Group6-李元红-课程报告

1 问题描述

卫星最优发射入轨问题：

微分方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=v_x\\ \dot{y}=v_y\\ \dot{v}_x=\dfrac{F}{m}\cos\alpha\\ \dot{v}_y=\dfrac{F}{m}\sin\alpha-g\end{cases}$$

边界条件：

$$\begin{cases}y(t_f)=h=393(km)\\ v_x(t_f)=v_c=7.9(km/s)\\ v_y(t_f)=0\end{cases}$$

性能指标：

$$\min J=t_f$$

（考虑 $F/m=5g$ 简单情形）

设计目标：

1.推导转向角 α 满足的操纵率；

2.采用 Matlab 提供的 bvp4c 主函数完成该问题数值解的求解，并作图给出所有状态变量随时间变化关系。

2 理论推导

取状态变量 $x_1=x, x_2=y, x_3=v_x, x_4=v_y$.

构造哈密顿函数

$$\begin{aligned}H(x,\alpha,\lambda)&=1+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4\\ &=1+\lambda_1 v_x+\lambda_2 v_y+\lambda_3\frac{F}{m}\cos\alpha+\lambda_4\left(\frac{F}{m}\sin\alpha-g\right)\end{aligned} \tag{1}$$

则对应的协态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \\ \dot{\lambda}_3^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x_3} = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_4^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x_4} = -\lambda_2 \end{cases} \tag{2}$$

从而得到

$$\begin{cases} \lambda_1^* = c_1 \\ \lambda_2^* = c_2 \\ \lambda_3^* = -c_1 t + c_3 \\ \lambda_4^* = -c_2 t + c_4 \end{cases} \tag{3}$$

其中c_1、c_2、c_3、c_4 为任意常数。

最优控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha^*} = -\lambda_3 \frac{F}{m} \sin\alpha + \lambda_4 \frac{F}{m} \cos\alpha = 0 \tag{4}$$

从而得到

$$\tan\alpha^* = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \tag{5}$$

对于x_1，x_2，x_3，x_4四个变量来说，x_1的终端时刻自由，状态也是自由的，所以满足

$$x_1^* = x_1(0),\ \lambda_1^*(t_f) = 0$$

因此$c_1 = 0$，即

$$\begin{cases} \lambda_1^* = 0 \\ \lambda_2^* = c_2 \\ \lambda_3^* = c_3 \\ \lambda_4^* = -c_2 t + c_4 \end{cases}$$

此时

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{-c_2 t + c_4}{c_3} = a_1 t + a_2$$

其中$a_1=-\frac{c_2}{c_3}$，$a_2=\frac{c_4}{c_3}$。

其他边界条件如下所示。

$x_1^*(0)=x^*(0)=0$，$x_2^*(0)=y^*(0)=0$，$x_3^*(0)=v_x^*(0)=0$，$x_4^*(0)=v_y^*(0)=0$

$x_2^*(t_f)=y^*(t_f)=h=39300$，$x_3^*(t_f)=v_x^*(t_f)=v_c=7900$，$x_4^*(t_f)=v_y^*(t_f)=0$

令$\tau=\frac{t}{t_f}$，$\tau\in[0,1]$，则有

$$d\tau=\frac{dt}{t_f}$$

所以

$$\begin{cases}\frac{dx}{d\tau}=t_f.v_x\\ \frac{dy}{d\tau}=t_f\cdot v_y\\ \frac{dv_x}{d\tau}=t_f\cdot 5g\cos\left[\arctan\left(a_1t+a_2\right)\right]\\ \frac{dv_y}{d\tau}=t_f\cdot\left\{5g\sin\left[\arctan\left(a_1t+a_2\right)\right]-g\right\}\end{cases}$$

3 Matlab 求解

函数 1：用于表示微分方程。

```
function dxdt=opt_odefunction(t,x,c)
    dxdt=c(1)*[x(3);x(4);5*9.8*cos(atan(c(2)*(t-c(3))));5*9.8*sin(atan(c(2)*(t-c(3))))-9.8];
end
```

函数 2：用于表示边界条件。

```
function res=opt_boundary(X0,X1,~)
    res=[X0(1)-0;X0(2)-0;X0(3)-0;X0(4)-0;X1(2)-393*1000;X1(3)-7.9*1000;X1(4)-0];
end
```

主函数：

```
%%% specify the boundary points
t=linspace(0,1,100);
solinit = bvpinit(t,[0 0 0 0],[100;-1;0.5]);
%%% bvp4c
res=bvp4c(@opt_odefunction,@opt_boundary,solinit);
% get tf
```

```
tf=res.parameters(1);
R=deval(res,t);
time=t*tf;
x=R(1,:);
y=R(2,:);
vx=R(3,:);
vy=R(4,:);
figure(1);
plot(time,x);
title('x_t');
xlabel('t/s');
ylabel('x/m');
grid on;
figure(2);
plot(time,y);
title('y_t');
xlabel('t/s');
ylabel('y/m');
grid on;
figure(3);
plot(time,vx);
title('vx_t');
xlabel('t/s');
ylabel('v_x/(m/s)');
grid on;
figure(4);
plot(time,vy);
title('vy_t');
xlabel('t/s');
ylabel('v_y/(m/s)');
grid on;
figure(5);
plot(time,180/pi*atan(res.parameters(2)*(t-res.parameters(3))));
title('/alpha _t');
xlabel('t/s');
ylabel('/alpha /(Degree)');
grid on;
```

4 运行结果

$$t_f = 216.2063$$

即终端时刻为 216.2063 秒，最优控制为

$$\tan(\alpha^*) = -3.5258t + 2.1703$$

状态变量随时间的变化关系为：

(1) x 方向上的位移随时间的变化关系为

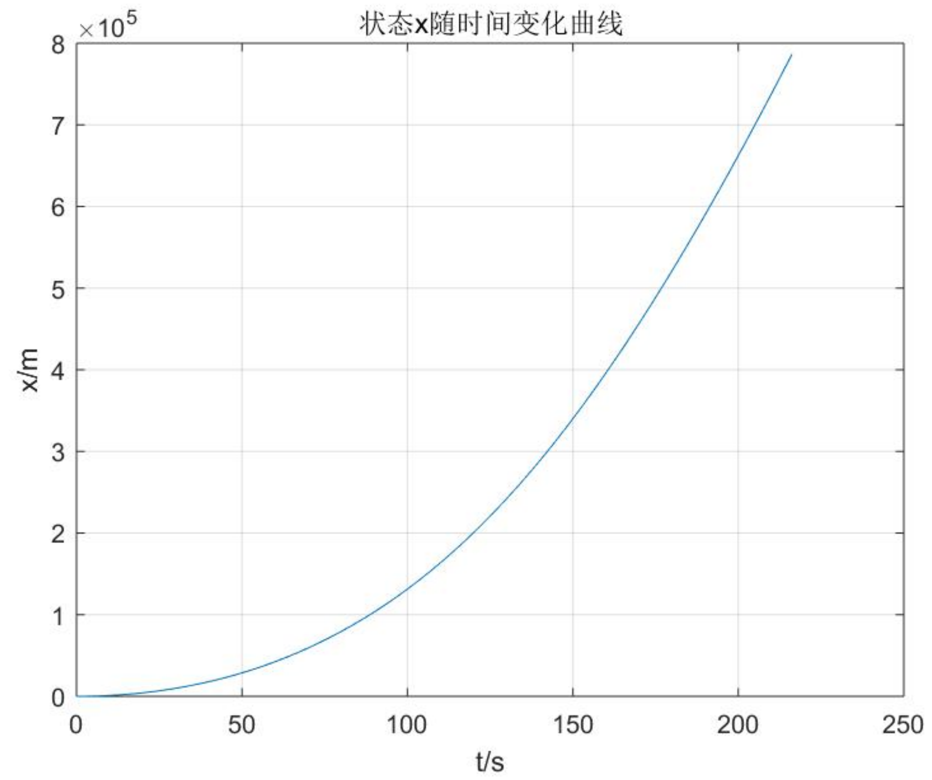

图 1 状态 x 随时间变化曲线

(2) y 方向上的位移随时间的变化关系为

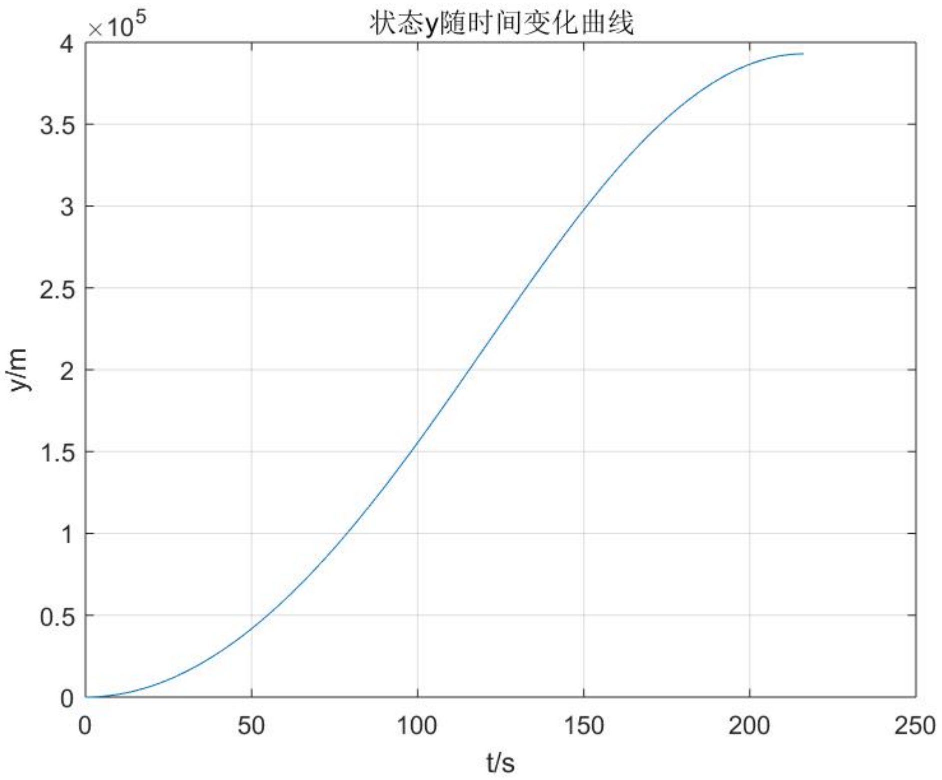

图 2 状态 y 随时间变化曲线

(3) x 方向上的速度 v_x 随时间的变化关系为

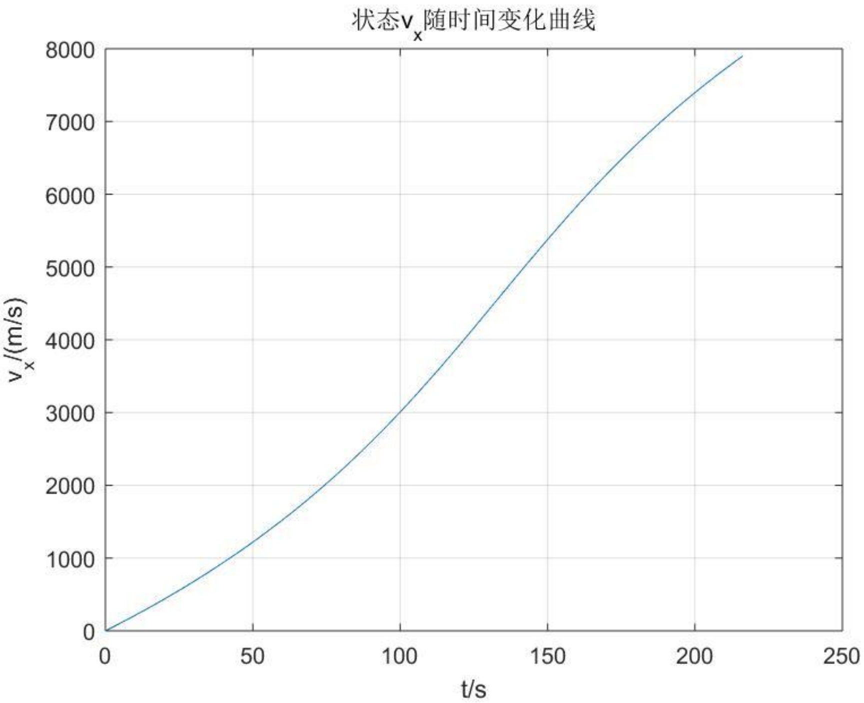

图 3 状态 v_x 随时间变化曲线

(4) y 方向上的速度 v_y 随时间的变化关系为

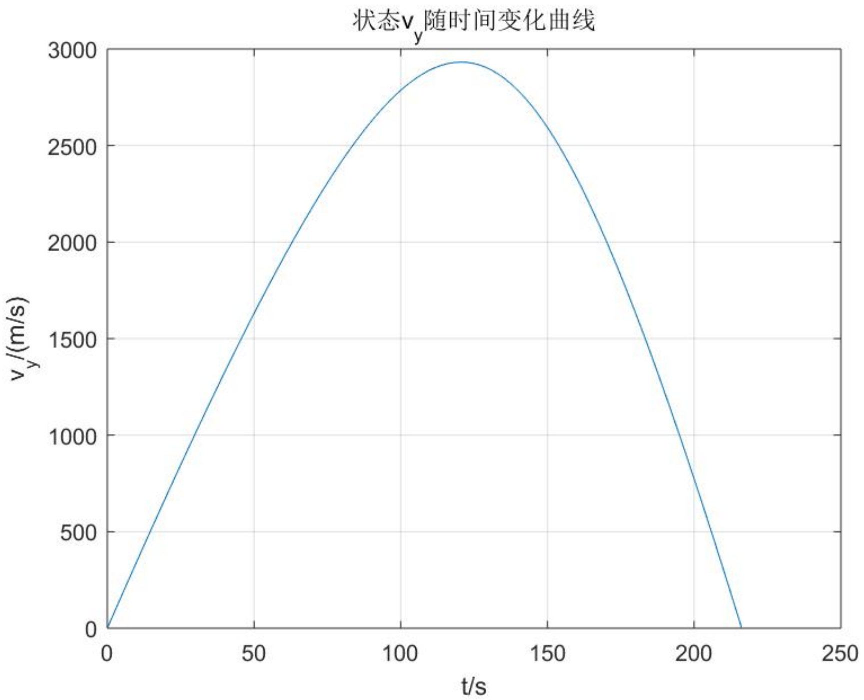

图 4 状态 v_y 随时间变化曲线

(5) 转向角α随时间的变化关系为

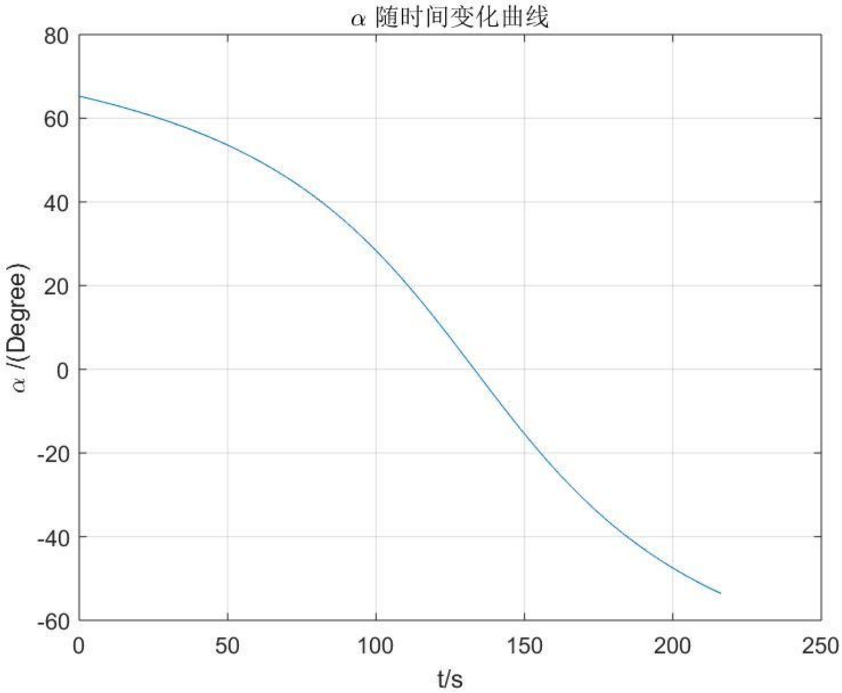

图 5 转向角α随时间变化曲线