4-25

（1）

取哈密顿函数如下

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 x_1 - 2\lambda_2 x_2 + \lambda_2 u$$

容易证明，系统是可控且正常的。

由极小值原理，可得最优控制如下所示

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, \lambda_2{}^*(t) < 0 \\ -1, \lambda_2{}^*(t) > 0 \end{cases}$$

所以如果时间最优调节器u^*是存在的，则必然满足$|u^*(t)| = 1$

（2）

λ_1，λ_2受协态方程的约束如下

$$\dot{\lambda_1}^* = -\frac{\partial H}{\partial x_1{}^*} = 2\lambda_2{}^*$$

$$\dot{\lambda_2}^* = -\frac{\partial H}{\partial x_2{}^*} = -\lambda_1{}^* + 2\lambda_2{}^*$$

由 Matlab 可解得

$$\begin{cases} \lambda_1{}^* = e^t(c_1 cost - c_1 sint + 2c_2 sint) \\ \lambda_2{}^* = e^t(c_2 cost - c_1 sint + c_2 sint) \end{cases}$$

当取$c_1 = c_2 = 1$时，画出$\lambda_2{}^*$的图像如图 1 所示

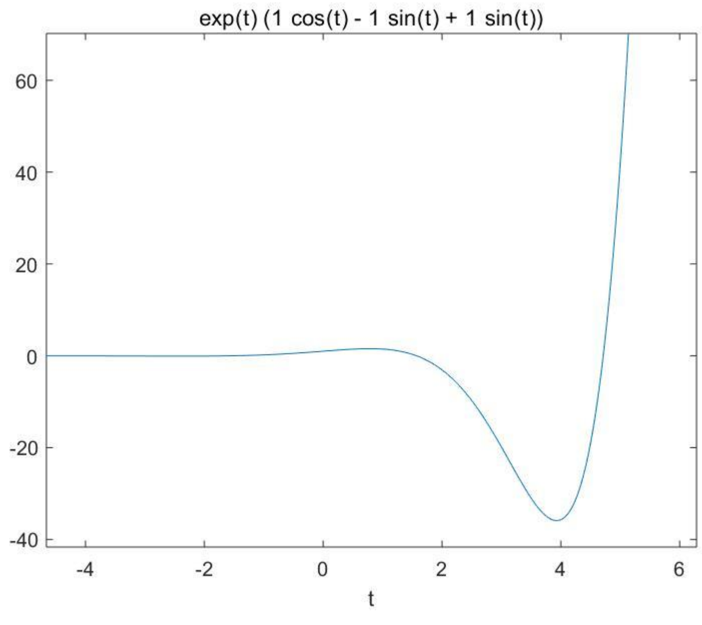

图 1

由图可知此时控制序列为{-1,1,-1}，切换次数为 2 次。但是这并不和定理 4-6 提出的切换次数定理相矛盾。考察系统的系统矩阵，可得其特征值为$-1 \pm i$，显然其特征值不是实数，不满足定理 4-6 的使用条件，也就不存在矛盾一说。

4-22

系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

显然系统是正常的。

构造新的状态变量$\dot{x_3} = (x_2+2)^2||(-x_2-2)+(2-x_2)^2||(x_2-2)$，其中$||(\cdot)$表示单位海维赛德阶跃函数。则构造哈密顿函数如下

$$\mathrm{H} = 1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u+\lambda_3((x_2+2)^2||(-x_2-2)+(2-x_2)^2||(x_2-2))$$

协态方程满足

$$\lambda_1{}^* = -\frac{\partial H}{\partial x_1{}^*} = 0$$

$$\lambda_2{}^* = -\frac{\partial H}{\partial x_2{}^*} = -\lambda_1{}^*$$

$$\lambda_3{}^* = 0$$

由于系统是正常的(且奇异的情况将在第八章学)，所以系统的最优控制为

$$u^* = \begin{cases} 1, \lambda_2{}^* < 0 \\ -1, \lambda_2{}^* > 0 \end{cases}$$

下面确定系统的切换条件。由系统的状态方程，可以解得系统随时间的变化如下。

当控制量$u^* = 1$时

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2 = t + x_{20} \end{cases}$$

消掉时间 t, 得系统状态的轨迹方程为

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2{}^2 - \frac{1}{2}x_{20}{}^2 + x_{10}$$

同理，当控制量$u^* = -1$时，解得系统的相轨迹方程为

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2{}^2 + \frac{1}{2}x_{20}{}^2 + x_{10}$$

则根据控制序列的不同可以将平面内的状态分成 6 个区域，如图 2 所示。需要注意的需要考虑到状态$|x_2| \le 2$的限制。

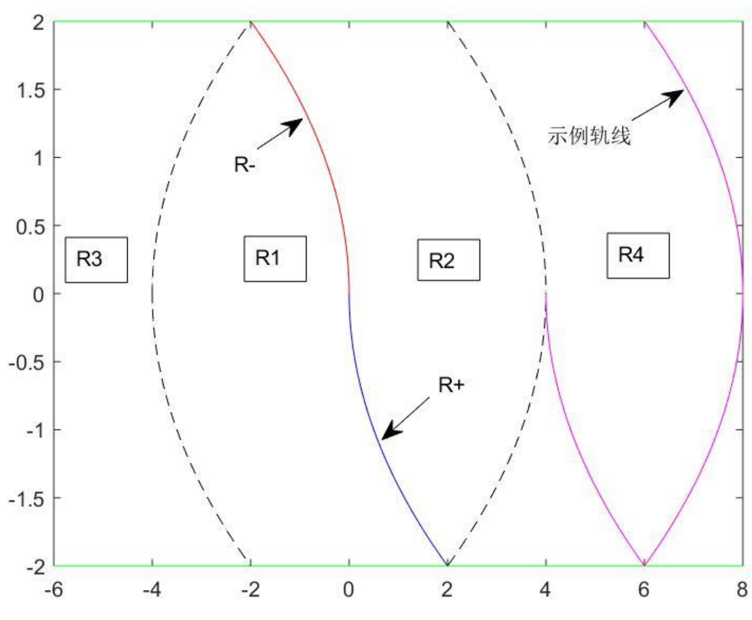

图 2

（1）如果初始状态在区域R_+内，则采用控制序列为$u^* =\{1\}$；

（2）如果初始状态在区域R_-内，则采用控制序列为$u^* = \{-1\}$；

（3）如果初始状态在区域R_1内，则采用控制序列为$u^* = \{1,-1\}$，当状态轨线和R_-相交时为切换时刻；

（4）如果初始状态在区域R_2内，则采用控制序列为$u^* = \{-1,1\}$，当状态轨线和R_+相交时为切换时刻；

（5）如果初始状态在区域R_4内，则采用的控制序列为$u^* = \{-1,1,-1,1,\dots,-1,1\}$。初始状态在$R_4$内的轨线，首先采用控制$u^* = -1$将其控制到$x_2 = -2$处，之后需要采用控制$u^* = 1$将其控制到$x_2 = 0$处，之后反复使用控制序列$\{-1,1\}$使其接近区域$R_2$，当系统轨线进入到$R_2$时，采用$R_2$区域的控制策略$\{-1,1\}$即可将系统控制到零点, 同时保证切换次数最少。

（6）如果初始状态在区域R_3内，则采用的控制序列为$u^* = \{1,-1,1,-1,\dots,1,-1\}$。

具体的控制量切换策略和情况（5）类似。