3-4 (8)

解：令 $g(x)=\dot{x}^2+12tx$

由欧拉方程有 $\ddot{x}^*=6t$

$\therefore x(t)=t^3+a_1t+a_2$

又 $\because x(0)=0,\ x(1)=1$

$\therefore$ 解得 $a_1=a_2=0$

$\therefore$ 极值轨线为 $x^*(t)=t^3$

$\therefore J(x^*)=\int_0^1 [(3t^2)^2+12t^4]dt=\frac{21}{5}$

$\because \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2}=2>0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial \dot{x}}=0$

$\therefore$ 当 $x^*(t)=t^3$ 时，$J(x)$ 有极小值 $\frac{21}{5}$

3-19

解：$f(\cdot)=u(t)$，$L(\cdot)=u^2(t)+1$，$\varphi(\cdot)=ax^2(t_f)$

构造哈密顿函数 $H=u^2(t)+1+\lambda(t)u(t)$

协态方程 $\dot{\lambda}^*(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=0$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u}=2u(t)+\lambda(t)=0$

则有 $\lambda^*(t)=c$，$u^*(t)=-\frac{1}{2}c$

由状态方程及 $x(0)=1$，有 $x^*=-\frac{1}{2}ct+1$

由 $\lambda^*(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$ 有 $c=-act_f+2a$

易知 $c\neq0$（若 $c=0$，则 $a=0$，矛盾），故 $t_f=\frac{2a-c}{ac}$ ①

由 $H(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}$，有 $1-\frac{1}{4}c^2=ac(-\frac{1}{2}ct_f+1)$ ②

由①②，解得 $c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

由于 $t_f=\frac{2a-c}{ac}>0$，易证 $c\in(0,2a)$

$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

对应的 $u^*(t)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x^*(t)=-\frac{\sqrt{3}}{3}t+1$