7-10

定义新的状态变量为

$$\bar{x} = x - \alpha e^{-t}$$

则有

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} + \alpha e^{-t} = -\bar{x} + u(t)$$

由线性系统理论，变换前后系统都是完全可控的。相应的，性能指标可以重新写为

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (q\,\bar{x}^2 + u^2)\mathrm{d}t$$

这样，原问题即转化为新的线性非自治系统在性能指标下的标准 LQR 有限时间状态调节器问题。下面求其最优控制。列写参数如下$Q = q, R = 1, B = 1, A = -1$.则最优控制

$$u^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\bar{x}(t) = -P\bar{x}(t)$$

其中 $P$ 为满足如下矩阵黎卡提方程的解

$$\dot{P} = P^2 + 2P - q, P\left(t_f\right) = 0$$

由 Matlab 的以下神秘求解代码

$$\mathrm{syms}\ q\ tf$$

$$\mathrm{dsolve}('\mathrm{Dp} = \mathrm{p}^2 + 2 * \mathrm{p} - \mathrm{q}','\ \mathrm{p}(\mathrm{tf}) = 0')$$

可以解得$P$的表达式为

$$P\left(t, t_f\right) = \tanh\left(\mathrm{atanh}\frac{1}{\sqrt{q+1}} + \frac{t_f - \mathrm{t}}{\sqrt{q+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{q+1}} - 1$$

进而原系统的最优控制为

$$u^* = -[\tanh\left(\mathrm{atanh}\frac{1}{\sqrt{q+1}} + \frac{t_f - \mathrm{t}}{\sqrt{q+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{q+1}} - 1](x - \alpha e^{-t})$$