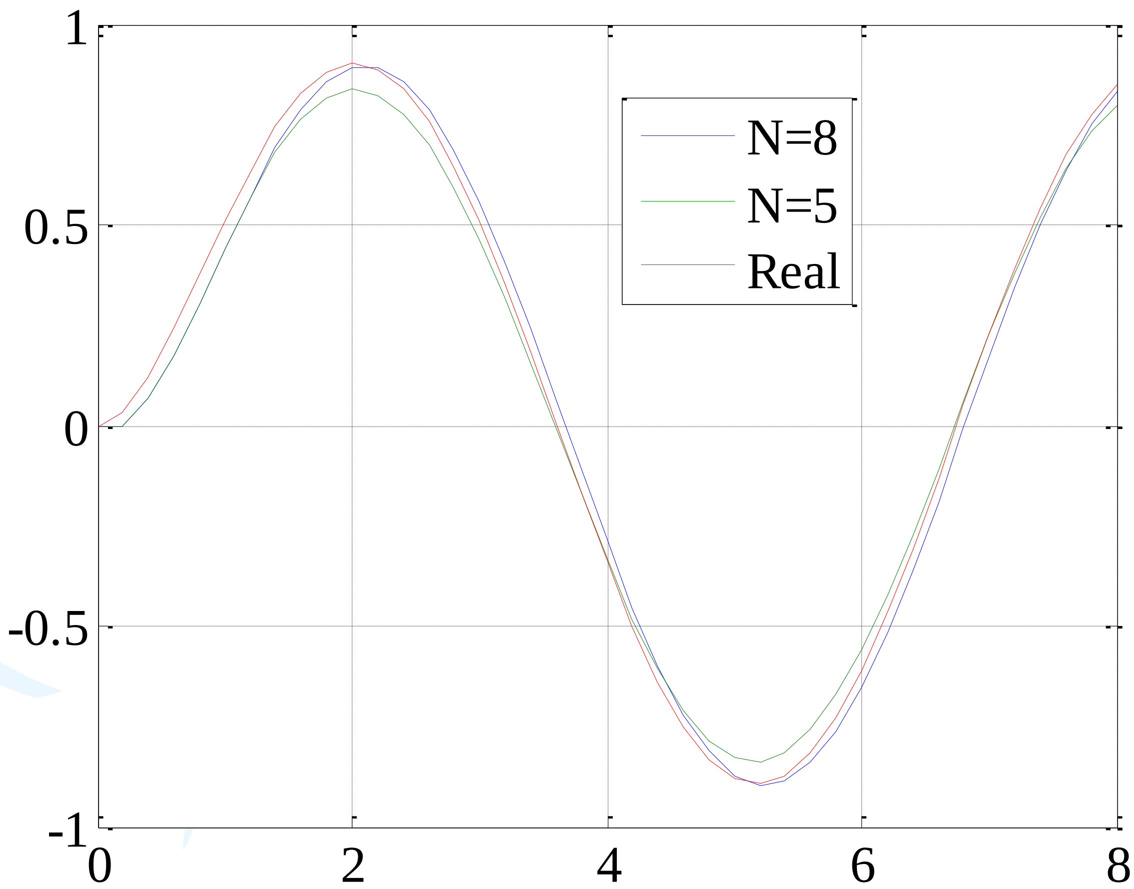
N = 8

采样得到的单位阶跃响应系数

$$S=\begin{bmatrix}0.3297 & 0.5507 & 0.6988 & 0.7981 & 0.8647 & 0.9093 & 0.9392 & 0.9592\end{bmatrix}^T$$

2.1 阶跃响应模型

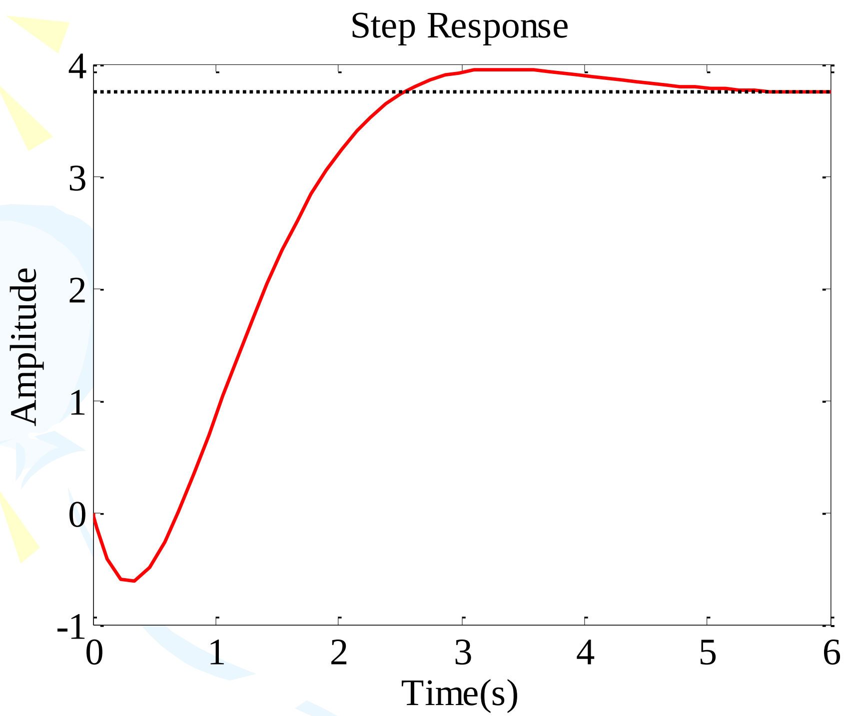
模型验证：正弦输入$u=\sin(t)$的输出响应。



***N* = 8与*N*=5的阶跃响应模型输出结果的比较**

2.1 阶跃响应模型

例子2：传递函数$G(s)=\dfrac{-5s^2-5s+30}{s^3+6s^2+10s+8}$的单位阶跃响应



输出保持在系统稳态值的±5%进入稳态

系统过渡时间约为3.8s

取采样时间T为0.25s

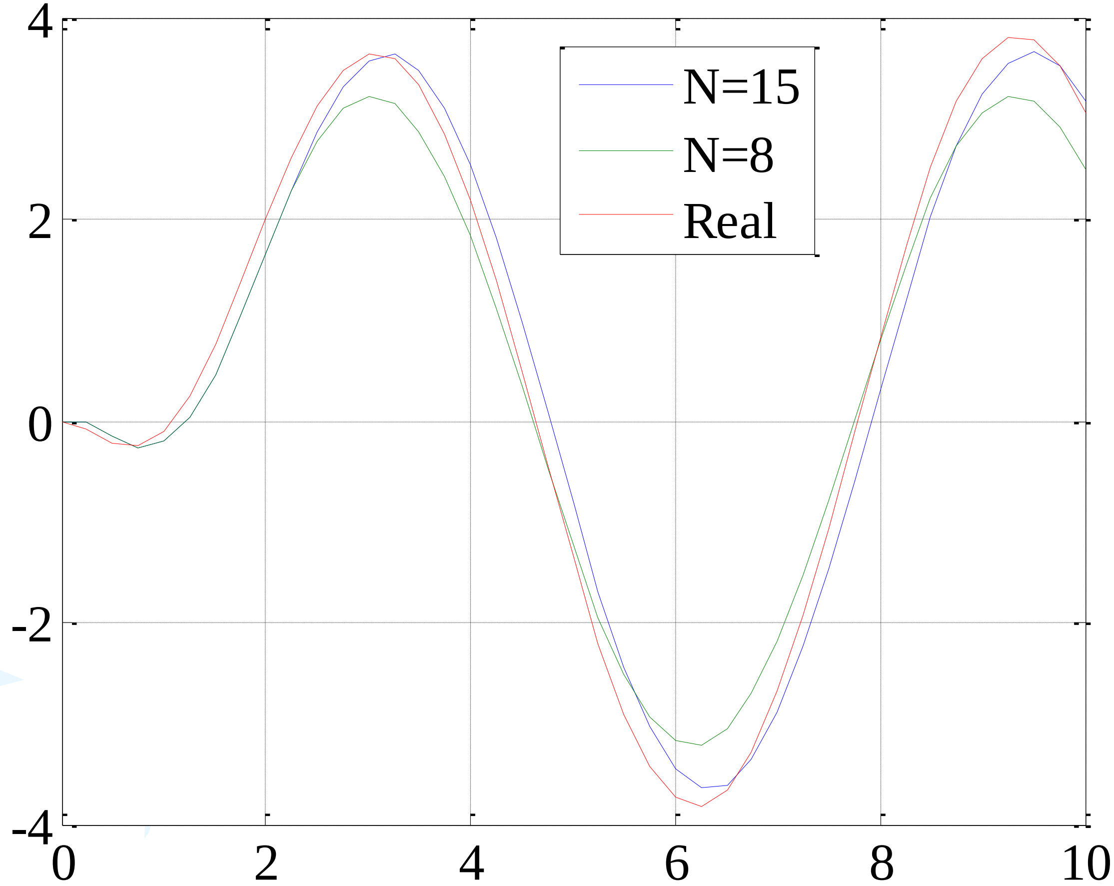
$N = 15$

采样得到的单位阶跃响应系数

$$S=[-0.6510\ \ -0.4580\ \ 0.1214\ \ 0.8435\ \ 1.5703\ \ 2.2253\ \ 2.7719\ \ 3.1991$$
$$3.5121\ \ 3.7254\ \ 3.8574\ \ 3.9271\ \ 3.9523\ \ 3.9479\ \ 3.9261]^T$$

2.1 阶跃响应模型

模型验证：正弦输入$u = \sin(t)$的输出响应。



N = 15与N=8的阶跃响应模型输出结果的比较

2.1 阶跃响应模型

阶跃响应模型的状态空间描述：

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

阶跃响应模型的传统卷积描述：

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N-1} s_i \Delta u(k-i) + s_N u(k-N)$$

二者是否等价？

2.1 阶跃响应模型

阶跃响应模型的状态空间描述：

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

1）根据*k*时刻状态方程列写*k*+1至*k*+*l*时刻状态方程

2）根据*k*+*l*时刻状态方程列写*k*+*l*时刻输出方程

3）*k*+*l*时刻输出方程系数推导

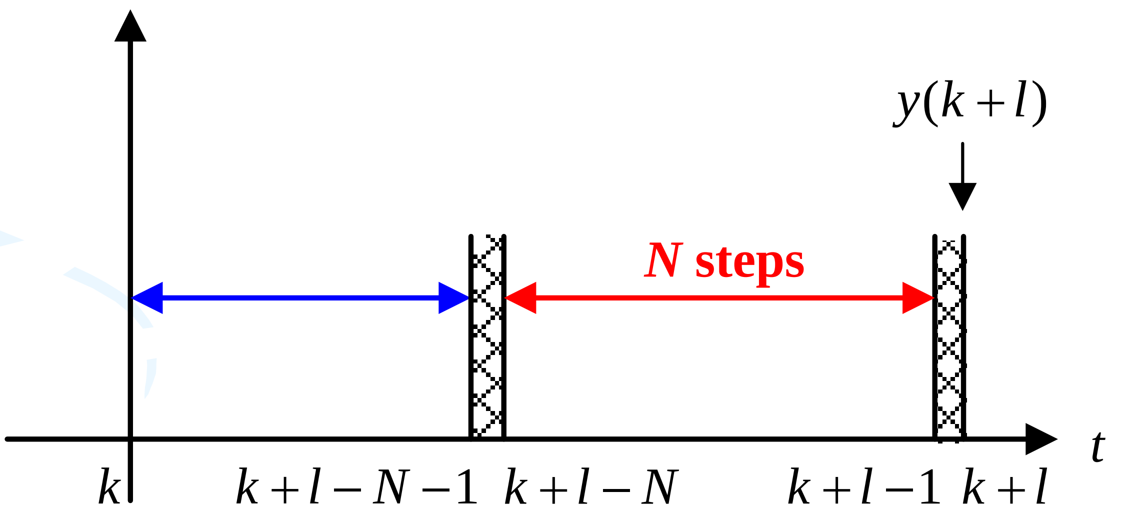
2.1 阶跃响应模型

考虑 $l > N$的情况，则$k + l$时刻的输出可表示为

$$y(k+l)=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}s_i\Delta u(k+l-i)}_{(2)}+\underbrace{s_N\sum_{i=N+1}^{l}\Delta u(k+l-i)}_{(1)}+\underbrace{CM_{ss}^{l}Y(k)}_{(3)}$$

下面解释(1)、(2)、(3)项的物理含义。

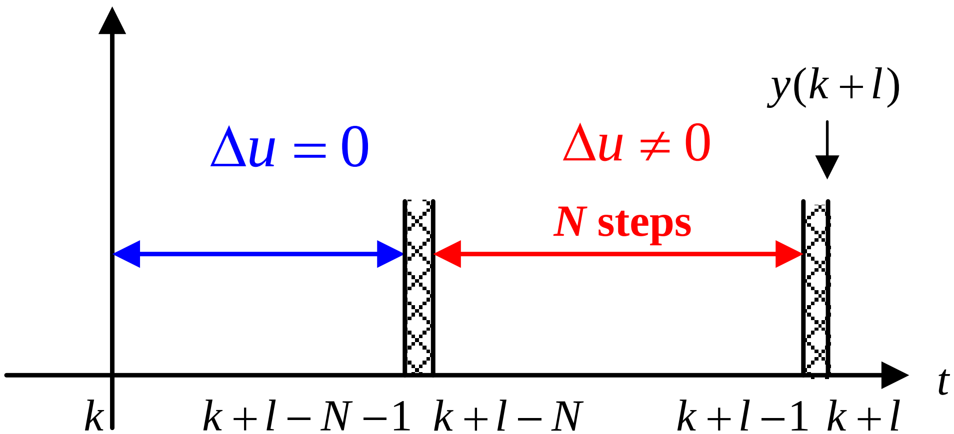
N个采样时刻之后系统进入稳态，划分输入区间



2.1 阶跃响应模型

- 第(1)部分

令$\Delta u(i)=0, i<k+l-N$ 和$\Delta u(k+l-N+i)\neq 0, i=0,1,\ldots,N-1$



第(1)部分表示***N*** **steps** $\Delta u \neq 0$ 对$y(k+l)$的贡献

$\Delta u(k+l-1)$ 作用时间为**1**个采样间隔, 对$y(k+l)$的影响系数为s_1

$\Delta u(k+l-2)$ 作用时间为**2**个采样间隔, 对$y(k+l)$的影响系数为s_2

$\vdots$

$\Delta u(k+l-N)$作用时间为***N***个采样间隔, 对$y(k+l)$的影响系数为s_N

2.1 阶跃响应模型

由叠加原理

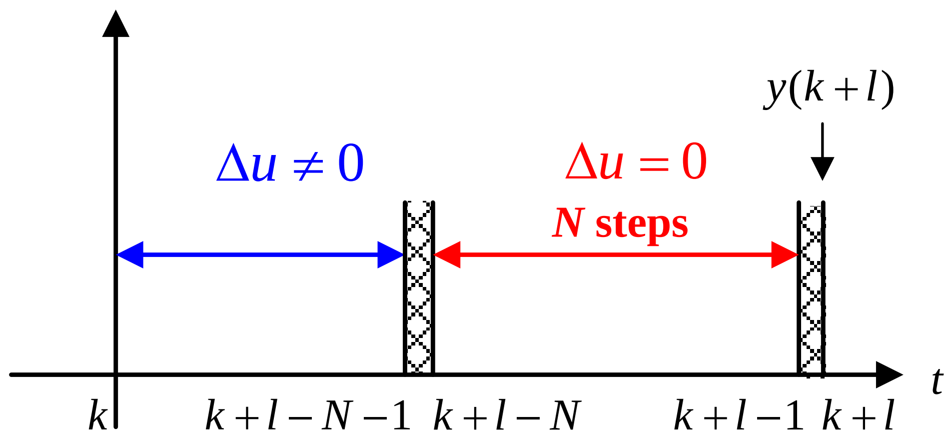
$$y^{(1)}(k+l) = s_1 \Delta u(k+l-1) + \cdots + s_N \Delta u(k+l-N)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} s_i \Delta u(k+l-i)$$

表示零初始状态下，***k*+*l***时刻之前的***N***个输入对输出 $y(k+l)$ 的影响，即系统在***k*+*l*−*N***至***k*+*l*−1**时刻输入的影响下，正处于过渡过程中。

2.1 阶跃响应模型

● 第(2)部分

令 $\Delta u(i) \neq 0, i < k+l-N$ 和 $\Delta u(k+l-N+i) = 0, i = 0,1,\dots,N-1$



第(2)部分表示零初始状态下 $\Delta u \neq 0$ 对 $y(k+l)$ 的贡献：

$$y^{(2)}(k+l) = s_N \Delta u(k+l-N-1) + \cdots + s_N \Delta u(k)$$

$$= s_N \sum_{i=N+1}^{l} \Delta u(k+l-i)$$

-----全部进入稳态，过渡过程结束

2.1 阶跃响应模型

- **第(3)部分**

$$y^{(3)}(k+l)=CM_{ss}^{l}Y(k)$$

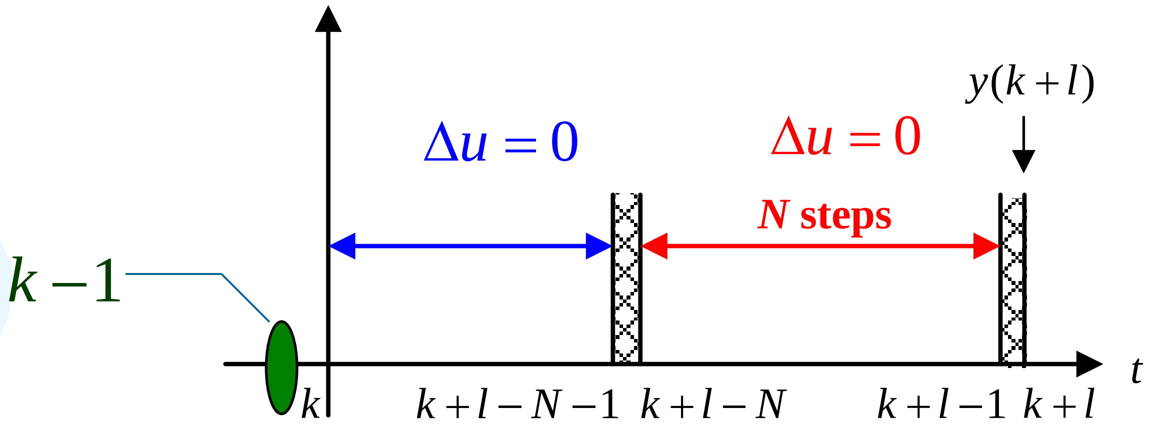
根据状态变量的$Y(k)$定义

$$Y(k)=\begin{cases}[y(k),y(k+1),\cdots,y(k+N-2),y(k+N-1)]^T\\ for\quad \Delta u(k)=\Delta u(k+1)=\Delta u(k+2)=\cdots=0\end{cases}$$

因此，第(3)部分表示当***k***时刻及以后输入变化为零时，系统非零初始状态$Y(k)$对$y(k+l)$的影响。

2.1 阶跃响应模型

第(3)部分表示$Y(k)$对$y(k+l)$的影响。



也可视为$u(k-1)$对$y(k+l)$的影响。

由于$l > N$，系统进入稳态：$y^{(3)}(k+l) = s_N u(k-1)$

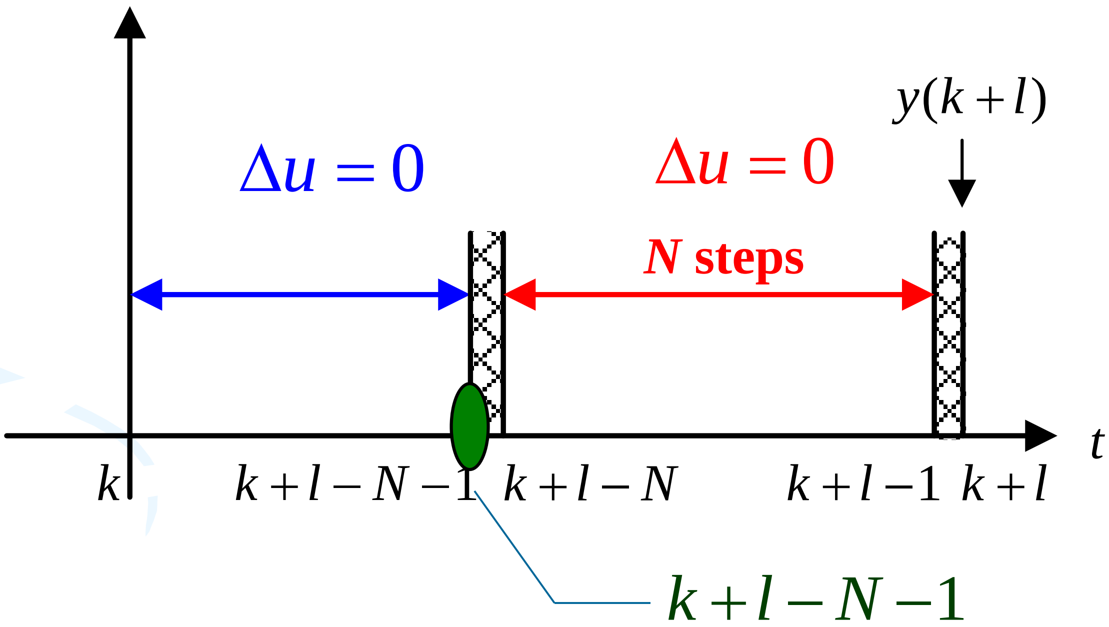
——初始状态

2.1 阶跃响应模型

那么

$$y^{(2)}(k+l)+y^{(3)}(k+l)=s_N\left(u(k-1)+\sum_{i=N+1}^{l}\Delta u(k+l-i)\right)$$

$$=s_N u(k+l-N-1)$$



2.1 阶跃响应模型

综上

$$y(k+l)=y^{(1)}(k+l)+y^{(2)}(k+l)+y^{(3)}(k+l)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}s_i\Delta u(k+l-i)+s_N u(k+l-N-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}s_i\Delta u(k+l-i)+s_N u(k+l-N)$$

或

$$\boxed{y(k)=\sum_{i=1}^{N-1}s_i\Delta u(k-i)+s_N u(k-N)}$$

阶跃响应模型的传统卷积描述

2.1 阶跃响应模型

阶跃响应模型的状态空间描述：

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$$
$$y(k)=CY(k)$$

阶跃响应模型的传统卷积描述：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{N-1}s_i\Delta u(k-i)+s_N u(k-N)$$

二者是完全一致的。

2.1 阶跃响应模型

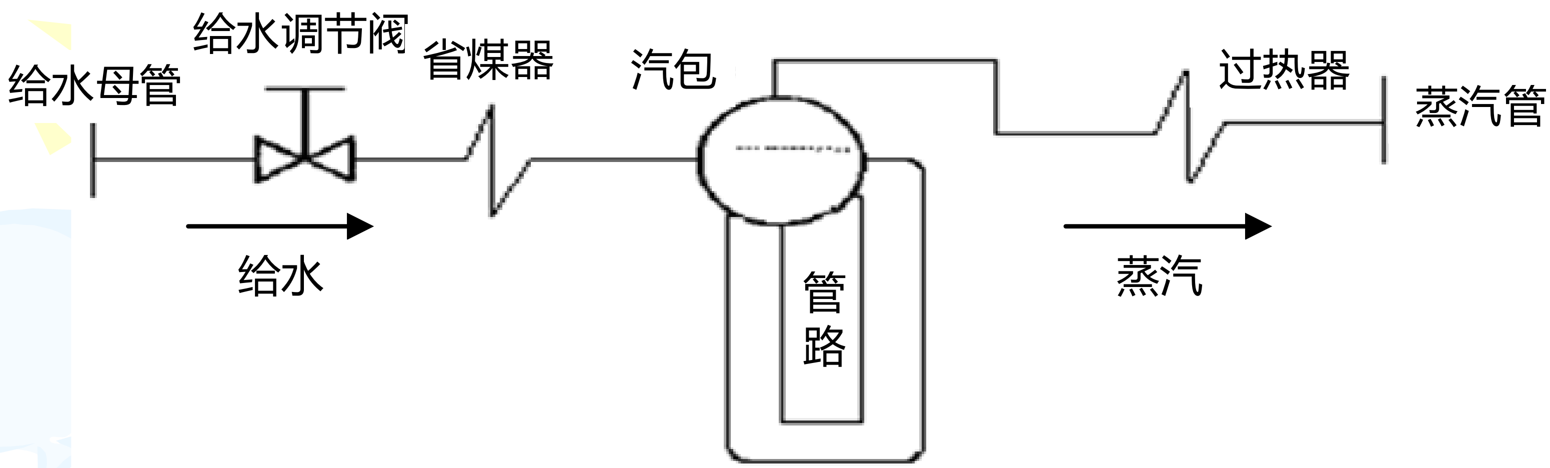
阶跃响应模型的状态空间描述：

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

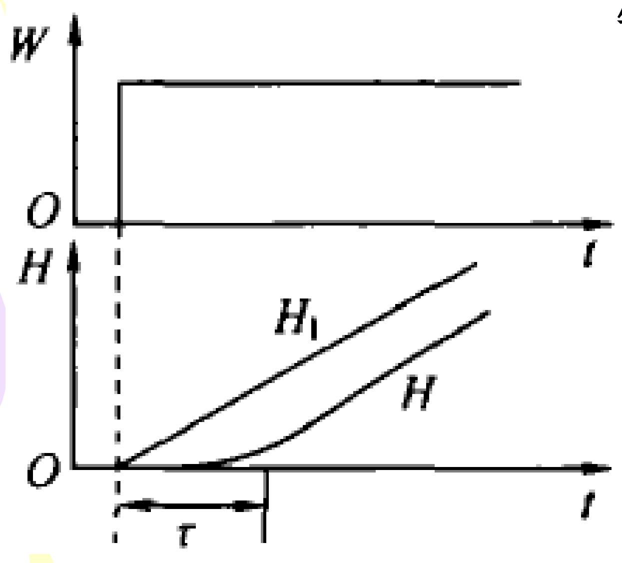
与传统阶跃响应模型的卷积表达形式不同，具有状态空间模型的表达形式，可以基于状态空间方法设计预测控制器，并在状态空间理论框架下讨论闭环系统的稳定性和性能。

2.1 阶跃响应模型

2.1.2 积分系统的阶跃响应模型



锅炉结构示意图

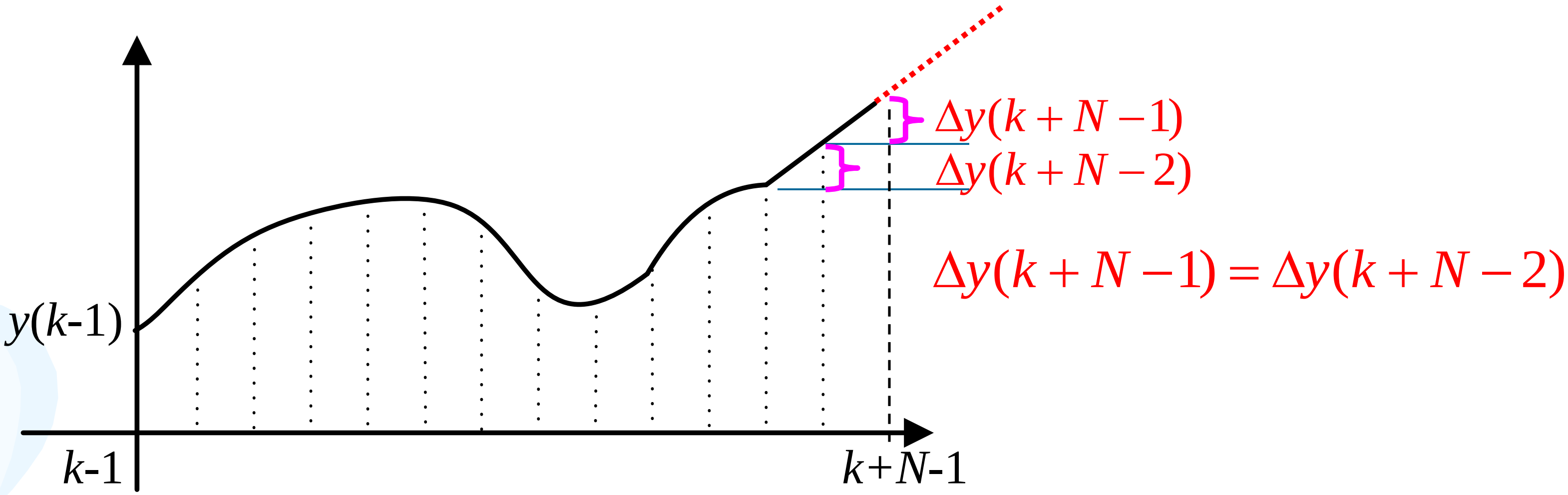


H_1：普通容器

H：锅炉汽包

蒸汽输出量不变，给水作用下水位的阶跃响应曲线

2.1 阶跃响应模型



*N*个采样时间之后，系统进入稳态，响应斜率不变

$$y(k+N-1)=y(k+N-2)+\big(y(k+N-2)-y(k+N-3)\big)$$

$$=2y(k+N-2)-y(k+N-3)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(k)=M_{sI}Y(k-1)$$

2.1 阶跃响应模型

其中

$$M_{sI}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{bmatrix}_{N\times N}$$

与 M_{ss} 的区别

考虑到 $\Delta u(k-1)$ 的影响，有：

$$Y(k)=M_{sI}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$$

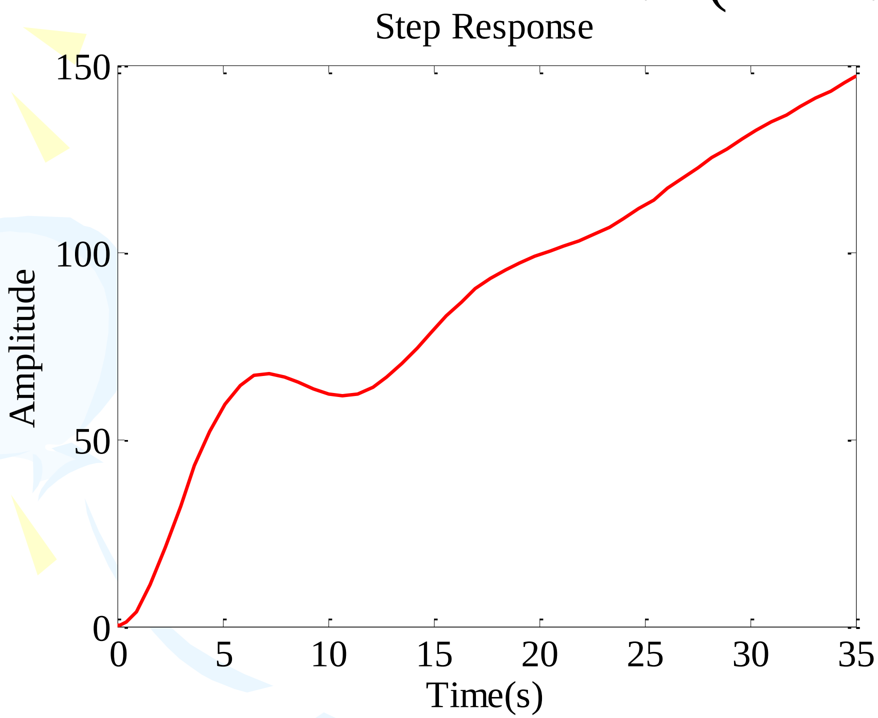
$$y(k)=CY(k)$$

其中

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{1\times N} \qquad S=\begin{bmatrix}s_1, s_2, \cdots, s_N\end{bmatrix}^T$$

2.1 阶跃响应模型

例子：传递函数$G(s)=\dfrac{s+0.1}{0.1s(s^2+0.25s+0.3)}$的单位阶跃响应



稳态斜率为10/3

系统过渡时间约为24s

取采样时间*T*为0.6s

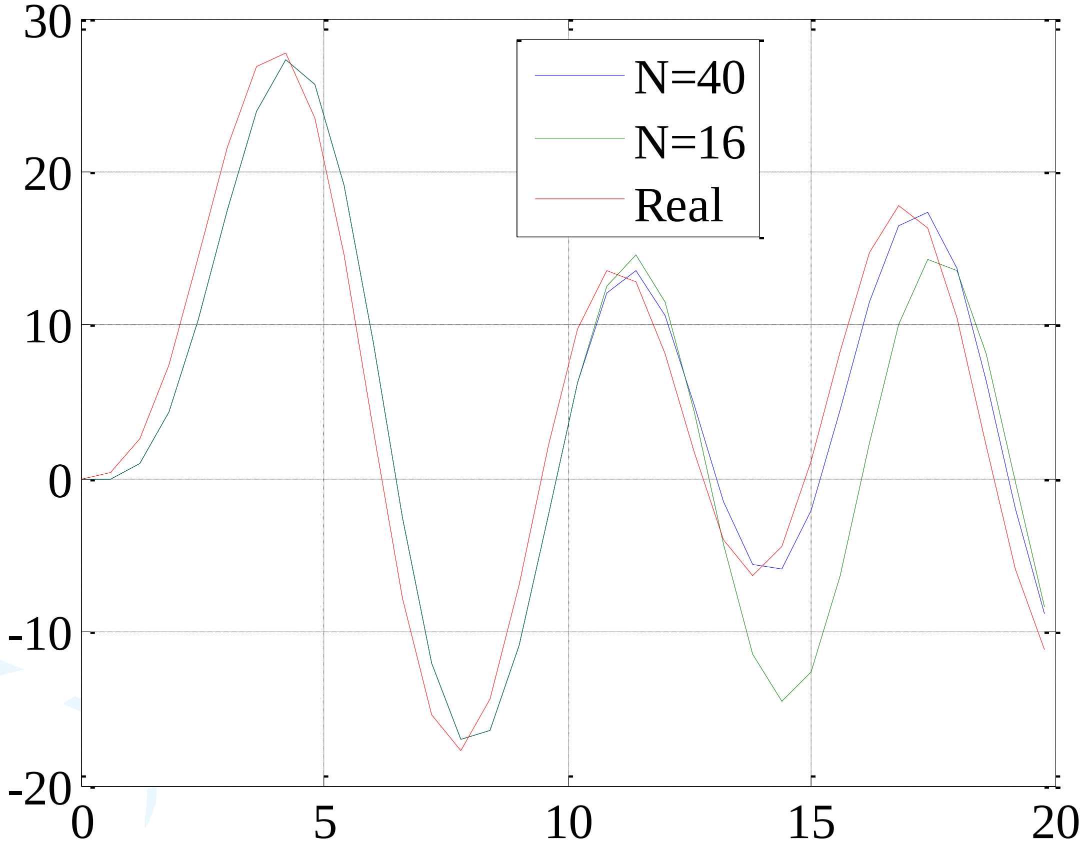
$\boldsymbol{N = 40}$

采样得到的单位阶跃响应系数

$$S=\begin{bmatrix}1.7326 & 6.5659 & 13.7865 & 22.5430 & 31.9499 & 41.1803 & 49.5403 \\ \cdots & 102.3108 & 103.6895 & 105.2408 & 106.9853 & 108.9215\end{bmatrix}^T$$

2.1 阶跃响应模型

模型验证：正弦输入$u=\sin(t)$的输出响应。



N = 40与N=16的阶跃响应模型输出结果的比较

2.1.3 MIMO系统的阶跃响应模型

考 虑 多 输 入 多 输 出 （ **Multiple Input Multiple Output, MIMO**）系统，其传递函数为

$$y(s) = G(s)u(s)$$

其中 $u(s)$为n_u维输入变量，$y(s)$为n_y维输出变量。

练习：

仿**SISO**系统推导**MIMO**系统的阶跃响应模型。

2.1 阶跃响应模型

MIMO系统阶跃响应模型的状态空间描述

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$

其中

$$Y(k) = \begin{cases} [y(k)^T, y(k+1)^T, \cdots, y(k+N-2)^T, y(k+N-1)^T]^T \\ for \quad \Delta u(k) = \Delta u(k+1) = \Delta u(k+2) = \cdots = 0 \end{cases}$$

$$M_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11,1} & \cdots & s_{1n_u,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n_y 1,1} & \cdots & s_{n_y n_u,1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{11,N} & \cdots & s_{1n_u,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n_y 1,N} & \cdots & s_{n_y n_u,N} \end{bmatrix}_{(n_y \cdot N) \times n_u}$$

第2章 模型与预测

2.1 阶跃响应模型

2.2 脉冲响应模型

2.3 CARIMA模型

2.4 离散状态空间模型

2.5 状态估计

2.6 多步预测

2.7 数据驱动建模与预测

2.2 脉冲响应模型

2.2.1 稳定系统的脉冲响应模型

考虑单输入单输出（**Signal Input Signal Output, SISO**）系统，其传递函数为

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}$$

其中 $u(s)$为输入，$y(s)$为输出。

如何建立系统脉冲响应模型的状态空间描述？

2.2 脉冲响应模型

思路：

连续时间系统

$$s(t)=\int_0^t h(t)dt$$

阶跃响应 $s(t)$ 是脉冲响应 $h(t)$ 的积分，脉冲响应 $h(t)$ 是阶跃响应 $s(t)$ 的导数。

对离散时间系统，如何由阶跃响应获得脉冲响应？

$$\text{阶跃响应} \xrightarrow{\text{对阶跃响应求差分}} \text{脉冲响应}$$

2.2 脉冲响应模型

将阶跃响应方程$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$展开：

$$
\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+N-1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k+N-2) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}
\Delta u(k-1)
$$

$\boxed{y(k-1)}$ $\boxed{y(k-2)}$

$\boxed{s_0}$

2.2 脉冲响应模型

后一行减前一行：

$$\begin{bmatrix} \Delta y(k) \\ \Delta y(k+1) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y(k-1) \\ \Delta y(k) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \Delta u(k-1)$$

系统进入稳态后输出保持不变，即

$$\Delta y(k+N-1)$$
$$= y(k+N-1) - y(k+N-2)$$
$$= 0$$

其中

$$\Delta y(k+i) = y(k+i) - y(k+i-1)$$

$$h_i = s_i - s_{i-1}$$

2.2 脉冲响应模型

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta y(k)\\ \Delta y(k+1)\\ \vdots\\ \Delta y(k+N-1)\end{bmatrix}}_{\Delta Y(k)}=\overbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}}^{M_{hs}}\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta y(k-1)\\ \Delta y(k)\\ \vdots\\ \Delta y(k+N-2)\end{bmatrix}}_{\Delta Y(k-1)}$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_N\end{bmatrix}}_{H}\Delta u(k-1)$$

H ----单位脉冲响应系数阵

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times N}, M_{hs} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$
$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

如何获得脉冲响应模型更常见的卷积形式？

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

思路：

(1) $\Delta Y(k+1), \Delta Y(k+2), \cdots, \Delta Y(k+l)$

(2) $\Delta y(k+l)$

2.2 脉冲响应模型

得：

$$\Delta y(k+l)=\underbrace{CM_{hs}^{l}\Delta Y(k)}_{\text{初始状态的影响}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{l}CM_{hs}^{i-1}H\Delta u(k+l-i)}_{\text{输入的影响}}$$

2.2 脉冲响应模型

得:

$$\Delta y(k+l)=CM_{hs}^{l}\Delta Y(k)+\sum_{i=1}^{l}CM_{hs}^{i-1}H\Delta u(k+l-i)$$

其中

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{1\times N},\ M_{hs}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}h_1 & h_2 & \cdots & h_N\end{bmatrix}_{N\times 1}^{T}$$

2.2 脉冲响应模型

得:

$$\Delta y(k+l) = CM_{hs}^{l}\Delta Y(k) + \sum_{i=1}^{l} CM_{hs}^{i-1}H\Delta u(k+l-i)$$

经推导，有

$$CM_{hs}^{l} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{l+1}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times N}, & l < N \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times N}, & l \ge N \end{cases}$$

$$CM_{hs}^{i-1}H = \begin{cases} h_i, & i \le N \\ 0, & i > N \end{cases}$$

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

输出的递推式

$$\boxed{\Delta y(k) = \sum_{i=1}^{N} h_i \Delta u(k-i)}$$

脉冲响应模型的卷积表达形式

2.2 脉冲响应模型

脉冲响应模型的状态空间描述：

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

脉冲响应模型的传统卷积描述：

$$\Delta y(k) = \sum_{i=1}^{N} h_i \Delta u(k-i)$$

二者是完全一致的。

2.2 脉冲响应模型

脉冲响应模型的状态空间描述：

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

与传统脉冲响应模型的卷积表达形式不同，具有状态空间模型的表达形式，可以基于状态空间方法设计预测控制器，并在状态空间理论框架下讨论闭环系统的稳定性和性能。

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hs} \Delta Y(k-1) + H \Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C \Delta Y(k)$$

脉冲响应系数与阶跃响应系数之间的关系：

$$h_i = s_i - s_{i-1}$$

下面给出由阶跃响应系数计算脉冲响应系数的合理性解释。

2.2 脉冲响应模型

考虑一个SISO系统，其传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

将单位阶跃函数**1(*t*)**作用于此系统，则系统的响应

$$y_s(t)=1-e^{-t}$$

由于无法产生理想脉冲信号，在工程中常采用适当的方波信号来近似替代脉冲信号。

2.2 脉冲响应模型

假设系统采样时间为***T***，将脉冲信号：

$$u_T(t)=1(t)-1(t-T)$$

作用于系统，则系统的响应为

$$y_h(t)=e^{-(t-T)}-e^{-t}$$

2.2 脉冲响应模型

对照系统的阶跃响应和脉冲响应

$$y_s(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{和} \quad y_h(t) = e^{-(t-T)} - e^{-t}$$

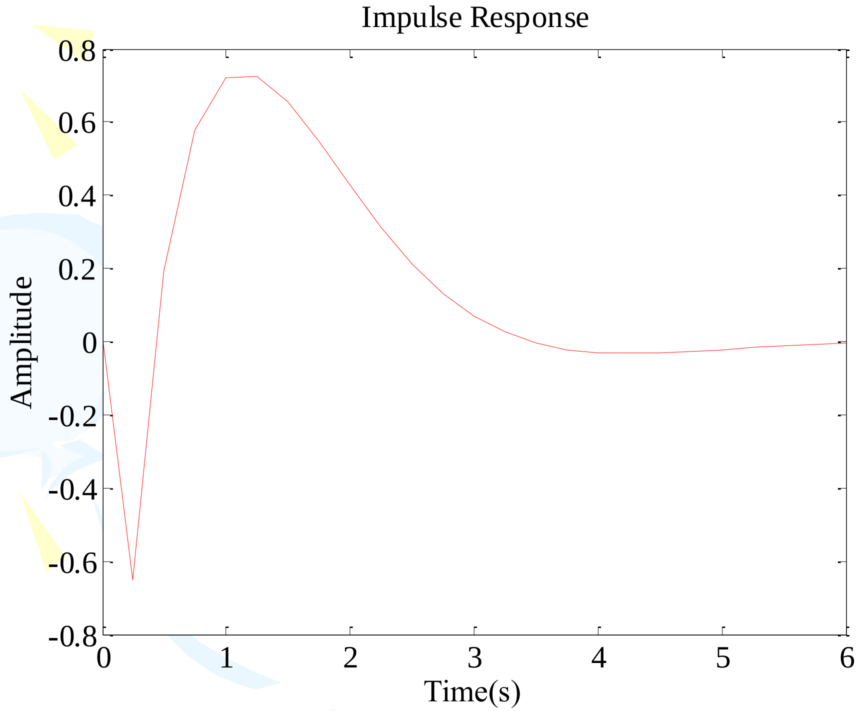
可获得系统的阶跃响应系数和脉冲响应系数

t	0	T	2T	3T	…
s_i	0	$1-e^{-T}$	$1-e^{-2T}$	$1-e^{-3T}$	…
h_i	0	$1-e^{-T}$	$e^{-T}-e^{-2T}$	$e^{-2T}-e^{-3T}$	…

上述结果可验证 $h_i = s_i - s_{i-1}$ 成立。

2.2 脉冲响应模型

例子：传递函数$G(s)=\dfrac{-5s^2-5s+30}{s^3+6s^2+10s+8}$的脉冲响应



取采样时间T为**0.25s**

$N = 13$

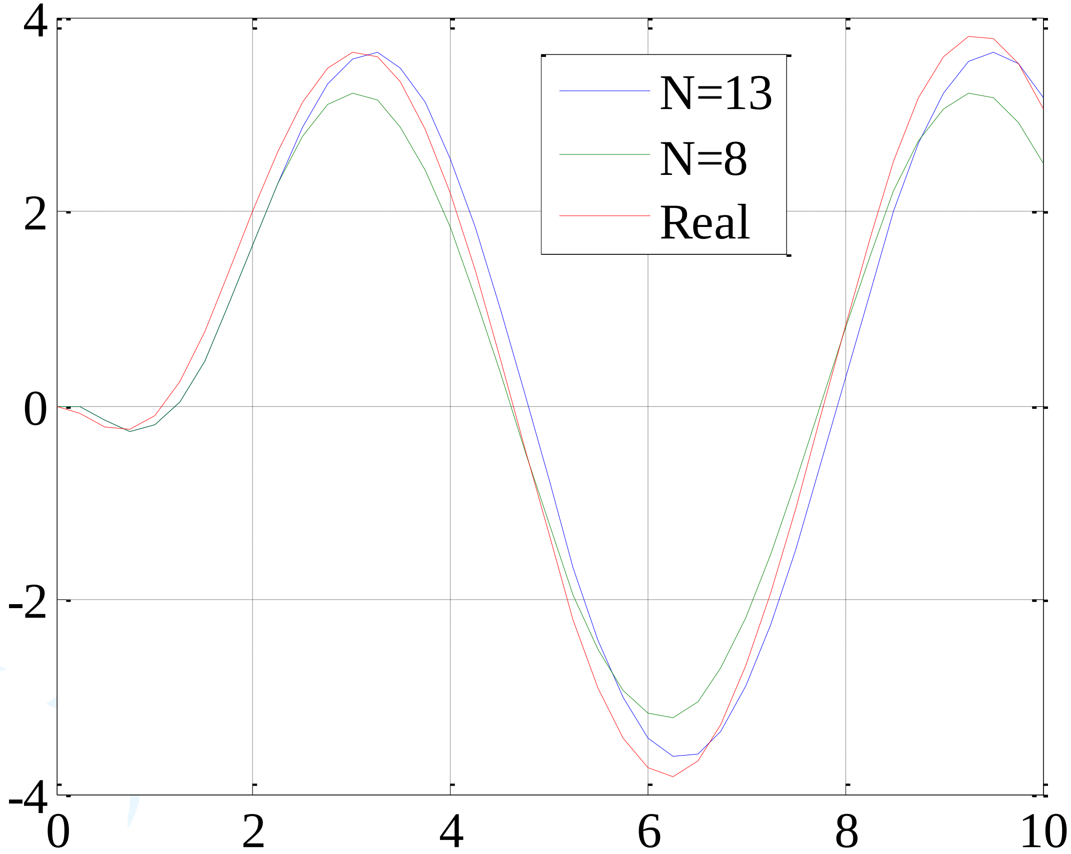
也可以通过阶跃响应系数计算脉冲响应系数

采样得到的脉冲响应系数

$$H=\begin{bmatrix}-0.6510 & 0.1930 & 0.5794 & 0.7221 & 0.7268 & 0.6550 & 0.5466 & 0.4272 \\ 0.3130 & 0.2133 & 0.1320 & 0.0697 & 0.0252\end{bmatrix}^T$$

2.2 脉冲响应模型

模型验证：正弦输入$u=\sin(t)$的输出响应。



***N* = 13与*N*=8的脉冲响应模型输出结果的比较**

2.2 脉冲响应模型

2.2.2 积分系统的脉冲响应模型

如何获得积分系统的脉冲响应模型？

思路：

$$\boxed{\text{阶跃响应} \xrightarrow{\text{对积分系统的阶跃响应求差分}} \text{脉冲响应}}$$

将阶跃响应方程$Y(k)=M_{sI}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$展开：

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k+N-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \Delta u(k-1)$$

$\boxed{y(k-1)}$ $\boxed{y(k-2)}$ $\boxed{s_0}$

2.2 脉冲响应模型

后一行减前一行

$$\begin{bmatrix} \Delta y(k) \\ \Delta y(k+1) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ ? & ? & ? & \cdots & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y(k-1) \\ \Delta y(k) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-2) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \Delta u(k-1)$$

其中 $\Delta y(k+i) = y(k+i) - y(k+i-1)$ $\quad h_i = s_i - s_{i-1}$

2.2 脉冲响应模型

确定状态转换阵的最后一排元素，得 M_{hI}

$$\begin{bmatrix} \Delta y(k) \\ \Delta y(k+1) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y(k-1) \\ \Delta y(k) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \Delta u(k-1)$$

***k*+*N*−2时刻后系统进入稳态输出斜率保持不变，即**

$$\Delta y(k+N-1) = \Delta y(k+N-2)$$

其中 $\Delta y(k+i) = y(k+i) - y(k+i-1)$ $\qquad h_i = s_i - s_{i-1}$

2.2 脉冲响应模型

积分系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hI}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times N}, M_{hI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的阶跃响应模型：

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$

积分系统的脉冲响应模型：

$$\Delta Y(k) = M_{hI}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

其中

$$M_{ss} = M_{hI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 脉冲响应模型

稳定系统的脉冲响应模型

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

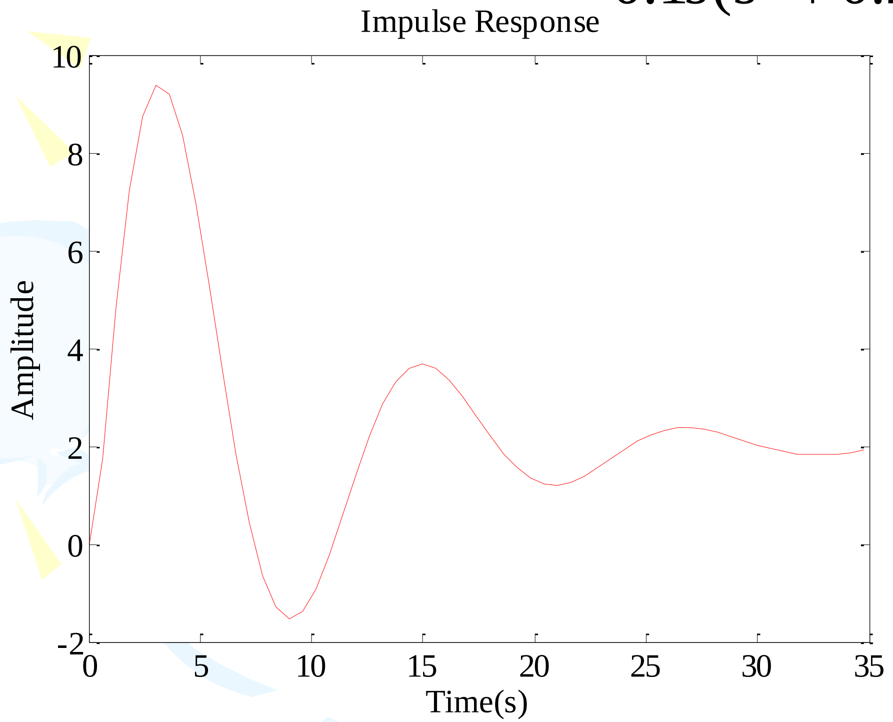
积分系统的脉冲响应模型

$$\Delta Y(k) = M_{hI}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

2.2 脉冲响应模型

例子：传递函数$G(s)=\dfrac{s+0.1}{0.1s(s^2+0.25s+0.3)}$的脉冲响应



取样采样时间T为0.6s

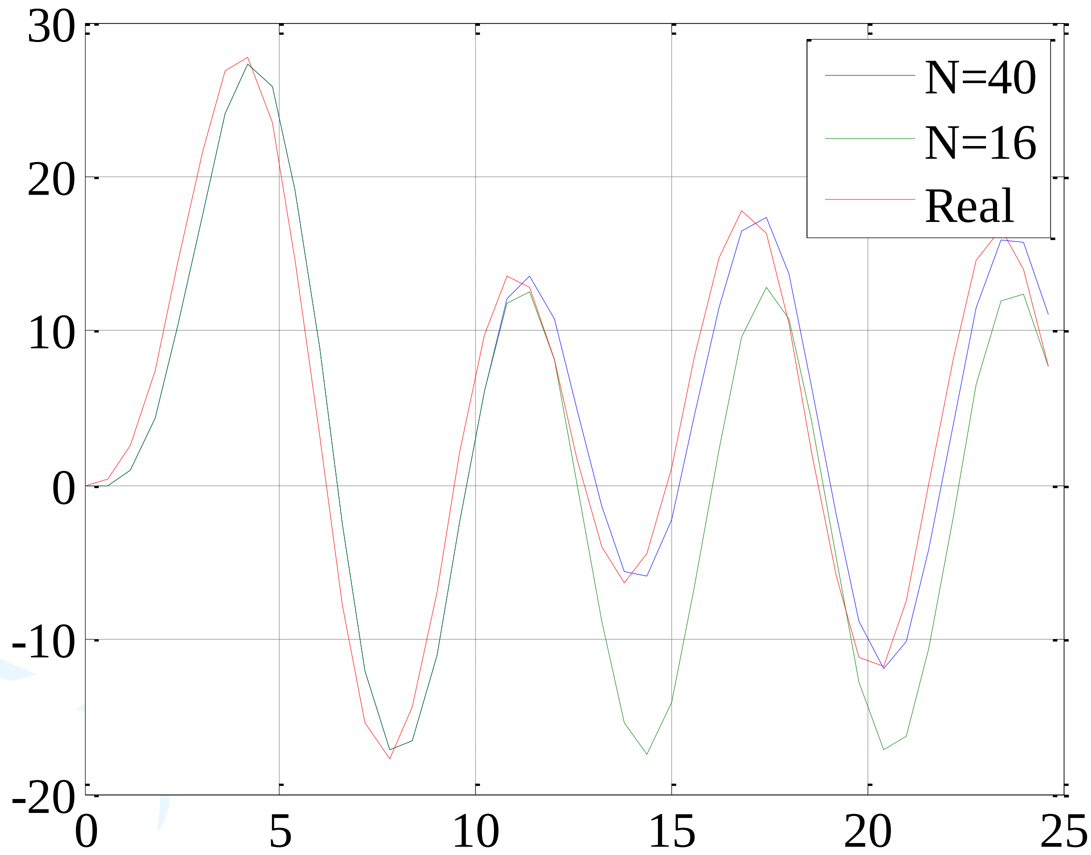
$N = 40$

采样得到的脉冲响应系数

$$H=\begin{bmatrix}1.7326 & 4.8334 & 7.2206 & 8.7565 & 9.4069 & 9.2305 & 8.3600 & 6.9787 \\ \cdots & 1.1869 & 1.2499 & 1.3787 & 1.5513 & 1.7445 & 1.9362\end{bmatrix}^T$$

2.2 脉冲响应模型

模型验证：正弦输入$u=\sin(t)$的输出响应。



N = 40与N=16的脉冲响应模型输出结果的比较

2.2 脉冲响应模型

2.2.3 MIMO系统的脉冲响应模型

考虑多输入多输出（**Multiple Input Multiple Output, MIMO**）系统，其传递函数为

$$y(s)=G(s)u(s)$$

其中 $u(s)$为n_u维输入变量，$y(s)$为n_y维输出变量。

练习：

仿SISO系统推导MIMO系统的脉冲响应模型。

2.2 脉冲响应模型

MIMO系统脉冲响应模型的状态空间描述

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H\Delta u(k-1)$$

其中

$$M_{hs} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & I_{n_y \times n_y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}_{N\times N} \quad H = \begin{bmatrix} h_{11,1} & \cdots & h_{1n_u,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n_y1,1} & \cdots & h_{n_yn_u,1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{11,N} & \cdots & h_{1n_u,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n_y1,N} & \cdots & h_{n_yn_u,N} \end{bmatrix}_{(n_y\cdot N)\times n_u}$$

第2章 模型与预测

2.3 CARIMA模型

阶跃响应模型、脉冲响应模型（非参数模型）

- 用于描述稳定系统或积分系统
- 模型参数通过离线辨识获得

⇨ 参数模型、在线更新模型参数

受控自回归积分滑动平均模型（**CARIMA**）

Controlled Auto-Regressive Intergraded Moving Average

2.3 CARIMA模型

CARIMA模型的标准形式：

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k-1)+C(z^{-1})e(k)/\Delta$$

式中

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_{n_a}z^{-n_a}=1+\sum_{i=1}^{n_a}a_iz^{-i}$$

$$B(z^{-1})=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{n_b}z^{-n_b}=\sum_{i=0}^{n_b}b_iz^{-i}$$

$$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_{n_c}z^{-n_c}=1+\sum_{i=1}^{n_c}c_iz^{-i}$$

$$\begin{cases} z^{-1}y(k)=y(k-1) \\ z^{-1}u(k)=u(k-1) \end{cases}$$

z^{-1}为后移算子，表示后退一个采样周期的相应量，即

$\Delta=1-z^{-1}$为差分算子，$\{e(k)\}$ 为外部扰动（零均值白噪声）

上述模型不是预测递推形式，如何处理成递推形式？

2.3 CARIMA模型

2.3.1 Diophantine方程与预测

Diophantine（丢番图）方程

$$1 = R_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta + z^{-j}S_j(z^{-1})$$

其中，$R_j(z^{-1})$ 和 $S_j(z^{-1})$ 是由 $A(z^{-1})$ 和 $\boldsymbol{j}$ 唯一确定的多项式

$$R_j(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} z^{-i}, \quad S_j(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_a} s_{ij} z^{-i}$$

丢番图方程（不定方程）：有一个或者几个变量的整系数方程，它们的求解仅仅在整数范围内进行。

2.3 CARIMA模型

Diophantine，古希腊人，被誉为代数学的鼻祖，享年??岁

Diophantine的墓志铭：

「坟中安葬着Diophantine，多么令人惊讶，它忠实地记录了所经历的道路。

上帝给予的童年占六分之一，又过十二分之一，两颊长胡，再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛。

五年之后天赐贵子，可怜的孩子，享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓。

悲伤只有用数论的研究去弥补，又过四年，他也走完了人生的旅途。」

2.3 CARIMA模型

中国是研究不定方程最早的国家。

五家共井：

今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何？

现有五家共用一口井，甲、乙、丙、丁、戊五家各有一条绳子汲水（下面用文字表示每一家的绳子）：甲×2+乙=井深，乙×3+丙=井深，丙×4+丁=井深，丁×5+戊=井深，戊×6+甲=井深，求各家绳子的长度和井深。

解方程组得甲、乙、丙、丁、戊各家绳子的长度和井深分别等于265m、191m、148m、129m、76m，而井深为721m。

2.3 CARIMA模型

CARIMA模型的标准形式：

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})e(k)/\Delta$$

丢番图方程：

$$1 = R_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta + z^{-j}S_j(z^{-1})$$

***k*+*j*时刻输出的递推表达式：** $y(k+j) = ?$

2.3 CARIMA模型

得基于CARIMA模型的输出递推方程：

$$y(k+j)=\underbrace{R_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1)}_{\text{控制输入}}+\underbrace{R_j(z^{-1})e(k+j)}_{\text{扰动}}+\underbrace{S_j(z^{-1})y(k)}_{\text{初始状态}}$$

递推方程中包含两组参数：

1）模型参数 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ $\Leftarrow$ 最新的测量信息

2）**Diophantine**方程参数 $R_j(z^{-1})$ 和 $S_j(z^{-1})$ $\Leftarrow$ 递推

$$1=R_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta+z^{-j}S_j(z^{-1})$$

2.3 CARIMA模型

2.3.2 Diophantine方程的递推解

公式推导详见：

王伟的《广义预测控制理论及其应用》

舒前迪的《预测控制系统及其应用》

2.3 CARIMA模型

基于不同模型的预测控制算法名称不同：

1）**Dynamic Matrix Control (DMC)** −−−−阶跃响应模型

2）**Model Algorithmic Control (MAC)** −−−−脉冲响应模型

3）**Generalized Predictive Control (GPC)**−−−−**CARIMA**模型

第2章 模型与预测

2.4 离散状态空间模型

对于连续和离散状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t)\end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned}x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

存在如下转换关系：

$$A = e^{A_c T_s}$$

$$B = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} d\tau \cdot B_c$$

其中T_s是系统的采样时间。

2.4 离散状态空间模型

线性稳定**SISO**系统的离散时间状态空间模型为

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

离散状态空间模型与阶跃/脉冲响应模型的关系？

2.4 离散状态空间模型

假设系统初始状态为$x(0)$，则依据递推关系有

$$x(k)=A^k x(0)+\sum_{i=1}^{k} A^{i-1}Bu(k-i)$$

$$y(k)=CA^k x(0)+\sum_{i=1}^{k} CA^{i-1}Bu(k-i)$$

假设 $x(0)=0$（零初始状态），则

$$y(k)=\sum_{i=1}^{k} CA^{i-1}Bu(k-i)$$

----是否需要计算所有的***k***？

$$=\sum_{i=1}^{k} h_i u(k-i)$$

其中 $h_i=CA^{i-1}B$

2.4 离散状态空间模型

由于

$$h_i = CA^{i-1}B$$

对于稳定系统，h_i 的趋向？

如果系统稳定，则 $|\lambda_i(A)| < 1$

2.4 离散状态空间模型

由于

$$h_i = CA^{i-1}B$$

对于稳定系统，h_i 的趋向？

如果系统稳定，则 $|\lambda_i(A)|<1$，故

$$\lim_{i\to\infty} CA^{i-1}B = \lim_{i\to\infty} h_i = 0$$

因此，当 i 很大的时候，h_i 趋向于**0**。

2.4 离散状态空间模型

⇨ 计算**y(k)**时不用把所有$h_i u(k-i)$都计算进去。

因此，考虑用有限长单位脉冲响应（**Finite Impulse Response**，**FIR**）对系统进行逼近：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{N} h_i u(k-i)$$

----单位脉冲响应系数

2.4 离散状态空间模型

状态空间模型参数与单位脉冲响应系数的关系：

$$h_i = CA^{i-1}B$$

状态空间模型参数与单位阶跃响应系数的关系？

2.4 离散状态空间模型

系统输出方程

$$y(k)=\sum_{i=1}^{N}h_i u(k-i)$$

k—1时刻，假设 $u(k-1)=u(k)=u(k+1)=\cdots$

----阶跃输入

计算系统$k+1$到$k+N$ 时刻的输出

k时刻，同样假设 $u(k)=u(k+1)=u(k+2)=\cdots$

----阶跃输入

计算系统$k+1$到$k+N$ 时刻的输出

2.4 离散状态空间模型

将k－1时刻和k时刻计算输出序列的对应项做差：

$$y(k+1|k)=h_1\big(u(k)-u(k-1)\big)+y(k+1|k-1)$$

$$y(k+2|k)=(h_1+h_2)\big(u(k)-u(k-1)\big)+y(k+2|k-1)$$

$$\vdots$$

$$y(k+N|k)=\sum_{i=1}^{N}h_i\big(\underbrace{u(k)-u(k-1)}_{\Delta u(k)}\big)+y(k+N|k-1)$$

2.4 离散状态空间模型

整理后

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k+1|k-1) \\ y(k+2|k-1) \\ \vdots \\ y(k+N|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2+h_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} h_i \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_N \end{bmatrix}^T$$

$$Y(k+1) = M_{ss}Y(k) + S\Delta u(k)$$

----单位阶跃响应系数

得状态空间模型参数与阶跃响应系数间的关系，即

$$\boxed{s_i = \sum_{j=1}^{i} CA^{j-1}B}$$

2.4 离散状态空间模型

单位阶跃响应系数与脉冲响应系数之间的关系：

$$h_i = s_i - s_{i-1}$$

状态空间模型参数与单位阶跃响应系数间的关系：

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} CA^{j-1}B$$

状态空间模型参数与单位脉冲响应系数间的关系：

$$h_i = CA^{i-1}B$$

2.4 离散状态空间模型

基于N4SID的状态空间模型辨识

如果有了系统的输入输出数据，可以采用**Matlab**模型辨识工具箱把系统的状态空间模型辨识出来。

1）辨识函数n4sid

状态空间模型表达式

$$
\begin{aligned}
x(t+T_s) &= Ax(t)+Bu(t)+Ke(t)\\
y(t) &= Cx(t)+Du(t)+e(t)
\end{aligned}
$$

2.4 离散状态空间模型

2）调用格式

m = n4sid(data,order)

参数说明

m：以**IDSS**格式表征的辨识结果（模型参数）

data: 系统输入输出数据

order: 模型阶数

2.4 离散状态空间模型

3）数据结构

函数 n4sid采用的数据格式具有特殊性，是一个具有系统输入输出数据的iddata数据类型，需要用函数iddata进行数据封包。

```
pump1 = iddata([y11 y12 y13],[u1,zeros(size(y11))],Ts);
pump2 = iddata([y21 y22 y23],[zeros(size(y21)),u2],Ts);
pump = merge(pump1,pump2);
set(pump,’inputname’,’Q1’,’Q2’,’outputname’,’L1’,’L2’,’L3’,
’inputunit’,’ml/s’,’ml/s’,’outputunit’,’cm’,’cm’,’cm’);
```

内容回顾

预测控制中常用的模型：

1）阶跃响应模型----**Dynamic Matrix Control (DMC)**

2）脉冲响应模型----**Model Algorithmic Control (MAC)**

3）**CARIMA**模型----**Generalized Predictive Control (GPC)**

4）状态空间模型---- **Model Predictive Control (MPC)**

下面讨论如何基于模型预测系统未来的输出

内容回顾

预测控制：

$$\text{Find} \quad \min_{u(*)} J \qquad \{u(k), u(k+1), \cdots u(k+T_c)\}$$

$$\text{with} \quad J = \sum_{i=0}^{T_p} \| y(k+i) - r(k+i) \|_Q^2 + \sum_{i=0}^{T_c} \| u(k+i) \|_R^2$$

$$\text{s.t.} \quad y(k+i+1) = f(y(k+i), u(k+i))$$

$$y(k+i) \in Y \quad i = 0, 1, 2, \cdots T_p$$

$$u(k+i) \in U \quad i = 0, 1, 2, \cdots T_c$$

状态估计

多步前向预测方程

第2章 模型与预测

2.5 状态估计

考虑稳定系统的阶跃响应模型

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

状态向量

$$Y(k) = \begin{cases} [y(k), y(k+1), \cdots, y(k+N-2), y(k+N-1)]^T \\ for \quad \Delta u(k) = \Delta u(k+1) = \Delta u(k+2) = \cdots = 0 \end{cases}$$

状态向量中只有***y*(*k*)**是可测量的。

2.5 状态估计

能不能直接用模型的计算值？

由于

1）扰动

2）模型失配

通常情况下，模型计算值不等于系统实际输出，若不及时对模型计算结果进行校正，进一步的优化就会建立在虚假信息的基础上，如何处理？

2.5 状态估计

2.5.1 直接校正

考虑稳定系统阶跃响应模型

$$Y(k) = M_{ss}Y(k-1) + S\Delta u(k-1)$$
$$y(k) = CY(k)$$

用 $y(k|k-1)$ 表示在**k－1**时刻基于模型对**k**时刻系统输出的计算值

用$\bar{y}(k)$表示**k**时刻输出的测量值

在**k**时刻获得当前时刻的模型计算误差$\bar{y}(k) - y(k|k-1)$

2.5 状态估计

直接校正的思想：

在***k***时刻获得了当前的模型计算误差 $\bar{y}(k)-y(k\mid k-1)$ 后，用***k***时刻的模型计算误差校正***k*+1**时刻及其之后的模型计算值。

2.5 状态估计

k时刻的模型计算误差$\bar{y}(k)-y(k|k-1)$

用$\widehat{y}(*)$表示经过校正的模型计算值，则

$$\widehat{y}(k)=?$$

$$\widehat{y}(k+1)=?$$

$$\vdots$$

$$\widehat{y}(k+N-1)=?$$

校正方程：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k) \\ \hat{y}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N-1) \end{bmatrix}}_{\hat{Y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} y(k|k-1) \\ y(k+1|k-1) \\ \vdots \\ y(k+N-1|k-1) \end{bmatrix}}_{Y(k|k-1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{K_I} \left(\bar{y}(k) - y(k|k-1) \right)$$

其中 $\hat{y}(*)$为经过校正的模型计算值。

2.5 状态估计

整理后：

$$\hat{Y}(k) = Y(k|k-1) + K_I\left(\bar{y}(k) - y(k|k-1)\right)$$

其中

$$K_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N\times 1}^T$$

$$Y(k|k-1) = M_{ss}\hat{Y}(k-1) + S\Delta u(k-1)$$

$$y(k|k-1) = CY(k|k-1)$$

2.5 状态估计

稳定系统阶跃响应模型的直接校正方程：

$$\boxed{\widehat{Y}(k)=M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+S\Delta u(k-1)+K_I\left(\bar{y}(k)-y(k|k-1)\right)}$$

$$=M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+S\Delta u(k-1)$$

$$+K_I\left(\bar{y}(k)-C\left(M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+S\Delta u(k-1)\right)\right)$$

$$=(I-K_IC)M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+K_I\bar{y}(k)+(I-K_IC)S\Delta u(k-1)$$

其中 $K_I=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{N\times 1}^T$

典型的状态观测器方程，增益为K_I
可以证明观测器是渐进稳定的

2.5.2 状态观测器

考虑稳定系统的阶跃响应模型

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S\Delta u(k-1)$$

$$y(k)=CY(k)$$

设计状态观测器

$$\hat{Y}(k)=M_{ss}\hat{Y}(k-1)+S\Delta u(k-1)+K_F\left(\bar{y}(k)-C\hat{Y}(k-1)\right)$$

需要解决两个问题，即 $K_F\begin{cases}\text{是否存在？}\\ \text{如何选取？}\end{cases}$

2.5 状态估计

1) K_F 的存在性

$$Q=\begin{bmatrix} C \\ CM_{ss} \\ CM_{ss}^{2} \\ \vdots \\ CM_{ss}^{N-1} \end{bmatrix} \Rightarrow Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$CM_{ss}^{i-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times N} \end{array},\ for\ i=1,2,\cdots,N.$$

2.5 状态估计

1) K_F 的存在性

由于 $$\text{rank}Q = \text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CM_{ss} \\ CM_{ss}^{2} \\ \vdots \\ CM_{ss}^{N-1} \end{bmatrix} = \text{rank}I_{N\times N} = N$$

因此 K_F 是存在的。

脉冲响应模型也有类似的结论

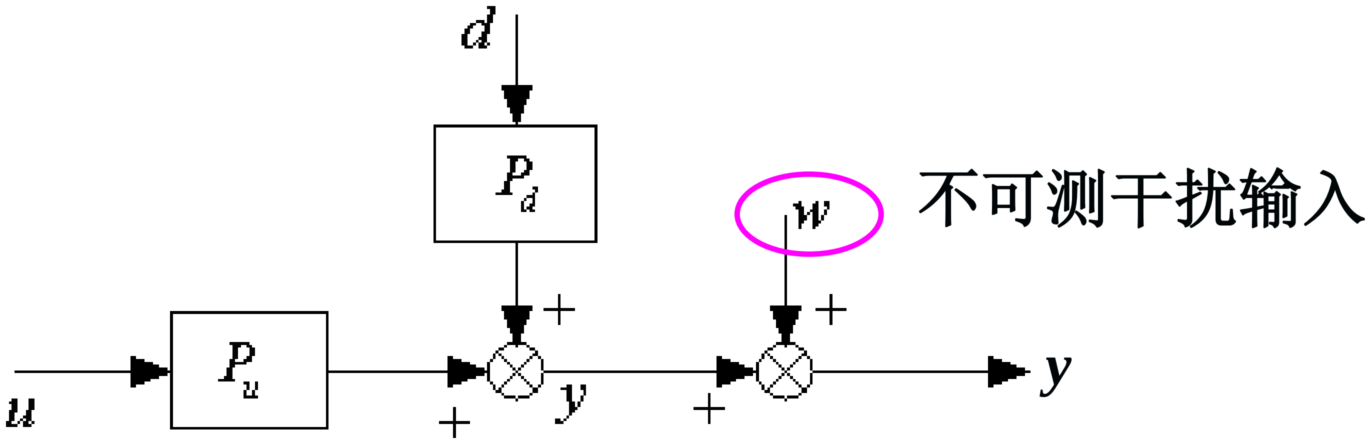
2）K_F 的选取-----极点配置等

可以验证，积分系统的阶跃响应模型也是可观的。

在观测器方程中，用 M_{sI} 代替 M_{ss}。

2.5 状态估计

2.5.3 控制输入与可测干扰输入



控制输入u对输出y的影响（单位阶跃响应系数）：

$$S_u = \begin{bmatrix} s_1^u & s_2^u & \cdots & s_N^u \end{bmatrix}^T$$

可测干扰输入d 对输出y的影响（单位阶跃响应系数）：

$$S_d = \begin{bmatrix} s_1^d & s_2^d & \cdots & s_N^d \end{bmatrix}^T$$

2.5 状态估计

含有可测干扰输入的阶跃响应模型

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S_u\Delta u(k-1)+S_d\Delta d(k-1)$$

$$y(k)=CY(k)$$

k*－1**时刻基于模型计算k***时刻的状态

$$Y(k|k-1)=M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+S_u\Delta u(k-1)+S_d\Delta d(k-1)$$

对计算结果的校正：$\widehat{Y}(k)=Y(k|k-1)+K_I\left(\bar{y}(k)-y(k|k-1)\right)$

也可以用状态观测器方法来估计：

$$\widehat{Y}(k)=M_{ss}\widehat{Y}(k-1)+S_u\Delta u(k-1)+S_d\Delta d(k-1)+K_F\left(\bar{y}(k)-C\widehat{Y}(k-1)\right)$$

第2章 模型与预测

2.1 阶跃响应模型

2.2 脉冲响应模型

2.3 CARIMA模型

2.4 离散状态空间模型

2.5 状态估计

2.6 多步预测

2.7 数据驱动建模与预测

2.6 多步预测

含有可测干扰输入稳定系统的阶跃响应模型

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S_u\Delta u(k-1)+S_d\Delta d(k-1)$$

$$y(k)=CY(k)$$

***k*时刻利用最新测量信息对模型计算值进行校正**

$$\widehat{Y}(k)=Y(k|k-1)+K_I\left(\bar{y}(k)-y(k|k-1)\right)$$

利用测量信息，解决了基于模型的状态递推问题。

2.6 多步预测

预测控制：

Find $\min\limits_{u(\cdot)} J \qquad \{u(k), u(k+1), \cdots u(k+T_c)\}$

with $J = \sum_{i=0}^{T_p} \left\| y(k+i) - r(k+i) \right\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{T_c} \left\| u(k+i) \right\|_R^2$

s.t.

$$y(k+i+1) = f(y(k+i), u(k+i))$$

$$y(k+i) \in Y \qquad i = 0,1,2,\cdots T_p$$

$$u(k+i) \in U \qquad i = 0,1,2,\cdots T_c$$

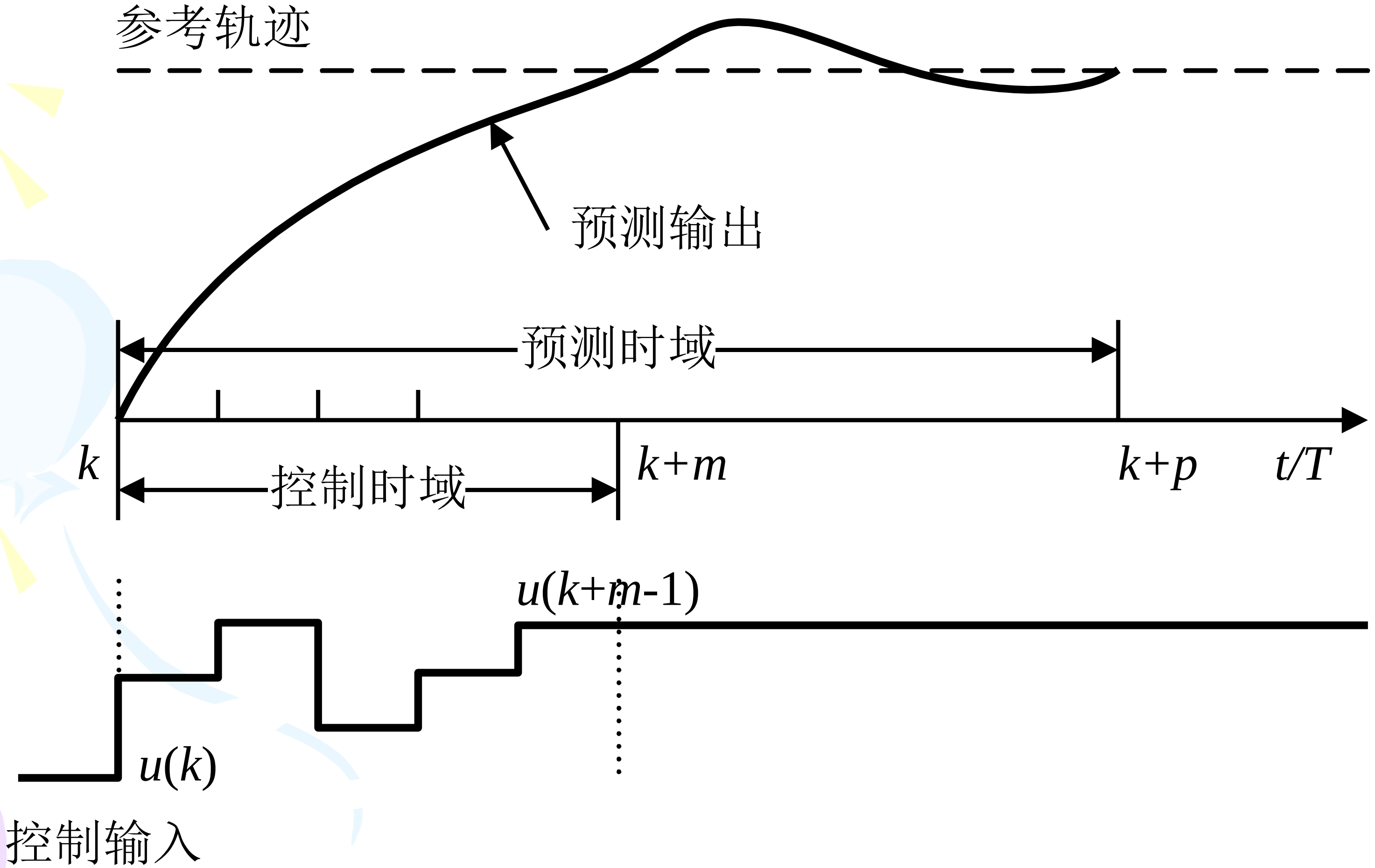
需要获得对未来输出的预测（多步前向预测）。

2.6 多步预测

在k时刻基于模型做多步预测，假设

1）预测时域为p，控制时域为m，$m \le p$;

2.6 多步预测



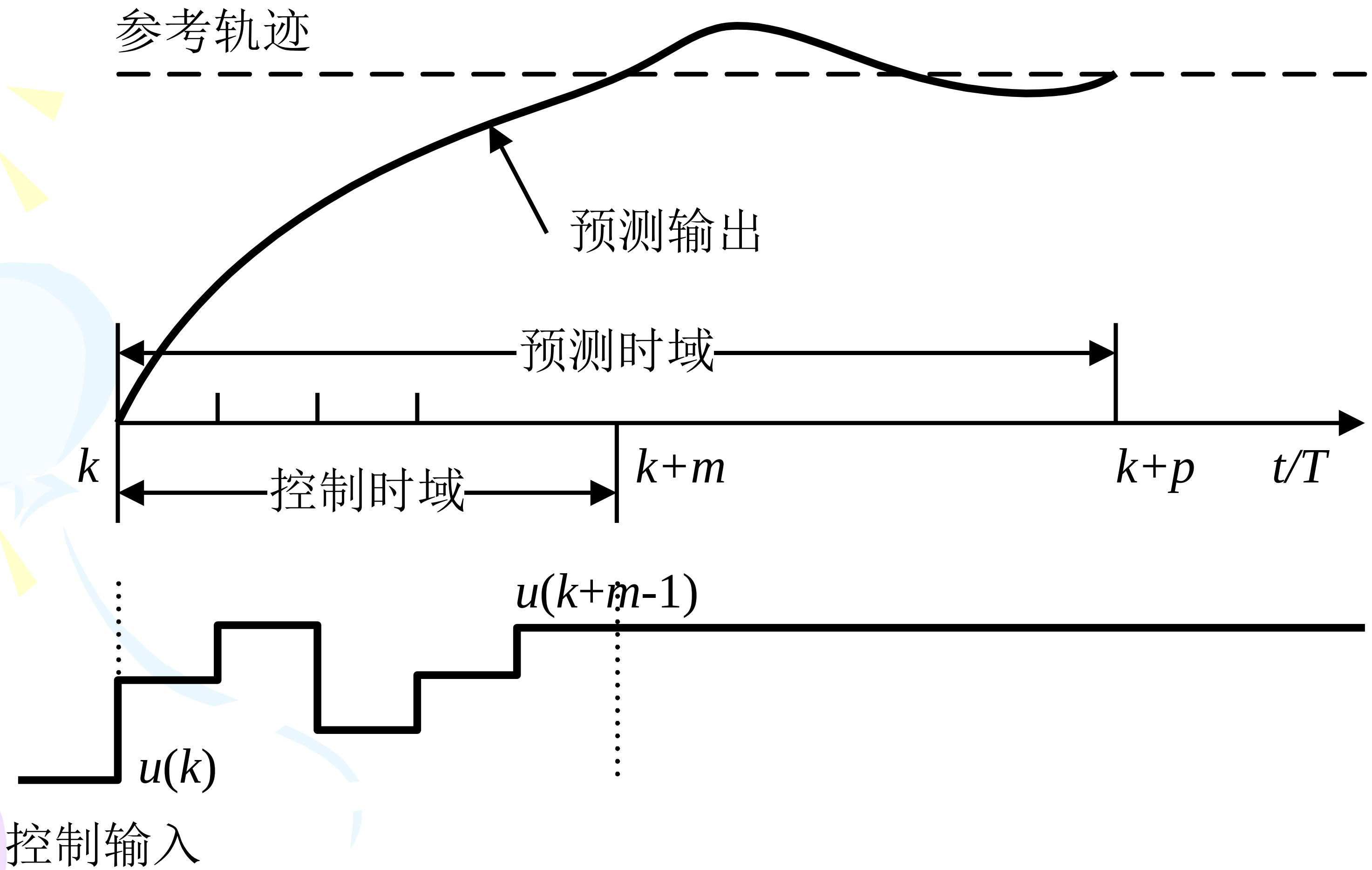
2.6 多步预测

在***k***时刻基于模型做多步预测，假设

1）预测时域为***p***，控制时域为***m***，$m \le p$；

2）$\Delta u(k+i)=0, i \ge m$，即控制时域之外，控制输入保持不变；

2.6 多步预测



2.6 多步预测

在k时刻基于模型做多步预测，假设

1）预测时域为p，控制时域为m，$m \le p$；

2）$\Delta u(k+i)=0, i \ge m$，即控制时域之外，控制输入保持不变；

3）$\Delta d(k+i)=0, i \ge 1$，即可测干扰输入在未来时刻保持不变。

考虑一般情况：预测时域 $p \le N$

2.6 多步预测

考虑含有可测干扰输入的阶跃响应模型

$$Y(k)=M_{ss}Y(k-1)+S_u\Delta u(k-1)+S_d\Delta d(k-1)$$

$$y(k)=CY(k)$$

***k*时刻利用最新测量信息对模型计算值进行校正**

$$\widehat{Y}(k)=Y(k\,|\,k-1)+K_I\left(\bar{y}(k)-y(k\,|\,k-1)\right)$$

递推获得*k*+1时刻模型计算值：

$$\boxed{Y(k+1\,|\,k)=M_{ss}\widehat{Y}(k)+S_u\Delta u(k)+S_d\Delta d(k)}$$

2.6 多步预测

k时刻预测系统未来输出的表达式

$$y(k+1|k)=CM_{ss}\overset{\frown}{Y}(k)+CS_u\Delta u(k)+CS_d\Delta d(k)$$

$$y(k+2|k)=CM_{ss}^{2}\overset{\frown}{Y}(k)+CM_{ss}S_u\Delta u(k)+CS_u\Delta u(k+1)+CM_{ss}S_d\Delta d(k)$$

$$\vdots$$

$$y(k+m|k)=CM_{ss}^{m}\overset{\frown}{Y}(k)+\sum_{i=1}^{m}CM_{ss}^{m-i}S_u\Delta u(k+i-1)+CM_{ss}^{m-1}S_d\Delta d(k)$$

$$y(k+m+1|k)=CM_{ss}^{m+1}\overset{\frown}{Y}(k)+\sum_{i=1}^{m}CM_{ss}^{m+1-i}S_u\Delta u(k+i-1)+CM_{ss}^{m}S_d\Delta d(k)$$

$$\vdots$$

$$y(k+p|k)=CM_{ss}^{p}\overset{\frown}{Y}(k)+\sum_{i=1}^{m}CM_{ss}^{p-i}S_u\Delta u(k+i-1)+CM_{ss}^{p-1}S_d\Delta d(k)$$

2.6 多步预测

⇒ ***p*步前向预测方程**

$$Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

其中

$$Y_p(k+1|k)=\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+p|k) \end{bmatrix} \qquad \Delta U_m(k)=\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

2.6 多步预测

⇒ ***p*步前向预测方程**

$$Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{M}_{ss}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&&0\\&&&&&&&\cdots&\\0&0&0&\cdots&0&1&0&&0\end{bmatrix}_{p\times N}$$

$$=\begin{bmatrix}0&I_{p\times p}&0\end{bmatrix}_{p\times N}\quad\Leftarrow\quad p<N$$

2.6 多步预测

⇒ ***p*步前向预测方程**

$$Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{M}_{ss}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1\\ & & & & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1\end{bmatrix}_{p\times N}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & I_{(p\text{-}1)\times(p\text{-}1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{p\times N}$$

⇐ $p=N$

2.6 多步预测

⇒ **p步前向预测方程**

$$Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{ss}\widehat{Y}(k)+\bar{S}_u\Delta U_m(k)+\bar{S}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{S}_u=\begin{bmatrix} s_1^u & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s_2^u & s_1^u & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_m^u & s_{m-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & s_1^u \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_p^u & s_{p-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & s_{p-m+1}^u \end{bmatrix}_{p\times m} \qquad \bar{S}_d=\begin{bmatrix} s_1^d \\ s_2^d \\ \vdots \\ s_p^d \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

关于 $\bar{S}_u$ 上三角**0**元素的物理解释：

$\Delta u(k+1)$ 影响 $y(k+2),\cdots$，但不影响 $y(k+1)$

2.6 多步预测

对于含有可测干扰输入的脉冲响应模型

$$\Delta Y(k) = M_{hs}\Delta Y(k-1) + H_u \Delta u(k-1) + H_d \Delta d(k-1)$$

$$\Delta y(k) = C\Delta Y(k)$$

2.6 多步预测

***p*步前向预测方程**

$$\Delta Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{hs}\Delta\widehat{Y}(k)+\bar{H}_u\Delta U_m(k)+\bar{H}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\Delta Y_p(k+1|k)=\begin{bmatrix}\Delta y(k+1|k)\\ \Delta y(k+2|k)\\ \vdots\\ \Delta y(k+p|k)\end{bmatrix}\qquad \Delta U_m(k)=\begin{bmatrix}\Delta u(k)\\ \Delta u(k+1)\\ \vdots\\ \Delta u(k+m-1)\end{bmatrix}$$

2.6 多步预测

*p*步前向预测方程

$$\Delta Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{hs}\Delta\widehat{Y}(k)+\bar{H}_u\Delta U_m(k)+\bar{H}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{M}_{hs}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{p\times N}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & I_{p\times p} & 0 \end{bmatrix}_{p\times N} \Leftarrow \quad p<N$$

2.6 多步预测

*p*步前向预测方程

$$\Delta Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{hs}\Delta\widehat{Y}(k)+\bar{H}_u\Delta U_m(k)+\bar{H}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{M}_{hs}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&0&&1\\&&&&&&&\cdots&\\0&0&0&\cdots&0&0&0&&0\end{bmatrix}_{p\times N}$$

$$=\begin{bmatrix}0&I_{(p\text{-}1)\times(p\text{-}1)}\\0&0\end{bmatrix}_{p\times N}\qquad \Leftarrow \qquad p=N$$

2.6 多步预测

*p*步前向预测方程

$$\Delta Y_p(k+1|k)=\bar{M}_{hs}\Delta\widehat{Y}(k)+\bar{H}_u\Delta U_m(k)+\bar{H}_d\Delta d(k)$$

其中

$$\bar{H}_u=\begin{bmatrix} h_1^u & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2^u & h_1^u & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ h_m^u & h_{m-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & h_1^u \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ h_p^u & h_{p-1}^u & \cdots & \cdots & \cdots & h_{p-m+1}^u \end{bmatrix}_{p\times m} \qquad \bar{H}_d=\begin{bmatrix} h_1^d \\ h_2^d \\ \vdots \\ h_p^d \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

关于$\bar{H}_u$上三角**0**元素的物理解释：

$\Delta u(k+1)$ 影响 $\Delta y(k+2),\cdots$，但不影响 $\Delta y(k+1)$

第2章 模型与预测

2.7 数据驱动建模与预测

2.7.1 数据驱动建模

数据驱动建模

- 随着科学技术、特别是信息科学技术的快速发展，化工、冶金、机械、电子、电力、交通运输和物流等行业生产工艺、生产设备和生产过程越来越复杂。传统依据物理化学机理对生产过程和设备建立精确数学模型已变得越来越困难。
- 上述行业每天都在产生并存储着大量的生产、设备和过程数据, 这些数据隐含着工艺变动和设备运行等信息。如何有效利用大量的离线、在线数据和知识，建立系统模型？

2.7 数据驱动建模与预测

数据驱动建模

以系统的输入输出数据作为建模的主要依据，分析系统变量间的相互关系, 其实质是一种“黑箱”建模技术。

数据驱动建模包含以下三种情形：

◆机理模型结构已知的前提下的参数估计；

◆简化机理模型，过于复杂的机理模型往往对后续的控制和优化过程都会带来非常大的求解负担，常常用数据驱动方法进行降维；

◆机理未知，即结构和参数都未知时直接构造输入输出的映射关系。

2.7 数据驱动建模与预测

数据驱动建模的基本思路

◆数据初始化

- 分析用于建模的数据特征和结构，根据系统复杂度确定采用的模型（回归模型、神经网络模型等）及辨识方法，也可采用多种方法同时建模，在最后模型评估中根据模型的辨识效果进行筛选。

◆数据选择和稳态识别

- 需要在数据中选择用于辨识和测试验证所用的数据，一般情况下是从数据中等概率选取，3/4作为辨识数据，1/4作为测试数据；
- 通过数据发现模型的稳态。

2.7 数据驱动建模与预测

数据驱动建模的基本思路

◆数据预处理

- 数据预处理，使其符合所选辨识方法的要求。例如归一化处理、去除毛刺、特征数据选取等，都是为了达到较好的辨识效果。

◆模型辨识、评价和选择

- 模型辨识后，采用测试数据对模型进行验证，得到输出结果和目标数据进行对比，根据预先设定的规则（例如方差）进行评判，并选择最适合的模型。

数据驱动建模的常用方法：基于子空间方法的系统辨识、回归分析、人工神经网络、模糊数学、机器学习等

2.7 数据驱动建模与预测

基于子空间方法的系统辨识：

一种新的状态空间模型的辨识方法，直接利用系统输入输出数据估计得到系统状态空间模型。

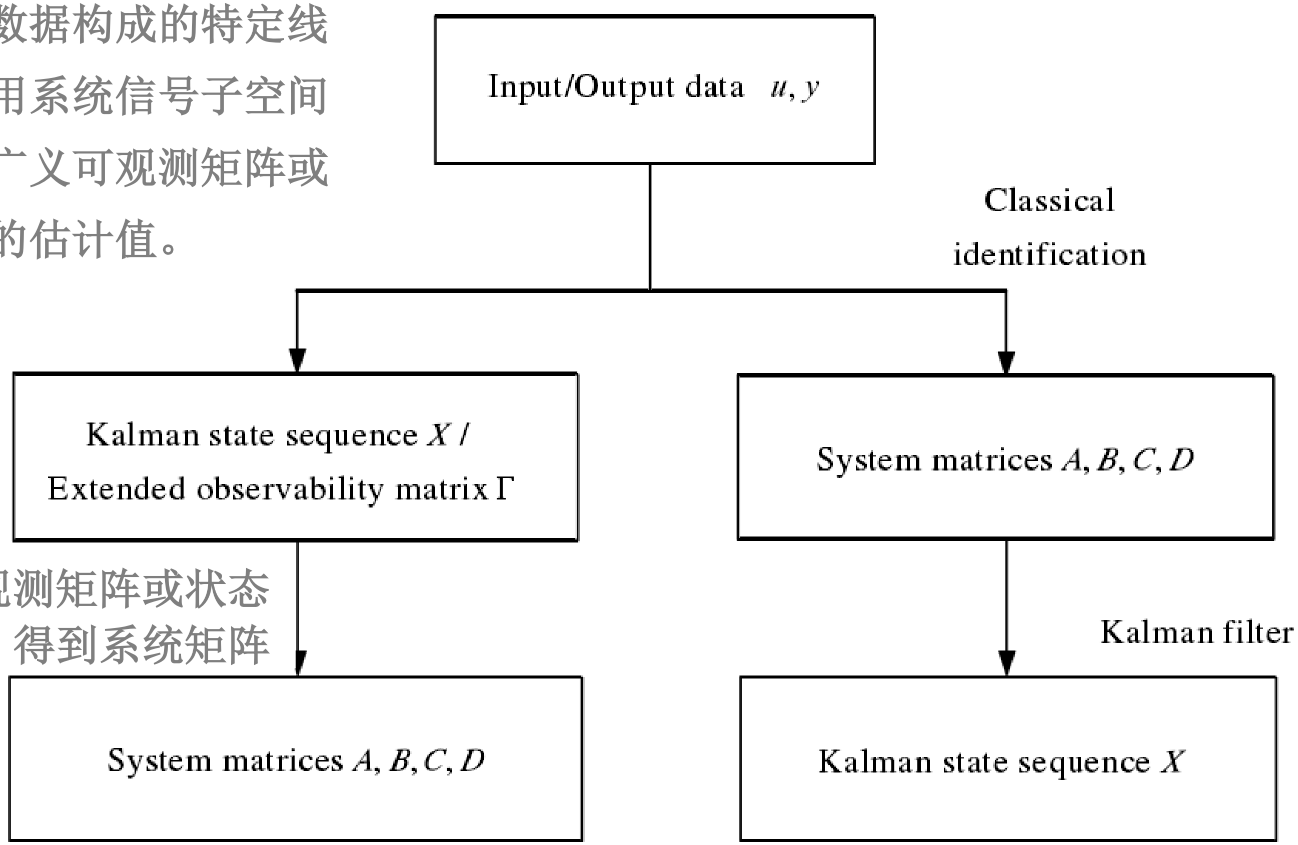
常用线性时不变系统子空间辨识方法：

- **N4SID（Numerical algorithms for Subspace State Space System IDentification）**
- **CVA（ Canonical Variate Analysis ）**
- **MOESP（Multivariable Output Error State Space）**
- **IV-4SID（Instrumental Variable for Subspace State-Space System IDentification）**

2.7 数据驱动建模与预测

子空间辨识的基本步骤：

分解由采样数据构成的特定线性空间，利用系统信号子空间得到系统的广义可观测矩阵或者状态序列的估计值。



利用广义可观测矩阵或状态序列估计值，得到系统矩阵

杨华. 基于子空间方法的系统辨识及预测控制设计, 上海交通大学博士学位论文, 2007.

2.7.2 基于子空间方法的数据驱动建模与预测

基于子空间方法的数据驱动建模与预测

直接利用历史数据（输入输出数据）和未来输入数据预测系统未来的输出，避免了建立系统模型这一繁杂过程。

与广义预测控制(GPC)方法的对比

◆目标函数相同，预测系统未来输出的方法不同

◆**GPC**：假设系统可以用**CARIMA**模型描述，需要预先确定模型的阶次和结构，通常需要求解丢番图方程获得系统的预测矩阵

◆基于子空间方法的预测控制：不需要预先设定系统模型的阶次和结构，且不需要求解丢番图方程

2.7 数据驱动建模与预测

考虑线性时不变系统（状态空间模型表达式）

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + K^f e_k,$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + e_k,$$

在系统矩阵未知的情况下，如何直接利用系统的输入输出数据和未来输入数据预测系统未来的输出？

2.7 数据驱动建模与预测

针对线性时不变系统

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + K^f e_k,$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + e_k,$$

利用过去和未来的输入输出数据构造**Hankel**矩阵

$$U_p = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \end{bmatrix}; \quad U_f = \begin{bmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \dots & u_{i+j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \dots & u_{2i+j-1} \end{bmatrix}$$

Y_p（**p: past**）和 Y_f（**f: future**）的构造方法同上。

其中u_k，y_k $k \in \{1, 2, \dots, 2i+j-1)\}$为可利用的输入输出数据

2.7 数据驱动建模与预测

定义系统状态

$$X_p = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{j-1}];$$
$$X_f = [x_i \quad x_{i+1} \quad \dots \quad x_{i+j-1}].$$

则通过状态空间方程的递推，可以获得

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i U_f + H_i^s E_f$$

其中 $\Gamma_i = [C^{\mathrm{T}} \quad (CA)^{\mathrm{T}} \quad \dots \quad (CA^{i-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

$$H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{bmatrix}; \quad H_i^s = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ CK^f & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}K^f & CA^{i-3}K^f & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2.7 数据驱动建模与预测

根据

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i U_f + H_i^s E_f$$

可得未来输出的预测表达式

$$\begin{aligned}\hat{Y}_f &= \Gamma_i X_f + H_i U_f \\ &= L_w W_p + L_u U_f\end{aligned}$$

其中$W_p = \begin{bmatrix} Y_p \\ U_p \end{bmatrix}$，$L_w$和$L_u$可通过求解下面的最小二乘问题获得

$$\min_{L_w, L_u} \left\| Y_f - (L_w \quad L_u) \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} \right\|_F^2$$

2.7 数据驱动建模与预测

子空间预测模型辨识问题可描述如下：

给定过去的输入输出W_p和未来的输入U_f，寻找未来输出Y_f的最优预测值

$$\hat{Y}_f = L_w W_p + L_u U_f$$

实现了直接利用历史数据和未来输入预测未来输出的目的。

Kadali K., Huang B., Rossiter A., A data drive subspace approach to predictive controller design, Control Engineering Practice, 2003 (11): 261-278.

本章小结

至此，我们已经针对：

1）阶跃响应模型

2）脉冲响应模型

3）CARIMA模型

4）状态空间模型

介绍了：建模＋校正＋预测　　数据驱动子空间方法

后面章节重点讲解：控制器设计与分析